

勾配に関し一次増大度のエネルギーを持つ汎函数と 関連する発展方程式

菊地光嗣 (静岡大学工学部)

1 Introduction

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界領域としその境界 $\partial\Omega$ は十分滑らかであるとする。 Ω 上の函数 u に対しそのグラフを $\Omega \times \mathbb{R}$ における膜と思う。 $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を C^1 級函数とするとそのグラフの面積は

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx$$

で与えられる。 Ω 上の (ノンパラメトリックな) 極小曲面の方程式

$$(1.1) \quad \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0$$

の解は、この面積汎函数 $u \mapsto \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx$ の停留点として得られる。さらに、面積汎函数は凸であるので、停留点であれば必ず minimizer となる。面積汎函数は勾配 ∇u に関して一次増大度を持ち、したがって $u \in W^{1,1}(\Omega)$ に対して有限となる。しかしながら L^1 上の汎函数

$$u \mapsto \begin{cases} \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx & \text{if } u \in W^{1,1}(\Omega) \\ \infty & \text{if otherwise.} \end{cases}$$

は下方半連続性を持たない。そのため relaxation (lower semicontinuous envelope) を考える必要が出てくる。そして面積汎函数の $L^1(\Omega)$ ノルムに関する relaxed functional, 即ち,

$$J(u, \Omega) := \inf \left\{ \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u_j|^2} dx; \{u_j\} \subset W^{1,1}(\Omega), \text{ s-}\lim_{j \rightarrow \infty} u_j = u \text{ in } L^1(\Omega) \right\}$$

は、超函数の意味の微分が Ω 上の $\mathbb{R}^n$ 値ラドン測度であるような函数であれば有限となる。そのような函数は (Ω 上の) 有界変動函数 (a function of bounded variation) と呼ばれる (例えば [2, 4, 8] 等参照)。 Ω 上の有界変動函数の全体を $BV(\Omega)$ と表すが、この空間は $\|u\|_{BV} = \|u\|_{L^1(\Omega)} + |Du|(\Omega)$ ¹ をノルムとするバナッハ空間であり、そして $W^{1,1}(\Omega) \neq BV(\Omega)$ である。このとき $J(u, \Omega)$ は $L^1(\Omega)$ 上の下方半連続汎函数である。このことは有界変動函数の空間が (1.1) の解を求めるクラスとして適当であることを示している。なお有界変動函数はしばしば頭文字をとって BV 函数と呼ばれる。

方程式 (1.1) に境界条件

$$(1.2) \quad u|_{\partial\Omega} = \phi, \quad \phi \in L^1(\partial\Omega)$$

が課せられているとする。このときは、 $J(u, \Omega)$ の minimizer を $\{v \in BV(\Omega); \gamma v = \phi\}$ ($\gamma : BV(\Omega) \rightarrow L^1(\partial\Omega)$ は trace operator) のクラスで求めればよさそうであるが、実は一般には J はこのクラスで minimizer を持たない。一方、 $\partial\Omega$ が C^1 級であれば

$$\inf \{J(v, \Omega); v \in BV(\Omega), \gamma v = \phi\} = \inf \{J(v, \Omega) + \|\gamma v - \phi\|_{L^1(\partial\Omega)}; v \in BV(\Omega)\}$$

¹ベクトル値ラドン測度 μ に対し、その全変動を $|\mu|$ と表す。

が成立する。さらに、汎函数 $J(v, \Omega) + \|\gamma v - \phi\|_{L^1(\partial\Omega)}$ は $BV(\Omega)$ において minimizer を持つことが示される ([8, Theorem 14.5])。そこで、その minimizer を (1.1), (1.2) の (拡張された意味の) 解と考えることが出来る。

極小曲面の方程式は楕円型方程式であるが対応する放物型方程式や双曲型方程式も考えられる。その場合でも境界条件は上のように一般化して考える必要が出てくる。対応する放物型方程式は

$$u_t(t, x) - \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u(t, x)}{\sqrt{1 + |\nabla u(t, x)|^2}} \right) = 0$$

