回転する障害物の周りでの非圧縮粘性流体の方程式の数学解析

菱田 俊明　　新潟大学自然科学系

無限にひろがる流体の中で有界な剛体の障害物が定められた運動をしている. このとき, その障害物の周りでの流れを求めよ. 縮まない粘性流体の場合, この問題は Navier-Stokes 方程式の外部問題として数学的に定式化される. その物体が並進運動のみするときは, 1960 年前後の Finn の一連の研究以来よく調べられていて ([11], [31], [33], [35] などを参照), 解の存在等の適切性の問題のみならず流れの詳しい様相, 具体的には物体の航跡 (wake region) の内外での漸近挙動の違いが明らかにされている. 一方, 物体の回転も伴う場合は, その物理状況の明快さにもかかわらず研究の蓄積が少ない. 回転の影響を数学的に捉えるため, 物体は並進運動せず, 一定な角速度 ω で回転運動のみするとしよう. 回転座標系により運動方程式を書き直して一定な外部領域における問題に帰着させると, 流体の速度場に作用する線型偏微分作用素は,

$$L = -\Delta - (\omega \times x)\cdot\nabla + \omega\times \tag{0.1}$$

となる. 問題の困難は 1 階の微分作用素 $(\omega\times x)\cdot\nabla$ のために作用素 L の数学的性質が Laplace 作用素のそれに比べて真に悪くなる点にある. しかし近年, その困難が少しずつ克服されながら, 解の存在や漸近挙動が調べられてきた. 本講演では, [7], [23] を中心にその概要を述べる. 定常解については R. Farwig 氏, 時間大域解 (定常解の安定性) については柴田良弘氏との共同研究である.

$D\subset\mathbb{R}^3$ は滑らかな境界 ∂D をもつ外部領域とする. 物体 $(\equiv \mathbb{R}^3\setminus D)$ の回転軸は一般性を失わずに y_3-軸とし, 従って回転角速度を $\omega=(0,0,a)^T$ とする. $a\in\mathbb{R}$ は定数である. 時刻 t で流体の占める領域を, $D(t)=\{y=O(at)x;\ x\in D\}$ とおく. ただし, $O(t)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t & 0\\ \sin t & \cos t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. 流体の速度 $u(y,t)$ と圧力 $p(y,t)$ は, Navier-Stokes 方程式

$$\partial_t u + u\cdot\nabla_y u = \Delta_y u - \nabla_y p, \qquad \mathrm{div}\,_y u = 0$$

を $y\in D(t)$ と $t>0$ に対して満たし, 境界条件および初期条件

$$u|_{\partial D(t)} = \omega\times y, \qquad u\to 0 \quad (|y|\to\infty), \qquad u(y,0)=u_0(y) \quad (y\in D)$$

が与えられる. 変数変換 $y=O(at)x$, $p(y,t)=p'(x,t)$ および

$$O(at)^T\Big(u(y,t)-\omega\times y\Big) = u'(x,t), \quad \text{あるいは} \quad O(at)^T u(y,t) = u'(x,t)+\omega\times x = \widetilde{u}(x,t)$$

により, D 上の問題に帰着させよう ([2], [21]). (u',p') に対しては

$$\begin{cases} \partial_t u' + u'\cdot\nabla u' = \Delta u' - 2\omega\times u' - \omega\times(\omega\times x) - \nabla p' & (x\in D,\ t>0),\\ \mathrm{div}\ u' = 0 & (x\in D,\ t\ge 0),\\ u'=0 & (x\in\partial D,\ t>0),\\ u'+\omega\times x\to 0 & (|x|\to\infty,\ t>0),\\ u'(x,0)=u_0(x)-\omega\times x & (x\in D) \end{cases} \tag{0.2}$$

となり, Coriolis の力 $-2\omega \times u'$ が現れるが, 無限遠で増大する境界条件が大きな困難である. 一方, $(\widetilde{u}, p')$ に対しては

$$\begin{cases} \partial_t \widetilde{u} + \widetilde{u} \cdot \nabla \widetilde{u} = \Delta \widetilde{u} + (\omega \times x) \cdot \nabla \widetilde{u} - \omega \times \widetilde{u} - \nabla p' & (x \in D,\ t > 0), \\ \mathrm{div}\ \widetilde{u} = 0 & (x \in D,\ t \geq 0), \\ \widetilde{u} = \omega \times x & (x \in \partial D,\ t > 0), \\ \widetilde{u} \to 0 & (|x| \to \infty,\ t > 0), \\ \widetilde{u}(x, 0) = u_0(x) & (x \in D) \end{cases} \tag{0.3}$$

に帰せられるが, 非有界な係数をもつ移流項 $(\omega \times x) \cdot \nabla \widetilde{u}$ を伴う. この項は低階ではあるが, 角速度 ω がたとえ小さくても粘性項 $\Delta \widetilde{u}$ からの単なる摂動と見做すことはできない. このことを, 定常および非定常の基本解のレベルで説明しよう. まず, (0.1) の作用素 L の基本解 $\Gamma(x, y) = (\Gamma_{jk}(x, y))$ は後の (1.4) のように与えられるが, $\omega = 0$ (Laplace 作用素) の場合と異なり, 各点評価 $|\Gamma(x, y)| \leq C/|x-y|$ を, x, y がそれぞれある特定の方向に沿い無限遠へ行くときに許さない ([8], [22]). 実際, 例えば $x_\rho = (\rho, 0, 0)^T, y_\rho = (0, \rho, 0)^T$ と取るとき, 下からの評価

$$\Gamma_{33}(x_\rho, y_\rho) = \int_0^\infty (4\pi t)^{-3/2} e^{-\rho^2(1-\sin at)/2t}\, dt \geq C\sqrt{|a|}\, \frac{\log \rho}{\rho} \tag{0.4}$$

