

非線形波動方程式系の大域解の存在と null 条件について

片山 聡一郎 (和歌山大学 教育学部)

1. はじめに

次の非線形双曲型方程式系の初期値問題を考える:

$$(1.1) \quad \begin{cases} (\square_{c_i} + m_i^2)u_i = F_i(u, \partial u), & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \\ & (i = 1, 2, \dots, N), \\ u(0, x) = \varepsilon f(x), (\partial_t u)(0, x) = \varepsilon g(x), & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

ここで $c > 0$ に対して, $\square_c = \partial_t^2 - c^2 \Delta_x$, $\Delta_x = \sum_{k=1}^3 \partial_k^2$, $u = (u_j)_{1 \leq j \leq N}$, $\partial u = (\partial_a u_j)_{0 \leq a \leq 3, 1 \leq j \leq N}$ である. ただし

$$\partial_0 = \partial_t = \partial/\partial t, \quad \partial_k = \partial/\partial x_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

という記号を用いた. また, $c_i > 0$, $m_i \geq 0$ ($1 \leq i \leq N$) とする.

簡単のため $f = (f_j)_{1 \leq j \leq N}$, $g = (g_j)_{1 \leq j \leq N} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^N)$ と仮定する. ε は正のパラメータである. 以下では, 十分小さい ε のみを考える.

非線形項 $F = (F_j)_{1 \leq j \leq N}$ は滑らかであって, $(u, \partial u) = (0, 0)$ の近くでは 2 次のオーダーとする.

(1.1) に対して small data global existence (SDGE) が成り立つといえは, 「任意の $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^N)$ に対して, ある $\varepsilon_0 > 0$ が取れて, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ならば, (1.1) は大域解 $u \in C^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^N)$ を持つ」という意味とする.

2. 存在定理

2.1. 非線形波動方程式系 (すなわち $m_1 = \dots = m_N = 0$) の場合:

まず $c_1 = c_2 = \dots = c_N = 1$ の場合を考える. 表記を簡単にするため $\square (= \square_1) = \partial_t^2 - \Delta_x$ という記号を用いる.

どんなに初期値が小さくても有限時間で解が爆発するような 2 次の非線形項の例が知られている ([12], [13]) ので, (SDGE) が成り立つには 2 次の項になんらかの制限が必要になる. 以下, 一般に $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d$ の関数 $G(z)$ に対して, そのマクローリン展開の 2 次の部分を $G^{(2)}$ と書く. すなわち

$$(2.1) \quad G^{(2)}(z) = \sum_{|\beta|=2} \frac{(\partial_z^\beta G)(0)}{\beta!} z^\beta, \quad z \in \mathbb{R}^d.$$

定義 2.1 (null 条件) 各 F_i ($1 \leq i \leq N$) に対して

$$(2.2) \quad F_i^{(2)}((\lambda_j)_{1 \leq j \leq N}, (\omega_a \mu_j)_{0 \leq a \leq 3, 1 \leq j \leq N}) = 0$$

が, 任意の $\lambda = (\lambda_j)_{1 \leq j \leq N}$, $\mu = (\mu_j)_{1 \leq j \leq N} \in \mathbb{R}^N$ と, 任意の $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in S^2$ に対して成立するとき, $F = (F_i)_{1 \leq i \leq N}$ は null 条件を満たすという. ここで $\omega_0 = -1$ である (なお, (2.2) の左辺は λ_j を u_j に対応する変数に, $\omega_a \mu_j$ を $\partial_a u_j$ に対応する変数に代入したという意味である).

null 形式を

$$(2.3) \quad Q_0(\varphi, \psi) = (\partial_t \varphi)(\partial_t \psi) - \sum_{k=1}^3 (\partial_k \varphi)(\partial_k \psi),$$

$$(2.4) \quad Q_{ab}(\varphi, \psi) = (\partial_a \varphi)(\partial_b \psi) - (\partial_b \varphi)(\partial_a \psi), \quad 0 \leq a < b \leq 3,$$

と定義すると, $F = (F_i)_{1 \leq i \leq N}$ が null 条件を満たすならば, 各 $F_i^{(2)}$ は $Q_0(u_j, u_k)$ と $Q_{ab}(u_j, u_k)$ (ここで $1 \leq j, k \leq N$, $0 \leq a, b \leq 3$) の一次結合になることが分かる.

