2点境界値問題の指定された個数の零点をもつ解の一意性とその楕円型方程式の球対称解への応用

田中　敏（岡山理大・理）

次の Dirichlet 問題

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\Delta u + K(|x|)f(u) = 0 \quad \text{in } A,\\ &u(0) = 0 \quad \text{on } \partial A \end{aligned}$$

を考える. ここで, A は円環領域 $A = \{x \in \mathbf{R}^N : a < |x| < b\}$ $(N \geq 3,\ 0 < a < b)$ とし, $K \in C^1[a,b]$, $K(r) > 0$ $(a \leq r \leq b)$, $f \in C(\mathbf{R})$, $f(s)$ は $(0,\infty)$ において局所 Lipschitz 連続, $f(s) > 0$, $f(-s) = -f(s)$ $(s > 0)$ とする.

本講演では (1) の球対称解の構造について考察したい. もちろん, (1) は球対称ではない解をもち得る (Brezis–Nirenberg (1983) など). しかしながら, 対象を球対称解のみに限った場合においても様々な解明されていない問題がある. 特に, 符号変化を伴う球対称解に関する研究は, 正値解のそれに比べると少なく, まだ不十分であるようにみえる.

対象を球対称解のみに限った場合, (1) の球対称解 $u = u(|x|)$ は

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{N-1}{r}\frac{du}{dr} + K(r)f(u) = 0, \quad a < r < b,\\ &u(a) = u(b) = 0 \end{aligned}$$

を満たす. 整数 $k \geq 0$ に対して, (2) の解 u が区間 (a,b) 内にちょうど k 個の零点をもつとき, u を <u>k-nodal solution</u> と呼ぶことにする. 関数 f は奇関数であるので, u が (2) の解ならば, $-u$ もそうである. 従って, 以下 (2) の解としては $u'(a) > 0$ を満たすもののみを考えることにする. そのとき, 0-nodal solution は正値解である. ここでは符号変化を伴う場合の $k \geq 1$ に対する k-nodal solution の一意性に興味がある.

2点境界値問題 (2) の解 $u(r)$ に対して, $v(t) = u(t^{-1/(N-2)})$ とおくことにより, (2) は

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\frac{d^2v}{dt^2} + h(t)f(v) = 0, \quad \alpha < t < \beta,\\ &v(\alpha) = v(\beta) = 0, \end{aligned}$$

の形の問題に帰着される. ここで,

$$h(t) = \frac{1}{(N-2)^2} t^{-\frac{2(N-1)}{N-2}} K(t^{-\frac{1}{N-2}}),$$
$$\alpha = b^{-(N-2)}, \quad \beta = a^{-(N-2)}.$$

この変換により, $u(r)$ の (a,b) 内の零点の個数と $v(t)$ の (α,β) 内の零点の個数は同じである.

k-nodal solution の一意性の前に, その存在についてふれておきたい. 正値解 $(k = 0)$ の存在については様々な結果が得られている. 符号変化を伴う解 $(k \geq 1)$ の存在に関しては Coffman (1967), Tal (1967), Hooker (1969), Hartman (1977), Coffman–Marcus (1989), M. Naito–Y. Naito (1994), Y. Naito–Tanaka (2004) Ma–Thompson (2004, 2005) らの結果がある.

ここでは, 内藤雄基氏 (神戸大・工) との共同研究による結果 (定理 1–3) を述べたい.

固有値問題

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{N-1}{r}\frac{d\phi}{dt} + \lambda K(r)\phi = 0, \quad a < r < b,$$
$$\phi(a) = \phi(b) = 0$$

の k 番目の固有値を λ_k とし, ϕ_k を λ_k に属する固有関数とする. よく知られているように固有値 λ_k は

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \cdots, \quad \lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$$

を満たし, 固有関数 ϕ_k は区間 $(0,1)$ 内にちょうど $k-1$ 個の零点をもつ.

定理 1. $f(s)/s \neq \lambda_{k+1}$ $(s > 0)$ ならば (2) は k-nodal solution をもたない.

定理 2. 次の (i) または (ii) を満たす m, M, λ の存在を仮定する:

(i) $f(s)/s > \lambda_{k+1}$ $(0 < s < m)$,
$f(s)/s < \lambda < \lambda_{k+1}$ $(s > M)$;
(ii) $f(s)/s < \lambda_{k+1}$ $(0 < s < m)$,
$f(s)/s > \lambda > \lambda_{k+1}$ $(s > M)$.

そのとき, (2) は k-nodal solution をすくなくとも1つもつ.

定理 2 の条件 (i) または (ii) が成り立つとき, 方程式

$$(4)\qquad f(s)/s = \lambda_{k+1}, \quad s > 0$$

は少なくとも1つの根をもつ. 従って, k-nodal solution の個数と (4) の根の個数には関係があるようにみえる. 実際, 正値解の個数と $f(s)/s = \lambda_1$ $(s > 0)$ の根の個数が同じである結果が多数得られていおり, k-nodal solution も (4) の根の個数と同じくらい存在することが期待される.

定理 3. 次の $f_0, f_\infty \in [0,\infty]$ の存在を仮定する: $f_0 = \lim_{s\to 0} f(s)/s$, $f_\infty = \lim_{s\to\infty} f(s)/s$. さらに, $f_* = \inf_{s>0} f(s)/s$, $f^* = \sup_{s>0} f(s)/s$ とおく. そのとき, 次の (i), (ii) が成立する:

(i) $f_0 = f_\infty = f^* > \lambda_{k+1}$ を仮定する. そのとき, $f_* < \delta_{k+1}$ ならば (2) は少なくとも2個の k-nodal solution をもつような $\delta_{k+1} \in (0, \lambda_{k+1})$ が存在する.

