特別講演

デルタ関数型の初期データを持つ非線形シュレーディンガー方程式について

北　直泰 (宮崎大学・教育文化)

概 要

非線形シュレーディンガー方程式の初期データに複数の δ 関数の重ね合わせを与えて解を構成する．ここでは特に δ 関数が１本，２本および３本の場合を考察する．注目していただきたいことは，初期データが２本以上の δ 関数からなるときに「モードの生成」が解の表示に現れることである．この効果は非線形特有のものである．

1 Introduction

この講演では次のような非線形シュレーディンガー方程式の初期値問題を考える．

$$\text{(NLS)} \qquad \begin{cases} i\partial_t u = -\Delta u + \lambda \mathcal{N}(u), \\ u(0,x) = (\delta \text{ 関数の重ね合わせ}), \end{cases}$$

ここで，$(t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ $(n \geq 1)$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial^2/\partial x_j^2$ および未知関数 $u = u(t,x)$ は複素数の値を取る．ゲージ不変性があるベキ型の非線形項 $\mathcal{N}(u)$ には次の条件を仮定する．

$$\mathcal{N}(u) = |u|^{p-1}u \quad (\text{ただし } 1 < p < 1 + 2/n)$$

また，非線形項の係数 λ は任意の複素数である．ここでは初期データとして主に $u(0,x) = \mu_0\delta_0$, $u(0,x) = \mu_0\delta_0 + \mu_1\delta_a$ あるいは $u(0,x) = \mu_{00}\delta_0 + \mu_{10}\delta_a + \mu_{01}\delta_b$ のような具体的なものを与えて解を構成する．ただし，δ_a は $x = a \in \mathbf{R}^n$ に台を持つ Dirac の δ 関数を表す．そして，重ね合わせの係数 μ_k, μ_{jk} $(j,k = 0,1)$ は複素数とする．

非線形シュレーディンガー方程式の物理的な背景としてよく引き合いに出されるのは，$n = 1$ かつ３次の非線形項の場合（つまり，$p = 3$ の場合．しかし，のちに紹介する数学的な事情によりこの講演では残念ながら $p = 3$ の場合を省かねばならない.）である．この場合 (NLS) は光ファイバー内部を伝播する電磁波信号の（包絡線の）様子を記述する方程式と言われている [1]. 非線形係数 λ について，$\mathrm{Re}\lambda$ は非線形 Kerr 効果の度合いを意味しており，$\mathrm{Im}\lambda (< 0)$ は電流によるエネルギー散逸の度合いを意味している．本講演の非線形ベキは物理的な背景から僅かに外れてしまっているが，問題の意図としては，光ファイバーに尖鋭度の高いパルスを入射して，その後のパルス形状の変化を観察しようと試みている．

初期データが１本の δ 関数から成る場合について，Kenig-Ponce-Vega [11] の重要な結果に注目しておこう．彼らは初期データが $u(0,x) = \delta_0$ で非線形ベキが $1 + 2/n \leq p$ の場合に (NLS)

が非適切であることを示した．より詳しく述べると, (NLS) は関数空間 $C([0,T];\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n))$ において解を持たないかあるいは持つとしても複数存在することを示した．彼らの証明の鍵は, ガリレイ変換 $u_N(t,x)=e^{-itN^2}e^{iN\cdot x}u(t,x-2tN)$ による解の不変性である．

非線形シュレーディンガー方程式については通常 $L^2(\mathbf{R})$ や $H^s(\mathbf{R})$ $(s>0)$ の枠組みで解の構成が行われてきた ([3, 4, 5, 7, 8, 9, 13, 14, 16, 17] などを参照)．その理由はこれらの関数空間が保存則やエネルギー評価および Strichartz 型評価 [15, 18] と相性が良いからである．しかし, 我々が扱う δ-関数初期データはもちろんこれらの枠組みから外れるものなので, 前出の参考文献によって編み出された方法論では解の構成ができない．そこで, δ 関数初期データの特性を生かして偏微分方程式 (NLS) を常微分方程式 (ODE) に帰着させるといったアイデアを用いる．このアイデアを用いると特に初期データが１本の δ 関数のときには, 解を陽的に構成することができる（第２節を参照）．さらに初期データが２本以上の δ 関数から成るときでも, 議論を常微分方程式系に帰着させることで, 解を構成することが可能である．ここで強調したいことは, 初期データが複数の δ 関数から成る場合, 非線形相互作用により無限個のモードが解の表示に現れる点である (第３, ４節参照)．以降の節では δ 関数の本数に応じて個別に議論を展開していく．