である。これは面積汎函数の勾配流、即ち (ノンパラメトリックな) 平均曲率流の方程式である。この方程式を、例えば、初期条件 $u(0, x) = u_0$, 境界条件 $u(t, \cdot)|_{\partial\Omega} = 0$ で解くとする。面積汎函数は $BV(\Omega)$ 上では Gâteaux 微分不可能な凸汎函数であるのでこの方程式は $u_t + \partial J(u, \Omega) \ni 0$ と理解すればよさそうである。しかし実際には境界条件があるので、楕円型の場合と同じように $J(u, \Omega)$ ではなく $J(v, \Omega) + \|\gamma v\|_{L^1(\partial\Omega)}$ を考えるべきである。 u の零拡張も同じ記号 u で表すと、 $u \in BV(\mathbf{R}^n)$ であり、面積汎函数は集合のほうを変数と考えると (即ち $J(u, \cdot)$ は) $\mathbf{R}^n$ 上のラドン測度である。そしてその $\bar{\Omega}$ の測度が

$$J(u, \bar{\Omega}) = J(v, \Omega) + \|\gamma v\|_{L^1(\partial\Omega)}$$

となる。したがって今考えるべき方程式は $u_t + \partial J(u, \bar{\Omega}) \ni 0$ である。この方程式は、面積汎函数が凸であるので劣微分の単調性を用いることにより解が一意的に存在することがわかる。

対応する双曲型方程式は

$$(1.3) \quad u_{tt}(t, x) - \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u(t, x)}{\sqrt{1 + |\nabla u(t, x)|^2}} \right) = 0$$

である。この方程式は u のグラフが表す $\Omega \times \mathbf{R}$ における膜の上下振動を表している。この方程式は一般には時間大域的古典解を持つとは限らない。それどころか論文 [9] において星賀氏は 2 次元の場合には初期条件がどのように小さくても古典解は有限時間で爆発し得るということを示した。したがって、時間大域解は必然的に弱解とならなくてはいいない。放物型方程式の場合と同様に、この方程式の初期及び境界条件

$$(1.4) \quad u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = v_0(x)$$

$$(1.5) \quad u(t, x) = 0 \quad (x \in \partial\Omega)$$

の下での弱解は発展方程式 $u_{tt} + \partial J(u, \bar{\Omega}) \ni 0$ の弱解として定式化すべきである。 $u_0 \in L^2(\Omega) \cap BV(\Omega)$, $v_0 \in L^2(\Omega)$ とし

$$\mathcal{X} = \{\phi \in L^\infty((0, T); L^2(\Omega) \cap BV(\Omega)); \phi_t \in L^2((0, T) \times \Omega)\},$$

とおく。

定義 1 u が $(0, T) \times \Omega$ における (1.3)–(1.5) の弱解であるとは次の i), ii), iii) が成立することである:

i) $u \in L^\infty((0, T); BV(\Omega)), \quad u_t \in L^2((0, T) \times \Omega)$

ii) $\lim_{t \searrow 0} u(t) = u_0$ in $L^2(\Omega)$

iii) for any $\phi \in C_0^0([0, T]; L^2(\Omega)) \cap \mathcal{X}$,

$$\int_0^T \{J(u + \phi, \bar{\Omega}) - J(u, \bar{\Omega})\} dt \geq \int_0^T \int_{\Omega} u_t \phi(t, x) dx dt + \int_{\Omega} v_0(x) \phi(0, x) dx.$$

藤原大輔，高桑昇一郎両氏は論文 [6] でこの方程式の時間大域弱解について研究した。そして以下の結果を得ている。

定理 1.1 (Fujiwara-Takakuwa [6])

$\{u^m\}$ を Ritz-Galerkin 法による (1.3)–(1.5) の近似解とする。このとき $\{u^m\}$ の部分列 (これも $\{u^m\}$ と表す) と $u \in L_{loc}^\infty((-\infty, \infty); L^2(\Omega) \cap BV(\Omega))$ が存在し，任意の t に対し， $u^m(t, \cdot) \rightarrow u(t, \cdot)$ strongly in $L^p(\Omega)$ ($1 \leq p < \frac{n}{n-1}$)， $Du^m(t, \cdot) \rightharpoonup Du(t, \cdot)$ (Radon 測度の意味で)， $u_t \in L^\infty((-\infty, \infty); L^2(\Omega))$ が成立する。

さらに $u_0 \in W^{2+\frac{n}{2}, 2}(\Omega)$ ， $v_0 \in L^2(\Omega)$ のとき， u が $W^{1,1}$ 関数であってエネルギー保存則