が任意の $\rho > 1$ に対して成り立つ. 次に, 非定常問題の基本解について, 全空間 $\mathbb{R}^3$ において (0.1) の作用素 L が L_q 空間上で生成する半群

$$\left(T_{\mathbb{R}^3}(t) f\right)(x) = O(at)^T \left(e^{t\Delta} f\right)(O(at)x) \tag{0.5}$$

は, $\omega = 0$ (熱半群 $e^{t\Delta}$) の場合と異なり, 解析半群でない ([21], [10], [9]).

外部問題 (0.3) あるいは (0.2) の可解性は, 今のところ, [2], [21], [15], [18], [23] により示されている. 最初の結果は Borchers [2] による弱解, すなわちある種のエネルギー不等式を満たし方程式を超関数の意味で満たす解である. 通常の Navier-Stokes 方程式と同様に, 弱解の一意性は分からない. そこで筆者 [21] は, 一意解を時間局所的に構成した. 初期関数の滑らかさは $u_0 \in W_2^{1/2}(D)$ である. [21] の初期関数の滑らかさを除くには, L_2 の枠を超えて, Giga-Miyakawa [19], Kato [25] のように L_q で議論するとよい. 実際, Geissert-Heck-Hieber [18] は, 初期関数 $u_0 \in L_q(D)$, $q \geq 3$, に対して, 一意な時間局所解の存在を示した.

次に, 時間大域解を求めるには, その主流として定常問題 (1.1) の解を見つけることが最初のステップである. ここで, 定常解とは, 元の座標系では物体の回転と同じ周期 $2\pi/|a|$ をもつ時間周期解を意味する. Galdi [14] は, 小さい角速度 ω に対して, $|u(x)| \leq C/|x|$ を満たす定常解の一意存在を示した. 基本解の下からの評価 (0.4) にもかかわらず, このような漸近挙動が得られたことは意外であったが, この事情は, (0.4) を満たす $(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ の集合が非常に小さいために, y について D 上で積分するとその影響が現れないのだと理解される. Farwig と筆者 [7] は, より広い視点で [14] の結果を捉え直した. 実際, 外力を $f = \mathrm{div}\, F$ として, 角速度 ω と $F \in L_{3/2,\infty}(D)$ が小さいとき, $u \in L_{3,\infty}(D)$ なるクラスの定常解が一意に存在することを示した. ただし, $L_{q,r}$ は Lorentz 空間, 特に $L_{q,\infty}$ は弱-L_q 空間であり, 通常の L_q 空間の実補間によって得られる.

Galdi-Silvestre [15] は, [14] の定常解の周りで強解を時間大域的に構成した. ここで, 定常解に与えた初期擾乱は L_2 での半群の生成作用素の定義域 (2.1) に属していて, その初期擾乱の W_2^1-norm と角速度 ω は小さい. $t \to \infty$ のとき, この大域解は定常解へ Dirichlet-norm により収束するが, その速さは求められていない. 柴田良弘氏と筆者 [23] は, より相応しい初期擾乱のクラスのもと, 時間大域解の定常解への収束の速さを求めるという点で [15] をより精密にすることを念頭に, 半群の L_p-L_q 評価を示した. 結果として, [15] とは異なる時間大域解存在定理を確立できる.

1 定常流

L を (0.1) で与えられる偏微分作用素として, 定常問題

$$Lu + \nabla p + u \cdot \nabla u = f, \qquad \mathrm{div}\ u = 0 \qquad (x \in D); \qquad u = \omega \times x \qquad (x \in \partial D) \tag{1.1}$$

を考える. Galdi [14] は, $f = 0$ で $|\omega|$ が十分小さいとき, $|u(x)| \le C|\omega|/|x|$, $|\nabla u(x)| + |p(x)| \le C|\omega|/|x|^2$ のように減衰する解 (u,p) が一意的に存在することを示した. [7] では, この各点評価を理解するために, 関数空間を用いることによって, さらに広い見地から [14] の結果が捉え直された. ただし, $f \in \dot{W}^{-1}_{q,r}(D)$ とは, $f = \mathrm{div}\ F$, $F \in L_{q,r}(D)$ のことである ([29]).

定理 1.1 ([7]) $f \in \dot{W}^{-1}_{3/2,\infty}(D)$ とする. $|\omega|$ と $\|f\|_{\dot{W}^{-1}_{3/2,\infty}(D)}$ が十分小さいとき, 問題 (1.1) に対して, $u \in L_{3,\infty}(D)$, $(\nabla u, p) \in L_{3/2,\infty}(D)$ なるクラスの (超関数の意味での) 解 (u,p) が一意的に存在して, 評価 $\|u\|_{L_{3,\infty}(D)} + \|(\nabla u, p)\|_{L_{3/2,\infty}(D)} \le C\left(|\omega| + \|f\|_{\dot{W}^{-1}_{3/2,\infty}(D)}\right)$ が成り立つ.

