

半導体のモデル方程式の階層構造 (Hierarchy of semiconductor equations)

鈴木 政尋 (東京工業大学, D3, 学振特別研究員 DC2)

e-mail: Masahiro.Suzuki@is.titech.ac.jp

半導体中の電子流を記述するモデル方程式として, Heat-conductive hydrodynamic model (HHD モデル), Energy-transport model (ET モデル), Drift-diffusion model (DD モデル) 等の方程式系が提案され, デバイスの使用用途に応じて, 設計の際のシミュレーションに利用されている. 従って, これらのモデル方程式間の関係 (階層構造) の解析は, 数学的に興味深いだけでなく, 工学的にも重要な問題である. この関係は, モデル方程式に含まれる物理係数である緩和時間を形式的に 0 に近づける極限操作 (緩和極限) によって, 説明できる. 本講演ではこれらのモデルの解の長時間挙動及び緩和極限について議論し, モデルの階層構造を解明する.

HHD モデル は次の方程式系で与えられる.

$$\rho_t + j_x = 0, \quad (1a)$$

$$j_t + \left(\frac{j^2}{\rho} + \theta \rho \right)_x = \rho \phi_x - \frac{j}{\tau_m}, \quad (1b)$$

$$\rho \theta_t + j \theta_x + \frac{2}{3} \left(\frac{j}{\rho} \right)_x \rho \theta - \frac{2}{3} \kappa \theta_{xx} = \frac{2\tau_e - \tau_m}{3\tau_m \tau_e} \frac{j^2}{\rho} - \frac{\rho}{\tau_e} (\theta - \bar{\theta}), \quad (1c)$$

$$\phi_{xx} = \rho - D. \quad (1d)$$

ここで, ρ, j, θ, ϕ は未知関数であり, それぞれ, 電子密度, 電流密度, 絶対温度, 電位を表す. また, $\bar{\theta}, \kappa, \tau_m, \tau_e$ は, 室温, 熱伝導係数, モーメントの緩和時間, エネルギーの緩和時間を表す正定数とする. ドーピング・プロファイル $D(x)$ は半導体中に固定されている正イオンの分布を表す関数であり, ここでは有界連続性と正值性を仮定する. 半導体デバイスは微小である為, 有界領域 $\Omega := (0, 1)$ 上で方程式系 (1) に次の境界条件を課した初期値境界値問題を考察する.

$$(\rho, j, \theta)(0, x) = (\rho_0, j_0, \theta_0)(x), \quad (2)$$

$$\rho(t, 0) = \rho_l, \quad \rho(t, 1) = \rho_r, \quad \phi(t, 0) = 0, \quad \phi(t, 1) = \phi_r, \quad (3)$$

$$\theta_x(t, 0) = \theta_x(t, 1) = 0. \quad (4)$$

ここで, ρ_l, ρ_r, ϕ_r は正定数である. 方程式 (1c) を解いて, 電圧 ϕ を表す公式が得られる.

$$\phi = \Phi[\rho] := \int_0^x \int_0^y (\rho - D)(t, z) dz dy + \left(\phi_r - \int_0^1 \int_0^y (\rho - D)(t, z) dz dy \right) x.$$

ET モデル 及び DD モデルは, 形式的な極限操作により方程式系 (1) から導出される. まず, 方程式系 (1) でスケール変換

$$s := \frac{t}{\tau_m}, \quad J := \frac{j}{\tau_m}, \quad \varepsilon := \tau_m^2, \quad \lambda := \tau_m \tau_e, \quad \kappa_0 := \frac{\kappa}{\tau_m}$$

を行うと, 次の方程式系が得られる.