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t(t, x)|^2 dx + J(u(t, \cdot), \Omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |v_0(x)|^2 dx + J(u_0, \Omega)$$

(for $\mathcal{L}^1$ -a.e. $t \in (0, T)$) を満たすならば u は (1.3) の弱解である²。

[6] では (1.3)–(1.5) の近似解の列をヴァリフォルドの位相で収束させ，その極限ヴァリフォルドの構造を解析するという非常に興味深い手法が用いられている。ここで $R^n \times R$ におけるヴァリフォルドとは $R^n \times R \times G$ 上のラドン測度のことである。但し， G は R^{n+1} の n 次元部分ベクトル空間の全体を表す。

しかしながら上記の定理では，初期条件の *regularity* が高い，境界条件についてコメントしていない，など改善の余地が残されていた。そこで [10, 11] においてこれらの改良が試みられた。[10, 11] では解の近似解の構成方法を Rothe の方法に切り替えることで初期条件の *regularity* を下げることに成功した。またヴァリフォルドに向きを導入することにより極限 u に対する仮定を単純化した。

定理 1.2 $T > 0$ とし $u_0 \in L^2(\Omega) \cap BV(\Omega)$ ， $v_0 \in L^2(\Omega)$ とする。 u を Rothe の方法による近似解の極限 (補題 2 参照) のものとし，さらに u が

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t(t, x)|^2 dx + J(u(t, \cdot), \bar{\Omega}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |v_0(x)|^2 dx + J(u_0, \bar{\Omega})$$

($\mathcal{L}^1$ -a.e. $t \in (0, T)$) を満たすならば， u は (1.3)–(1.5) の $(0, T) \times \Omega$ における BV 解である。

なお [10] では境界条件については本質的な議論はされていなかったが，その考察は [11] において付け加えられた。

[10, 11] で用いられた Rothe の方法というのは時間を差分化し空間変数に関する楕円型方程式を解くというものである。ところで有界変動関数の空間での楕円型方程式の解法でもっとも有効であると思われる方法は汎函数の minimizer を求めるという直接変分法であろう。実際 [10, 11] では近似解法中の楕円型方程式はこの方法で解かれている。Rothe はこの方法を放物型方程式を解くことに用いた ([20])。そして Rektorys はこの方法を汎函数最小化の方法と組み合わせた ([19])。Rektorys のアイデアは後に菊池紀夫氏 ([14]) により再発見され，その後この手法は双曲型方程式を含む様々な非線形偏微分方程式に応用された (例えば [3, 18, 22])。一方，[1] では時間差分化の方法と汎函数最小

²[6] では極限 u に対する仮定はもう少し複雑であるが，少なくとも上記の結果は含まれている。

化の方法を組み合わせ平均曲率により発展する修正可能カレントを構成した。[1] に触発されて E. De Giorgi はミニマイジング・ムーブメントの理論を提唱した ([7])。この理論の言葉を用いると [10, 11] の結果は次のように言い換えられる：(1.3) に対する一般化ミニマイジング・ムーブメントがエネルギー保存則をみたせばそれは (1.3) の有界変動関数の空間における弱解である。

[10, 11] の結果は [12] において方程式系 (準凸汎関数) の場合に一般化された。また [13] では方程式 (1.3) の線形近似が論じられている。これらの研究においても [10, 11] における解析が基礎となっている。そこで、本稿では [10, 11] について解説する。

2 近似解の構成

近似解は Rothe の方法で構成する。まず $u_0 \in L^2(\Omega) \cap BV(\Omega)$, $v_0 \in L^2(\Omega)$ を初期条件のものとし, h を正の数とする。まず関数列 $\{u_l\}_{l=-1}^{\infty}$ をつぎのように構成する: u_0 は上のもの, $u_{-1} = u_0 - hv_0$, $l \geq 1$ に対しては u_l は楕円型方程式

$$\frac{u - 2u_{l-1} + u_{l-2}}{h^2} - \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0$$

の解とする。この方程式の解は $L^2(\Omega) \cap BV(\Omega)$ 上の汎関数

$$(2.1) \quad \mathcal{F}_l(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{|v - 2u_{l-1} + u_{l-2}|^2}{h^2} dx + J(v, \bar{\Omega})$$

