行列係数 2 階常微分作用素の解析と 弾性ガイド波への応用

伊東 裕也 (電気通信大学)

概要

2 階楕円型システムの境界値問題に付随して現れる行列係数 2 階常微分方程式に対して、2 つの解法を提案する。1 つは弾性体解析で頻りに用いられる Stroh formalism の新しい解釈、もう 1 つは行列 2 次多項式の因数分解を用いる方法である。更に、それを弾性ガイド波 (表面波, 板波) の解析に利用する。

1 Introduction

3 次元弾性体の 2 次元変形を記述する強力な道具として、Stroh [13, 14] の開発した Stroh formalism は有名である。この理論の立役者である Barnett & Lothe は、3 つの重要な行列 (Barnett-Lothe 行列) に積分表示を与えることで Stroh formalism の理論的基盤を固め、異方性弾性体の Rayleigh 波の問題に満足できる解答を与えた。Stroh formalism に文献は膨大であるが、主な文献としては、Barnett & Lothe [1, 11, 2], Chadwick & Smith [4], Nakamura [12], Ting [16], Tanuma [15] など。

一方、Gohberg, Lancaster & Rodman [5, 6, 7] らによって、行列係数の多項式の理論が整備され、楕円型システムの境界値問題にも利用されている (Wloka, Rowley & Lawruk [17])。筆者も行列 2 次多項式の因数分解定理の構成的な別証明を与えたが (Ito [8])、これを微分方程式に応用すると、‘解’ が簡潔に表現でき、‘楕円性’ が退化する ‘縁’ まで込めて解析できるという利点がある。

さて、本講演の目的は、これらの方法を行列係数 2 階常微分方程式の解法という視点で整理し、それを弾性ガイド波 (表面波 = Rayleigh 波, 板波 = Lamb 波) の解析に応用することである。具体的な内容を説明するために、まず、空間次元 2, ベクトル次元 $m \geq 1$ として、密度 $\rho > 0$, 弾性係数 $C = \begin{pmatrix} C^{11} & C^{12} \\ C^{21} & C^{22} \end{pmatrix}$ ($2m$ 次実対称) の “弾性体” を考える。この弾性体を支配する偏微分作用素 $\{\mathcal{L}(\partial_x), \mathcal{N}(\partial_x)\}$ をシンボル

$$\mathcal{L}(\xi) = C^{11}\xi_1^2 + (C^{12} + C^{21})\xi_1\xi_2 + C^{22}\xi_2^2, \quad \mathcal{N}(\xi) = C^{21}\xi_1 + C^{22}\xi_2 \quad (1.1)$$

により定め、 $L(\zeta) = \mathcal{L}(1, \zeta)$, $N(\zeta) = \mathcal{N}(1, \zeta)$ とおく。

第 2, 3 節では、Barnett-Lothe 行列の (数学的には original より簡潔な) 新しい導出法、および行列 2 次多項式の因数分解定理を紹介し、それを次の常微分方程式の境界値問題に応用する (境界条件は (D), (N) の一方または両方):

$$\begin{aligned} \text{(E)} \quad & L(D_z)\mathbf{f}(z) = \mathbf{0} \quad (z > 0) \quad \text{かつ} \quad \mathbf{f}(+\infty) = \mathbf{0}; \\ \text{(D)} \quad & \mathbf{f}(0) = \mathbf{a}, \quad \text{(N)} \quad N(D_z)\mathbf{f}(0) = \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

第4節では‘半空間’ $\mathbb{R}_+^2$ におけるガイド波である Rayleigh 波を扱う。まず、波数 $k > 0$, 位相速度 $v > 0$ で $\mathbb{R}_+^2$ 内を境界に沿って x_1 軸方向に伝播する波

$$\mathbf{u}(x, t) = e^{ik(x_1 - vt)} \mathbf{f}(kx_2) \quad (\text{波の‘基本モード’}) \quad (1.3)$$

を考えよう。但し、 $\mathbf{f}(z) \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{f}(+\infty) = \mathbf{0}$ と仮定する。この形の $\mathbf{u}$ が

$$(\mathcal{L}(\partial_x) - \rho \partial_t^2) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_t, \quad \mathcal{N}(\partial_x) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{on } \partial \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_t, \quad (1.4)$$