(ii) $f_0 = f_\infty = f_* < \lambda_{k+1}$ を仮定する．そのとき，$f_* > \delta_{k+1}$ ならば (2) は少なくとも 2 個の k-nodal solution をもつような $\delta_{k+1} > \lambda_{k+1}$ が存在する．

定理 3 の (i) または (ii) の場合，方程式 (4) は少なくとも 2 個の根をもつことを注意しておく．

以下，k-nodal solution の一意性について考えたい．今までの条件に加えて $K \in C^2[a,b]$, $f \in C^1(\mathbf{R})$ を仮定する．上述のように，方程式 (4) の根が複数ある場合は，k-nodal solution の一意性はあまり期待できない．ここでは次の (F1) または (F2) の場合を考える:

(F1) $\qquad (f(s)/s)' < 0, \quad s > 0,$

(F2) $\qquad (f(s)/s)' > 0, \quad s > 0.$

このとき，定理 1, 2 より次が得られる．

系 1. 条件 (F1) または (F2) を仮定する．そのとき，次の (i), (ii) は同値である:

(i) 方程式 (4) は根をもつ．

(ii) (2) は k-nodal solution をもつ．

従って，k-nodal solution が存在した場合，それが一意なのかどうかという問題が残る．正値解の一意性については，(F1) の場合は，(2) の正値解は高々 1 個であることが Picard (1908) の結果からわかる．

(F2) の場合は，(F1) の場合に比べて状況は複雑である．例えば，(F1) かつ

$$K(r) \equiv 1, \qquad \frac{sf'(s)}{f(s)} \le \frac{N}{N-2}, \quad s > 0$$

のとき (2) の正値解は高々 1 個であり，

$$K(r) \equiv 1,\ f(s) = s^p + \varepsilon s^q,\ 1 < p < \frac{N+2}{N-2} < q$$

のとき，ある $\varepsilon > 0$, a, b に対して，(2) は少なくとも 3 個の正値解をもつことが Ni–Nussbaum (1985) によって示されている．

一方，k-nodal solution の一意性に関する結果は多くはないが，以下のことが知られている．

Coffman (1967) により，$f(s) = s^{2n+1}$ ($n \in \mathbf{N}$), $K(r) = r^l$ ($l \in \mathbf{R}$) のとき，任意の $k \ge 0$ に対して，(2) の k-nodal solution は存在して一意であることが得られている．その後，Ni–Nussbaum (1985) によって，$f(s) = |s|^{p-1}s$ ($p > 1$) としても同じことが成り立つことが証明された．さらにその Ni–Nussbaum の結果の一般化である次の定理 A が Yanagida (1994) の結果より得ることができる．

定理 A. $f(s) = |s|^{p-1}s$ ($p > 1$), かつ $rK'(r)/K(r)$ は非増加のとき，任意の $k \ge 0$ に対して，(2) の k-nodal solution は存在して一意である．

また，Coffman (1967) の別の結果から次を得ることができる．

定理 B. $f(s) = s^{2n+1}$ ($n \in \mathbf{N}$) とする．次の (i) または (ii) の成立を仮定する:

(i) $-2(N-1) < rK'/K \le -2$,
$$r^{-N+2}\frac{(rK'/K)+2}{(rK'/K)+2(N-1)} \text{ は非減少;}$$

(ii) $p(N-2) - N \le rK'/K < p(N-2) + N - 4$,
$$r^{N-2}\frac{(rK'/K) - p(N-2) + N}{(rK'/K) - p(N-2) - N + 4} \text{ は非減少.}$$

そのとき，任意の $k \ge 0$ に対して，(2) の k-nodal solution は存在して一意である．

定理 4. 次の (i) または (ii) が成り立つとき，任意の $k \ge 0$ に対して，(2) の k-nodal solution は高々 1 個である:

(i) (F1) かつ，$r \in [a,b]$ に対して
$$\left(\frac{rK'}{K} + 2\right)\left(\frac{rK'}{K} + 2(N-1)\right) - 2r\left(\frac{rK'}{K}\right)' \ge 0.$$

(ii) (F2) かつ，$r \in [a,b]$ に対して
$$\left(\frac{rK'}{K} + 2\right)\left(\frac{rK'}{K} + 2(N-1)\right) - 2r\left(\frac{rK'}{K}\right)' \le 0.$$

注意 1. $K \in C^2[a,b]$ のときは，定理 4 は定理 B の (i) の場合の一般化になっている．

次の (i)–(iii) のうちの 1 つが成り立つとき，定理 4 の (i) の不等式が成立する:

(i) $K'' \le 0, \quad K' \ge 0;$

(ii) $rK'/K \le -2(N-1), \quad (rK'/K)' \le 0;$

(iii) $rK'/K \ge -2, \quad (rK'/K)' \le 0.$

同様に，

$$-2(N-1) \le rK'/K \le -2, \quad (rK'/K)' \ge 0$$

が成立すれば，定理 4 の (ii) の不等式が成り立つ．

定理 5. $f(s) = |s|^{p-1}s$ ($p > 1$) のとき，$r \in [a,b]$ に対して

$$\left(\frac{rK'}{K} - p(N-2) - N + 4\right) \times \left(\frac{rK'}{K} - p(N-2) + N\right) - 2r\left(\frac{rK'}{K}\right)' \le 0$$

が成り立つならば，任意の $k \ge 0$ に対して，(2) の k-nodal solution は高々 1 個である．

注意 2. $K \in C^2[a,b]$ のときは，定理 5 は定理 B の (ii) の場合の一般化になっている．

$$p(N-2) - N \le rK'/K \le p(N-2) + N - 4, \quad (rK'/K)' \ge 0,$$

が成り立つならば，定理 5 の不等式は成立する．