Asymptotic dynamics for nonlinear Schrödinger equations

Kenji Nakanishi (Kyoto University)

この講演では非線形 Schrödinger 方程式の解の時空大域的挙動に関して、最近の研究から幾つか話題を選んで紹介する。具体的には

(1) エネルギー解の爆発と散乱
(2) 平面波解の漸近安定性
(3) 調和写像の漸近安定性

1. Introduction

この講演で方程式は主に

$$iu_t + \Delta u = \lambda |u|^p u, \quad u(t,x) : \mathbb{R}^{1+d} \to \mathbb{C}, \quad (\lambda \in \mathbb{R},\ p > 0) \tag{1.1}$$

および類似のものを考える。これ以外にも例えば空間定義域が双曲空間の場合 [29, 3], $\mathbb{Z}$ の場合 [34, 13], 非線形項が散逸性の場合 [25, 37] などについても、解の時間漸近挙動について興味深い研究がなされている。

上の方程式は非線形波動の時空挙動を記述する非線形分散方程式の代表例であり、解の挙動は波の分散性と非線形相互作用の競合によって決定される。そのバランスから生じる典型的な状態としては、

(1) 分散性が支配的で波の振幅が時間減衰する場合、特に線形化方程式の解で近似できる時間漸近挙動…散乱（状態）。
(2) 分散性と非線形相互作用が釣り合って波の振幅が一定の空間形状を保持する場合…進行波、定在波、定常解など。
(3) 非線形相互作用が分散性に打ち勝ち解に特異性を生じる場合…爆発。

技術的には、分散性は線形ＰＤＥ、相互作用は非線形ＯＤＥによって良く近似されるが、それらの相互関係を如何にして解析するかが主要な問題である。特に大域的問題では、時空全体で解を制御するために様々な挙動の有限性・可積分性や減衰評価が重要であり、その為に解の時空振動をうまく利用する事が鍵となる。

解の基本的性質として、L^2 とエネルギーは保存される：

$$\|u(0)\|_{L^2_x} = \|u(t)\|_{L^2_x}, \quad E(u(0)) = E(u(t)) = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 + \frac{2\lambda}{p+2}|u|^{p+2} dx, \tag{1.2}$$

また解集合は時空平行移動、空間回転、値域 $\mathbb{C}$ の回転、時間反転 $u(t) \mapsto \overline{u}(-t)$、等速度変換 $u(t,x) \mapsto u(t, x - vt)e^{i|v|^2 t/4 + ivx/2}$、およびスケール変換

$$u(t,x) \mapsto \mu^{2/p} u(\mu^2 t, \mu x) \tag{1.3}$$

に対し不変である。これから特に、斉次性を持つ問題設定では非線形項と線形項のバランスを調べる事ができ、線形項が支配する場合を subcritical, 釣り合う場合を

critical, 非線形が強い場合を supercritical と呼ぶ。例えば各時刻で斉次 Sobolev 空間 $\dot{H}^s$ ($\|\varphi\|_{\dot{H}^s} = \||\xi|^s \mathcal{F}\varphi\|_{L^2}$) に属する解を考えれば初期ノルムのスケール変化は

$$\|u(0)\|_{\dot{H}^s} \mapsto \|\mu^{2/p} u(0,\mu x)\|_{\dot{H}^s} = \lambda^{2/p+s-d/2}\|u(0)\|_{\dot{H}^s}, \tag{1.4}$$

となる一方、存在時間は $[0,T) \mapsto [0,\lambda^{-2}T)$ だから初期値問題は $s > 2/p - d/2$ $(p < 4/(d-2s))$ のとき subcritical となる。逆に $t = \infty$ 近傍を考えると存在時間は $(T,\infty) \mapsto (\lambda^{-2}T,\infty)$ だから終値問題では supercritical となる。また、critical case で問題設定が完全にスケール不変の場合、時間区間の長短は意味を持たなくなるので、時間大域的な問題は時間局所的な問題と同値になる。

現状では、非線形分散方程式についてある程度精密（解が一意など）な結果は全て subcritical か critical の場合に限られており、時空大域的な問題では $t \to 0, \infty$ の両方で (sub)critical, つまり $\log\lambda \to \pm\infty$ の双方向で漸近的にノルムが非減少でなければならない。