定理 1.1 の証明の本質的部分は, $(\nabla u, p) \in L_{3/2,\infty}(D)$ なるクラスでの線型理論である. 実は, Lorentz 空間で捉える限り, 線型問題

$$Lu + \nabla p = f, \qquad \mathrm{div}\ u = 0 \qquad (x \in D); \qquad u = 0 \qquad (x \in \partial D) \tag{1.2}$$

の解の存在, 一意性, $L_{q,r}$-評価のすべてが成立するためのクラスとして, 空間 $L_{3/2,\infty}(D)$ は臨界であり, このことは外部問題に特有である. 外部領域での線型理論を確立するには, 全空間 $\mathbb{R}^3$ 上の線型問題

$$Lu + \nabla p = f, \qquad \mathrm{div}\ u = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^3) \tag{1.3}$$

に対する L_q-評価が第 1 段階である. すなわち, $f \in \dot{W}^{-1}_q(\mathbb{R}^3)$ に対する $(\nabla u, p)$ の L_q-評価が必要である. まず, $f \in L_q(\mathbb{R}^3)$ に対する $(\nabla^2 u, \nabla p)$ の L_q-評価の研究が先行した ([8]). $1 < q < \infty$ とする. まず, 問題 (1.3) の圧力 p は $\omega = 0$ の場合の Stokes 問題のそれと同じであるから, 本質的には方程式 $Lu = f$ の解の急減少関数 f に対する評価 $\|\nabla^2 u\|_{L_q(\mathbb{R}^3)} \le C\|f\|_{L_q(\mathbb{R}^3)}$ を示せばよい. そのような f に対する解は, $u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma(x,y) f(y)\, dy$ のように明示され, その積分核 Γ は

$$\Gamma(x,y) = \int_0^\infty O(at)^T E_t\left(O(at)x - y\right) dt \tag{1.4}$$

となる. ただし, $E(x) = (4\pi)^{-3/2} e^{-|x|^2/4}$, $E_t(x) = t^{-3/2} E\left(x/\sqrt{t}\right)$ とおいた. Riesz 変換の L_q-有界性より, 積分作用素 $(Tf)(x) = -\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} K(x,y) f(y)\, dy$ が L_q-有界であることを示せばよい. その積分核 K は

$$K(x,y) = -\Delta_x \Gamma(x,y) = \int_0^\infty O(at)^T \psi_t\left(O(at)x - y\right) \frac{dt}{t} \tag{1.5}$$

である. ただし, $\psi(x) = -\Delta E(x)$, $\psi_t(x) = t^{-3/2}\psi\left(x/\sqrt{t}\right)$ とおいた. 基本解 Γ の評価 (0.4) を見ると, (1.5) は Calderón-Zygmund 型の積分核ではないように見える. $q \in (2,\infty)$ に対する L^q-有界性の証明の方針は, まず ξ-空間の 2 進分解を用いて, 作用素 T を $\{T_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ に分解する. 次に, 各 T_j を Hardy-Littlewood の maximal function と Littlewood-Paley の square function $(Sv)(x) = \left(\int_0^\infty |(\phi_s * v)(x)|^2 \frac{ds}{s}\right)^{1/2}$ を使って評価し, $\|T_j f\|_{L_q(\mathbb{R}^3)} \le C2^{-2|j|}\|f\|_{L_q(\mathbb{R}^3)}$ を導く. ただし, $\{\phi_s\}_{s>0}$ は $\int_{\mathbb{R}^3} \phi_s(x)dx = 0$, および $\int_0^\infty \widehat{\phi_s}(\xi)^2 \frac{ds}{s} = 1$ $(\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, また $\mathrm{supp}\,\widehat{\phi_s} \subset \{\xi; 1/(2\sqrt{s}) < |\xi| < 2/\sqrt{s}\}$ を満たす球対称な急減少関数族である. 作用素-norm による収束級数 $T = \sum_{j\in\mathbb{Z}} T_j$ により, T は $L_q(\mathbb{R}^3)$ 上の有界作用素として定められる.

2 階微分 $\nabla^2 u$ の評価自体は直接には用いられないが, 同じ思想のもとで上記の手法を徹底させると, $(\nabla u, p)$ の L_q-評価が示される.

定理 1.2 ([22]) $1 < q < \infty$, $f \in \dot{W}_q^{-1}(\mathbb{R}^3)$ とする. このとき, 問題 (1.3) に対して, 解 $(u, p) \in \dot{W}_q^1(\mathbb{R}^3) \times L_q(\mathbb{R}^3)$ が存在し, このクラスにおいて u に対する ω の定数倍の違いを除いて一意である. また, この解は評価 $\|(\nabla u, p)\|_{L_q(\mathbb{R}^3)} + \|(\omega \times x)\cdot\nabla u - \omega \times u\|_{\dot{W}_q^{-1}(\mathbb{R}^3)} \le C\|f\|_{\dot{W}_q^{-1}(\mathbb{R}^3)}$ を満たす. ここで, 定数 $C = C(q) > 0$ は f のみならず $|\omega|$ にも依らない.