の解となるとき、 $\mathbf{u}$ を Rayleigh 波と呼ぶ。更に、 $v, \{v, \mathbf{f}\}$ を Rayleigh 速度, Rayleigh 対と呼ぼう。 $z = kx_2$ とおいて (1.3) を (1.4) に代入すれば、(1.3) の $\mathbf{u}$ が Rayleigh 波であることと $\{v, \mathbf{f}\}$ が次の方程式 (固有値 ρv^2 の固有値問題):

$$(L(D_z) - \rho v^2 I) \mathbf{f}(z) = \mathbf{0} \quad (z > 0), \quad (N(D_z) \mathbf{f})(0) = \mathbf{f}(+\infty) = \mathbf{0}. \quad (1.5)$$

を満たすこととが同値となる。ここでは、Rayleigh 波の構成法と‘個数’を考察する。

最後に、第5節で‘板’ $E = \mathbb{R} \times (0, d)$ のガイド波を扱う。(1.3) の形の $\mathbf{u}$ が

$$(\mathcal{L}(\partial_x) - \rho \partial_t^2) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{in } E \times \mathbb{R}_t, \quad (1.6)$$

$$\begin{cases} \text{(D-D)} & \mathbf{u}|_{x_2=0} = \mathbf{u}|_{x_2=d} = \mathbf{0}, \\ \text{(D-N)} & \mathbf{u}|_{x_2=0} = \mathcal{N}(\partial_x) \mathbf{u}|_{x_2=d} = \mathbf{0}, \\ \text{(N-N)} & \mathcal{N}(\partial_x) \mathbf{u}|_{x_2=0} = \mathcal{N}(\partial_x) \mathbf{u}|_{x_2=d} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (1.7)$$

を満たすとき $\mathbf{u}$ をガイド波 (Lamb 波) と呼ぶ (境界条件はいずれか1つ)。 $z = x_2$, $\omega = kv$ とおいて (1.3) を (1.6), (1.7) に代入することにより、考えている問題は、次の固有値問題 (固有値 $\rho \omega^2$, パラメータ k) に変換される:

$$\mathcal{L}(k, D_z) \mathbf{f}(z) = \rho \omega^2 \mathbf{f}(z) \quad (0 < z < d), \quad (1.8)$$

$$\begin{cases} \text{(D-D)} & \mathbf{f}(0) = \mathbf{f}(d) = \mathbf{0}, \\ \text{(D-N)} & \mathbf{f}(0) = (\mathcal{N}(k, D_z) \mathbf{f})(d) = \mathbf{0}, \\ \text{(N-N)} & (\mathcal{N}(k, D_z) \mathbf{f})(0) = (\mathcal{N}(k, D_z) \mathbf{f})(d) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (1.9)$$

ガイド波の存在条件は、 k と ω , または k と $v = \omega/k$ の関係 (一般に複数本の分散曲線) で表される。ここでは分散曲線 $v = v(k)$ の $k \rightarrow \infty$ での挙動を調べる。

2 Barnett-Lothe 行列 (詳細は Ito [9])

この節では、(1.1) の $\mathcal{L}(\xi)$ に対して、(強楕円型とは限らない) 楕円性

$$\det \mathcal{L}(\xi) \neq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \quad (\Leftrightarrow \det C^{22} \neq 0 \text{ かつ } \det L(\zeta) \neq 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R})$$

を仮定する。Stroh formalism の何たるかには触れずに、Barnett-Lothe の扱った行列の積分表示を紹介する。(1.1) の $\mathcal{L}(\xi), \mathcal{N}(\xi)$ 以外に、シンボル

$$\mathcal{M}(\xi) = -C^{21} \xi_1^2 + (C^{11} - C^{22}) \xi_1 \xi_2 + C^{12} \xi_2^2$$