定理 2.2 (Klainerman [22], Christodoulou [4]) $m_1 = \cdots = m_N = 0$, $c_1 = \cdots = c_N = 1$ とする. F が null 条件を満たすならば (SDGE) が成立.

Klainerman の手法は後述するベクトル場の方法と呼ばれるものである.

伝播速度 c_j が必ずしも一致しない場合にも適用できるようにベクトル場の方法は様々に改良され, null 条件に対応する条件も広く研究されてきた ([25], [26], [24], [1], [10], [34], [27], [32], [33], [11], [14], [15], [16], [28], [19], [17], ...).

$$(2.5) \quad Q_0(\varphi, \psi; c) = (\partial_t \varphi)(\partial_t \psi) - c^2 \sum_{k=1}^3 (\partial_k \varphi)(\partial_k \psi)$$

とくと, 定理 2.2 は次の形に拡張される:

定理 2.3 ([15]) $m_1 = \cdots = m_N = 0$ とする. 各 $i = 1, 2, \dots, N$ に対して, $F_i^{(2)}$ が次のような項の一次結合で書けていると仮定:

$$(2.6) \quad \begin{cases} Q_0(u_j, u_k; c_i), Q_{ab}(u_j, u_k) & (\text{ただし } c_j = c_k = c_i), \\ (\partial_a u_j)(\partial_b u_k) & (\text{ただし } c_j = c_k \neq c_i), \\ (\partial_a u_j)(\partial_b u_k) & (\text{ただし } c_j \neq c_k.) \end{cases}$$

このとき (SDGE) が成立.

定理 2.3 は Dirichlet 境界条件の下での外部問題の場合にも拡張されている (Metcalfé–Nakamura–Sogge [28]).

ここまでの存在定理では 2 次の項は実際には未知関数の導関数のみに依存している. そうではないような結果としては次のものがある.

定理 2.4 (K.–Yokoyama [19]) $m_1 = \cdots = m_N = 0$ とする. 各 $i = 1, 2, \dots, N$ に対して, $F_i^{(2)}$ が次のような項の一次結合で書けていると仮定:

$$(2.7) \quad \begin{cases} Q_0(u_j, u_k; c_i), Q_{ab}(u_j, u_k) & (\text{ただし } c_j = c_k = c_i), \\ Q_0(u_j, u_k; c_j), Q_{ab}(u_j, u_k), \partial_c(u_j u_k) & (\text{ただし } c_j = c_k \neq c_i), \\ (\partial_a u_j)(\partial_b u_k), u_j(\partial_c u_k) & (\text{ただし } c_j \neq c_k) \end{cases}$$

このとき (SDGE) が成立.

定理 2.3 と 定理 2.4 を単純に統合した結果は正しくないことが分かっている (Ohta [29]).

2.2. 非線形 Klein–Gordon 方程式 (すなわち $m_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, N$) の場合:

$c_1 = c_2 = \dots = c_N = 1$ の場合を考える. 解の挙動は波動方程式の場合とは大きく異なり, (SDGE) のために特別な付加条件は必要ない.

定理 2.5 (Klainerman [21], Shatah [30]) $m_i > 0$ ($1 \leq i \leq N$), $c_1 = \dots = c_N = 1$ とする. このとき (SDGE) が成立.

Klainerman が用いたのはやはりベクトル場の方法である (その後, 手法は改良されている; [3], [9], [31], [6], [7] 等を参照). 筆者の知る限りでは, 伝播速度 c_i が必ずしも一致しないような場合を扱った研究はないようである.

