準パンルヴェ性をもつ２階非線形方程式について

慶大理工　下村 俊

複素領域における非線形微分方程式

$$y^{(n)} = R(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

$(' = d/dx)$ を考える．ここで右辺は x, y, y', ... $y^{(n-1)}$ の有理関数とする．$n = 1$ のときは，一般解の動く特異点（その位置が初期データに依存する特異点）は代数的分岐点であり，特に Riccati 方程式のときにかぎり，動く特異点は極である，つまり**パンルヴェ性**をもつ．$n = 2$ のときにはもう少し事情は複雑になる．例えば，

$$y'' = -\frac{2(y')^2}{y} + y'$$

の一般解 $y = (e^{x-C_1} - C_2)^{1/3}$ の動く特異点 $x = C_1 + \log C_2$ は代数的分岐点である．また

$$y'' = (1+i)\frac{(y')^2}{y}$$

の一般解 $y = C_1(x - C_2)^i$ の動く特異点 $x = C_2$ は真性特異点である．さらに，異なる種類の動く特異点が混在する場合もある．例えば

$$y'' = -(2y^2+1)\frac{(y')^2}{y}$$

の一般解 $y = (C_1 + \log(x - C_2))^{1/2}$ は $x = C_2$ を動く対数分岐点，$x = C_2 + e^{-C_1}$ を動く代数的分岐点にもつ．そして２階方程式でパンルヴェ性をもつものは，線形方程式，楕円関数のみたす方程式などを除けば，本質的に Painlevé 方程式に限られる．１階方程式，２階方程式のうちで一般解の動く特異点が代数的分岐点であるような方程式の族を考えたとき，Riccati 方程式，Painlevé 方程式はその特別なものであるという見方をすることもできる．考えている方程式について，その一般解の動く特異点はすべて代数的分岐点であるという性質を**準パンルヴェ性**と呼ぶことにする．１階方程式はすべて準パンルヴェ性をもつが２階方程式はそうではない．ここでは，準パンルヴェ性をもつような２階非線形方程式の系列で Painlevé 方程式をその特別なものとして含むようなものを与え，その性質を調べることを目標にする．

方程式

$$(\mathrm{E}_k) \qquad y'' = \frac{2(2k+1)}{(2k-1)^2}y^{2k} + x,$$

$(k = 1, 2, 3, ...)$ の系列を考えよう．$k = 1$ のときこれは Painlevé 方程式

$$\text{(PI)} \qquad y'' = 6y^2 + x$$

に一致する．これらの方程式は準パンルヴェ性をもつ．

定理１　すべての正整数 k に対して方程式 (E_k) は準パンルヴェ性をもつ．

これらの方程式の一般解の動く特異点のまわりでの解の Puiseux 級数展開は次で与えられる．

定理２　方程式 (E_k) の一般解 $y(x)$ を考える．その動く代数的分岐点 x_0 のまわりで $y(x)$ は次のような収束級数に展開される．

$$\begin{aligned} y(x) = \xi^{-2/(2k-1)} &- \frac{(2k-1)^2}{2(6k-1)} x_0 \xi^2 + c\xi^{4k/(2k-1)} \\ &+ \frac{(2k-1)^2}{2(2k-3)(4k-1)} \xi^3 + \sum_{j \geq 6k-2} c_j \xi^{j/(2k-1)}, \quad \xi = x - x_0. \end{aligned}$$

ここで c はもうひとつの積分定数であり，係数 c_j $(j \geq 6k-2)$ は c と x_0 の多項式である．さらに $\xi^{1/(2k-1)}$ は $\sigma^{2k-1} = \xi$ をみたす σ の任意の分枝をあらわす．

Painlevé 方程式 (PI) の任意の解は超越的であり，かならず極をもつ，つまり真に有理型である．この事実は次のように拡張される．

定理３　方程式 (E_k) は整関数解をもたない．さらに，$k \geq 2$ ならば (E_k) は有理型関数解をもたない．

定理４　方程式 (E_k) の任意の解は超越的である．

上の結果によれば $k \geq 2$ ならば (E_k) の任意の解は多価関数であるがそれは代数関数ではない．準パンルヴェ性をもつ方程式について，一般解の大域的な多価性，たとえばそれが代数型関数か否か，について知ることは一般には難しい．しかしいまの場合，次のようなことくらいまでならわかる．

定理５　$k \geq 2$ とする．任意の正整数 ν に対して，少なくとも ν-価であるような解からなる (E_k) の解の 2-parameter 族が存在する．

さらに (PII) を特別な場合として含むような準パンルヴェ性をもつ方程式の系列も存在する．