の minimizer として求める。すなわち

$$u_l = \text{the minimizer of } \mathcal{F}_l$$

と定義する。

次に近似解 $u^h(t, x)$, $\bar{u}^h(t, x)$, $(t, x) \in (-h, \infty) \times \Omega$, を次のように定義する: $(l-1)h < t \leq lh$ のとき

$$\begin{cases} u^h(t, x) = \frac{t - (l-1)h}{h} u_l(x) + \frac{lh - t}{h} u_{l-1}(x) \\ \bar{u}^h(t, x) = u_l(x). \end{cases}$$

$J(v, \bar{\Omega})$ の凸性より次の補題を得る:

命題 1 (エネルギー不等式) $\mathcal{L}^1$ -a.e. t に対し

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t^h(t, x)|^2 dx + J(\bar{u}^h(t, \cdot), \bar{\Omega}) \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |v_0|^2 dx + J(u_0, \bar{\Omega}).$$

さらに近似解 u^h , $\bar{u}^h$ に対して次のことがらが成立する:

命題 2 部分列 (簡単のため $\{\bar{u}^h\}$ のまま表す) と関数 u が存在して以下のことが成立する:

- 1) 任意の $T > 0$ に対し $\bar{u}^h \rightharpoonup u$ in $L^\infty((0, T); L^2(\Omega))$
- 2) $u_t^h \rightharpoonup u_t$ weakly in $L^\infty((0, \infty); L^2(\Omega))$
- 3) 任意の $T > 0$ に対し $u^h \rightarrow u$ strongly in $L^p((0, T) \times \Omega)$, $1 \leq p < \frac{n}{n-1}$
- 4) 任意の $T > 0$ に対し $\bar{u}^h \rightarrow u$ strongly in $L^p((0, T) \times \Omega)$, $1 \leq p < \frac{n}{n-1}$
- 5) $u \in L^\infty((0, \infty); BV(\Omega))$
- 6) $\mathcal{L}^1$ -a.e. $t \in (0, \infty)$ に対しラドン測度の意味で $D\bar{u}^h(t, \cdot) \rightharpoonup Du(t, \cdot)$
- 7) $\lim_{t \searrow 0} u(t) = u_0$ in $L^2(\Omega)$

(命題 1 及び命題 2 の証明については例えば [10], [17] を参照のこと。)

命題 2 で求めた u は De Giorgi の用語を用いると (1.3) の一般化ミニマイジング・ムーブメントである。次節では u の性質を向き付けられたヴァリフォルドを用いて調べてみる。

3 ヴァリフォルド

G_0 を R^{n+1} の向き付けられた n 次元部分ベクトル空間の全体とする。そして, $R^n \times R \times G_0$ 上のラドン測度のことを $R^n \times R$ の向き付けられたヴァリフォルドと呼ぶ。

以下ではすべての有界変動函数 $v \in BV(\Omega)$ は全空間に零拡張されているものとし, それも同じ記号 v であらわす。 $v \in BV(R^n)$ に対し, $E_v \subset R^{n+1}$ を

$$E_v = \{(x, y); x \in R^n, y > v(x)\}$$

と定める。これは R^{n+1} で locally finite perimeter を持つ。したがって, その reduced boundary $\partial^* E_v$ は可算 n -修正可能集合となる (例えば [8] 参照)。したがって $\mathcal{H}^n$ -a.e. $z \in \partial^* E_v$ において $\partial^* E_v$ の単位内法線ベクトルが存在する。それを $\nu_{E_v}(z)$ と表す。この記号を用いると (1.3)–(1.5) の弱解の定義は次のように言い換えられる。

