

完全楕円積分を含む超越方程式に帰着される微分方程式

四ツ谷 晶二 (龍谷大学理工学部)

微分方程式の解の大域的構造を完全に調べることは最も基本的ながら難しい問題である。なぜならば、これが分かるということは、考えている微分方程式に含まれるパラメータをいかように与えても、そのパラメータ値においての、微分方程式の解の存在・非存在・一意性・多重度に関して即座に完全に解答できることを意味するからである。

よく知られた非線形微分方程式であっても、解の大域的構造が完全に解明されているものは、ごく少数である。下記文献 [WY2008]~[IKOY03] で調べた微分方程式達は、過去に多くの研究があるにもかかわらず、最も基本的な問いである、解の大域的構造は未解明であった。

問題によっては、古典解析の華である、楕円関数や完全楕円積分を用いることにより、完全に解の大域的構造を決定できる時代的な状況あることに数年前気づいた。それは、極めて自然な考え方で昔の人も考えたであろうが、計算が膨大で通常はすぐに捨て去る方法であった。

充実した視覚化機能をもつ数式処理ソフトである、Maple, Mathematica 等で気楽に楕円関数や完全楕円積分の計算し、いろんな視点から視覚化できる状況になっている。数学公式集に載っていないような計算も簡単にやってくれ驚いたことも多々ある。いろんなアイデアでとりあえず計算、それを視覚化してみても、アイデアの方向性が正しそうかどうかを試せるのが大きい。

ミネソタ大学の Ni 教授との共同研究のうち、2000 年ごろから始めた、cross-diffusion 方程式の極限方程式の解の構造を解明するため、さまざまな試行錯誤を繰り返しているうちにその手応えを感じたのが最初のきっかけである。

この問題はなかなかの難問で存在・非存在については、[LNY2004] でほぼ完全な結果を得たが、解の個数を知ることは大変難しく現在も研究継続中である。この完全解決のためにいろいろと考えたことが、いくつかの別の未解決問題に有効であることが分かりそちらの方が先に解けてしまった。

池田・近藤・岡本 3 氏との共同研究 [IKOY2003] を手始めに、小杉・森田氏との共同研究 [KMY2005], [KMY2005g], [KMY2007] で大きく進展して、松本・村井氏の共同研究 [MMY2005] の研究に応用されている。また、高木・高市氏との共同研究 [Y2006] にもつながっている。現在は、若狭氏が突破口をひらいた、線形化固有値問題の固有関数をすべて具体的に求める研究 [WY2008] を深めている中で、いくつか新たな発見に出会っている。

下記文献にある研究においては、解の大域的構造を決定する問題は、完全楕円積分 $K(k), E(k), \Pi(*, k), k$ からなる超越方程式の非存在定理、一意性、解の多重度を正確に決定する問題に帰着される。問題点は、しばしば、 $\Pi(*, k)$ の

*の所に, $K(k), E(k)$ さえ入っている完全楕円積分の合成関数が現れることである. もともとの問題の難しさを同値な超越方程式に帰着し訳であるから, 難しい超越方程式が出てくるのは当然ある.

さて, 不思議なことに, 完全楕円積分を含む超越方程式の解法の理論はあまり整備されていないようである. 頼りになるのは, 多項式の連立方程式の古典理論である. 問題は, 超越方程式の問題をいかにして多項式の連立方程式の古典理論に帰着するかである. ある程度の一般的な原理は見つけることはできたが, これは, 問題をみて考えるしかないというのが実情である.

得られた解の挙動はさらに大変興味深い. これは特異摂動問題の新たな解法を与え, 全く異なる視点を与える.

参考文献

- [WY2008] T.Wakasa and S.Yotsutani, *Representation formulas for some 1-dimensional linearized eigenvalue problems*, Commun. Pure Appl. Anal. 7 (2008), 745-763.
- [KMY2007] S. Kosugi, Y. Morita and S. Yotsutani, *Stationary solutions to the one-dimensional Cahn-Hilliard equation: proof by the complete elliptic integrals*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 19 (2007), 609-629.
- [Y2006] S. Yotsutani (with I. Takagi and H. Takaichi): *On a shadow system to Gierer-Meinhardt system with non-local term*. RIMS Kokyuroku 1475 (2006), 149-154.
- [KMY2005g] S. Kosugi, Y. Morita and S. Yotsutani, *Global bifurcation structure of a one-dimensional Ginzburg-Landau model*, J. Math. Phys., 46 (2005), no. 9, 095111, 24.
- [KMY2005] S. Kosugi, Y. Morita and S. Yotsutani, *A complete bifurcation diagram of the Ginzburg-Landau equation with periodic boundary conditions*, Commun. Pure Appl. Anal., 4 (2005), 665-682.
- [MMY2005] W. Matsumoto, M. Murai and S. Yotsutani, *What have we learned on the problem: Can one hear the shape of a drum?*, Phase Space Analysis of Partial Differential Equations, II (2005), 345-361.
- [LNY2004] Y. Lou, W.-M. Ni and S. Yotsutani, *On a limiting system in the Lotka-Volterra competition with cross-diffusion*. Partial differential equations and applications, Discrete Contin. Dyn. Syst., 10 (2004), 435-458.
- [IKOY2003] H. Ikeda, K. Kondo, H. Okamoto and S. Yotsutani: *On the global branches of the solutions to a nonlocal boundary-value problem arising in Oseen's spiral flows*, Commun. Pure Appl. Anal., 3 (2003), 381-390.