これ以上の基礎事項について詳しくは [9] などを参照されたい。以下の３節ではそれぞれ具体的な問題とその解析について述べる。

2. エネルギー解の爆発と散乱

L^2 とエネルギーの保存則から最も自然な線形関数空間は $H^1 = H^1_2$ である。このエネルギー空間において (1.1) が上の意味で $t \to 0, \infty$ の両方で (sub)critical となるのは、$4/d \le p \le 4/(d-2)$ の場合であり、非線形分散方程式について、ＰＤＥの観点からは最も解析の進んでいるケースである。非線形項が集約性 $(\lambda < 0)$ の場合、

(1) 散乱解（H^1 ノルムが小さい場合、Strichartz 評価での縮小写像による）
(2) 孤立波解（制限付き変分法による。H^1 ノルムに下限がある）
(3) 爆発解（例えばエネルギーが負の場合、積分不等式による背理法）

が全て H^1 に存在する事は以前から知られているが、それらの関係や一般解の挙動については良く分かっていない。

Kenig-Merle [31] は、$p = 4/(d-2)$, $d = 3,4,5,$ かつ解が球対称の場合に、基底状態（最小エネルギー定常解）よりエネルギーが下の解全体が、変分的不等式により散乱解と爆発解の領域へ分割される事を示した。この結果で本質的に新しいのは散乱部分である。以前は上の小さな解の他、非線形項が反発性 $(\lambda > 0)$ の場合（全ての H^1 解が散乱）[17, 39, 11]、$p = 4/d$ で重み付き空間 $\langle x\rangle^{-1}H^1$ の場合（L^2 が基底状態より小さい [45] か $\lambda > 0$ [16] なら散乱）については知られていたが、このように関数空間を綺麗に二分する結果は初めてであろう。[1] により一般化された形で結果を述べると以下のようになる。なお [26, 14] では（特に $p = 3, d = 3$ の場合に）同値な分割条件を Gagliardo-Nirenberg 型不等式で与えているが、以下に述べる形は方程式が斉次で無くても有効である。まず基底状態を定めるエネルギー汎関数を

$$S(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2}(|\nabla\varphi|^2 + |\varphi|^2) + \frac{\lambda}{p+2}|\varphi|^{p+2}dx \tag{2.1}$$

とおき、これを用いて K, m を次で定める：

$$\begin{aligned} K(\varphi) &= \partial_\mu|_{\mu=1} S(\mu^{d/2}\varphi(\mu x)) = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi|^2 + \frac{d\lambda p}{2(p+2)}|\varphi|^{p+2}dx, \\ m &= \inf\{S(\varphi) \mid \varphi \in H^1,\ \varphi \neq 0,\ K(\varphi) = 0\} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Theorem 1. $4/d < p \leq 4/(d-2)$, $\lambda < 0$ のとき、$m > 0$. さらに (1.1) の初期値 $u(0) \in H^1$ が球対称で $S(u(0)) < m$ のとき、

(1) $K(u(0)) < 0$ なら解は $\pm t > 0$ の両方向で爆発する。

(2) $K(u(0)) > 0$ なら解は大域的で $\exists 1\varphi_\pm \in H^1$, $\lim_{t\to\pm\infty} \|u(t) - e^{it\Delta}\varphi_\pm\|_{H^1} = 0$.

球対称性は subcritical $p < 4/(d-2)$ の散乱部分については外すことができる。爆発部分は [6, 41] の議論により実質的に既知であった。また $p = 4/d$ の場合も同様の議論で L^2 の初期値へ拡張されている [35, 36]。

散乱部分の論法は、concentration compactness の波動方程式に対する精密化である Bahouri-Gérard の profile decomposition を用いて背理法のターゲットを critical element と呼ぶ理想的な解に絞り、その性質（コンパクトかつ分散性）から矛盾を得るというものである。これは分散性を得る部分以外は方程式にあまり依存しない一般的な議論であり、非線形波動方程式や Yang-Mills 方程式など様々な場合へ応用されている [32, 33, 12]。またこれらの結果でスケール不変性は本質的ではなく、非線形 Klein-Gordon 方程式や単純冪でない非線形項へも適用できる [28]。

3. 平面波解の漸近安定性

波動方程式の最も基本的な解は平面波解だが、非線形 Schrödinger 方程式 (1.1) も具体的な平面波解の族を持つ。実際、$|u| = a$ 定数とおくと方程式は簡単に解ける。以下 $p = 2$, $\lambda = 1$ とすると、平面波解は

$$u(t,x) = ae^{-i(a^2+|b|^2)t+ibx+ic} \quad (a > 0, b \in \mathbb{R}^d, c \in \mathbb{R}) \tag{3.1}$$