を導入したとき, 次の3つの行列を Barnett-Lothe 行列と呼ぶ:

$$S = -\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dot{\mathcal{L}}(\theta)^{-1} \dot{\mathcal{M}}(\theta)^T d\theta, \quad Q = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dot{\mathcal{L}}(\theta)^{-1} d\theta,$$

$$B = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\dot{\mathcal{M}}(\theta) \dot{\mathcal{L}}(\theta)^{-1} \dot{\mathcal{M}}(\theta)^T - \dot{\mathcal{L}}(\theta + \frac{\pi}{2})) d\theta.$$

ここで, $\dot{\mathcal{L}}(\theta) = \mathcal{L}(\cos \theta, \sin \theta)$, $\dot{\mathcal{M}}(\theta) = \mathcal{M}(\cos \theta, \sin \theta)$ とおいた. $C = \begin{pmatrix} C^{11} & C^{12} \\ C^{21} & C^{22} \end{pmatrix}$ が実対称であるから, Q, B は実対称行列となる.

次に, 境界値問題 (1.2) を解くために方程式の1階化を行う:

$$L(D_z) \mathbf{f}(z) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad (D_z - L) \mathbf{g}(z) = \mathbf{0}.$$

$$\text{但し, } L = \begin{pmatrix} C^{22} & O \\ C^{12} & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -C^{21} & I \\ -C^{11} & O \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(z) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(z) \\ N(D_z) \mathbf{f}(z) \end{pmatrix}.$$

定理 2.1. Barnett-Lothe 行列 S, Q, B および行列 L に対して,

$$P_{\pm} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\pm}} (\zeta I - L)^{-1} d\zeta = \frac{1}{2} \left\{ I \pm i \begin{pmatrix} S & Q \\ B & S^T \end{pmatrix} \right\} \quad \left(\gamma_{\pm} \text{ は } \sigma(L) \cap \mathbb{C}_{\pm} \text{ を} \right. \\ \left. \text{囲む } \mathbb{C}_{\pm} \text{ の積分路} \right)$$

が成り立つ ($\sigma(L)$ は L のスペクトル = 固有値全体). 更に, S, Q, B は次を満たす:

- (1) $SQ + QS^T = BS + S^T B = O, \quad S^2 + QB = (S^T)^2 + BQ = -I.$
- (2) $\dim(I \pm iS^T) \ker Q = \frac{1}{2} \dim \ker Q, \quad \dim(I \pm iS) \ker B = \frac{1}{2} \dim \ker B.$

ここで, $P_{\pm}$ は, 微分方程式 $(D_z - L) \mathbf{g}(z) = \mathbf{0}$ のそれぞれ $z \rightarrow \pm\infty$ で減衰する解を与える初期データの空間への射影になっている. この事実注意到して, 次を得る.

定理 2.2. 境界値問題 (1.2) に関して次が成り立つ

- (0) (E)-(D)-(N) が解をもつ $\Leftrightarrow \mathbf{c} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})^T \in \ker P_-$. その解は一意的で,

$$\mathbf{f}(z) = (I \ O) e^{izL} \mathbf{c} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} e^{iz\zeta} L(\zeta)^{-1} (N(\zeta)^T \mathbf{a} + \mathbf{b}) d\zeta.$$

- (1) (E)-(D) が $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{C}^m$ に対して (一意) 解をもつ $\Leftrightarrow Q$ が正則.
- (2) (E)-(N) が $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$ に対して (一意) 解をもつ $\Leftrightarrow B$ が正則.
- (3) (E)-(D)-(N) が $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ のとき解をもつ $\Leftrightarrow \mathbf{b} \in (I - iS^T) \ker Q.$
- (4) (E)-(D)-(N) が $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ のとき解をもつ $\Leftrightarrow \mathbf{a} \in (I - iS) \ker B.$

注意 2.3. Barnett-Lothe 行列 Q, B はそれぞれ $\mathcal{L}(\partial_x)$ の Dirichlet 問題, Neumann 問題に対する Lopatinski 行列に対応する. また, 次の行列も重要である:

- (1) Q が正則のとき, impedance 行列 $Z := Q^{-1}(I + iS) = (I - iS^T)Q^{-1}.$
- (2) B が正則のとき, admittance 行列 $Y := B^{-1}(I + iS^T) = (I - iS)B^{-1}.$