定理 1.2 と同様な結果, すなわち解の存在, 一意性および L_q-評価 $\|(\nabla u, p)\|_{L_q(D)} \le C\|f\|_{\dot{W}_q^{-1}(D)}$ が外部問題 (1.2) に対して成立するのは, $3/2 < q < 3$ のときに限る ([22]). 制限 $n/(n-1) < q < n$ (空間次元 $n \ge 3$) は, 通常の Stokes 問題 $(\omega = 0)$ に対しては, Borchers-Miyakawa [3], Galdi-Simader [17], Kozono-Sohr [27], [28] により明らかにされ, 最良である. しかし, 制限 $q > 3/2 = n/(n-1)$ のために, L_q-理論だけで定常 Navier-Stokes 問題 (1.1) を解くことはできない. このことは, 3 次元外部問題特有の困難である. $L_{3/2}$ では狭すぎて, 以下の定理 1.3 の意味での可解性が得られないので, 線型問題が解けるように関数空間を少しひろげ, かつその空間は非線型性により必然的に選ばれるものでなくてはならない. $\omega = 0$ のとき, 空間 $L_{3/2,\infty}(D)$ の中で議論がすべてうまくいくことを Kozono-Yamazaki [29] が示し, さらに物体が並進する場合も (並進速度 $\to 0$ での解の挙動を議論するために) Shibata-Yamazaki [37] により空間 $L_{3/2,\infty}(D)$ が再び用いられた. 次の定理は, 空間 $L_{3/2,\infty}(D)$ も含めて, 問題 (1.2) の解の存在, 一意性, 評価をすべて示しうる Lorentz 空間は何であるかを明らかにしたものであり, $\omega = 0$ の場合の [29], [37] の結果の拡張である.

定理 1.3 ([7]) (q, r) は (i) $(q, r) = (3/2, \infty)$; (ii) $3/2 < q < 3$, $1 \le r \le \infty$; (iii) $(q, r) = (3, 1)$ のいずれかを満たし, $f \in \dot{W}_{q,r}^{-1}(D)$ とする. このとき, 問題 (1.2) に対して, 一意解 $(u, p) \in \dot{W}_{q,r}^1(D) \times L_{q,r}(D)$ が存在し, 評価 $\|(\nabla u, p)\|_{L_{q,r}(D)} + \|(\omega\times x)\cdot\nabla u - \omega\times u\|_{\dot{W}_{q,r}^{-1}(D)} \le C\|f\|_{\dot{W}_{q,r}^{-1}(D)}$ が成り立つ. ここで, 定数 $C = C(q, r, a_0) > 0$ は, $a_0 > 0$ を任意に与えるごとに, $|\omega| = |a| \le a_0$ である ω について一様に取れる.

証明の概略を, 最も重要な $(q, r) = (3/2, \infty)$ の場合に述べよう. まず, 定理 1.2 を用いて実補間することにより, Lorentz 空間での同様な結果が得られる. 特に $(q, r) = (3/2, \infty)$ のときの結果を用いて, 全空間 $\mathbb{R}^3$ および有界領域 $D \cap B_\rho$ での解を cut-off 関数により接続させて貼り合わせ, 外部問題の解の parametrix を具体的につくる. ただし, $B_\rho = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| < \rho\}$. その際に, divergence の値を修正するために, Bogovskiĭ [1] の結果を用いる. そのときの parametrix (v, π) は, $Lv + \nabla\pi = f + Rf$, $\mathrm{div}\, v = 0$, $v|_{\partial D} = 0$ を満たす. ただし, Rf は f から定まる剰余項であり, その台は compact である. 埋蔵 $\dot{W}_{3,1}^1(D) \hookrightarrow L_\infty(D)$ と Fredholm の理論を援用することにより, $I + R$ は $\dot{W}_{3/2,\infty}^{-1}(D)$ において有界な逆作用素をもつことが分かる ($q < 3/2$, あるいは $q = 3/2$ でも $r < \infty$ のときは, $f \in \dot{W}_{q,r}^{-1}(D)$ としても $Rf \in \dot{W}_{3/2,\infty}^{-1}(D)$ は示されるが, 一般に $Rf \in \dot{W}_{q,r}^{-1}(D)$ でない). こうして, $L_{3/2,\infty}$-評価を満たす問題 (1.2) の解が得られる. 評価の定数 $C > 0$ が $|\omega| \in [0, a_0]$ に依らないことは, 別途背理法で示される. この証明は, parametrix を 2 度つくる Shibata-Yamazaki [37] の方法を幾分簡単にしたものである.