命題 3 $u_0 \in L^2(\Omega) \cap BV(\Omega)$, $v_0 \in L^2(\Omega)$ とする。さらに u は $(0, T) \times \Omega$ において i), ii) を満たすとする。このとき iii) は次の条件と同値である:

iii)₁ $\forall \varphi \in C_0^1([0, T) \times \Omega \times R)$ に対し,

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\{ - \int_{\Omega} u_t(\varphi_t(t, x, u) + \varphi_y(t, x, u)u_t)dx + \int_{\partial^* E_{u(t, \cdot)} \cap (\Omega \times R)} [-(\nabla_x \varphi \cdot \nu'_{E_{u(t, \cdot)}})\nu_{E_{u(t, \cdot)}}^{n+1} \right. \\ \left. + |\nu'_{E_{u(t, \cdot)}}|^2 \varphi_y] d\mathcal{H}^n \right\} dt = \int_{\Omega} v_0(x) \varphi(0, x, u_0(x)) dx \end{aligned}$$

iii)₂ $\forall \psi \in C_0^1([0, T))$ に対し,

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\{ - \int_{\Omega} u_t(\psi'(t)u + \psi(t)u_t)dx + \psi(t) \int_{\partial^* E_{u(t, \cdot)} \cap (\bar{\Omega} \times R)} |\nu'_{E_{u(t, \cdot)}}|^2 d\mathcal{H}^n \right. \\ \left. + \psi(t) \int_{\partial \Omega} |\gamma u| d\mathcal{H}^{n-1} \right\} dt = \psi(0) \int_{\Omega} v_0(x) u_0(x) dx \end{aligned}$$

つぎに各有界変動函数 v に対して向き付けられたヴァリフォルド V を次のように対応させる。まず $\xi(z)$ を $\partial^* E_v$ の orientation で $\nu_{E_v}(z)$ と合致するものとする。すなわち, $\xi(z)$ は $\partial^* E_v$ 上定義された n -ベクトル値 $\mathcal{H}^n$ -可測函数で, $\mathcal{H}^n$ -a.e. $z \in \partial^* E_v$ に対し $\xi(z) = \tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_n$ および $\xi(z) \wedge \nu_{E_v}(z) = e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n+1}$ が成立するものとする。但し, $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ は概接空間 $T_z(\partial^* E_v)$ の正規直交基底であり $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ は R^{n+1} の標準基底である。 G_0 の各元は $\xi = \tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_n$ という n -ベクトル ξ で特徴付けられる。ここで, $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ はこの元の正規直交基底である。したがって G_0 はしばしば unit norm をもつ simple n -vectors の全体と同一視される ([5, 1.6.2])
 $C_0^0(R^{n+1} \times G_0)$ 上の連続線形汎函数 L を次のように定義する:

$$L(\beta) = \int_{\partial^* E_v} \beta(z, \xi(z)) d\mathcal{H}^n \quad (\beta \in C_0^0(R^{n+1} \times G_0)).$$

Riesz の表現定理 (例えば [21, Theorem 4.1]) により $\mathbf{R}^{n+1} \times G_0$ 上のラドン測度 V (つまり向き付けられたヴァリフォルド V) で次をみたすものが存在する:

$$L(\beta) = \int_{\mathbf{R}^{n+1} \times G_0} \beta(z, \xi) dV(z, \xi).$$

本稿ではこれを

$$V = v_+(v).$$

と表すことにする。以上により各有界変動函数 v に対し向き付けられたヴァリフォルド $v_+(v)$ を対応させることが出来た。

以上より, $\mathcal{L}^1$ -a.e. t に対して, $\bar{u}^h(t, \cdot)$ に向き付けられたヴァリフォルドが対応する。それを $V_t^h = v_+(\bar{u}^h(t, \cdot))$ と表す。命題 1 より [6, Proposition 4.3] と同様に次の命題を得る。

命題 4 $\{V_t^h\}$ の部分列 (これも同じ記号 $\{V_t^h\}$ であらわす) と $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ 上の向き付けられたヴァリフォルドの *one parameter family* V_t ($t \in (0, \infty)$) が存在し, 各 $\psi(t) \in L^1(0, \infty)$ と $\beta \in C_0^0(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times G_0)$ に対して

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^\infty \psi(t) \int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times G_0} \beta(z, \xi) dV_t^h(z, \xi) dt = \int_0^\infty \psi(t) \int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times G_0} \beta(z, \xi) dV_t(z, \xi) dt$$

が成立する。

各 $\xi \in G_0$ に対して $\xi \wedge \nu = e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n+1}$ を満たすベクトル ν が一意的に決まる (この写像 $\xi \mapsto \nu = \nu(\xi)$ は G_0 から n 次元球面 S^n への同相写像である)。 $\nu(\xi)$ は ξ に対応するベクトル空間の単位法線ベクトルである。特に $\text{spt } v_+(v) \subset \mathbf{R}^{n+1} \times \{\xi \in G_0; \nu^{n+1}(\xi) \geq 0\}$ がわかる。