2.3. 非線形波動方程式と Klein–Gordon 方程式の連立系 (すなわち, ある K がとれて $m_i > 0$ ($1 \leq i \leq K$), $m_i = 0$ ($K + 1 \leq i \leq N$)) の場合:

$c_1 = c_2 = \dots = c_N = 1$ の場合のみ考える.

定理 2.6 (Georgiev [5]) $c_1 = \dots = c_N = 1$ とする. このとき F が強 null 条件を満たせば, (SDGE) が成立.

なお, (2.2) が任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^N$ と, 任意の $\omega \in \mathbb{R}^3$ に対して成り立つ場合に, F は強 null 条件を満たすという. 強 null 条件を満たすとき, 各 $F_i^{(2)}$ は $Q_{ab}(u_j, u_k)$ ($1 \leq j, k \leq N$, $0 \leq a, b \leq 3$) の一次結合の形であることが分かる.

定理 2.6 は, 定理 2.2 も定理 2.5 も自然な形では含んでいない. 最近になって, 筆者はより自然な形の結果を得た:

$m_i > 0$ ($1 \leq i \leq K$), $m_i = 0$ ($K + 1 \leq i \leq N$) と仮定し,

$$u = (u_1, \dots, u_K, u_{K+1}, \dots, u_N) = (v_1, \dots, v_K, w_1, \dots, w_L) = (v, w)$$

とする. $1 \leq i \leq N$ に対して,

$$\begin{aligned} F_i^W(w, \partial w) &= F_i^{(2)}((0, w), (0, \partial w)), \quad F_i^K(v, \partial v) = F_i^{(2)}((v, 0), (\partial v, 0)), \\ F_i^{KW}(u, \partial u) &= F_i^{(2)}(u, \partial u) - F_i^W(w, \partial w) - F_i^K(v, \partial v) \end{aligned}$$

と定義する.

定理 2.7 $c_1 = \dots = c_N = 1$ とする. 次の 2 条件を仮定する:

- $F^W = (F_i^W)_{1 \leq i \leq N}$ が $((w, \partial w)$ の関数として) null 条件を満たす.
- 任意の $u = (v, w) \in C^1$ に対して, $F^{KW}(u, \partial u) = F^{KW}((v, 0), (\partial v, \partial w))$.

このとき, (SDGE) が成立.

3. ベクトル場の方法

$\nabla_x = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$, $\partial = (\partial_t, \nabla_x) = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$ とする. 次のベクトル場を導入する:

$$(3.1) \quad S = t\partial_t + x \cdot \nabla_x, \quad L = (L_1, L_2, L_3) = x\partial_t + t\nabla_x, \quad \Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = x \times \nabla_x.$$

$$(3.2) \quad \Gamma = (S, L, \Omega, \partial), \quad \tilde{\Gamma} = (S, \Omega, \partial), \quad Z = (L, \Omega, \partial), \quad \tilde{Z} = (\Omega, \partial)$$

と定義する. 例えば $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_{11})$ のように名前をつけて, $\Gamma^\alpha \varphi = \Gamma_1^{\alpha_1} \dots \Gamma_{11}^{\alpha_{11}} \varphi$ のように多重指標の記号を用いることにする. $X = \Gamma, \tilde{\Gamma}, Z, \tilde{Z}$, と自然数 k に対して

$$(3.3) \quad |\varphi(t, x)|_{X, k} = \sum_{|\alpha| \leq k} |X^\alpha \varphi(t, x)|, \quad \|\varphi(t)\|_{X, k} = \|\varphi(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

とおく. $[A, B] = AB - BA$ とすると

$$[S, \square] = -2\square, [L_j, \square] = [\Omega_j, \square] = [\partial_a, \square] = 0$$

が分かる.

例えば $\|\partial u(t)\|_{\Gamma, k, 2}$ を評価しようとするれば方程式に Γ を k 個まで作用させて, 通常のエネルギー評価を適用すればよい. 既存の評価式が利用できるのに加え, 強力な減衰評価を得られることがこの手法の利点である. 以下では, $\langle a \rangle = \sqrt{1 + |a|^2}$ とする.

