ＷＫＢ解析とリーマンヒルベルト問題のベクトル場の標準形理論への応用

吉野　正史　広島大学大学院理学研究科

1. 要約　ベクトル場の標準形理論を完全漸近解析から見直してみたい。この講演では、共鳴があらわれるとき、resummed WKB 解の特異性と変換の収束の関係に注目する。さらに、共鳴と特異解の関係、田原ー Gerard, 萬代らによる 1 変数の特異性を持つフロベニウス型定理を多変数の特異性に拡張すること、時間が許せばリーマンヒルベルト問題との関連についても報告したい。

2. ベクトル場の線形化問題と変換方程式系　$y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$ を $\mathbb{C}^n$ での変数とする。$\mathbb{C}^n$ の原点の近傍で定義された特異ベクトル場 $\mathcal{X} = \sum_{j=1}^n a_j(y)\frac{\partial}{\partial y_j}$, $a_j(0) = 0$, $j = 1, \ldots, n$. を考える。ここで、$a_j(y)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ は原点の近傍で正則とする。途中の計算を略するが、これに関連して現れる次の方程式を考える。

$$\text{(H)} \qquad \eta^{-1}\mathcal{L}v_j = \lambda_j v_j + R_j(x + v(x)),\ \mathcal{L} = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j},\quad j = 1, \ldots, n.$$

ここで、$R = (R_1, \ldots, R_n)$ は $\mathcal{X}$ の非線形項。

3. WKB 解　(H) の WKB 解 (0 - instanton 解) $v(x, \eta)$ とは、次の形の形式級数解である。$v(x, \eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \eta^{-\nu} v_\nu(x) = v_0(x) + \eta^{-1}v_1(x) + \cdots$. ここで、和は η についての形式和であり、係数 $v_\nu(x)$ は ν によらない $x = 0$ の近傍で正則なベクトル値関数。

命題 $\lambda_j \neq 0 (j = 1, 2, \ldots, n)$ を仮定。*その時 (H) の WKB 解は一意的に存在する。*

4. Borel-Laplace 総和法と完全漸近解析　$v(x, \eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} v_\nu(x)\eta^{-\nu}$ を (H) の WKB 解とする。$v(x, \eta)$ の Borel 変換-Laplace 変換は、ある各領域での WKB 解 $v(x, \eta)$ の漸近解を与える。しかしながら、考える方程式は非線形であるので一般に これは厳密解ではない。以下で、これが厳密解であることをしめす。方向 ξ, $(0 \leq \xi < 2\pi)$ と開き $\theta > 0$ に対して、各領域 $S_{\xi,\theta}$ を $S_{\xi,\theta} = \left\{\eta \in \mathbb{C};\ |\arg \eta - \xi| < \frac{\theta}{2}\right\}$, ここで、偏角は主値をとる。この時、次を得る。

定理 2. (Resummation)　*Poincaré* 条件あるいは次の条件を仮定する。

$$(0.1) \qquad \exists\, t,\ 0 \leq t \leq 2\pi,\ e^{it}\lambda_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

その時、ある方向 ξ, 開き $\theta > 0$, $x = 0$ の近傍 U と $V(x, \eta)$ が存在して、$V(x, \eta)$ は $(x, \eta) \in U \times S_{\xi,\theta}$ で正則であって *(H)* を満たす。*WKB* 解 $v(x, \eta)$ は $V(x, \eta)$ の $U \times S_{\xi,\theta}$ における $\eta \to \infty$ のときの、G^2 漸近展開である。すなわち、次が成り立つ。各 $N \geq 1$ と $R > 0$ に対して、$C > 0$ と $K > 0$ が存在して

$$(0.2) \qquad \left| V(x, \eta) - \sum_{\nu=0}^{N} \eta^{-\nu} v_\nu(x) \right| \leq C K^N N! |\eta|^{-N-1},$$

$\forall (x, \eta) \in U \times S_{\xi,\theta}$, $|\eta| \geq R$ が成り立つ。

5. WKB 解の総和可能性　$V(x, \eta)$ を WKB 解 v の定理 2 で構成した Borel-Laplace resummation とする。この時、次が成り立つ。

定理 3. (summability)　条件 $|\arg \lambda_j| < \frac{\pi}{4}$, $j = 1, \ldots, n$ を仮定する。その時、ある方向 ξ, 開き $\theta > \pi$, $x = 0$ の近傍 U が存在して、$V(x, \eta)$ は $(x, \eta) \in U \times S_{\xi,\theta}$ で正則であって、(H) の真の解である。関数 $V(x, \eta)$ は $U \times S_{\xi,\theta}$ において (0.2) を満足する。

