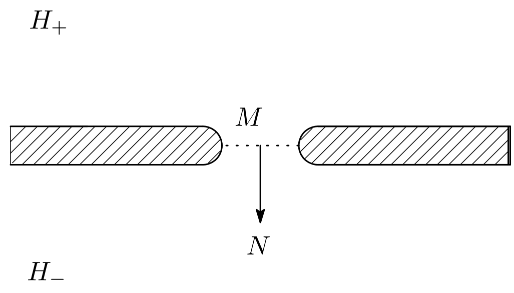
Navier-Stokes flow in an aperture domain

久保 隆徹 (筑波大学大学院数理物質科学研究科)

1　序論

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ を 境界 $\partial\Omega$ が滑らかな aperture domain とする．すなわち，ある正定数 R に対して $\Omega \setminus B_R = (H_+ \cup H_-) \setminus B_R$ なる領域とする（右図参照）．ここで，$B_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R\}$, $H_\pm = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \pm x_n > 1\}$ とおいた.



この領域 Ω において，流体の速度と圧力をそれぞれ $u(x,t)$, $\pi(x,t)$ として，次の非定常 Navier-Stokes 方程式を考える:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla\pi = 0 & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = a. \end{cases} \tag{NS}$$

aperture domain は非有界な境界をもつ領域であり，数学的に興味深い．特に，通常の境界条件の下では解が一意でないことも起こりうる点は興味深い.（考える解のクラスによって）本当に一意性が破れる場合に多くの解から唯一つの解を抜き出すためには，付加境界条件として，aperture を通る flux を指定するか，あるいは上下半平面 $H_\pm$ それぞれの無限遠での圧力差を指定しなければならない（Heywood）．一般に，前者を指定する方が比較的解析しやすく，研究の蓄積も多い．そこで，本講演では flux 条件 $\phi(u) = \int_M u \cdot N d\sigma$ を課した Navier-Stokes 方程式 (NS) を考察する.

主結果を述べる前に, aperture domain において知られている事実を述べる．Miyakawa, Farwig-Sohr により Helmholtz 分解: $L^p(\Omega) = J^p(\Omega) \oplus G^p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$ が成立することが示されている．ここで, $J^p(\Omega)$, $G^p(\Omega)$ は次のように表される:

$$J^p(\Omega) = \overline{\{u \in C_0^\infty(\Omega) \mid \nabla \cdot u = 0 \quad \text{in } \Omega\}}^{\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}}, \qquad G^p(\Omega) = \{\nabla\pi \in L^p(\Omega) \mid \pi \in L^p_{loc}(\overline{\Omega})\}.$$

また, $J^p(\Omega)$ は flux 条件 $\phi(u)$ を用いて次のように特徴付けられることが示されている:

$$J^p(\Omega) = \begin{cases} \{u \in L^p(\Omega) \mid \nabla \cdot u = 0,\ \nu \cdot u|_{\partial\Omega} = 0,\ \phi(u) = 0\} & \text{for } n/(n-1) < p < \infty, \\ \{u \in L^p(\Omega) \mid \nabla \cdot u = 0,\ \nu \cdot u|_{\partial\Omega} = 0\} & \text{for } 1 < p < n/(n-1). \end{cases}$$

ここで, ν は $\partial\Omega$ の単位外法線である．また，Stokes 半群の存在についても示されている． ソレノイダル部分への連続射影作用素を $P : L^p(\Omega) \to J^p(\Omega)$ とおくとき, Stokes 作用素 A を $Au = -P\Delta u$, $u \in D(A) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \cap J^p(\Omega)$ で定義する．このとき，$-A$ は $J^p(\Omega)$ 上解析的半群 $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ を生成することが示されている.

2　主定理

aperture domain における Stokes 半群について次の $L^p - L^q$ 評価を示すことができた：

定理 1 ($L^p - L^q$ 評価). *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ を aperture domain とする.*

(1) $1 < p \leq q < \infty$ とする．このとき, 次の評価が成立する.

$$\|T(t)f\|_{L^q(\Omega)} \leq C_{p,q} t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall\, t > 0,\ \forall\, f \in J^p(\Omega).$$

(2) $1 < p \le q < \infty$ とする．このとき，次の評価が成立する．

$$\|\nabla T(t)f\|_{L^q(\Omega)} \le C_{p,q} t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall\, t > 0,\ \forall\, f \in J^p(\Omega).$$