2　$u(0,x)=\mu_0\delta_0$ の場合

この場合は (NLS) を陽的に解くことができる．つまり, 解の表示として,

$$u(t,x)=A(t)\exp(it\Delta)\delta_0, \tag{2.1}$$

が得られる．ここで, $\exp(it\Delta)\delta_0=(4\pi it)^{-n/2}\exp(i|x|^2/4t)$, そして, 修正振幅 $A(t)$ は

$$A(t)=\begin{cases}\mu_0\exp\left(\dfrac{2\lambda|\mu_0|^{p-1}}{i(n+2-np)}|4\pi t|^{-n(p-1)/2}t\right) & \text{if } \mathrm{Im}\lambda=0,\\ \mu_0\left(1-\dfrac{2(p-1)\mathrm{Im}\lambda|\mu_0|^{p-1}}{n+2-np}|4\pi t|^{-n(p-1)/2}t\right)^{\frac{i\lambda}{(p-1)\mathrm{Im}\lambda}} & \text{if } \mathrm{Im}\lambda\neq 0.\end{cases} \tag{2.2}$$

である．(2.2) において, $\mathrm{Im}\lambda>0$ のとき正の有限時刻で $A(t)$ が無限大に爆発することに注意しておく．このような陽的な解表示を得るには, (2.1) を (NLS) に代入し, 次のような $A(t)$ の常微分方程式 (ODE) を解けばよい．

$$\begin{cases} i\dfrac{dA}{dt}=\lambda|4\pi t|^{-n(p-1)/2}\mathcal{N}(A),\\ A(0)=\mu_0.\end{cases} \tag{2.3}$$

3　$u(0,x)=\mu_0\delta_0+\mu_1\delta_a$ の場合

この節では, 初期データが δ 関数の重ね合わせになると, 解の表示に「モードの生成」が現れることを見ていこう．結果を述べる前に記号の説明をする．$\mathbf{T}=\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ は周期 2π の１次元トーラスである（ここで, $\mathbf{Z}$ は整数の集合）．この節では $L^q(=L^q(\mathbf{T}))$ はトーラス $\mathbf{T}$

上の q 乗可積分関数の集合を表し, ソボレフ空間 $H^s(=H^s(\mathrm{T}))$ は

$$H^s = \{f(\theta) \in L^2;\ \|f\|_{H^s}^2 < \infty\},$$

で定義されるものである. ただし, $\|f\|_{H^s}^2 = \sum_{k\in\mathbf{Z}}(1+|k|)^{2s}|C_k|^2\ (C_k = (2\pi)^{-1}\int f(\theta)e^{-ik\theta}\,d\theta)$ である. また, ℓ_α^2 は α 次の重みつき数列空間で,

$$\ell_\alpha^2 = \{\{A_k\}_{k\in\mathrm{Z}};\ \|\{A_k\}_{k\in\mathrm{Z}}\|_{\ell_\alpha^2}^2 = \sum_{k\in\mathbf{Z}}(1+|k|)^{2\alpha}|A_k|^2 < \infty\}.$$

によって定義される. 表現を簡略化するために $\{A_k\}_{k\in\mathrm{Z}}$ の代わりに $\{A_k\}$ という記法をよく用いる. 以上の準備のもと時間局所解に関する結果を紹介する.

Theorem 3.1 (local result) ある $T>0$ に対して, 次の表示を持つ *(NLS)* の解が一つ存在する.

(3.1)
$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} A_k(t)\exp(it\Delta)\delta_{ka},$$

ここで, $\{A_k(t)\} \in C([0,T];\ell_1^2)\cap C^1((0,T];\ell_1^2)$ であり, $A_0(0)=\mu_0$, $A_1(0)=\mu_1$ $A_k(0)=0$ *($k\neq 0,1$)* である.