各 $v \in BV(\Omega)$ に対し $v_+(v)$ の定義より

$$(3.1) \quad \int_{U \times G_0} \beta(z, \xi) dv_+(v) = \int_{\partial^* E_v} \beta(z, \nu^{-1}(\nu_{E_v}(z))) d\mathcal{H}^n$$

を得る。但し $\beta \in C_0^0(U \times G_0)$ は任意の函数である。

命題 5 u_t が左概連続であるような T について

1) 各 $\phi \in C_0^1([0, T] \times \Omega)$ に対し

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\{ - \int_{\Omega} u_t \phi_t(t, x) dx + \int_{\Omega \times \mathbf{R} \times G_0} [-(\nabla_x \phi \cdot \nu'(\xi)) \nu^{n+1}(\xi)] dV_t \right\} dt \\ = \int_{\Omega} v_0(x) \phi(0, x) dx - \int_{\Omega} u_t(T, x) \phi(T, x) dx \end{aligned}$$

$$2) \int_0^T \int_{\bar{\Omega} \times \mathbf{R} \times G_0} |\nu'(\xi)|^2 dV_t dt \geq \int_0^T \int_{\Omega} u_t^2 dx dt + \int_{\Omega} v_0(x) u_0(x) dx - \int_{\Omega} u_t(T, x) u(T, x) dx$$

証明 u_l は $\mathcal{F}_l(v)$ の minimizer なので任意の φ に対し

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{F}_l(u_l + \varepsilon \varphi(x, u_l))|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_{\Omega} \frac{u_l(x) - 2u_{l-1}(x) + u_{l-2}(x)}{h^2} \varphi(x, u_l) dx + \frac{d}{d\varepsilon} J(u_l + \varepsilon \varphi(x, u_l), \bar{\Omega})|_{\varepsilon=0}. \end{aligned}$$

ここで, $(l-1)h < t < lh$ のとき $u_t^h(t, x) = \frac{u_l - u_{l-1}}{h}(x)$ であることに注意すると, [10] の定理 2.2 より任意の $T > 0$ と任意の $\varphi \in C_0^1([0, T) \times \Omega \times \mathbf{R})$ に対し

$$(3.2) \quad \int_0^T \left[\int_{\Omega} \frac{u_t^h(t, x) - u_t^h(t-h, x)}{h} \varphi(t, x, \bar{u}^h(t, x)) dx \right. \\ \left. + \int_{\partial^* E_t^h} [-(\nabla_x \varphi \cdot \nu'_{E_t^h}) \nu_{E_t^h}^{n+1} + |\nu'_{E_t^h}|^2 \varphi_y] d\mathcal{H}^n \right] dt = 0.$$

但し $E_t^h = E_{\bar{u}^h(t, \cdot)}$ である。(3.1) の v を $\bar{u}^h$, $\beta(z, \xi)$ を $-(\nabla_x \varphi \cdot \nu'(\xi)) \nu^{n+1}(\xi) + |\nu'(\xi)|^2 \varphi_y$ として適用すると

$$(3.3) \quad \int_{\partial^* E_t^h} [-(\nabla_x \varphi \cdot \nu'_{E_t^h}) \nu_{E_t^h}^{n+1} + |\nu'_{E_t^h}|^2 \varphi_y] d\mathcal{H}^n \\ = \int_{\mathbf{R}^{n+1} \times G_0} [-(\nabla_x \varphi \cdot \nu'(\xi)) \nu^{n+1}(\xi) + |\nu'(\xi)|^2 \varphi_y] dV_t^h(z, \xi)$$

を得る。(3.2) に於いて $h \rightarrow 0$ とすると (3.3) を $\varphi(t, x, y) = \phi(t, x)$ あるいは $\varphi = u$ に用いることにより結論を得る。 Q.E.D.