注 2. ここで (2) の $\nabla T(t)f$ の評価において，$1 < p \le q < \infty$ という (p, q) に対する制限がない点と，次元が $n \ge 2$ である点に注意する．実際，Hishida により，次元が $n \ge 3$ に対しては，$1 < p \le q \le n$ or $1 < p < n < q < \infty$ のとき $\nabla T(t)f$ の評価が成立することが示されている．

3 主定理の応用

Stokes 半群の $L^p - L^q$ 評価の応用として，次の２つを紹介する．

3.1 小さい初期値に関する時間大域解の一意存在性と漸近挙動

定理 3. $n \ge 2$ とする．次を満たす正定数 δ が存在する*:* $\|a\|_{L^n(\Omega)} \le \delta$ である $a \in J^n(\Omega)$ に対して，$\phi(u) = 0$ である *Navier-Stokes* の初期値問題 (NS) は一意な強解 $u(x, t)$ をもち，$t \to \infty$ のとき，

$$\|u(t)\|_{L^r(\Omega)} = o(t^{-\frac{1}{2}+\frac{n}{2r}}) \qquad \text{for } n \le r \le \infty,$$
$$\|\nabla u(t)\|_{L^r(\Omega)} = o(t^{-1+\frac{n}{2r}}) \qquad \text{for } n \le r < \infty$$

が成立する．

注 4. 時間局所解を得るためには，初期値の smallness は必要ない．また，２次元でも，Kozono-Ogawa の方法より，初期値の smallness は必要ない．

3.2 2 次元 aperture domain での定常解の安定性

2 次元 aperture domain において，定常解の存在は Galdi-Padula-Solonnikov, Nazarov により示されている．実際，彼らは領域に（x_2 軸についての）対称性を仮定し，さらに flux が十分小さい定数であることを仮定した場合に $O(1/|x|)$ で減衰する定常解 u_s の一意存在を証明している．彼らの解は滑らかで ∇u_s は $1/|x|^2$ 程度で減衰する：$u_s \in L_{2,\infty}(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, $\nabla u_s \in L_r(\Omega)$ $(\forall r > 1)$. ここで，$L_{2,\infty}$ は弱-L_2 空間 (Lorentz 空間の１つ) である．

この定常解の安定性について考察を行う．そのため次の方程式を考える：

$$\begin{cases} \partial_t v + (v\cdot\nabla)v + (u_s\cdot\nabla)v + (v\cdot\nabla)u_s = \Delta v - \nabla\pi,\ \mathrm{div}\ v = 0, \\ v|_{\partial\Omega} = 0,\ \phi(u) = 0,\ v(x,0) = v_0(x). \end{cases}$$

Duhamel の原理により，次の積分方程式を得る；

$$v(t) = T(t)v_0 - \int_0^t T(t-\tau)P[(v\cdot\nabla)v + (u_s\cdot\nabla)v + (v\cdot\nabla)u_s](\tau)d\tau.$$

この積分方程式を次の mild form に変換する：$\varphi \in C_{0,\sigma}^\infty$ に対して，

$$\langle v(t), \varphi\rangle = \langle T(t)v_0, \varphi\rangle - \int_0^t \langle v\otimes v + u_s\otimes v + v\otimes u_s, \nabla T(t-\tau)\varphi\rangle d\tau. \tag{WIE}$$

このとき，上の定常解に対する安定性の定理を証明することができた；

定理 5. [*]初期摂動 $v_0 \in J^{2,\infty}(\Omega)$ とする．$q_0 \in (2, \infty)$ に対して，次を満たす正定数 $\delta = \delta(q_0)$ が存在する：もし，$\|u_s\|_{2,\infty} \le \delta$ であり，かつ $\|v_0\|_{2,\infty} \le \delta$ であれば，(WIE) は一意な大意解 $v \in BC((0,\infty); J^{2,\infty}(\Omega)) \cap C((0,\infty); J^{q_0,\infty})$ $(2 < q < q_0)$ が存在し，次の性質を満たす：

$$v(t) \to v_0 \qquad \textit{as } t \to 0 \quad \text{weakly } * \textit{ in } J^{2,\infty}(\Omega),$$
$$\|v(t)\|_q = O(t^{-1/2+1/q}) \qquad \text{as } t \to \infty \quad \text{for } q \in (2, q_0).$$

ここで $J^{q,\infty}(\Omega)$ は solenoidal Lorentz 空間である．

注 6. 3 次元以上の aperture domain においては，定常解の存在が領域の対称性を仮定せずに Galdi により示され，その安定性も Hishida により証明されている．

[*]安定性に関する定理は菱田俊明先生（名古屋大学）との共同研究に基づく．