注意 3.1. Theorem 3.1 の解に見受けられる $A_k(t)\exp(it\Delta)\delta_{ka}$ を「k 番目のモード」と呼ぶことにしよう. すると初期データが 0 番目と 1 番目のモードのみから構成されているにも関わらず, (3.1) には 0, 1 番目以外の新しいモードが現れている. この性質は非線形問題特有のものである.

注意 3.2. Theorem 3.1 の証明を見ると, 解の構成については"やや一般的な"初期データでも可能であることがわかる. やや一般的な初期データとは一直線上に等間隔に δ 関数が並ぶようなデータのことで, $u(0,x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}}\mu_k\delta_{ka}$ のように書き表せるデータのことである. ただし, 係数には $\{\mu_k\}\in\ell_1^2$ で表される減衰条件を課す. 係数の減衰条件は非線形項の評価を行う際に有用である.

注意 3.3. (3.1) にあるような級数は $L_{loc}^\infty((0,T];L^\infty(\mathbf{R}))$ の意味で収束している. なぜなら $t\neq 0$ に対して,

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty} \le |4\pi t|^{-n/2}\sum_k |A_k(t)| \le C|4\pi t|^{-n/2}\|\{A_k(t)\}\|_{\ell_1^2} < \infty.$$

となるからである. これにから (NLS) の非線形項 $\mathcal{N}(u(t,x))$ は $t\neq 0$ のとき, 関数として意味を持つことになる. また, (3.1) の解は $C([0,T];\mathcal{S}'(\mathbf{R}))$ にも属しており, 超関数の意味で初期データに連続につながる.

時間大域解の存在・非存在に関する結果は次のとおり. $\mathrm{Im}\lambda$ の正負が有限時間爆発もしくは時間大域解の存在を決定する.

Theorem 3.2 (blowing up or global result) (1) $Im\lambda > 0$ とする．このとき，*Theorem 3.1* の解は正の有限時刻で爆発する．正確には $\{A_k(t)\}$ の ℓ_0^2 ノルムがある正の時刻 T^* で無限大になる．

(2) $Im\lambda \le 0$ とする．このとき，*Theorem 3.1* のような表現をもつ時間大域解が一つ存在する．ただし，$\{A_k(t)\} \in C([0,\infty);\ell_1^2) \cap C^1((0,\infty);\ell_1^2)$ である．

Theorem 3.1 の証明について（アウトライン） (NLS) を変形して，係数 $A_k(t)$ の常微分方程式系に帰着させる．その際，解の表現 $u(t,x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} A_k(t)U(t)\delta_{ka}$ を (NLS) に代入して式変形を行うのだが，ここで問題になるのは非線形項 $\mathcal{N}(\sum_{k\in\mathbf{Z}} A_k(t)U(t)\delta_{ka})$ の取り扱いである．次の lemma はこの問題を解決する鍵になるもので，非線形項が再び線形解 $U(t)\delta_{ka}$ の重ね合わせで表現できることを主張している（証明は省略）．

Lemma 3.3 $\{A_j(t)\} \in C([0,T];\ell_1^2)$ とする．このとき，

$$\mathcal{N}(\sum_{j\in\mathbf{Z}} A_j(t)U(t)\delta_{ka}) = |4\pi t|^{-n(p-1)/2} \sum_{k\in\mathbf{Z}} \widetilde{A}_k(t)U(t)\delta_{ka} \tag{3.2}$$

なる等式が成り立つ．ただし，

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}_k(t) &= (2\pi)^{-1} e^{-i|ka|^2/4t} \langle \mathcal{N}(v(t,\theta)), e^{-ik\theta}\rangle_\theta, \\
v(t,\theta) &= \sum_j A_j(t) e^{-ij\theta} e^{i|ja|^2/4t}, \\
\langle f(\theta), g(\theta)\rangle_\theta &= \int_{\mathbf{T}} f(\theta)\overline{g(\theta)}\, d\theta.
\end{aligned}$$