補題 3.1 (Klainerman [20], [23]) 十分早く遠方で減衰している $\varphi = \varphi(t, x)$, $\psi = \psi(x)$ に対して

$$\begin{aligned} \langle t + |x| \rangle \langle t - |x| \rangle^{1/2} |\varphi(t, x)| &\leq C \|\varphi(t, \cdot)\|_{\Gamma, 2}, \\ \langle x \rangle |\psi(x)| &\leq C \|\psi\|_{\tilde{Z}, 2}. \end{aligned}$$

以下では, $c > 0$ として非斉次波動方程式

$$(3.4) \quad \square_c u(t, x) = F(t, x) \quad ((t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^3), \quad u(0, x) = \partial_t u(0, x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^3)$$

の解の減衰評価式をいくつか紹介する (斉次の場合の評価式は例えば [2] 等を参照のこと).

補題 3.2 (Klainerman [22], Hörmander [8]) $0 \leq \kappa \leq 1$ とする. (3.4) の解 u に対して,

$$\langle t + |x| \rangle \langle t - |x| \rangle^\kappa |u(t, x)| \leq C_\kappa \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|F(\tau, y)|_{\Gamma, 2}}{\langle \tau + |y| \rangle^{1-\kappa}} dy d\tau.$$

異なる伝播速度を含む系の場合, L を用いることはできない (実際, $[L_j, \square_c] = 0$ となるのは $c = 1$ の場合に限る). したがって, $\tilde{\Gamma}$ のみを用いた評価式を得る必要がある. ここでは, より狭く $\tilde{Z}$ のみを用いた評価式を紹介する. このタイプの u の評価は John [12] に端を発し, ∂u の評価は Kovalyov [25] が最初であるようである. $c_1, \dots, c_N$ を与えられた正定数, $c_0 = 0$ とおき,

$$\mathcal{W}(t, x) = \min_{0 \leq j \leq N} \{ \langle c_j t - |x| \rangle \}, \quad \mathcal{W}_c(t, x) = \min_{0 \leq j \leq N, c_j \neq c} \{ \langle c_j t - |x| \rangle \}$$

$$\mathcal{L}_\kappa(t, x) = \begin{cases} \{ \log(2 + \langle t + |x| \rangle \langle t - |x| \rangle^{-1}) \}^{-1} & (\kappa = 0), \\ \langle t - |x| \rangle^\kappa & (\kappa > 0) \end{cases}$$

と定義する. また $\Lambda_c(t, x) = \{(\tau, y) \in [0, t] \times \mathbb{R}^3; |y - x| \leq c(t - \tau)\}$ とする.

補題 3.3 (Kubota–Yokoyama [27], K.-Yokoyama [19]) u を (3.4) の解とする.

($\rho + \nu = \kappa + 1$ かつ $\rho > \kappa \geq 1$), あるいは ($\rho = \kappa \geq 1$ かつ $\nu > 1$) ならば

$$(3.5) \quad \langle t + |x| \rangle \mathcal{L}_{\kappa-1}(ct, x) |u(t, x)| \leq C \sup_{(\tau, y) \in \Lambda_c(t, x)} |y| \langle \tau + |y| \rangle^\rho \mathcal{W}(\tau, y)^\nu |F(\tau, y)|.$$

$\kappa > 0$ とする. ($\rho + \nu = \kappa + 1$ かつ $\rho > \max\{1, \kappa\}$), あるいは ($\rho = \kappa > 1$ かつ $\nu > 1$) ならば

$$(3.6) \quad \langle x \rangle \langle ct - |x| \rangle^\kappa |\partial u(t, x)| \leq C \sup_{(\tau, y) \in \Lambda_c(t, x)} |y| \langle \tau + |y| \rangle^\rho \mathcal{W}(\tau, y)^\nu |F(\tau, y)|_{\tilde{Z}, 1}.$$

