角やき裂先端における線形弾性体方程式の解の特異性と逆問題

Singularities of solutions of the linearized elasticity system near a corner or a crack tip and inverse problems

伊藤　弘道　(群馬大学大学院工学研究科)
Hiromichi Itou　(Graduate School of Engineering, Gunma University)

昨今、逆問題は様々な分野で注目を集めている。その典型例の一つは、物体内に潜む未知の不連続性 (き裂、空洞、介在物など) の情報 (位置や形状など) を物理量からなる観測値からいかに抽出するか、という問題であり、材料、医療、地球科学など広範に現れる重要な問題である。理論的にはこれらの多くは偏微分方程式の境界値逆問題として定式化されるが、ほとんどは非適切問題であり、一般の場合に解くことは非常に困難である。また、この種の逆問題の理論的解法について、現在までに世界的に認知されているものは数える程しかない。

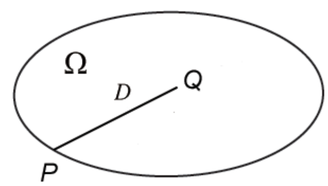
そこで本講演では、その中の一つである池畠優氏が創案した「囲い込み法」[1] を援用し、2 次元線形弾性体内に潜む未知のき裂や多角形空洞を一組の物体境界における変位と物体にかける表面力のデータから再構成することを考える。境界におけるデータは対応する順問題 (境界値問題) の解によって記述されるので、逆問題の解析には、同時に順問題の解の性質の深い考察を必要とする。特にこの問題では、き裂先端や角近傍での境界値問題の解の収束級数展開が重要な役割を果たし、それがこの逆問題の解に大きく寄与していることを述べたい。

まずこの問題を定式化する。$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を有界領域とし、均質等方的な線形弾性体を想定する。$\partial\Omega$ は Lipschitz 連続を仮定する。また、D を未知の Ω の開部分集合とし、$\Omega \setminus \overline{D}$ は連結であるとする。D として特に線分き裂あるいは多角形空洞を想定する。次に線形弾性体の支配方程式は、変位ベクトル $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (u_1(\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}$ に対する 2 階線形楕円型方程式系で記述される

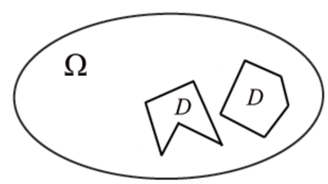
$$A\boldsymbol{u} \equiv \frac{\tilde{E}}{2(1+\tilde{\nu})}\triangle \boldsymbol{u} + \frac{\tilde{E}}{2(1-\tilde{\nu})}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega\setminus\overline{D}.$$

ここで、平面応力状態のとき $\tilde{E} = E,\ \tilde{\nu} = \nu$、平面歪み状態のとき $\tilde{E} = \frac{E}{1-\nu^2},\ \tilde{\nu} = \frac{\nu}{1-\nu}$ であり、$E > 0$ はヤング率、$-1 < \nu < \frac{1}{2}$ はポアソン比を表す。また、$\partial(\Omega\setminus\overline{D})$ における外向き単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とし、応力ベクトルを $T\boldsymbol{u} = \frac{\tilde{\nu}\tilde{E}}{1-\tilde{\nu}^2}(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{n} + \frac{\tilde{E}}{2(1+\tilde{\nu})}\{\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\}\boldsymbol{n}$ と表す。未知のき裂や多角形の境界上では $T\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ を満たすとする。

問題 1 ([2])：D を 1 つの線分き裂とする。その端点を $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{Q}$ とし、$\boldsymbol{P}$ の位置は既知で $\boldsymbol{P} \in \partial\Omega$ とする。一組のデータ $\boldsymbol{u}|_{\partial\Omega},\ T\boldsymbol{u}|_{\partial\Omega}$ から $\boldsymbol{Q}$ の位置を求めよ。



問題 2 ([3])：D を多角形とする（複数個の互いに素な多角形の集合でもよい）。一組のデータ $\boldsymbol{u}|_{\partial\Omega},\ T\boldsymbol{u}|_{\partial\Omega}$ から D の凸包を再構成せよ。



次に、これらの問題に対する主結果を述べるために「囲い込み法」で重要な数学的道具を紹介する。まず、D の支持関数 h_D を以下で定義する

$$h_D(\boldsymbol{\omega}) = \sup_{\boldsymbol{x}\in D} \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} \in S^1.$$