ここで, $\phi_1(\zeta), \phi_2(\zeta), \dots, \phi_s(\zeta)$ は相異なる実既約多項式. このとき, $p_{ij} \geq 1$ なる $\phi_i(\zeta)^{p_{ij}}$ 達を $L(\zeta)$ の実単因子と呼ぶ. これらを次の形に表しておく ($\text{Im } \alpha_\ell \geq 0$):

$$\{(\zeta - \overline{\alpha}_\ell)(\zeta - \alpha_\ell)\}^{p_\ell} \quad (1 \leq \ell \leq \ell^*).$$

Step 3. 各 $1 \leq \ell \leq \ell^*$ に対して, ℓ 番目の実単因子 $\{(\zeta - \overline{\alpha}_\ell)(\zeta - \alpha_\ell)\}^{p_\ell}$ を因数として含む不変多項式を $d_{\iota(\ell)}(\zeta)$ と表し, 行列 R を次で定義する:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_k^{(\ell)} &:= \frac{1}{(k-1)!} Q^{(k-1)}(\alpha_\ell) \mathbf{e}_{\iota(\ell)} \in \mathbb{C}^m \quad (1 \leq k \leq p_\ell), \\ R^{(\ell)} &:= (\mathbf{r}_1^{(\ell)} \quad \mathbf{r}_2^{(\ell)} \quad \dots \quad \mathbf{r}_{p_\ell}^{(\ell)}) \in M_{m, p_\ell}(\mathbb{C}) \quad (1 \leq \ell \leq \ell^*), \\ R &:= (R^{(1)} \quad R^{(2)} \quad \dots \quad R^{(\ell^*)}) \in M_m(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

このとき, R は正則で, Λ は次式で与えられる:

$$\Lambda = R \begin{pmatrix} J(\alpha_1, p_1) & & & O \\ & J(\alpha_2, p_2) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J(\alpha_{\ell^*}, p_{\ell^*}) \end{pmatrix} R^{-1} \quad \left(\begin{array}{l} J(\alpha, p) \text{ は固有値 } \alpha \text{ の} \\ p \text{ 次 Jordan ブロック} \end{array} \right).$$

最後に, 因数分解定理を境界値問題 (1.2) に応用する. (1.1) の直後の $L(\zeta), N(\zeta)$ を考え (従って, $L(\zeta)$ は実対称行列係数), $L \in \mathcal{X}_0$ であること, すなわち

$$C^{22} > O \quad \text{かつ} \quad L(\zeta) \geq O \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}$$

を仮定する. このとき, $\Lambda = \lambda[L]$, $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_1[L]$, $\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_0[L]$ とおいて, 行列 Z を

$$Z = i^{-1}(C^{22}\Lambda + C^{21}) \quad (= i^{-1}(N(D_z)e^{iz\Lambda})_{z=0})$$

で定める. これはエルミート行列であり, $L \in \mathcal{X}_1$ ならば注意 2.3 (1) の Z と一致し, $\text{Re } Z > O$ を満たす. また, $L \in \mathcal{X}_0 \setminus \mathcal{X}_1$ なら $\text{Re } Z \geq O$, $\ker \text{Re } Z = \mathbf{V}_0$ を満たす.

定理 3.2. 境界値問題 (1.2) に関して次が成り立つ.

• $L \in \mathcal{X}_1$ の場合:

- (1) (E)-(D) は $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{C}^m$ に対して一意解 $\mathbf{f}(z) = e^{iz\Lambda} \mathbf{a}$ をもつ.
- (2) (E)-(N) が $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$ に対して (一意) 解をもつ $\Leftrightarrow Z$ が正則.
- (3) (E)-(D)-(N) が $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ のとき解をもつ $\Leftrightarrow \mathbf{a} \in \ker Z$.

• $L \in \mathcal{X}_0 \setminus \mathcal{X}_1$ の場合:

- (4) (E)-(D) が解をもつ $\Leftrightarrow \mathbf{a} \in \mathbf{V}_1$. このとき, 解は $\mathbf{f}(z) = e^{iz\Lambda} \mathbf{a}$ で与えられる.
- (5) (E)-(D)-(N) が $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ のとき解をもつ $\Leftrightarrow \mathbf{a} \in \ker Z \cap \mathbf{V}_1$.