で全て与えられる。これらが単独で小さな摂動に対して安定か？というのは自然な疑問である。ただし集約性 $(\lambda < 0)$ の場合は線形化方程式が低周波全体で指数増大の解を持つため直ちに除外され、反発性の場合のみが問題となる。

このような解は空間遠方で減衰しないため、上の L^2 やエネルギー積分は有限でなく、通常の解のクラスに入らないが、超流動や非線形光学など物理的にも自然な境界条件である。しかし空間遠方で減衰しない解では空間大域的な相互作用が量も種類も増えるため、時間大域解析は遥かに難しくなる。

平面波 (3.1) は方程式の不変変換で互いに移りあうので、e^{-it} のみ考えれば十分である。さらに $u = e^{-it}\psi$ とおけば平面波は定常解 $\psi = 1$, 方程式は

$$i\dot{\psi} + \Delta\psi = (|\psi|^2 - 1)\psi, \quad \psi : \mathbb{R}^{1+d} \to \mathbb{C}. \tag{3.2}$$

$\psi = 1$ に近い解では発散部分を除いたエネルギーを保存量として考えられる：

$$E(\psi(0)) = E(\psi(t)) = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\psi|^2 + \frac{(|\psi|^2-1)^2}{2}dx < \infty \tag{3.3}$$

このクラスでの時間大域的適切性は $d \leq 3$ のとき [15] で得られた。また空間３次元での平面波の漸近安定性は最近 [22] で得られた。$U = \sqrt{-\Delta/(2-\Delta)}$, $H = \sqrt{-\Delta(2-\Delta)}$ とおく。

Theorem 2. *$d=3$. $\exists\delta>0$, (3.2) の解 ψ の初期値が次式を満たすとき*

$$\int_{\mathbb{R}^3} \langle x\rangle^2(|\nabla\psi(0)|^2 + |\operatorname{Re}\psi(0)-1|^2)dx \leq \delta \tag{3.4}$$

$\exists v_+ \in H^1(\mathbb{R}^3)$ s.t. $xv_+ \in H^1(\mathbb{R}^3)$, $v = \operatorname{Re}\psi - 1 + iU\operatorname{Im}\psi$ とおくと

$$\|v(t) - e^{-itH}v_+\|_{H^1_x} \lesssim |t|^{-1/2}, \quad \|x[e^{itH}v(t) - v_+]\|_{H^1_x} \to 0, \quad (t\to\infty) \tag{3.5}$$

またこれらから $|\psi-1| \lesssim |t|^{-9/10}$ が得られる。$|\psi-1|$ が小さいという仮定は、進行波解 $\psi(t,x) = w(t-cx)$ が存在するため必要である。進行波解の安定性は重要な問題だが、一意性など定常問題のレベルでも分かっていない事が多い。これに関連して空間１次元での kink 解の軌道安定性は最近 [7] により得られている。また特異渦糸の安定性解析において [4] では $d=1$ で (3.2) の非線形項が時間係数 $1/t$ をもつ場合の漸近挙動が調べられている。更に漸近安定性では、進行波の空間遠方での収束が遅いという問題も生じるが、これについては次節で扱う。他方、$t\to\infty$ での漸近形を先に与えると非分散性の解は排除されるので、解の存在は易しくなる。実際 [22] において次が得られた。

Theorem 3. *$d=3$, $\forall z_+ \in H^1(\mathbb{R}^3)$, $\exists\psi$: (3.2) の解 s.t.*

$$\|\operatorname{Re}\psi - 1 + iU\operatorname{Im}\psi + (2-\Delta)^{-1}|\psi-1|^2 - e^{-itH}z_+\|_{H^1} \to 0, \quad (t\to\infty) \tag{3.6}$$