6. 正則な resonance が存在するときの WKB 解析　前節までの結果は、正則な

resonance が存在する場合にも拡張できる。resonace は無限でもよい。このとき、変換方程式系は resonance を含む形になり、同様に WKB 解を構成できる。さらに上述の方法により exact solution を構成できる。詳しくは、講演のときに述べる。

7. WKB 解の解析接続 resummed WKB 解の η に関する解析接続を考える。この時、右半平面 $\Re\eta > 0$ には無限個の共鳴となる η が存在し、それらは無限大に集積する。さらにハミルトン系では有限のところにも集積する。標準形への変換が収束することは、WKB 解が $\eta = 1$ へ解析接続ができることに対応する。次が成り立つ。

定理 4. *Poincaré 条件を仮定する. その時、resummed WKB 解は共鳴点を除いて、右半平面に一価解析的に解析接続される。もし、$\eta = 1$ が共鳴でないならば、resummed WKB 解は $\eta = 1$ まで解析接続され、それは古典的な Poincaré 解と一致する。*

定理 5. *Poincaré 条件を仮定する. $\eta = 1$ での resonance をあたえる。resonance 標準形への変換をあたえるホモロジー方程式を上と同様に考え、その WKB 解を構成する。この時、resummed WKB 解は $\eta = 1$ まで解析接続され、それは Poincaré-Dulac 標準形への変換を与える。*

8. WKB 解の特異性の除去可能性- Sternberg の定理と対称性（可換性）の観点から- 前節の結果は、共鳴が存在しない場合あるいは有限の共鳴を持つ場合の結果であったが、この節では無限の共鳴をもつベクトル場を考える。この時、上に述べた方法で WKB 解を構成できる。解析接続された解は、一般に $\eta = 1$ で特異性をもつ。この特異性が除去可能になるいくつかのケースを考える。最初は hyperbolic なベクトル場の摂動となるばあいであり、2 番目は対称性の存在により特異性が消えるような場合である。詳しくは、講演のときに述べたい。

9. 漸近的な WKB 解とフロベニウス型定理ー今後の問題ー Birkoff 標準形に関する結果によれば、次元の半分の個数の積分が存在すれば resonance 標準形が収束し、上に述べたことより、対応する exact WKB 解の $\eta = 1$ での特異性が消える。もし、積分の個数が少ないと標準形が発散するが（伊藤）、WKB 解の特異性とこの発散の関連は興味ある。(近可積分系の理論あるいはアーノルド拡散との関係)。

また特異解を考えて、共鳴が存在する時に変換方程式の可解性を考えることもできる。この問題に対するひとつの答えは、常微分方程式のいわゆるフロベニウスの定理の一般化である多変数フロベニウス定理がある。(白井ー吉野)。この時、解が $X_{j,k} = x_j^k \log x_j$, $k = 1, 2, \ldots, p_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ であらわせるかどうか（特異性の" 有限性"）が解の構成に重要である。これはリーマンヒルベルト問題を用いて示すが、いずれにしてもこの方向は、まだわかっていないことが多く、なんなりと御教示いただければ幸いであることを申し添えて、この講演を終えたい。

References. [1] T. Aoki, T. Kawai, T. Koike and Y. Takei: Adv. Math., **181**(2004), 165-189. [2] H. Chen, Z. Luo and H. Tahara: *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*. 51 (2001), 1599–1620. [3] M. Hibino; *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 37 (2001), 579–614. [4] H. Ito: Math. Ann. **292**, 411-444 (1992). [5] H. Ito: Tôhoku Math. J. **49**, 73-114 (1997). [6] T. Mandai: *J. Math. Soc. Japan*. 52 (2000) , 645–672. [7] M. Miyake and A. Shirai: Ann. Polon. Math. **74** , 215-228. [8] A. Shirai and M. Yoshino: Singular solutions of nonlinear partial differential equations with resonances. (preprint) [9] S. Sternberg: Amer. J. Math **80**, 623-632 and **81**, 578-604 (1958). [10] L. Stolovitch: Publ. Math. I.H.E.S., **91**, 134-210 (2000). [11] C. L. Siegel: Ann. Math. **43**, 607-614 (1942). [12] H. Tahara: J. Math. Soc. Japan **53** , no. 3, 711–729 (2001). [13] H. Tahara: J. Math. Soc. Japan **55**, No. 4, 1095-1113 (2003). [14] Y. Takei: Kyoto Univ. Press, 2000, pp. 271-296. [15] H. Yamazawa: *Tokyo J. Math.* 24(1) (2000), 537–561. [16] N.T. Zung: Math. Res. Lett. **9**, no. 2-3 (2002), 217–228.