$\kappa > 0, \nu > 1$ に対し

$$(3.7) \quad \langle x \rangle \langle ct - |x| \rangle^\kappa |\partial u(t, x)| \leq C \sup_{(\tau, y) \in \Lambda_c(t, x)} |y| \langle \tau + |y| \rangle^\kappa \mathcal{W}_c(\tau, y)^\nu |F(\tau, y)|_{\tilde{Z}, 1}.$$

最後に Klein–Gordon 方程式に対する評価を紹介しておく. この場合は S を用いることができないことに注意. χ_j ($j \geq 0$) を $C_0^\infty(\mathbb{R})$ に属する非負の関数で

$$\sum_{j=0}^{\infty} \chi_j(s) = 1 \quad (s \geq 0), \quad \text{supp } \chi_j = [2^{j-1}, 2^{j+1}] \quad (j \geq 1), \quad \text{supp } \chi_0 \cap [0, \infty) = [0, 2]$$

を満たすものとする.

補題 3.4 (Hörmander [9], Georgiev [6]) $m > 0$ とし, v は

$$(3.8) \quad (\square + m^2)v(t, x) = \Phi(t, x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^3$$

を満たすものとする. このとき

$$\begin{aligned} \langle t + |x| \rangle^{3/2} |v(t, x)| &\leq C \sum_{j=0}^{\infty} \sup_{\tau \in (0, t)} \|\chi_j(\tau) \langle \tau + |\cdot| \rangle |\Phi(\tau, \cdot)|_{Z, 4}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\quad + C \sum_{j=0}^{\infty} \|\langle \cdot \rangle^{3/2} \chi_j(|\cdot|) |v(0, \cdot)|_{Z, 5}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

4. Null 形式の評価

ここでは Q_0 のみを扱うが、他も同様である。 $r = |x|$, $\omega = x/r$, $\partial_r = \omega \cdot \nabla_x$ とおく。 また $\partial_\pm = \partial_t \pm \partial_r$, $L_r = \omega \cdot L = t\partial_r + r\partial_t$ とする。 $S = t\partial_t + r\partial_r$ であることに注意。 $\nabla_x = \omega\partial_r - \frac{\omega}{r} \times \Omega$ であるから

$$(\nabla_x \varphi) \cdot (\nabla_x \psi) = (\partial_r \varphi)(\partial_r \psi) + \left(\frac{\omega}{r} \times \Omega \varphi \right) \cdot \left(\frac{\omega}{r} \times \Omega \psi \right).$$

$$\frac{\omega}{r} \times \Omega = \frac{\omega}{r} \times (x \times \nabla_x) = \frac{\omega}{tr} \times (x \times (x\partial_t + t\nabla_x)) = \frac{\omega}{t} \times (\omega \times L)$$

に注意すると, $|(\nabla_x \varphi) \cdot (\nabla_x \psi) - (\partial_r \varphi)(\partial_r \psi)|$ は $\langle t+r \rangle^{-1} |Z\varphi| |\partial\psi|$, あるいは $\langle r \rangle^{-1} |\tilde{Z}\varphi| |\partial\psi|$ で評価できる。 Q_0 の残った部分は

$$(\partial_t \varphi)(\partial_t \psi) - (\partial_r \varphi)(\partial_r \psi) = \frac{1}{2} \{ (\partial_+ \varphi)(\partial_- \psi) + (\partial_- \varphi)(\partial_+ \psi) \}$$

である。 Klainerman [22] においては $\partial_+ = (t+r)^{-1}(S + L_r)$ という書き換えにより最終的に

$$(4.1) \quad |Q_0(\varphi, \psi)| \leq C \langle t+r \rangle^{-1} (|\Gamma\varphi| |\partial\psi| + |\partial\varphi| |\Gamma\psi|)$$

を得た。 波動と Klein-Gordon の連立系では, S を用いることができないため, この評価式が利用できない。 これが [5] で 強 null 条件が導入された理由である。

伝播速度の異なる系では L を用いることができない。

そこで $\partial_+ = r^{-1}(S - (t-r)\partial_t)$ と書き換えることにより,

$$(4.2) \quad |Q_0(\varphi, \psi)| \leq C \langle r \rangle^{-1} (|\tilde{\Gamma}\varphi| |\partial\psi| + |\partial\varphi| |\tilde{\Gamma}\psi| + \langle t-r \rangle |\partial\varphi| |\partial\psi|)$$