$$\rho_s + J_x = 0, \quad (5a)$$

$$\varepsilon J_s + \left(\varepsilon \frac{J^2}{\rho} + \rho \theta \right)_x = \rho \phi_x - J, \quad (5b)$$

$$\rho \theta_s + J \theta_x + \frac{2}{3} \left(\frac{J}{\rho} \right)_x \rho \theta - \frac{2}{3} \kappa_0 \theta_{xx} = \left(\frac{2}{3} - \frac{\varepsilon}{3\lambda} \right) \frac{J^2}{\rho} - \frac{\rho}{\lambda} (\theta - \bar{\theta}), \quad (5c)$$

$$\phi_{xx} = \rho - D. \quad (5d)$$

また，(2) より方程式系 (5) の初期値は次の通りとなる．

$$\rho(0, x) = \rho_0(x), \quad (6a)$$

$$J(0, x) = J_0(x) := j_0/\tau_m(x), \quad (6b)$$

$$\theta(0, x) = \theta_0(x). \quad (6c)$$

方程式系 (5) で，形式的にパラメーター ε を 0 として，ET モデルが得られる．

$$\rho_s + J_x = 0, \quad (7a)$$

$$\rho\theta_s + J\theta_x + \frac{2}{3} \left(\frac{J}{\rho} \right)_x \rho\theta - \frac{2}{3} \kappa_0 \theta_{xx} = \frac{2}{3} \frac{J^2}{\rho} - \frac{\rho}{\lambda} (\theta - \bar{\theta}), \quad (7b)$$

$$\phi_{xx} = \rho - D. \quad (7c)$$

ここで，電流密度は $J = \rho\phi_x - (\theta\rho)_x$ で与えられる．ET モデル (7) に対する初期値及び境界値は (3), (4), (6a), (6c) をおく．さらに，方程式系 (7b) を λ 倍したのち， $\lambda = 0$ を代入して，DD モデルが得られる．

$$\rho_s + J_x = 0, \quad (8a)$$

$$\phi_{xx} = \rho - D. \quad (8b)$$

電流密度は $J = \rho\phi_x - (\bar{\theta}\rho)_x$ である．DD モデル (8) の初期値及び境界値を (3), (6a) とおく．

主結果 本研究では，方程式系 (5), (7), (8) を満たす定常解と時間大域解が一意的に存在することを証明した．加えて，時間大域解の漸近状態が定常解で与えられること及び，収束の速さが指数関数的であることも併せて示した．

さらに，緩和極限の数学的正当化を行い，モデルの階層構造を研究した．主要結果として，パラメーター ε を 0 に近づけたとき，初期値境界値問題 (3)–(6) の解が初期値境界値問題 (3), (4), (6a), (6c), (7) の解に収束することを示した．また，パラメーター ε, λ をともに 0 に近づけたとき，方程式系 (5), (7) の解が方程式系 (8) の解に収束することも証明した．ここで，方程式系 (5) が可解となる為には初期条件は 3 つ必要となるが，方程式系 (7) の初期条件は 2 つ，方程式系 (8) の初期条件は 1 つしかおくことができない．加えて，初期値 (6) が方程式系 (7), (8) の平衡状態，すなわち

$$J_0(x) := \{\rho_0(\Phi[\rho_0])_x - (\theta_0\rho_0)_x\}(x), \quad \theta_0(x) = \bar{\theta}$$

とは限らない為，緩和極限の解析では初期層が現れる．本研究では，この初期層が時間 t とパラメーター ε, λ に対して指数関数的に減衰することも示している．

なお，これらの安定性と緩和極限の定理では緩和時間が十分小さいことを仮定しているが，初期値の大きさには如何なる制限も課す必要はない．

謝辞 本研究は西畑伸也先生（東京工業大学）との共同研究による．

参考文献

- [1] S. NISHIBATA AND M. SUZUKI, Asymptotic stability of a stationary solution to a hydrodynamic model of semiconductors, *Osaka J. Math.* **44** (2007), 639–665.
- [2] S. NISHIBATA AND M. SUZUKI, Initial boundary value problems for a quantum hydrodynamic model of semiconductors: asymptotic behaviors and classical limits, *J. Differ. Equ.* **244** (2008), 836–874.
- [3] S. NISHIBATA AND M. SUZUKI, Asymptotic stability of a stationary solution to a thermal hydrodynamic model for semiconductors, to appear in *Arch. Ration. Mech. Anal.*.
- [4] S. NISHIBATA AND M. SUZUKI, Relaxation limit and initial layer to hydrodynamic models for semiconductors, to appear.
- [5] S. NISHIBATA AND M. SUZUKI, Hierarchy of semiconductor equations: relaxation limits with initial layers for large initial data, to appear.