前の定理に比べ、漸近形は２次の修正項を含んでいるが、実際この項は一部の漸近データ $z_+ \in H^1$ に対して $L^\infty_t(L^2_x)$ で非有界になるため除去は必要である。ちなみに空間２次元では分散性が弱いため更に修正が必要であり、漸近データも十分小さく局在化していないと扱えない [21]. なお通常の解のクラス $H^1(\mathbb{R}^d)$ での (1.1) については、$t\to\infty$ で supercritical $2/d < p < 4/d$, かつ $d \geq 3$ の場合に、[40] で漸近的自由解の存在が示されている。上の結果もそれと同様、コンパクト性の議論によるので一意性は得られない。ただし、単純に評価すると t^{-1} の時間減衰が現れるため、非線形項の非共鳴性構造を用いた精密な評価も必要となる。これに関連して、通常のクラス [40] の結果は最近 [27] により $d=2$ へ拡張された。そこでは同様に問題となる t^{-1} の減衰度に対して、最近得られた低次元での平行移動不変な Morawetz 型先験評価 [42, 10] を用いている。しかし、(3.2) に対して分散性の非線形先験評価は知られていない。

(3.6) の解に対する２次変換は、方程式を $\psi=1$ 周りで展開したときに現れる、周波数 $\xi=0$ での特異性を除去するために必要で、この節の散乱結果の全てで鍵となる。このような減衰の悪い項を部分的に除去する２次変換は [24, 44] など２次非線形項の非線形 Schrödinger 方程式の散乱理論で既に有用性が知られていた。特に上の方程式での変換による方程式の改善は劇的で、さらにエネルギーでも強い相殺作用があり、それはコンパクト性の議論の中では本質的役割を果たす。

初期値問題の方では更なる障害として、周波数 $\xi \to 0$ において $H(\xi) \to \sqrt{2}|\xi|$ と波動方程式に近づくために群速度平行な分散波同士の非線形共鳴が強くなるという問題がある。これは実際、低周波極限の非線形波動方程式においてはどんな小さな初期値からでも爆発する [30] 原因となるため深刻である。技術的には、非線形項を振動部分で部分積分した際に Coifman-Meyer の条件を満たさない特異な双線形 Fourier multiplier として現れる。上の結果ではこの問題を multiplier に対する微分を減らした双線形評価によって解決する。

ところで進行波の存在に関して、最近 [8] において 3 次元ではエネルギーに下限値 $E_0 > 0$ がある事が示された。すると上の定理より、次の予想が立てられる

Conjecture 1. $d = 3,\ E(\psi) < E_0 \implies \exists z_+ \in H^1(\mathbb{R}^3)\ s.t.\ (3.6).$

これは $t \to \infty$ で主要項（2 次非線形項）が supercritical な問題なので現状ではたとえ $E(\psi) \ll 1$ としても技術的に不可能に近い。しかし、$d = 4$ では $t \to 0, \infty$ ともに critical なので小さな解の場合は容易になる [20]。

Theorem 4. $d = 4.$ $\exists \delta > 0,$ 任意の初期データ $E(\psi(0)) < \delta$ に対し $\exists 1 z_+ \in H^1(\mathbb{R}^4),$ 逆に任意の漸近データ $\|z_+\|^2_{H^1(\mathbb{R}^4)} < \delta$ に対し $\exists 1 \psi(0),\ s.t.\ v = \operatorname{Re}\psi - 1 + iU \operatorname{Im}\psi,$ $\|v - e^{-itH} z_+\|_{H^1} \to 0.$

この δ を E_0 とするのは、前節の方法と合わせれば技術的には可能と思われる。

4. 調和写像の漸近安定性と永久振動集約

上の問題と同じく、空間遠方での非自明な挙動が時間大域挙動に影響を与える場合として、2 次元平面 $\mathbb{R}^2$ から球面 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ への Schrödinger flow を考える：

$$u_t = u \times \Delta u, \quad u(t,x) : \mathbb{R}^{1+2} \to S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\} \tag{4.1}$$

以下の議論はより一般に Landau-Lifschitz-Gilbert 方程式

$$u_t = (-a_1 u \times +a_2) u \times \Delta u, \quad (a_1 \geq 0,\ a_2 \in \mathbb{R}) \tag{4.2}$$

にも適用できる ($a_2 = 0$ の場合は heat flow)。これらの方程式は局所座標系では非線形項に微分を含む非線形 Schrödinger 方程式となるが、以下で仮定する対称性の下では、適当な orthonormal frame において (1.1) $p = 2$ と類似の方程式を得る（積分型の非局所非線形項を含む)。

ここで解のクラスとしては、回転数 m の回転共変対称で、境界条件を

$$\begin{aligned} &u(t,x) = e^{m\theta R} v(t,r) \quad (x_1 + ix_2 = re^{i\theta},\ R = (0,0,1)\times), \\ &v(t,0) = (0,0,-1), \quad v(t,\infty) = (0,0,1) \end{aligned} \tag{4.3}$$

