

自己組織化の方程式～走化性と腫瘍形成

鈴木貴

大阪大学基礎工学研究科

suzuki@sigmath.es.osaka-u.ac.jp

粘菌の凝縮を記述する単純化走化性方程式または物質輸送の基礎方程式 (Smoluchowski 方程式) は

$$\begin{aligned} u_t &= \nabla \cdot (\nabla u - u \nabla v) \\ -\Delta v &= u - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u \quad \text{in } \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} &= \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on } \partial \Omega \times (0, T) \\ \int_{\Omega} v &= 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x) \quad \text{in } \Omega \end{aligned} \quad (1)$$

で表される。ここで $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は有界領域, $\partial \Omega$ は滑らか, ν は外向き単位法ベクトルである。有限時間で δ 関数が発生することが古くから予想されてきたが, 最近次のような形で「量子化する爆発機構」としてまとめられた。ただし解の存在時間を $T = T_{\max} \in (0, +\infty]$ とする。

定理 $n = 2, T < +\infty \Rightarrow t \uparrow T$ で $\mathcal{M}(\bar{\Omega})$ において

$$u(x, t) dx \rightarrow \sum_{x_0 \in \mathcal{S}} m_*(x_0) \delta_{x_0}(dx) + f(x) dx.$$

ただし \mathcal{S} は爆発集合, $m_*(x_0)$ は量子化した質量で, $x_0 \in \Omega$ で 8π , $x_0 \in \partial \Omega$ で 4π である。

本講演では, この定理の数理科学的な意味やその証明方法の数理解析的背景, またその後の進展と関連する話題, 特に腫瘍形成に関する研究を紹介する。

[自由エネルギー減衰と質量保存] (1) はマクロには拡散と走化性との競合と粒子による場の形成を記述し, 等遷移確率や平均場階層を用いたミクロな導出も知られている。一方メソスコピックには Helmholtz の自由エネルギーによるモデル B 方程式で, 結果として自由エネルギー減衰と質量保存

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}(u) \leq 0, \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u = 0,$$

が実現される:

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} u(\log u - 1) - \frac{1}{2} \langle (-\Delta_{JL})^{-1} u, u \rangle.$$

定常状態を v で書いたものは自己双対ゲージ理論, 定常乱流平均場理論で現れる非線形固有値問題で, その解の性質から量子化する爆発機構が示唆される一方, 質量保存を局所化することによって弱形式がえられ, 対称化の方法によって Green 関数の特異性が消去されていくつかの重要な性質が導出される。

[スケールリング] collapse 形成のための次元 2 は次元解析によってえられる。(1) のもつスケールリング則は, この方程式が組み込まれている平均場階層に由来し, 定常解はスケールされた世界でも方程式を支配して非定常状態の爆発機構の量子化と創発性を促す

[双対性] (1) は場と粒子の自己相互作用を粒子の立場から記述したものである。定常状態においては両者は Legendre 変換で移りあう。Lagrange 関数は両者を包括するものでこれを用いて, 場についてモデル A を採用したのが Keller-Segel 系である。粒子に reduction したのが (1) であるので, もう一方の特性は場に reduction した方程式として現れる。これが Wolansky(1997) の非局所項をもつ放物型方程式で, 最近量子化しない爆発機構が内在していることが証明された。Ricci flow, 血管新生方程式はこうした側面がさまざまな方向に特化しているものと見なすことができる。

[自己組織化] 生命系は再帰的な自己形式を有するシステムであり, 非平衡再帰構造と情報という 2 つの組織化の原理を持つ。このうちで生命の物理的基礎は, 自己触媒反応系によって駆動される非平衡性再帰構造によって与えられ, 生体内に発生したエントロピーはこの構造によって冷たい宇宙空間に捨てられる。一方モデル B やその類似の方程式が記述する, 熱的にも物質的にも閉じた系で生命体を待っているのは「死」以外にはありえない。しかしこの状況は爆発と消滅の 2 種類にわかれ, 前者が量子化することによって自由エネルギーが局所的な時空に閉じ込められる。

T. Suzuki, *Free Energy and Self-Interacting Particles*, Birkhäuser, Boston, 2005.