解の表現 $u(t,x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} A_k(t)U(t)\delta_{ka}$ を (NLS) に代入し，Lemma 3.3 を適用したあと，方程式両辺の係数を比較すると $A_k(t)$ の常微分方程式系：

$$\begin{cases} i\dfrac{dA_k}{dt} = \lambda |4\pi t|^{-n(p-1)/2} \widetilde{A}_k(t), \\ A_k(0) = \mu_k \end{cases}$$

を得る．これを積分方程式に変形し，縮小写像の原理を用いて時間局所解を構成する． □

Theorem 3.2 の証明について（アウトライン） $\{A_k(t)\}$ の ℓ_0^2 ノルムによる下からの評価が得られれば有限時間爆発が示される．また，ℓ_1^2 ノルムで上からの時間大域的評価が得られれば局所解をつなげて大域的に延長することができる．議論途中の記述量を抑えるために，数列 $\{A_k(t)\}$ をそのまま用いることを避け，Lemma 3.3 で登場してきた関数 $v(t,\theta) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} A_j(t)e^{i(ja)^2/4t}e^{-ij\theta}$ を利用する．Parseval の等式から，$\|\{A_k(t)\}\|_{\ell_0^2} = (2\pi)^{-1/2}\|v(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbf{T})}$

および $\|\{kA_k(t)\}\|_{\ell_0^2} = (2\pi)^{-1/2}\|\partial_\theta v(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbf{T})}$ が成り立つことに注意. そして, $v(t,\theta)$ は偏微分方程式

$$i\partial_t v = -\frac{|a|^2}{4t^2}\partial_\theta^2 v + \lambda|4\pi t|^{-n(p-1)/2}\mathcal{N}(v) \tag{3.3}$$

を満たすことにも注意しておく. Theorem 3.2 は (3.3) の両辺に $v(t)$ や $\partial_t v(t)$ との内積をとると言った古典的なエネルギー評価によって得ることができる. □

4 $u(0,x) = \mu_{00}\delta_0 + \mu_{10}\delta_a + \mu_{01}\delta_b$ $(a \neq qb$ for $\forall q \in \mathbf{Q})$ の場合

この節では, 初期データが 3 つの δ-関数からなる場合について (NLS) の解を構成する. δ 関数の台は $x = 0, a$ および b にあるものとする. もし, a と b が平行で $a = qb$ となる $q \in \mathbf{Q}$ ($\mathbf{Q}$ は有理数の集合) が存在するとき, δ-関数の配置は Remark 3.2 で述べられているように等間隔配置の特別なものだから, (NLS) は Theorem 3.1 と 3.2 で言及されているような解を持つ. 従って, **問題は $a \neq qb$ for $\forall \mathbf{Q}$ の場合**である. この節の主定理を紹介する前に記号の準備をいくつか行う. 2 次元格子点上の数列空間 $\ell_\alpha^2(\mathbf{Z}^2)$ には次のようなノルムを入れておく.

$$\|\{A_{j,k}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}\|_{\ell_\alpha^2} = \Big(\sum_{j,k\in\mathbf{Z}}(1+|j|+|k|)^{2\alpha}|A_{j,k}|^2\Big)^{1/2}.$$

$\mathbf{T}^2$ は周期 2π の 2 次元トーラスとし, $\|f\|_{L^q(\mathbf{T}^2)}$ は $\left(\int_{\mathbf{T}^2}|f(\theta_1,\theta_2)|^q\, d\theta_1 d\theta_2\right)^{1/q}$ を表す. 以後 $\{A_{j,k}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ の代わりに $\{A_{j,k}\}$ と書く. この節の最初の結果は以下のとおり.

Theorem 4.1 (local result) $1 < \alpha < p$ とする. このとき, ある $T > 0$ に対して, 次の表示を持つ *(NLS)* の解が一つ存在する.

$$u(t,x) = \sum_{j,k\in\mathbf{Z}} A_{j,k}(t)\exp(it\Delta)\delta_{ja+kb}, \tag{4.1}$$

ここで, 係数については $\{A_{j,k}(t)\} \in C([0,T];\ell_\alpha^2(\mathbf{Z}^2)) \cap C^1((0,T];\ell_\alpha^2(\mathbf{Z}^2))$ を満たし, $(j,k) = (0,0),(1,0),(0,1)$ のとき $A_{j,k}(0) = \mu_{j,k}$ であり, それ以外のときには $A_{j,k}(0) = 0$ を満たす.