2 非定常流

D 上で solenoidal であって各成分が $C_0^\infty(D)$ に属するベクトル場 $u=(u_1,u_2,u_3)^T$ の全体を $C_{0,\sigma}^\infty(D)$ であらわす．$1<q<\infty$ として，$C_{0,\sigma}^\infty(D)$ の $L_q(D)$ における完備化を $J_q(D)$ とすると，Helmholtz 分解 $L_q(D)=J_q(D)\oplus\left\{\nabla p\in L_q(D); p\in L_{q,loc}\left(\overline{D}\right)\right\}$ が成り立つ ([13], [32])．$J_q(D)$ への上への射影を P であらわすと，Stokes 作用素 A は，$D_q(A)=\{u\in W_q^2(D)\cap J_q(D); u|_{\partial D}=0\}$, $Au=-P\Delta u$ により定義される．$J_q(D)$ 上の作用素 $\mathcal{L}$ を

$$\begin{cases} D_q(\mathcal{L})=\{u\in D_q(A); (\omega\times x)\cdot\nabla u\in L_q(D)\}, \\ \mathcal{L}u=PLu=-P[\Delta u+(\omega\times x)\cdot\nabla u-\omega\times u] \end{cases} \tag{2.1}$$

と定義する．まず，$q=2$ のとき，[20] によって $-\mathcal{L}$ は $J_2(D)$ 上の縮小半群 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ の生成作用素であることが示された．既に述べたように，この半群は解析的でない．[21] では，このことが全空間 $\mathbb{R}^3$ 上の半群 (0.5) に対して示された．Farwig-Neustupa [10], Farwig-Nečasová-Neustupa [9] は，全空間のみならず外部問題に対しても，生成作用素の spectrum を調べた．特に，空間 $J_q(D)$ 上での真性 spectrum は，$q\in(1,\infty)$ に依らずに $\sigma_{ess}(-\mathcal{L})=\{\lambda=\mu+ika;\ \mu\leq 0,\, k\in\mathbb{Z}\}$ となり，従って $T(t)$ は解析的でない．このことは，移流項 $(\omega\times x)\cdot\nabla u$ による双曲型の効果の現れである．しかし，粘性項 Δu があるので半群 $T(t)$ が平滑性を有さないはずはなく，実際，全空間 $\mathbb{R}^3$ での半群に対しては，初期関数 f が滑らかでなくても，$t>0$ において $T_{\mathbb{R}^3}(t)f$ が高階の Sobolev 空間に入ることが (0.5) の表示から分かる．[21] の要点は，外部問題の解から次のような平滑化効果を引き出したことである：$f\in D_2(A^\delta)$ ならば $t>0$ に対して $T(t)f\in D_2(A^\alpha)$ であり，評価 $\|A^\alpha T(t)f\|_{L_2(D)}\leq Ct^{-\alpha+\delta}\|f\|_{D_2(A^\delta)}$ $(0<t<1)$ が成り立つ．ただし，$0<\delta\leq 1/2$, $\delta\leq\alpha\leq 1$ である．Fujita-Kato [12] 以来，解析半群を用いた局所解の構成法は広く応用されてきたが，直接に必要なのは解析性それ自体ではなく，それからの帰結である $t=0$ の近くでの平滑性評価である．半群 $T(t)$ の評価と非線型項の $D_2(A^\delta)$ での評価を組み合わせると，(0.3) の時間局所解を一意的に構成できる．(0.3) の境界条件は $\widetilde{u}|_{\partial D}=\omega\times x=\frac{-1}{2}\mathrm{rot}\,(|x|^2\omega)$ と書けるので，$0\leq\zeta\leq 1$ かつ境界 ∂D の近傍で $\zeta=1$ となる $\zeta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ を固定し，$b(x)=\frac{-1}{2}\,\mathrm{rot}\,\{\zeta(x)|x|^2\omega\}$ とおいて，(0.3) の $\widetilde{u}$ に対して改めて $u=\widetilde{u}-b$ を考える．このとき，u の満たす積分方程式は，

$$u(t)=T(t)(u_0-b)-\int_0^t T(t-\tau)P[F(b)+(u\cdot\nabla b+b\cdot\nabla u+u\cdot\nabla u)(\tau)]\,d\tau \tag{2.2}$$

となる．ただし，$F(b)=Lb+b\cdot\nabla b$.

定理 2.1 ([21]) *$u_0-b\in D_2(A^{1/4})$ とする．このとき，$T>0$ が存在して，方程式 (2.2) は一意解 $u\in C\left((0,T];D_2(A)\right)\cap C\left([0,T];D_2(A^{1/4})\right)$ をもつ．*

空間 $J_q(D)$ では，半群の生成自体が難しい問題であった．Geissert-Heck-Hieber [18] は，Hille-Yosida の生成定理には頼らずに，具体的に resolvent $(\lambda I+\mathcal{L})^{-1}$ を構成し，さらに Laplace 変換を通して半群 $T(t)$ も具体的に求めて，これの生成作用素の定義域が (2.1) で指定されたようになることを確かめるという手順で，次の定理を示した．また最近，Shibata [36] はその別証明を与えた．

定理 2.2 (Geissert-Heck-Hieber [18], Shibata [36]) *$1<q<\infty$ とするとき，(2.1) の作用素 $\mathcal{L}$ は空間 $J_q(D)$ 上で半群 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ を生成する．*

(2.5) の特に $t=0$ の近くでの平滑性評価も得られるので，次の局所解存在定理が示される．

定理 2.3 (Geissert-Heck-Hieber [18]) $3 \le q \le r < \infty$, $u_0 - b \in J_q(D)$ とする．このとき, $T > 0$ が存在して, 方程式 (2.2) は一意解 $u \in C\left((0,T]; W_r^1(D)\right) \cap C\left([0,T]; J_q(D)\right)$ をもつ．