4 Rayleigh 波 ('半空間' におけるガイド波) (詳細は Ito [10])

Rayleigh 波の問題は常微分方程式の固有値問題 (1.5) の解析に他ならない. ここでは, $\mathcal{L}(\partial_x)$ が強楕円型で, $\{\mathcal{L}(\partial_x), \mathcal{N}(\partial_x)\}$ (in $\mathbb{R}_+^2$) が '強補完条件' を満たす (i.e., 対応する H^1 エネルギーが正值) であることを仮定する. これはシンボルの言葉で

$$C^{22} > O, \quad L(\zeta) > O \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}, \quad Z > O \quad (4.1)$$

と表される. (4.1) の前 2 つの条件の下で,

$$c_L = \sup\{v : L(\zeta) - \rho v^2 I > O \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}\} \quad (x_1 \text{ 方向の限界速度})$$

と定めれば, $0 \leq v \leq c_L$ のとき, 定理 3.1 により次を満たす $\Lambda(v)$ が一意に定まる:

$$L(\zeta) - \rho v^2 I = (\zeta I - \Lambda(v)^*) C^{22} (\zeta I - \Lambda(v)), \quad \sigma(\Lambda(v)) \subset \overline{\mathbb{C}_+}.$$

$\Lambda(v)$ は v について連続で, $v < c_L$ なら $\sigma(\Lambda(v)) \subset \mathbb{C}_+$. これを用いて

$$Z(v) = i^{-1}(C^{22}\Lambda(v) + C^{21}) \quad ((4.1) \text{ の } Z \text{ は } Z(0) \text{ のこと})$$

とおけば, $Z(v)$ ($0 \leq v \leq c_L$) はエルミート行列, v について単調減少で, $\operatorname{Re} Z(v) > O$ ($0 \leq v < c_L$), $\operatorname{Re} Z(c_L) \geq O$, $\ker \operatorname{Re} Z(c_L) = \mathbf{V}_{0L}$ を満たす. ここで,

$$\mathbf{V}_{L1} := \bigoplus_{\alpha \in \sigma(\Lambda(c_L)) \cap \mathbb{C}_+} \ker(\Lambda(c_L) - \alpha I)^m, \quad \mathbf{V}_{L0} := \bigoplus_{\alpha \in \sigma(\Lambda(c_L)) \cap \mathbb{R}} \ker(\Lambda(c_L) - \alpha I)^m.$$

また, 線型空間 $\{\alpha \mathbf{f} : \{v, \mathbf{f}\} \text{ が Rayleigh 対}, \alpha \in \mathbb{C}\}$ の次元を $d_R(v)$ と表し (v が Rayleigh 速度でないなら $d_R(v) = 0$), この量で Rayleigh 波の個数を数える.

定理 3.2 と上述の $Z(v)$ の性質を用いて次の定理を得る.

定理 4.1. $\tilde{\mathbf{V}} = \mathbb{C}^m$ (if $0 < v < c_L$ (亜音速)), $= \mathbf{V}_{L1}$ (if $v = c_L$ (遷音速)) とおく.

- (1) v が Rayleigh 速度 $\Leftrightarrow \ker Z(v) \cap \tilde{\mathbf{V}}$ が非自明.
- (2) v が Rayleigh 速度であるとき, $\{v, \mathbf{f}\}$ が Rayleigh 対となるような $\mathbf{f}$ は

$$\mathbf{f}(z) = e^{iz\Lambda(v)} \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \in (\ker Z(v) \cap \tilde{\mathbf{V}}) \setminus \{\mathbf{0}\},$$

の形で与えられる. 従って, $d_R(v) = \dim(\ker Z(v) \cap \tilde{\mathbf{V}})$ が成り立つ.

- (3) $0 < v < c_L$ (亜音速) における Rayleigh 波の総数は $Z(c_L)$ の負の固有値の個数に等しい. また, $0 < v \leq c_L$ における Rayleigh 波の総数は次を満たす:

$$\sum_{0 < v \leq c_L} d_R(v) \leq \frac{1}{2} \operatorname{rank}(\operatorname{Im} Z(c_L)) \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor.$$

5 ‘板’におけるガイド波

解析すべき問題はパラメータ $k > 0$ を含む固有値問題 (1.8)-(1.9) である.