注意 **4.1.** 前節の Remark 3.1 で述べられていたように Theorem 4.1 の解は新しいモードの生成を示唆している. 初期データに δ 関数が 3 つあることで特徴的なことは次のとおりである.

- a と b が平行でないとき, $\exp(-it\Delta)u(t)$ は δ 関数の線形結合になっており, その台は a と b から生成される格子点上にある.
- a と b が平行で比が無理数のとき, $\exp(-it\Delta)u(t)$ はやはり δ 関数の線形結合になっているが, その台は a を方向ベクトルに持つ直線上「稠密」に分布する.

また, Theorem 4.1 の証明からわかるが, 初期データが $u(0,x)=\sum_{j,k\in\mathbf{Z}}\mu_{j,k}\delta_{ja+kb}$ のように与えられ, $\{\mu_{j,k}\}\in\ell^2_\alpha(\mathbf{Z}^2)$ なる条件を満たすときにも解の構成は可能である.

Theorem 3.2 と同様に, $\mathrm{Im}\lambda$ の正負が解の有限時間爆発と時間大域的存在を決める. しかし, a と b が平行か否かによって, 時間大域解の存在証明の難易度が変わる.

Theorem 4.2 (blowing up or global result) (1) *$Im\lambda>0$ とする. このとき, Theorem 4.1 の解は正の有限時刻で爆発する. 正確には $\{A_{j,k}(t)\}$ の $\ell^2_0(\mathbf{Z}^2)$-ノルムがある時刻 $T^*>0$ において無限大になる.*

(2-1) *$a\not\parallel b$ のとき, $Im\lambda\le 0$ ならば, Theorem 4.1 のような表現をもつ解が時間大域的に存在する.*

(2-2) *$a\parallel b$ のとき, $Im\lambda\le 0$ かつ $|Re\lambda|\le\frac{2\sqrt{p}}{p-1}|Im\lambda|$ ならば, Theorem 4.1 のような表現をもつ解が時間大域的に存在する.*

注意 4.2. Theorem 4.2 (2-2) で付加的な条件 $|\mathrm{Re}\lambda\le\frac{2\sqrt{p}}{p-1}|\mathrm{Im}\lambda|$ を省けるかどうかについてはまだ未解決である. この条件は $\|\{A_{k_1,k_2}(t)\}\|_{\ell^2_1(\mathbf{Z}^2)}$ の時間大域的評価を得る際に有用である. その鍵は Liskevich-Perelmuter の不等式 [12] である. つまり, $\mathrm{Im}\lambda\le 0$ かつ $|\mathrm{Re}\lambda|\le\frac{2\sqrt{p}}{p-1}|\mathrm{Im}\lambda|$ ならば $\mathrm{Im}\left(\lambda\langle\partial_{\theta_j}\mathcal{N}(w),\partial_{\theta_j}w\rangle_{\theta_1,\theta_2}\right)\le 0$ $(j=1,2)$ という不等式が成立することを利用する.

Theorem 4.1 の証明について(アウトライン) 前節と同様に (NLS) を変形して, 係数 $A_{j,k}(t)$ の常微分方程式系に帰着させる. その時, 非線形項 $\mathcal{N}(\sum_{j,k\in\mathbf{Z}}A_{j,k}(t)U(t)\delta_{ja+kb})$ の取り扱いが必要になるが, それについては次の lemma を利用する(証明は省略).

Lemma 4.3 $\alpha>1$ および $\{A_{jk}(t)\}\in C([0,T];\ell^2_\alpha(\mathbf{Z}^2))$ とする. このとき,

$$\mathcal{N}(\sum_{j,k\in\mathbf{Z}}A_{jk}(t)U(t)\delta_{ja+kb})=|4\pi t|^{-n(p-1)/2}\sum_{j,k\in\mathbf{Z}}\widetilde{A}_{jk}(t)U(t)\delta_{ja+kb}\tag{4.2}$$