次に, 時間大域解とその漸近挙動を, 定常解の安定性との関連の中で考える．(0.3) の定常解を (u_s, p_s) であらわす．Galdi-Silvestre [15] は [14] の定常解の周りで一意な時間大域解を構成した．(0.3) の $\widetilde{u}$ に対して改めて $u = \widetilde{u} - u_s$ とおくと, この u に対する問題は

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{L}u + P(u \cdot \nabla u_s + u_s \cdot \nabla u + u \cdot \nabla u) = 0, \qquad u(0) = u_0 - u_s. \tag{2.3}$$

定理 2.4 (Galdi-Silvestre [15]) $u_0 - u_s \in D_2(\mathcal{L})$ とする．$|\omega|$ と $\|u_0 - u_s\|_{W_2^1(D)}$ が十分小さいとき, (2.3) の一意解 $u \in W_\infty^1\left(0,\infty; J_2(D)\right) \cap C\left((0,\infty); W_2^2(D)\right) \cap C\left([0,\infty); W_2^1(D)\right)$ が存在して, $\lim_{t\to\infty} \|\nabla u(t)\|_{L_2(D)} = 0$.

柴田良弘氏と筆者 [23] は, 定常解の漸近安定性と共に擾乱の減衰の速さも求めた．初期擾乱は小さいとするが, その滑らかさを仮定しない．u_s を定理 1.1 で得られた定常解として, (2.3) は定理 2.2 の半群 $T(t)$ を用いて積分方程式

$$u(t) = T(t)(u_0 - u_s) - \int_0^t T(t-\tau)P\left(u \cdot \nabla u_s + u_s \cdot \nabla u + u \cdot \nabla u\right)(\tau)\, d\tau \tag{2.4}$$

に書き直される．解析の要点は本質的には L_q-理論であるが, (2.4) を解くには L_q だけでは最後の部分を詰められない．その部分とは, 線型項 $u \cdot \nabla u_s + u_s \cdot \nabla u$ の扱いである．その係数 (定常解) のクラス $\nabla u_s \in L_{3/2,\infty}(D)$, $u_s \in L_{3,\infty}(D)$ より, この線型項を単純な摂動として L_q-理論だけで扱うことはできない．Yamazaki [38] は, Lorentz 空間を用いて議論するとこのような係数をもつ線型項を主要部からの摂動として比較的簡単に扱えることを明らかにした．

そこで, Borchers-Miyakawa [4] に従って, solenoidal な Lorentz 空間 $J_{q,r}(D)$ を導入し, 定理 2.2 の半群 $T(t)$ を, 実補間により $J_{q,r}(D)$ 上の半群に拡張する．

定理 2.5 ([23]) $u_0 - u_s \in J_{3,\infty}(D)$ とする．定数 $\delta > 0$ が存在して, $|\omega| + \|u_0 - u_s\|_{L_{3,\infty}(D)} \le \delta$ ならば, 方程式 (2.4) は一意解 $u \in BC\left((0,\infty); J_{3,\infty}(D)\right)$ をもつ．初期条件は, $J_{3,\infty}(D)$ の中で $w^*\text{-}\lim_{t\to 0} u(t) = u_0 - u_s$ の意味で満たされる．$q \in (3,\infty)$ を任意に与える．このとき, 定数 $\widetilde{\delta} = \widetilde{\delta}(q) \in (0,\delta]$ が存在して, $|\omega| + \|u_0 - u_s\|_{L_{3,\infty}(D)} \le \widetilde{\delta}$ ならば, 上で得た解は任意の $r \in (3,q)$ に対して $u \in C\left((0,\infty); J_r(D)\right)$ となって, $\|u(t)\|_{L_r(D)} = O\left(t^{-1/2+3/2r}\right)$ $(t \to \infty)$.

議論の核心部分は, 半群 $T(t)$ の L_p-L_q 評価 $(p \le q)$

$$\|\nabla^j T(t) f\|_{L_q(D)} \le C t^{-j/2-(3/p-3/q)/2} \|f\|_{L_p(D)} \qquad (t > 0) \tag{2.5}$$

の導出である．ただし, $j = 0, 1$ とする．なお, $p = q$, $j = 0$ のときは, $T(t)$ が有界半群であることをあらわし, このこと自体も [23] で初めて示された．1 階微分の評価について, $(2.5)_{j=1}$ のように最良な減衰の速さを得るには $q \le 3\,(=$ 空間次元 $n)$ という制限が生ずるが, この条件は改良されず, このことは外部 Dirichlet 問題に特有である ($\omega = 0$ のとき, [24], [30]).