定理 1.2 の証明 L^2 ノルムと面積汎函数の下方半連続性を用いると命題 1, 2 およびエネルギー保存則の仮定から

$$(3.4) \quad \lim_{h \searrow 0} \int_{\Omega} |u_t^h(t, x)|^2 dx = \int_{\Omega} |u_t(t, x)|^2 dx$$

および

$$(3.5) \quad \lim_{h \searrow 0} J(\bar{u}^h(t, \cdot), \bar{\Omega}) = J(u(t, \cdot), \bar{\Omega})$$

が $\mathcal{L}^1$ -a.e. $t \in (0, T)$ に対して成立することがわかる。(3.4) を用いると命題 5 2) において等号が成立することがわかる。したがって, $V_t = v_+(u)$ が得られれば命題 5 および命題 3 より定理の結論を得るが, この事実は (3.5) と Reshetnyak continuity theorem (例えば [2, Theorem 2.39]) から従う。 Q.E.D.

References

- [1] F. Almgren, J. E. Taylor, and L. Wang, *Curvature driven flows: a variational approach*, SIAM J. Cont. and Opt. **31** (1993), 387–438.
- [2] L. Ambrosio, N. Fusco, and D. Pallara, *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*, Oxford Science Publication, 2000.
- [3] F. Bethuel, J. M. Coron, J. M. Ghidallia, and A. Soyeur, *Heat flow and relaxed energies for harmonic maps*, Nonlinear Diffusion Equations and Their Equilibrium States, 3.
- [4] L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, 1992.
- [5] H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer-Verlag, New York, 1969.
- [6] D. Fujiwara and S. Takakuwa, *A varifold solution to the nonlinear equation of motion of a vibrating membrane*, Kodai Math. J. **9** (1986), 84–116, correction, ibid. 14 (1991), 310–311.

- [7] E. De Giorgi, *New problems on minimizing movements*, Boundary Value Problems for PDE and Applications, Masson, 1993, pp. 81–98.
- [8] E. Giusti, *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1984.
- [9] A. Hoshiga, *The asymptotic behaviour of the radially symmetric solutions to quasilinear wave equations in two space dimensions*, Hokkaido Math. J. **24** (1995), 575–615.
- [10] K. Kikuchi, *An analysis of the nonlinear equation of motion of a vibrating membrane in the space of BV functions*, J. Math. Soc. Japan **52** (2000), 741–766.
- [11] ———, *A remark on Dirichlet boundary condition for the nonlinear equation of motion of a vibrating membrane*, Nonlinear Analysis **47** (2001), 1039–1050.
- [12] ———, *Analysis of quasilinear hyperbolic equations in the space of BV functions*, Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku, vol. 1315, 2003, pp. 58–76.
- [13] ———, *Linear approximation of quasilinear hyperbolic equations having linear growth energy*, preprint, 2005.
- [14] N. Kikuchi, *An approach to the construction of Morse flows for variational functionals*, Nematics Mathematical and Physical Aspects (J. M. Ghidaglia J. M. Coron and F. Hélein, eds.), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci., vol. 332, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht-Boston-London, 1991, pp. 195–199.
- [15] D. Kinderlehrer and P. Pedregal, *Characterization of young measures generated by gradients*, Arch. Rat. Mech. Anal. **115** (1991), 329–365.
- [16] ———, *Gradient young measures generated by sequences in sobolev spaces*, J. Geom. Anal. **4** (1994), 59–90.
- [17] T. Nagasawa, *Discrete Morse semiflows and evolution equations*, Proceedings of the 16th Young Japanese Mathematicians' Seminar on Evolution Equations, 1994, in Japanese, pp. 1–20.
- [18] ———, *Construction of weak solutions of the navier-stokes equations on riemannian manifold by minimizing variational functionals*, Adv. Math. Sci. Appl. (1998).
- [19] K. Rektorys, *On application of direct variational method to the solution of parabolic boundary value problems of arbitrary order in the space variables*, Czechoslovak Math. J. **21** (1971), 318–339.
- [20] E. Rothe, *Zweidimensionale parabolische randwertaufgaben als grenzfall eindimensionaler randwertaufgaben*, Math. Ann. **102** (1930), 650–670.
- [21] L. Simon, *Lectures on geometric measure theory*, Proceeding of the Centre for Mathematical Analysis, vol. 3, Australian National University, Canberra, 1983.
- [22] A. Tachikawa, *A variational approach to constructing weak solutions of semilinear hyperbolic systems*, Adv. Math. Sci. Appl. **3** (1994), 93–103.