なる等式が成り立つ. ただし,

$$\begin{aligned}\widetilde{A}_{jk}(t)&=(2\pi)^{-2}e^{-i|ja+kb|^2/4t}\langle\mathcal{N}(w(t,\theta_1,\theta_2)),e^{-i(j\theta_1+k\theta_2)}\rangle_{\theta_1,\theta_2},\\ w(t,\theta_1,\theta_2)&=\sum_{j,k\in\mathbf{Z}}A_{jk}(t)e^{i|ja+kb|^2/4t}e^{-i(j\theta_1+k\theta_2)},\\ \langle f(\theta_1,\theta_2),g(\theta_1,\theta_2)\rangle_{\theta_1,\theta_2}&=\int_{\mathbf{T}^2}f(\theta_1,\theta_2)\overline{g(\theta_1,\theta_2)}\,d\theta_1 d\theta_2.\end{aligned}$$

解の表現 $u(t,x)=\sum_{j,k\in\mathbf{Z}} A_{j,k}(t)U(t)\delta_{ja+kb}$ を (NLS) に代入し, Lemma 4.3 を適用したあと, 方程式両辺の係数を比較すると $A_{j,k}(t)$ の常微分方程式系：

$$\begin{cases} i\dfrac{dA_{j,k}}{dt}=\lambda|4\pi t|^{-n(p-1)/2}\widetilde{A}_{j,k}(t), \\ A_{j,k}(0)=\mu_{j,k} \end{cases}$$

を得る. これを積分方程式に変形し, 縮小写像の原理を用いて時間局所解を構成できる. □

Theorem 4.2 の証明について（アウトライン） $\{A_{j,k}(t)\}$ の $\ell_0^2(\mathbf{Z}^2)$ ノルムによる下からの評価が得られれば有限時間爆発が示される. また, $\ell_\alpha^2(\mathbf{Z}^2)$ ノルムで上からの時間大域的評価が得られれば局所解をつなげて大域的に延長することができる. これらの評価を得るために Lemma 4.3 で登場してきた関数 $w(t,\theta_1,\theta_2)=\sum_{j,k\in\mathbf{Z}} A_{j,k}(t)e^{i(ja+kb)^2/4t}e^{-i(j\theta_1+k\theta_2)}$ を利用する. Parseval の等式から, $\|\{A_{j,k}(t)\}\|_{\ell_0^2(\mathbf{Z}^2)}=(2\pi)^{-1}\|w(t,\cdot,\cdot)\|_{L^2(\mathbf{T}^2)}$ および $\|\{A_{j,k}(t)\}\|_{\ell_\alpha^2}\sim\|w(t,\cdot,\cdot)\|_{H^\alpha(\mathbf{T}^2)}$ が成り立つことに注意. そして, $w(t,\theta_1,\theta_2)$ は偏微分方程式

$$i\partial_t w=-\frac{1}{4t^2}(a\partial_{\theta_1}+b\partial_{\theta_2})^2 w+\lambda|4\pi t|^{-n(p-1)/2}\mathcal{N}(w) \tag{4.3}$$

を満たすことにも注意しておく. ただし, 右辺にある２階の微分作用素は,

$$(a\partial_{\theta_1}+b\partial_{\theta_2})^2=|a|^2\partial_{\theta_1}^2+2(a\cdot b)\partial_{\theta_1}\partial_{\theta_2}+|b|^2\partial_{\theta_2}^2$$

である. Theorem 4.2 (1) については, (4.3) の両辺に $w(t)$ との内積をとれば, $\|w(t)\|_{L^2(\mathbf{T}^2)}$ を下から評価できるので証明が終了する. 次に Theorem 4.2 (2-1) と (2-2) については, $\|w(t)\|_{H^1(\mathbf{T}^2)}$ の時間大域的評価が得られれば十分である (その理由は logarithmic Sobolev の不等式 [2] による). $\|w(t)\|_{H^1(\mathbf{T}^2)}$ の評価については, 前節の Theorem 3.2 の証明と同様に, (4.3) の両辺に $\partial_t w(t)$ との内積をとると言った古典的なエネルギー評価を行う. ここで, 注意すべきことは, $a \not\parallel b$ のとき, エネルギーの表現に含まれる $\|(a\partial_{\theta_1}+b\partial_{\theta_2})w(t)\|^2$ と $\|\partial_{\theta_1}w(t)\|_{L^2(\mathbf{T}^2)}^2+\|\partial_{\theta_2}w(t)\|_{L^2(\mathbf{T}^2)}^2$ が同値になることである. それ故, Theorem 4.2 (2-1) の仮定のもとでは, エネルギーによって $\|w(t)\|_{H^1(\mathbf{T}^2)}$ を抑え込むことができる.