定理 2.6 ([23]) $j = 0$ のとき $1 < p \le q \le \infty\,(p \ne \infty)$, $j = 1$ のとき $1 < p \le q \le 3$ とする．また, $a_0 > 0$ を任意に与える．このとき, 定数 $C = C(p,q,a_0) > 0$ が存在して, 評価 (2.5) が任意の $f \in J_p(D)$ と $|\omega| = |a| \le a_0$ である ω に対して成り立つ．

定理 2.6 の証明方法の原型は消散項のある双曲型方程式の外部問題に対して Shibata [34] により考案されたスペクトル解析と cut-off テクニックに見られ, 外部 Stokes 問題に対する議論の枠組みは Iwashita [24] により確立された. その要点は, 本質的には, 有界な台をもつ初期関数 $f \in L_{q,[d]}(D)$ に対して境界近くの有界領域 $D_R = D \cap B_R = \{x \in D; |x| < R\}$ での局所エネルギー減衰評価

$$\|T(t)Pf\|_{W^1_q(D_R)} \leq Ct^{-3/2}\|f\|_{L_q(D)} \qquad (t \geq 1) \tag{2.6}$$

を求めればよい, というものである. ただし, $1 < q < \infty$ であり, $d > 0$ と $R > 0$ は十分大きく固定されていて, $C > 0$ は q, d, R に依存した定数である. また, $L_{q,[d]}(D) = \{f \in L_q(D); f(x) = 0 \text{ a.e.} |x| \geq d\}$ とおいた. 一方で, 表示 (0.5) より全空間 $\mathbb{R}^3$ での半群 $T_{\mathbb{R}^3}(t)$ が L_p-L_q 評価を満たすことは直ちに分かり, これと (2.6) を組み合わせて定理 2.6 が示される. 手順を大まかに述べると, 以下の (1) ∼ (5) のようになる. 便宜上, 次のような言葉の使い方をしよう. $f \in L_{q,[d]}(D)$ に対する半群あるいは resolvent の D_R 上の norm による評価を「局所 → 局所」評価とよぶことにし, 一般な $f \in J_q(D)$ に対する半群の D_R 上の norm による評価を「大域 → 局所」評価とよぶことにする. cut-off テクニックを用いるのは, 以下の (2), (4), (5) である:

(1) 全空間 $\mathbb{R}^3$ での resolvent 問題の解の「局所 → 局所」評価; (2) 外部 resolvent 問題 (2.7) の解 $(\lambda I + \mathcal{L})^{-1}Pf$ の「局所 → 局所」評価; (3) $T(t)Pf$ の「局所 → 局所」評価 (2.6); (4) $T(t)f$ の「大域 → 局所」評価 $\|T(t)f\|_{W^1_q(D_R)} \leq Ct^{-3/2q}\|f\|_{L_q(D)}$ $(t \geq 1)$; (5) $|x| \geq R$ における $T(t)f$ の減衰評価.

局所的な考察に帰する Shibata-Iwashita の方法とこの問題との相性は良く,「局所 → 局所」評価は半群の解析性と直接には関係のない性質である. とはいえ, 実際には解析半群でないために克服すべき困難が種々あり, 特に次を挙げなければならない: (i) 虚軸に沿い $|\lambda| \to \infty$ としたときの resolvent の漸近挙動; (ii) 半群の resolvent による表現; (iii) 圧力項の取り扱い方.

(iii) は手順 (5) からの要請である. (i) と (ii) は密接に関連しているが, Oseen 半群と比べてみよう. 上記の (2) から (3) を導く際に, Oseen 半群を resolvent の積分で表現する場合, 生成作用素の spectrum は $\lambda = 0$ で虚軸に接する放物線の内側であるから, Kobayashi-Shibata [26] のように虚軸を積分路とする. Oseen 半群は解析的 ([32]) であるから, resolvent の作用素-norm は虚軸に沿い $|\lambda| \to \infty$ としたときに減衰し, $\lambda = 0$ の近くの解析に集中すればよい. resolvent の $\lambda = 0$ の近くは半群の $t \to \infty$ での漸近挙動に直接関係するから, その解析が常に必要なのは言うまでもないが, resolvent $(\lambda I + \mathcal{L})^{-1}$ の虚軸に平行な方向の減衰はないから, Oseen 半群のようにはいかない. しかし, 作用素-norm で考えるのではなく, $f \in L_{q,[d]}(D)$ に対する resolvent 問題

$$\lambda u + Lu + \nabla p = f, \qquad \mathrm{div}\, u = 0 \qquad (x \in D); \qquad u = 0 \qquad (x \in \partial D) \tag{2.7}$$

の解 $u(\cdot, \lambda) = (\lambda I + \mathcal{L})^{-1}Pf$ を有界領域 D_R 上に制限して考えることで初めて, 虚軸に沿って $|\lambda|$ が大きいときの減衰の情報を引き出せる. 結果として, このような局所化された状況のもとでの半群の表現: $T(t)Pf = \frac{i}{2\pi t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau t}\partial_\tau(i\tau I + \mathcal{L})^{-1}Pf\, d\tau$ を正当化できる. これは, もともと逆 Laplace 変換による表現であったのが, 積分路を虚軸へシフトすることで逆 Fourier 変換による表現となっている. 局所化によって $\lambda = 0$ での特異性が弱められ, $\overline{\mathbb{C}_+} \ni \lambda \to 0$ のときに $\partial_\lambda(\lambda I + \mathcal{L})^{-1}Pf$ は $|\lambda|^{-1/2}$ のオーダーで振る舞う. $\lambda = 0$ の近くでの滑らかさで捉えると, 3/2 階微分可能ということが正当化されて, このことが (2.6) の減衰の速さ $O(t^{-3/2})$ に反映されている.