という評価式が用いられた (Hoshiga-Kubo [10]). 実際に一般の 2 次の項で減衰が不足するのは light cone $t = |x|$ の近傍である。 light cone の近傍では $\langle r \rangle^{-1}$ は $\langle t+r \rangle^{-1}$ と同値なので上の評価式は十分に役立つ。

∂_+ を書き換えずに直接評価するという方針もある:

定理 4.1 (K.-Kubo [17]) u を (3.4) の解, $1 \leq \kappa \leq 2$, $\nu > 1$ とする。 このとき

$$\begin{aligned} & \langle x \rangle \langle t+|x| \rangle \langle ct-|x| \rangle^{\kappa-1} |(\partial_t + c\partial_r)u(t, x)| \\ & \leq C \log(2+t+|x|) \sup_{(\tau, y) \in \Lambda_c(t, x)} |y| \langle \tau+|y| \rangle^\kappa \mathcal{W}(t, x)^\nu |F(\tau, y)|_{\tilde{Z}, 2}. \end{aligned}$$

これにより, 定理 2.3 をベクトル場 $\tilde{Z}$ のみを用いて示すのに成功した。 また, S を用いないことで, 外部問題版の証明も楽になった ([18]).

なお, この評価式を用いて, 定理 2.7 を示すこともできるが, (4.2) と同様の発想で $\partial_+ = (t+r)^{-1}(2L_r + (t-r)\partial_-)$ と書き直すことにより得られる

$$(4.3) \quad |Q_0(\varphi, \psi)| \leq C \langle t+r \rangle^{-1} (|Z\varphi| |\partial\psi| + |\partial\varphi| |Z\psi| + \langle t-r \rangle |\partial\varphi| |\partial\psi|)$$

を用いた方が, null 形式の評価を場所によって変える必要がないので証明がやや簡単になる。

参考文献

- [1] R. Agemi and K. Yokoyama, *The null condition and global existence of solutions to systems of wave equations with different speeds*, in Advances in nonlinear partial differential equations and stochastics, Series on Adv. Math. for Appl. Sci., Vol. **48**, World Scientific, 1998, 43–86.
- [2] F. Asakura, *Existence of a global solution to a semi-linear wave equation with slowly decreasing initial data in three space dimensions*, Comm. Partial Differential Equations **11** (1986), 1459–1487.
- [3] A. Bachelot, *Problème de Cauchy global pour des systèmes de Dirac–Klein–Gordon*, Ann. Inst. Henri Poincaré **48** (1988), 387–422.
- [4] D. Christodoulou, *Global solutions of nonlinear hyperbolic equations for small initial data*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986), 267–282.
- [5] V. Georgiev, *Global solution of the system of wave and Klein–Gordon equations*, Math. Z. **203** (1990), 683–698.
- [6] V. Georgiev, *Decay estimates for the Klein–Gordon equation*, Comm. Partial Differential Equations **17** (1992), 1111–1139.
- [7] N. Hayashi, P. I. Naumkin, R. Bagus E. Wibowo, *Nonlinear scattering for a system of nonlinear Klein–Gordon equations*, preprint.
- [8] L. Hörmander, L^1, L^∞ estimates for the wave operator, in Analyse Mathématique et Applications, Contributions en l’Honneur de J. L. Lions, Gauthier – Villars, Paris, 1988, 211 – 234.
- [9] L. Hörmander, *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations*, Springer – Verlag, 1997.
- [10] A. Hoshiga and H. Kubo, *Global small amplitude solutions of nonlinear hyperbolic systems with a critical exponent under the null condition*, SIAM J. Math. Anal. **31** (2000), 486–513.
- [11] K. Hidano, *The global existence theorem for quasi-linear wave equations with multiple speeds*, Hokkaido Math. J. **33** (2004), 607 – 636.
- [12] F. John, *Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions*, Manuscripta Math. **28** (1979), 235–268.
- [13] F. John, *Blow-up of solutions for quasi-linear wave equations in three space dimensions*, Comm. Pure Appl. Math. **34** (1981), 29–51.
- [14] S. Katayama, *Global existence for a class of systems of nonlinear wave equations in three space dimensions*, Chinese Ann. Math. **25B** (2004), 463 – 482.
- [15] S. Katayama, *Global and almost-global existence for systems of nonlinear wave equations with different propagation speeds*, Diff. Integral Eqs. **17** (2004), 1043–1078.
- [16] S. Katayama, *Global existence for systems of wave equations with nonresonant nonlinearities and null forms*, J. Differential Equations **209** (2005), 140 – 171.
- [17] S. Katayama and H. Kubo, *Decay estimates of a tangential derivative to the light cone for the wave equation and their application*, SIAM J. Math. Anal. **39** (2008), 1851–1862.