とすれば、これは上の発展方程式で保存され、この中でエネルギーは、stereograhic projection で z^m の形の調和写像によって最小化される：

$$E(u) = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dx \geq 8\pi m = E(h), \quad h = \frac{1}{r^m + r^{-m}}(2, 0, r^m - r^{-m}). \tag{4.4}$$

スケール・回転不変性より $s>0, \alpha\in\mathbb{R}$ をパラメータとする基底状態の族 $e^{i\alpha R}h(r/s)$ が生成され、上のクラスでエネルギーが最小値に近い写像はエネルギーおよび各点の意味で基底状態のどれかに近く、ゆえに保存則から基底状態の軌道安定性は（大域解が存在すれば）自明である。なお、値域が１点近傍の場合の大域可解性は最近 [5] によりエネルギーが小さい場合に示されたが、critical case のため上の設定との漸近挙動の違いは本質的である。

しかし、時刻大での漸近挙動、例えばパラメータ (s,α) は収束するか（つまり解は一つの調和写像へ収束するか）？と考えると、指数減衰な孤立波の場合と異なり、m が小さいほど調和写像の空間無限遠での収束が遅いため、分散性の摂動部分との長時間相互作用が大きくなり漸近挙動の制御が難しくなる。

この問題は $m\geq 4$ の場合は [19] で漸近安定性が得られているが、 $m\leq 3$ となると、解の調和写像と摂動部への直交分解と、線形化作用素の分散性評価の非整合という問題として現れる。一般に、非線形分散方程式に対するパラメータ自由度を持つ解集合（非分散性の基底状態）の漸近安定性解析では、近傍の解を、時間依存パラメータを持つ主要部分と残りに分解して、摂動部分の分散性とパラメータの収束を同時に得る。その際、摂動部分に対する線形化作用素はパラメータ微分に対応する 0 固有値を持つが、非線形相互作用の固有空間成分を主要部分のパラメータ変化へ組み込む事で、摂動部分から除去する事ができる。これは摂動部分の条件で言えば固有空間との直交性であり、これによって連続スペクトル空間へ制限されて分散性を得る事が期待できる。

ところが、分散性評価はエネルギー評価に比べてデータの空間減衰に敏感なので、上の h のように (パラメータ微分で現れるのは第１成分 h_1) 空間減衰が遅い場合、直交射影が L^2 では意味を持っても分散性評価は破壊してしまうという事が起こる。今の場合、非線形処理のため $L^2_t(L^\infty_x)$ のスケールでの Strichartz 型評価が必要になるが、これが直交射影で保存されるための条件が $m>3$ である。

そこで我々は直交条件を分散性評価を保つよう局在化されたものに換え、その代わりに非線形項で生じる固有空間成分を方程式を用いた空間・時間の部分積分で直接処理するという方法で $m=3$ の場合にも漸近完全性の結果を得た [23]。

Theorem 5. $m=3$. $\exists\delta>0$, 初期値 $u(0)$ が (4.3) のクラスで $E(u)\leq 8\pi m+\delta$ なら解 u は時間大域的で $\exists s>0$, $\exists\alpha\in\mathbb{R}$,

$$\|u(t,x)-e^{m\theta R}e^{\alpha R}h(r/s)\|_{L^\infty_x}\to 0 \quad (t\to\infty) \tag{4.5}$$

さらに heat flow $(a_2=0)$ で回転摂動が無い場合 $(v_2=0,\ \alpha=0)$ は、$m=2$ でも漸近安定性を示せる ($m=1$ では有限時間爆発する [18])。ただし $m\geq 3$ ではパラメータが収束するのに対し、$m=2$ では必ずしも収束せず、

(A) 一つの調和写像へ収束 $\lim_{t\to\infty}s(t)\in(0,\infty)$

(B) 空間原点へ集約 $\lim_{t\to\infty}s(t)=0$

(C) 空間無限遠へ集約 $\lim_{t\to\infty}s(t)=\infty$

(D) そのような二つの時間列が混在 $\liminf_{t\to\infty}s(t)=0$, $\limsup_{t\to\infty}s(t)=\infty$

などの場合が存在する。実際、s の漸近挙動の主要項は初期値 $u(0)$ から具体的な積分で表せるので、上記の挙動を引き起こす初期値は具体的に与えられる。さらにこれら全ての漸近挙動は、エネルギーの意味で可積分より僅かに局在的な摂動に対して安定である。

特に (D) のように集約・離散を無限に繰り返す現象は、一般に critical case の大域解析において最も問題となるシナリオで、これまでその排除に成功した例はいくつもあるが、実際に起こる場合は知られておらず、その点からも興味深い。なお、関連した結果として、波動方程式の場合 (wave map) では、$m = 1$ と $m \geq 4$ でそれぞれ異なるタイプの爆発解が得られている [38, 43]。

References

[1] T. Akahori and H. Nawa, *Blowup and Scattering problems for the Nonlinear Schrödinger equations,* preprint.

