半空間における圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の時間漸近挙動

中村 徹　(九州大学大学院数理学研究院)

本講演では 3 次元半空間 $\mathbb{R}^3_+ := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x_1 > 0,\, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ 上での圧縮性 Navier-Stokes 方程式

$$\rho_t + \mathrm{div}(\rho u) = 0, \tag{1a}$$

$$\rho\{u_t + (u \cdot \nabla)u\} = \mu_1 \Delta u + (\mu_1 + \mu_2)\nabla(\mathrm{div}\, u) - \nabla p(\rho) \tag{1b}$$

の解の漸近挙動について考察する．ここで ρ, $u = (u_1, u_2, u_3)$ はそれぞれ流体の密度及び流速を表す未知関数であり，$p(\rho) = K\rho^\gamma$ $(K > 0,\ \gamma \geq 1)$ は圧力を表す．また μ_1, μ_2 は粘性係数と呼ばれる定数であり，$\mu_1 > 0,\, 2\mu_1 + 3\mu_2 > 0$ を満たす．方程式 (1) に対して初期条件

$$(\rho, u)(0, x) = (\rho_0, u_0)(x) \tag{2}$$

及び流出境界条件

$$u|_{x_1=0} = (u_\mathrm{b}, 0, 0) \quad (u_\mathrm{b} < 0 : \text{定数}) \tag{3}$$

を課し，初期値 (ρ_0, u_0) は

$$\lim_{x_1 \to \infty} \rho_0(x) = \rho_+, \quad \lim_{x_1 \to \infty} u_0(x) = (u_+, 0, 0)$$

を満たすものとする．ただし $\rho_+ > 0$, u_+ は定数とする．本講演では，初期摂動に対して x_1 方向に減衰の速さを仮定することで，解の定常波への減衰速度を導出する．ここで定常波 $(\tilde{\rho}, \tilde{u})$ は x_1 のみに依存し，$\tilde{u} = (\tilde{u}_1, 0, 0)$ となる (1) の解とする．従って $(\tilde{\rho}, \tilde{u}_1)(x_1)$ は次の常微分方程式系 (4) と条件 (5) を満たす解として与えられる．

$$(\tilde{\rho}\tilde{u}_1)_{x_1} = 0, \tag{4a}$$

$$(\tilde{\rho}\tilde{u}_1^2 + p(\tilde{\rho}))_{x_1} = \mu \tilde{u}_{1x_1x_1}, \tag{4b}$$

$$\tilde{u}_1(0) = u_\mathrm{b}, \quad \lim_{x_1 \to \infty} (\tilde{\rho}(x_1), \tilde{u}_1(x_1)) = (\rho_+, u_+), \quad \inf_{x_1 \in \mathbb{R}_+} \tilde{\rho}(x_1) > 0. \tag{5}$$

ここで $\mu := 2\mu_1 + \mu_2$ は正定数である．定常問題 (4), (5) の解の存在については [2] で議論されており，無限遠方におけるマッハ数 $M_+ := |u_+|/\sqrt{p'(\rho_+)}$ とある定数 w_c が存在して，$M_+ \geq 1$, $u_+ < 0$ かつ $w_\mathrm{c} u_+ > u_\mathrm{b}$ を満たすとき，定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{u}_1)$ が存在することが示されている．ここで定数 w_c は，$M_+ > 1$ の場合は代数方程式 $K\rho_+^\gamma(w^{-\gamma} - 1) + \rho_+ u_+^2(w - 1) = 0$ の $w < 1$ を満たす解として与えられ，$M_+ = 1$ の場合は $w_\mathrm{c} = 1$ となる．さらに $M_+ > 1$ の場合は次の評価が得られている．

$$|\partial_{x_1}^k (\tilde{\rho}(x_1) - \rho_+,\, \tilde{u}_1(x_1) - u_+)| \leq C\delta_\mathrm{S} e^{-\lambda x_1} \quad (k = 0, 1, \cdots).$$

ここで $\delta_\mathrm{S} := |u_\mathrm{b} - u_+|$ はショック強度であり，λ はある正定数とする．

1 次元半空間上の問題に対しては，ショック強度 δ_{S} と初期摂動が十分小さいならば，定常解は漸近安定であることが論文 [2] で示されており，さらにその漸近レートが [3] で計算されている．また多次元半空間の問題については，論文 [1] で平面定常波の漸近安定性が示されている．この安定性定理においては，初期摂動は空間無限遠方で減衰する事のみが仮定されているが，論文 [3] と同様の手法により，初期摂動に対して境界面の法線方向となる x_1 方向に，多項式的または指数的な減衰の速さを仮定することで，解の定常波への漸近の速さを導出することが出来た．

定理 1. $M_+ > 1$, $u_+ < 0$ 及び $w_{\mathrm{c}} u_+ > u_{\mathrm{b}}$ を仮定する．またある正定数 ε_0 が存在して，$\delta_{\mathrm{S}} + \|(\rho_0 - \tilde{\rho}, u_0 - \tilde{u})\|_{H^3} \le \varepsilon_0$ が成り立つものとする．

(i) （多項式減衰）初期値がある定数 $\alpha \ge 0$ に対して $(\rho_0 - \tilde{\rho}, u_0 - \tilde{u}) \in L^2_\alpha(\mathbb{R}^3_+)$ ならば，初期値境界値問題 (1), (2), (3) の解 (ρ, u) は次の減衰評価を満たす：

$$\|(\rho, u)(t) - (\tilde{\rho}, \tilde{u})\|_{L^\infty} \le C(1+t)^{-\alpha/2-1/2}. \tag{6}$$

(ii) （指数減衰）初期値がある正定数 ζ に対して $(\rho_0 - \tilde{\rho}, u_0 - \tilde{u}) \in L^{2,\zeta}(\mathbb{R}^3_+)$ ならば，ある正定数 α が存在して，初期値境界値問題 (1), (2), (3) の解 (ρ, u) は次の減衰評価を満たす：

$$\|(\rho, u)(t) - (\tilde{\rho}, \tilde{u})\|_{L^\infty} \le Ce^{-\alpha t}. \tag{7}$$

ただし $L^2_\alpha(\mathbb{R}^3_+)$, $L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3_+)$ は空間重み付き L^2 空間を表し，それぞれ $L^2_\alpha(\mathbb{R}^3_+) := \{f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3_+); \int_{\mathbb{R}^3_+} (1+x_1)^\alpha |f(x)|^2\, dx < \infty\}$, $L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3_+) := \{f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3_+); \int_{\mathbb{R}^3_+} e^{\alpha x_1} |f(x)|^2\, dx < \infty\}$ で定義される．

減衰評価 (6) 及び (7) を得るために，解の重み付きのアプリオリ評価を導出する．具体的には低階の基本評価については，時間方向と x_1 方向の重みをかけたエネルギー計算を行い，高階導関数を評価する際は時間方向のみの重みをかけて行う．

本講演の内容は，主に東京工業大学大学院情報理工学研究科・西畑伸也先生との共同研究に基づく．

参考文献

[1] Y.Kagei and S.Kawashima, *Stability of planar stationary solutions to the compressible Navier-Stokes equation on the half space*, to appear.

[2] S.Kawashima, S.Nishibata and P.Zhu, *Asymptotic stability of the stationary solution to the compressible Navier-Stokes equations in the half space*, Commun. Math. Phys., **240** (2003), pp. 483–500.

[3] T.Nakamura, S.Nishibata and T.Yuge, *Convergence rate of solutions toward stationary solutions to the compressible Navier–Stokes equation in a half space*, to appear.