- [18] S. Katayama and H. Kubo, *An alternative proof of global existence for nonlinear wave equations in an exterior domain*, to appear in J. Math. Soc. Japan.
- [19] S. Katayama and K. Yokoyama, *Global small amplitude solutions to systems of nonlinear wave equations with multiple speeds*, Osaka J. Math. **43** (2006), 283–326.
- [20] S. Klainerman, *Uniform decay estimates and the Lorentz invariance of the classical wave equation*, Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), 321–332.
- [21] S. Klainerman, *Global existence of small amplitude solutions to nonlinear Klein–Gordon equations in four spacetime dimensions*, Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), 631–641.
- [22] S. Klainerman, *The null condition and global existence to nonlinear wave equations*, Lectures in Applied Math. **23** (1986), 293–326.
- [23] S. Klainerman, *Remarks on the global Sobolev inequalities in the Minkowski space $\mathbf{R}^{n+1}$* , Comm. Pure Appl. Math. **40** (1987), 111–117.
- [24] S. Klainerman and T. C. Sideris, *On almost global existence for nonrelativistic wave equations in 3D*, Comm. Pure Appl. Math. **49** (1996), 307 – 321.
- [25] M. Kovalyov, *Long-time behavior of solutions of a system of nonlinear wave equations*, Comm. Partial Differential Equations **12** (1987), 471 – 501.
- [26] M. Kovalyov, *Resonance-type behaviour in a system of nonlinear wave equations*, J. Differential Equations **77** (1989), 73–83.
- [27] K. Kubota and K. Yokoyama, *Global existence of classical solutions to systems of nonlinear wave equations with different speeds of propagation*, Japanese J. Math. **27** (2001), 113–202.
- [28] J. Metcalfe, M. Nakamura and C. D. Sogge, *Global existence of quasilinear, non-relativistic wave equations satisfying the null condition*, Japan. J. Math. (N.S.) **31** (2005), 391–472.
- [29] M. Ohta, *Counterexample to global existence for system of nonlinear wave equations with different propagation speeds*, Funkcialaj Ekvacioj, **46** (2003), 471 – 477.
- [30] J. Shatah, *Normal forms and quadratic nonlinear Klein–Gordon Equations*, Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), 685–696.
- [31] T. C. Sideris, *Decay estimates for the three space dimensional inhomogeneous Klein–Gordon equation and applications*, Comm. Partial Differential Equations **14** (1989), 1421–1455.
- [32] T. C. Sideris and Shun-Yi Tu, *Global existence for systems of nonlinear wave equations in 3D with multiple speeds*, SIAM J. Math. Anal. **33** (2001), 477 –488.
- [33] C. D. Sogge, *Global existence for nonlinear wave equations with multiple speeds*, in Harmonic Analysis at Mount Holyoke, Contemp. Math. **320**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, 353 – 366.
- [34] K. Yokoyama, *Global existence of classical solutions to systems of wave equations with critical nonlinearity in three space dimensions*, J. Math. Soc. Japan **52** (2000), 609–632.