5.1 境界条件 (D-D) の場合

$\mathcal{L}(\partial_x)$ の強楕円性, すなわち (4.1) の前 2 つを仮定する. このとき, 前節と同様に, c_L および $\Lambda(v)$ ($0 \leq v \leq c_L$) が定まる. また, $L(\zeta) - \rho c_L^2 I (\geq O)$ の実単因子が

$$\{(\zeta - \alpha_j)(\zeta - \bar{\alpha}_j)\}^{p_j} \quad (1 \leq j \leq j^*), \quad (\zeta - \beta_k)^{2q_k} \quad (1 \leq k \leq k^*) \quad (5.1)$$

の形で与えられる ($\alpha_j \in \mathbb{C}_+$, $\beta_k \in \mathbb{R}$). ここで, $q = \max_{1 \leq k \leq k^*} q_k$ とおく.

定理 5.1. 小さい方から n 番目の分散曲線の枝 $v = v_n(k)$ は次を満たす.

(1) 任意の $n_1 \in \mathbb{N}$ に対して, 定数 $C > 0$ を十分大きくとれば,

$$0 < v_n(k) - c_L < Ck^{-2q} \quad (1 \leq n \leq n_1, k > 0).$$

(2) 特に, $k^* = 1, q_1 = 1$ ならば, 下で与えられる定数 C_0 を用いて,

$$v_n(k) = c_L + \frac{C_0 n^2 \pi^2}{2\rho c_L d^2 k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right) \quad (k \rightarrow \infty).$$

C_0 の計算法: $\ker(L(\alpha_1) - \rho c_L^2 I) = \langle \mathbf{r}_1 \rangle$ となる $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{0}$ を選び, $\Lambda(c_L) = RJR^{-1}$ (J は Jordan 行列), $R = (\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2)$ と表す. このとき, $C_0 = \frac{\det(R^* C^{22} R)}{|\mathbf{r}_1|^2 \det(R_2^* C^{22} R_2)}$.

5.2 境界条件 (D-N), (N-N) の場合

ここでは, (4.1) に加えて, $Z(c_L)$ が負の固有値をもつと仮定し, 亜音速 Rayleigh 速度 (存在する!) の 1 つを c_R とする. $L(\zeta) - \rho c_R^2 I (> O)$ の実単因子を

$$\{(\zeta - \alpha_\ell)(\zeta - \bar{\alpha}_\ell)\}^{p_\ell}, \quad \alpha_\ell \in \mathbb{C}_+, p_\ell \in \mathbb{N} \quad (1 \leq \ell \leq \ell^*)$$

と表し, $\text{Im } \alpha_\ell$ の最小値を γ_R , $\text{Im } \alpha_\ell = \gamma_R$ なる ℓ の中での p_ℓ の最大値を p_R とする.

定理 5.2. 境界条件 (D-N), (N-N) に対応して, $k \rightarrow \infty$ のとき,

(D-N) $v_R(k) = c_R + O(k^{2(p_R-1)} e^{-2\gamma_R dk})$ を満たす分散曲線が 1 本存在する.

(N-N) $v_R(k) = c_R + O(k^{p_R-1} e^{-\gamma_R dk})$ を満たす分散曲線が 2 本存在する.

5.3 2次元等方性弾性体の場合 (すべての分散曲線が決定できる例)

$$\mathcal{L}(\xi) = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\xi_1^2 + \mu\xi_2^2 & (\lambda + \mu)\xi_1\xi_2 \\ (\lambda + \mu)\xi_1\xi_2 & \mu\xi_1^2 + (\lambda + 2\mu)\xi_2^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N}(\xi) = \begin{pmatrix} \mu\xi_2 & \mu\xi_1 \\ \lambda\xi_1 & (\lambda + 2\mu)\xi_2 \end{pmatrix}.$$