これより、任意の方向ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ に対して、支持関数 $h_D(\boldsymbol{\omega})$ の値を求める事ができれば、我々の問題は解決する。なぜなら、**問題１**については、いくつかの $\boldsymbol{\omega}$ に対する直線 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\omega} = h_D(\boldsymbol{\omega})$ の交点が $\boldsymbol{Q}$ を与え、**問題２**については $\bigcap_{\boldsymbol{\omega}\in S^1}\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\omega} < h_D(\boldsymbol{\omega})\}$ が D の凸包を与えるからである。しかし、任意の $\boldsymbol{\omega}$ に対しては支持関数の値は求められず、以下の条件を課す。

(W1) $\boldsymbol{\omega}$ は直線 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\omega} = h_D(\boldsymbol{\omega})$ と $\overline{D}$ との交点が 1 点のみであるような方向である。

(W2) $\boldsymbol{\omega}$ は (W1) を満たし、その１点 $\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\omega} = h_D(\boldsymbol{\omega})\right\}\cap\overline{D}$ における D の内角二等分線と直線 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\omega} = h_D(\boldsymbol{\omega})$ とが垂直にならない方向である。

ここで今、D は線分き裂または多角形を想定しているので、条件 (W1) もしくは (W2) を満たさない方向は有限個しかないことに留意する。

次に $\mathbb{R}^2$ における $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ の特殊解として

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{\omega} + i\boldsymbol{\omega}^\perp)e^{\tau\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{\omega}+i\boldsymbol{\omega}^\perp)}, \quad \tau > 0$$

を考える。ここで $\boldsymbol{\omega}$ の垂直方向 $\boldsymbol{\omega}^\perp \in S^1$ は $\det(\boldsymbol{\omega}^\perp\ \boldsymbol{\omega}) > 0$ の向きにとる。

主定理：今、$\boldsymbol{u}$ は剛体変位でないとする。**問題１**では (W1) と物体にかける表面力にある仮定を課す。**問題２**では (W2) のみを仮定する。そのとき支持関数値を導出する次の公式が成り立つ

$$h_D(\boldsymbol{\omega}) = \lim_{\tau\longrightarrow\infty}\frac{1}{\tau}\log\left|\int_{\partial\Omega}(T\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} - T\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u})\ \mathrm{d}S\right|.$$

主定理に対する諸注意：

- 問題の一組のデータとは一回表面力を物体の表面にかけ、その変位の応答を一回測定したそのデータのみという意味である。また、公式の右辺はそのデータ $(\boldsymbol{u}|_{\partial\Omega},\ T\boldsymbol{u}|_{\partial\Omega})$ と $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\omega}$ から決まる) で決定されるので、それらから $h_D(\boldsymbol{\omega})$ の値が求められる。
- 主定理の仮定：$\boldsymbol{u}$ は剛体変位でないという意味はそうなるような表面力を $\partial\Omega$ に施しなさいという意味だが、$\partial\Omega$ の一部で物体を固定しておけば、この仮定は外せるので本質的ではない。また、**問題１**では Ω の凸性と $\partial\Omega$ の滑らかさも技術的な理由で必要となる。
- **問題１**の場合に必要となる表面力のある仮定を「うまく制御された表面力」と呼んでおり、一様応力がその具体例である (詳細は [2] 参照)。**問題２**の場合にはデータに関する条件は一切必要ない。これらは下記の順問題の解の性質 (収束級数展開) を反映している。
- 主定理の証明には前述の様に、角やき裂先端近傍での順問題の解の収束級数展開

  $$\boldsymbol{u}(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{\lambda_n}\boldsymbol{\Phi}_n(\theta)$$

  の導出が肝要である。特に λ_n は特異性のオーダーと呼ばれ、き裂の場合には $\lambda_n = \frac{n}{2}$ となる。角の場合には $\lambda_n \in \mathbb{C}$ で $\mathbf{Re}\lambda_n > \frac{1}{2}$ となり、ある超越方程式の根として決定される。

謝辞：本研究成果は池畠優（群馬大学大学院工学研究科）との共同研究による。

参考文献

[1] Ikehata, M., Enclosing a polygonal cavity in a two-dimensional bounded domain from Cauchy data, *Inverse Problems*, **15** (1999), 1231 – 1241.

[2] Ikehata, M. and Itou, H., Reconstruction of a linear crack in an isotropic elastic body from a single set of measured data, *Inverse Problems*, **23** (2007), 589 – 607.

[3] Ikehata, M. and Itou, H., Extracting the support function of a cavity in an isotropic elastic body from a single set of boundary data, *Inverse Problems*, **25** (2009), 105005(21pp).