Lorentz 空間での $L_{p,r}$-$L_{q,r}$ 評価 $\|\nabla^j T(t)f\|_{L_{q,r}(D)} \leq Ct^{-j/2-(3/p-3/q)/2}\|f\|_{L_{p,r}(D)}$ も必要である. $j = 1$, $1 < p \leq q = 3$ に対しては (2.5) の実補間では得られず, そしてこの場合 (特に $r = 1$

の評価) が真に必要であるが, 手順 (4) まで立ち返って実補間し, 半群 $T_{\mathbb{R}^3}(t)$ の $L_{p,r}$-$L_{q,r}$ 評価と組み合わせて手順 (5) の議論を繰り返せばよい.

本講演では物体が回転のみする場合を扱ったが, 一定速度 b での並進運動も伴う問題が考えられる. 運動する物体に座標系を固定すると, 運動方程式は (0.3) のそれにもう 1 つの移流項 $\big(O(at)^T b\big)\cdot\nabla\widetilde{u}$ が加えられた形となる ([6]). この項は, 物体が回転軸の方向に並進する場合には Oseen 項 $b\cdot\nabla\widetilde{u}$ である. そのとき, Galdi-Silvestre [16] は定常 Navier-Stokes 問題の解の構成と漸近挙動, 特に wake region の存在を明らかにした. 同じ状況 $\omega \parallel b$ のもとで最近, 柴田良弘氏は半群の生成および L_p-L_q 評価を示し ([36]), それを用いて [16] の解の安定性を証明した.

参考文献

[1] M. E. Bogovskiĭ, Soviet Math. Dokl. **20** (1979), 1094–1098.
[2] W. Borchers, Habilitationsschrift, Universität Paderborn, 1992.
[3] W. Borchers and T. Miyakawa, Acta Math. **165** (1990), 189–227.
[4] W. Borchers and T. Miyakawa, Acta Math. **174** (1995), 311–382.
[5] Z. M. Chen and T. Miyakawa, Adv. Math. Sci. Appl. **7** (1997), 741–770.
[6] R. Farwig, Tohoku Math. J. **58** (2006), 129–147.
[7] R. Farwig and T. Hishida, Funkcial. Ekvac. **50** (2007), 371–403.
[8] R. Farwig, T. Hishida and D. Müller, Pacific. J. Math. **215** (2004), 297–312.
[9] R. Farwig, Š. Nečasová and J. Neustupa, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B1** (2007), 93–105.
[10] R. Farwig and J. Neustupa, Manuscripta Math. **122** (2007), 419–437.
[11] R. Finn, Arch. Rational Mech. Anal. **19** (1965), 363–406.
[12] H. Fujita and T. Kato, Arch. Rational Mech. Anal. **16** (1964), 269–315.
[13] D. Fujiwara and H. Morimoto, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **24** (1977), 685–700.
[14] G. P. Galdi, J. Elasticity **71** (2003), 1–31.
[15] G. P. Galdi and A. L. Silvestre, Arch. Rational Mech. Anal. **176** (2005), 331–350.
[16] G. P. Galdi and A. L. Silvestre, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B1** (2007), 127–143.
[17] G. P. Galdi and C. G. Simader, Arch. Rational Mech. Anal. **112** (1990), 291–318.
[18] M. Geissert, H. Heck and M. Hieber, J. Reine Angew. Math. **596** (2006), 45–62.
[19] Y. Giga and T. Miyakawa, Arch. Rational Mech. Anal. **89** (1985), 267–281.
[20] T. Hishida, Analysis **19** (1999), 51–67.
[21] T. Hishida, Arch. Rational Mech. Anal. **150** (1999), 307–348.
[22] T. Hishida, J. Math. Soc. Japan **58** (2006), 743–767.
[23] T. Hishida and Y. Shibata, Arch. Rational Mech. Anal. (to appear).
[24] H. Iwashita, Math. Ann. **285** (1989), 265–288.
[25] T. Kato, Math. Z. **187** (1984), 471–480.
[26] T. Kobayashi and Y. Shibata, Math. Ann. **310** (1998), 1–45.
[27] H. Kozono and H. Sohr, Indiana Univ. Math. J. **41** (1991), 1–27.
[28] H. Kozono and H. Sohr, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **19** (1992), 155–181.
[29] H. Kozono and M. Yamazaki, Math. Ann. **310** (1998), 279–305.
[30] P. Maremonti and V. A. Solonnikov, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **24** (1997), 395–449.
[31] K. Masuda, J. Math. Soc. Japan **27** (1975), 294–327.
[32] T. Miyakawa, Hiroshima Math. J. **12** (1982), 115–140.
[33] R. Mizumachi, J. Math. Soc. Japan **36** (1984), 497–522.
[34] Y. Shibata, Tsukuba J. Math. **7** (1983), 1–68.
[35] Y. Shibata, Quart. Appl. Math. **57** (1999), 117–155.
[36] Y. Shibata, 京都大学数理解析研究所講究録 **1536** (2007), 1–18.
[37] Y. Shibata and M. Yamazaki, Japan. J. Math. **31** (2005), 225–279.
[38] M. Yamazaki, Math. Ann. **317** (2000), 635–675.