$\mu > 0$ かつ $\lambda + \mu > 0$ ($\Leftrightarrow$ (4.1)) を仮定し, $c_P = \sqrt{\rho^{-1}(\lambda + 2\mu)}$ (P波の速度), $c_S = \sqrt{\rho^{-1}\mu}$ (S波の速度), c_R は Rayleigh速度 ($\kappa = (c_R/c_S)^2$ が 3 次方程式 $\kappa^3 - 8\kappa^2 + 8(3 -$

$2(v_S/v_P)^2\kappa - 16(1 - (v_S/v_P)^2) = 0$ の $0 < \kappa < 1$ における一意解) とおく. このとき, $c_L = c_S$ で, $Z(c_S) = \mu \left(\sqrt{1 - \frac{(c_S/c_P)^2 - i}{0}} \right)$ (正負の固有値). ここでは (D-N) の場合だけを考える. すべての分散曲線は次で尽くされる (Bouhennache [3] の結果の精密化):

$$v_n(k) = c_S + \frac{n^2\pi^2}{2d^2k^2} \left(1 + \frac{10\sqrt{1 - (c_S/c_P)^2}}{dk} \right) + O\left(\frac{1}{k^4}\right) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$v_R(k) = c_R + {}^3K(c_S, c_R) e^{-2\sqrt{1 - (c_R/c_S)^2} dk} + o\left(e^{-2\sqrt{1 - (c_R/c_S)^2} dk}\right) \quad (k \rightarrow \infty).$$

参考文献

- [1] D.M. Barnett & J. Lothe, Consideration of the existence of surface wave (Rayleigh wave) solutions in anisotropic elastic crystals, *J. Phys. F: Metal Physics* 4 (1974), 671–686.
- [2] D.M. Barnett & J. Lothe, Free surface (Rayleigh) waves in anisotropic elastic half-spaces: the surface impedance method, *Proc. Royal Soc. Lond. A* 402 (1985), 135–152.
- [3] T. Bouhennache, Ondes guidés dans une bande élastique et existence d’une onde de Rayleigh asymptotique, *Asymptotic Analysis* 29 (2002), 293–308.
- [4] P. Chadwick & D.G. Smith, Foundations of the theory of surface waves in anisotropic elastic materials, *Adv. in Appl. Mech.* 17 (1977), 303–375.
- [5] I. Gohberg, P. Lancaster & L. Rodman, Spectral analysis of selfadjoint matrix polynomials, *Ann. of Math.* 112 (1980), 34–71.
- [6] I. Gohberg, P. Lancaster & L. Rodman, *Matrix Polynomials*, Academic Press, 1982.
- [7] I. Gohberg, P. Lancaster & L. Rodman, *Matrices and indefinite scalar products*, Operator Theory: Adv. Appl. 8, Birkhäuser, 1983.
- [8] H. Ito, Symmetric factorizations of quadratic nonnegative matrix polynomials, *preprint*.
- [9] H. Ito, The Barnett-Lothe tensors and their applications to boundary value problems for elliptic systems, *preprint*.
- [10] H. Ito, Construction and existence criterion of Rayleigh and Stoneley waves by means of factorization of matrix polynomials, *preprint*.
- [11] J. Lothe & D.M. Barnett, On the existence of surface-wave solutions for anisotropic half-spaces with free surface, *J. Appl. Phys.* 47 (1976), 428–433.
- [12] G. Nakamura, Existence and Propagation of Rayleigh waves and pulse, in *Modern Theory of Anisotropic Elasticity and Applications*, J. Wu, T.C.T. Ting & D.M. Barnett eds., SIAM, 1991.
- [13] A.N. Stroh, Dislocations and cracks in anisotropic elasticity, *Phil. Mag.*, 3 (1958), 625–646.
- [14] A.N. Stroh, Steady state problems in anisotropic elasticity, *J. Math. and Phys.*, 41 (1962), 77–103.
- [15] K. Tanuma, *Stroh Formalism and Rayleigh Waves*, to appear.
- [16] T.C.T. Ting, *Anisotropic Elasticity: Theory and Applications*, Oxford Univ. Press, 1996.
- [17] J. T. Wloka, B. Rowley and B. Lawruk, *Boundary Value Problems for Elliptic Systems*, Cambridge Univ. Press, 1995.