Theorem 4.2 (2-2) については, $a \parallel b$ のとき, (4.3) 右辺の２階の微分作用素が退化するので, エネルギーで $\|w(t)\|_{H^1(\mathbf{T}^2)}$ を抑え込めない. そこで, 素朴に (4.3) の両辺を微分し, $\partial_{\theta_j}w(t)$ $(j=1,2)$ との内積をとる. 付加条件 $|\mathrm{Re}\lambda|\le 2\sqrt{p}|\mathrm{Im}\lambda|/(p-1)$ のお陰で, $\mathrm{Im}\left(\lambda\langle\partial_{\theta_j}\mathcal{N}(w(t)),\partial_{\theta_j}w(t)\rangle_{\theta_1,\theta_2}\right)\le 0$ となるので, これから $\|w(t)\|_{H^1(\mathbf{T}^2)}$ を評価できる.
□

参考文献

[1] G. P. Agrawal, "*Nonlinear fiber optics (second edition)*", Academic Press (1995).

[2] H. Brezis and T. Gallouet, "*Nonlinear Schrödinger evolution equations*", Nonlinear Anal. TMA 4(1980), 677–681.

[3] T. Cazenave, "An Introduction to Nonlinear Schrödinger Equations," Textos de Métodos Matemáticos **22**, Instituto de Matemática, Rio de Janeiro, 1989.

[4] T. Cazenave and F.B. Weissler, "*The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s*", Nonlinear Anal. TMA, **14**(1990), 807–836.

[5] J. Ginibre and G. Velo, "*On a class of nonlinear Schrö dinger equations*", J. Funct. Anal. **32**(1979), 1–71.

[6] J. Ginibre and G. Velo, "*The global Cauchy problem for the nonlinear Klein-Gordon equation*", Math. Z. **189**(1985), 487–505.

[7] N. Hayashi, "*Classical solutions of nonlinear Schrödinger equations,*" Manuscripta Math. **55**(1986), 171–190.

[8] T. Kato, "*On nonlinear Schrödinger equations*", Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **46**(1986), 113–129.

[9] T. Kato, "*Nonlinear Schrödinger equations,*" in "Schrödinger Operators" (H. Holden, A. Jensen, Eds.), Lecture Notes in Phys. **345**, Springer, Berlin-Heidelberg- New York, 1989.

[10] T. Kato, "*On Schrödinger equations. II. H^s-solutions and unconditional well-posedness,*" J. d'Anal. Math. **67** (1995), 281–306.

[11] C. Kenig, G. Ponce and L. Vega, "*On the ill-posedness of some canonical dispersive equations*", Duke Math. J. **106**(2001), 627–633.

[12] V.A. Liskevich and M.A. Perelmuter, "*Analyticity of submakovian semigroups*", Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 1097–1104.

[13] M. Nakamura and T. Ozawa, "*Nonlinear Schrösinger equations in the Sobolev space of critical order,*" J. Funct. Anal. **155**(1998), 364–380.

[14] H. Pecher, "*Solutions of semilinear Schrödinger equations in H^s,*" Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor. **67**(1997), 259–296.

[15] R. S. Strichartz, *Restriction of Fourier transform to quadratic surfaces and decay of wave equation*, Duke Math. J. **44**(1977), 705–714.

[16] Y. Tsutumi, "*L^2 solutions for nonlinear Scrödinger equations and nonlinear groups*", Funk. Ekva. **30**(1987), 115–125.

[17] Y. Tsutsumi, "*Global strong solutions for nonlinear Schrödinger equations,*" Nonlinear Anal. TMA **11**(1987), 1143–1154.

[18] K. Yajima, *Existence of solutions for Schrödinger evolution equations*, Comm. Math. Phys. **110**(1987), 415–426.