[2] H. Bahouri and P. Gerard, *High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations,* Amer. J. Math. **121** (1999), no. 1, 131–175.

[3] V. Banica, R. Carles and T. Duyckaerts, *On scattering for NLS: from Euclidean to hyperbolic space,* preprint, arXiv:0801.2227v2 [math.AP].

[4] V. Banica and L. Vega, *On the stability of a singular vortex dynamics,* preprint, arXiv:0802.1996v2 [math.AP].

[5] I. Bejenaru, A. D. Ionescu, C. E. Kenig and D. Tataru, *Global Schrodinger maps,* preprint, arXiv:0807.0265v1 [math.AP].

[6] H. Berestycki and T. Cazenave, *Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon non linéaires,* C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **293** (1981), no. 9, 489–492.

[7] F. Bethuel, P. Gravejat, J. -C. Saut and D. Smets, *Orbital stability of the black soliton to the Gross-Pitaevskii equation,* preprint, arXiv:0804.0746v1 [math.AP].

[8] F. Bethuel, P. Gravejat and J. C. Saut, *Travelling waves for the Gross-Pitaevskii equation II,* preprint, arXiv:0711.2408.

[9] T. Cazenave, *Semilinear Schrodinger equations,* Courant Lecture Notes in Mathematics, **10**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. xiv+323 pp.

[10] J. Colliander, M. Grillakis and N. Tzirakis, *Tensor products and Correlation Estimates with applications to Nonlinear Schrödinger equations,* preprint, arXiv:0807.0871v2 [math.AP].

[11] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, *Global well-posedness and scattering for the energy-critical nonlinear Schrodinger equation in $\mathbb{R}^3$,* Ann. of Math. (2) **167** (2008), no. 3, 767–865.

[12] R. Côte, C. Kenig, and F. Merle. *Scattering below critical energy for the radial 4D Yang-Mills equation and for the 2D corotational wave map system,* to appear in Comm. Math. Phys.

[13] S. Cuccagna and M. Tarulli, *On asymptotic stability of standing waves of discrete Schrödinger equation in $\mathbb{Z}$,* preprint, arXiv:0808.2024v5 [math.AP].

[14] O. Duyckaerts, J. Holmer and S. Roudenko, *Scattering for the non-radial 3D cubic nonlinear Schrödinger equation,* preprint, arXiv:0710.3630v2 [math.AP].

[15] P. Gérard, *The Cauchy problem for the Gross-Pitaevskii equation,* Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire **23** (2006), no. 5, 765–779.

[16] J. Ginibre and G. Velo, *On a class of nonlinear Schrödinger equations. II. Scattering theory, general case,* J. Funct. Anal. **32** (1979), no. 1, 33–71.

[17] J. Ginibre and G. Velo, *Scattering theory in the energy space for a class of nonlinear Schrödinger equations,* J. Math. Pures Appl. (9) **64** (1985), no. 4, 363–401.

[18] M. Guan, S. Gustafson and T. -P. Tsai, *Global existence and blow-up for harmonic map heat flow,* J. Diff. Equations **246** (2009), 1–20.

[19] S. Gustafson, K. Kang and T. -P. Tsai, *Asymptotic stability of harmonic maps under the Schrödinger flow,* to appear in Duke Math. J.

[20] S. Gustafson, K. Nakanishi, and T. P. Tsai, *Scattering for the Gross-Pitaevskii equation,* Math. Res. Lett. **13** (2006), no. 2-3, 273–285.

[21] S. Gustafson, K. Nakanishi, and T. P. Tsai, *Global dispersive solutions for the Gross-Pitaevskii equation in two and three dimensions.* Ann. Henri Poincare **8** (2007), no. 7, 1303–1331.

[22] S. Gustafson, K. Nakanishi and T. P. Tsai, *Scattering theory for the Gross-Pitaevskii equation in three dimensions,* to appear in Commun. Contemp. Math.

[23] S. Gustafson, K. Nakanishi and T. P. Tsai, in preparation.

[24] N. Hayashi, T. Mizumachi and P. I. Naumkin, *Time decay of small solutions to quadratic nonlinear Schrödinger equations in* $3D$*,* Differential Integral Equations **16** (2003), no. 2, 159–179.

[25] N. Hayashi, P. I. Naumkin and H. Sunagawa, *On the Schrödinger equation with dissipative nonlinearities of derivative type,* SIAM J. Math. Anal. **40** (2008), 278–291.

[26] J. Holmer and S. Roudenko, *A sharp condition for scattering of the radial* $3D$ *cubic nonlinear Schrödinger equation,* Comm. Math. Phys. **282** (2008), no. 2, 435–467.

[27] J. Holmer and N. Tzirakis, *Asymptotically linear solutions in* H^1 *of the* $2-d$ *defocusing nonlinear Schrödinger and Hartree equations,* preprint, arXiv:0805.2925v1 [math.AP].

[28] S. Ibrahim, N. Masmoudi and K. Nakanishi, *Global wellposedness threshold for the focusing nonlinear Klein-Gordon equation,* in preparation.

[29] D. Ionescu and G. Staffilani, *Semilinear Schrödinger Flows on Hyperbolic Spaces: Scattering in* H^1*,* preprint, arXiv:0801.2957v1 [math.AP].

[30] F. John, *Blow-up for quasilinear wave equations in three space dimensions.* Comm. Pure Appl. Math. **34** (1981), no. 1, 29–51.

[31] C. Kenig and F. Merle, *Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, non-linear Schrödinger equation in the radial case,* Invent. Math. **166** (2006), no. 3, 645–675.

[32] C. E. Kenig and F. Merle, *Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy critical focusing non-linear wave equation,* to appear in Acta Math.

[33] C. E. Kenig and F. Merle, *Nondispersive radial solutions to energy supercritical non-linear wave equations, with applications,* preprint, arXiv:0810.4834v1 [math.AP].

[34] P.G. Kevrekidis, D.E. Pelinovsky, A. Stefanov, *Asymptotic stability of small solitons in the discrete nonlinear Schrödinger equation in one dimension,* preprint, arXiv:0810.1778v1 [nlin.PS].

[35] R. Killip, T. Terence and M. Visan, *The cubic nonlinear Schrödinger equation in two dimensions with radial data,* preprint, arXiv:0707.3188v2 [math.AP].

[36] R. Killip, M. Visan and X. Zhang, *The mass-critical nonlinear Schrödinger equation with radial data in dimensions three and higher,* preprint, arXiv:0708.0849v1 [math.AP].

[37] N. Kita and A. Shimomura, *Large time behavior of solutions to Schrödinger equations with a dissipative nonlinearity for arbitrarily large initial data,* to appear in J. Math. Soc. Japan.

[38] J. Krieger, W. Schlag and D. Tataru, *Renormalization and blow up for charge one equivariant critical wave maps,* Invent. Math. **171** (2008), no. 3, 543–615.

[39] K. Nakanishi, *Energy scattering for nonlinear Klein-Gordon and Schrödinger equations in spatial dimensions* 1 *and* 2, J. Funct. Anal. **169** (1999), no. 1, 201–225.

[40] K. Nakanishi, *Asymptotically-free solutions for the short-range nonlinear Schrödinger equation,* SIAM J. Math. Anal. **32** (2001), no. 6, 1265–1271.

[41] T. Ogawa and Y. Tsutsumi, *Blow-up of* H^1 *solution for the nonlinear Schrödinger equation,* J. Differential Equations **92** (1991), no. 2, 317–330.

[42] F. Planchon and L. Vega, *Bilinear virial identities and applications,* to appear in the Annales Scientifiques de l'ENS.

[43] I. Rodnianski and J. Sterbenz, *On the Formation of Singularities in the Critical* $O(3)$ *Sigma-Model,* preprint, arXiv:math/0605023v3 [math.AP].

[44] A. Shimomura, *Modified wave operators for Maxwell-Schrödinger equations in three space dimensions,* Ann. Henri Poincare **4** (2003), no. 4, 661–683.

[45] M. I. Weinstein, *Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates,* Comm. Math. Phys. **87** (1982/83), no. 4, 567–576.