

# 常微分方程式の完全 WKB 解析をめぐる — 2 階線型から，高階そして非線型へ —

竹井義次（京大数理研）

この 15 年ほど，河合隆裕氏（京大数理研），青木貴史氏（近畿大理工），小池達也氏（京大理）達と一緒に，「常微分方程式の完全 WKB 解析」というテーマを研究してきた。その結果，どのような風景が広がっているのかがある程度明らかになってきた部分もあれば，まだまだ深い森の中で手探りで進むべき道を探しているような所もある。本講演ではこの 15 年の進展を概観し，“見えてきた風景”（この理論の特徴）を解説すると共に，“手探りの状況”（未解明のまま残されている困難点）についても論じてみたい。以下，線型方程式の場合と非線型方程式（Painlevé 方程式）の場合に分けて議論を進める。

## 1 線型常微分方程式の完全 WKB 解析

### 1.1 Schrödinger 方程式の場合

まず，この理論の雛形を与える，最も基本的な Schrödinger 方程式

$$(1) \quad \left( \frac{d^2}{dx^2} - \eta^2 Q(x) \right) \psi = 0.$$

（ $\eta$  は大きなパラメータ）の場合をざっと復習しておこう（詳細は [10] 及びそこで挙げた参考文献を参照）。

主役は，Riccati 方程式  $S^2 + \partial S / \partial x = \eta^2 Q(x)$  の形式冪級数解  $S_{\pm}(x, \eta) = \pm \eta S_{-1}(x) + S_0(x) \pm \eta^{-1} S_1(x) + \dots$ （但し  $S_{-1}(x) = \sqrt{Q(x)}$ ）を用いて定義される，**WKB 解**と呼ばれる (1) の次の形の形式解  $\psi_{\pm}$  である。

$$(2) \quad \begin{aligned} \psi_{\pm} &= \eta^{-1/2} \exp \int_{x_0}^x \left( \pm \eta \sqrt{Q(x)} + S_0(x) \pm \dots \right) dx \\ &= \exp \left( \pm \eta \int_{x_0}^x \sqrt{Q(x)} dx \right) \sum_{l=0}^{\infty} \psi_{\pm, l}(x) \eta^{-(l+1/2)}. \end{aligned}$$

幸か不幸か，殆どの場合 WKB 解は収束しない。そこで完全 WKB 解析では， $\psi_{\pm}$  の代わりにその（大きなパラメータ  $\eta$  に関する）**Borel 和**

$$(3) \quad \Psi_{\pm} = \int_{-y_{\pm}(x)}^{\infty} e^{-\eta y} \psi_{\pm, B}(x, y) dy$$

を考える．但し  $y_{\pm}(x) = \pm \int_{x_0}^x \sqrt{Q(x)} dx$ ,  $\psi_{\pm,B}$  は  $\psi_{\pm}$  の Borel 変換

$$(4) \quad \psi_{\pm,B}(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\psi_{\pm,l}(x)}{\Gamma(l+1/2)} (y + y_{\pm}(x))^{l-1/2}$$

であり，また積分路は正の実軸に平行に取るものとする．

ここで，この理論で非常に重要な役割を果たす変わり点と Stokes 曲線を定義しておこう．

**Definition 1.** (i)  $Q(x)$  の零点を (1) の**変わり点**と呼ぶ．

(ii)  $x = a$  を変わり点とするととき，次式で定義される曲線を (1) の**Stokes 曲線**と呼ぶ．

$$(5) \quad \operatorname{Im} \int_a^x \sqrt{Q(x)} dx = 0.$$

各 Stokes 曲線を横切る際に，WKB 解の Borel 和  $\Psi_{\pm}$  のうちで指数的に大きい方が指数的に小さい方（の定数倍）を拾いこむという現象（“**Stokes 現象**”）が起きる．例えば，単純変わり点  $a$  から出る Stokes 曲線上では，（積分端点  $x_0$  として  $x = a$  を取っておけば）次の形の**接続公式**が成立する．

$$(6) \quad \Psi_+ \longrightarrow \Psi_+ \pm i\Psi_- \quad \text{又は} \quad \Psi_- \longrightarrow \Psi_- \pm i\Psi_+.$$

実は，この  $\Psi_{\pm}$  に対する Stokes 現象は， $\psi_{\pm}$  の Borel 変換  $\psi_{\pm,B}(x, y)$  が，例えば  $(x, y) = (a, 0)$  の近傍で

$$(7) \quad y = \int_a^x \sqrt{Q(x)} dx \quad \text{及び} \quad y = - \int_a^x \sqrt{Q(x)} dx$$

に特異点を持つことに由来している．（こうした  $\psi_{\pm,B}(x, y)$  の特異点に関する情報は，単純変わり点での標準形である Airy の方程式への変換論等を通じて得られる．）

2 階線型方程式の場合は，Stokes 曲線以外では WKB 解に Stokes 現象は起きない．従って，変わり点と Stokes 曲線を図示すれば，その図に従って上記のような接続公式を繰り返し用いることにより，方程式 (1) の解の大域的挙動（例えばモノドロミー群）が追跡できることになる．

## 1.2 高階方程式の場合

高階線型方程式

$$(8) \quad P\psi = \left( \frac{d^m}{dx^m} + q_1(x)\eta \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots + q_m(x)\eta^m \right) \psi = 0$$

についても，変わり点の近傍での局所理論に関しては 2 階の場合と同様に議論が進行する（cf. [19]，特に 3 階の場合は [4]，無限階も含めより一般の場合は [1, 2] も参照）．実際，高階方程式 (8) に対しても，特性方程式

$$(9) \quad p(x, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \xi^m + q_1(x)\xi^{m-1} + \cdots + q_m(x) = 0$$

の根  $\xi = \xi_j(x)$  ( $j = 1, \dots, m$ ) を主要項とする次のような **WKB 解** が構成できる.

$$(10) \quad \begin{aligned} \psi_j &= \eta^{-1/2} \exp \int_{x_0}^x (\eta \xi_j(x) + S_{j,0}(x) + \dots) dx \\ &= \exp \left( \eta \int_{x_0}^x \xi_j(x) dx \right) \sum_{l=0}^{\infty} \psi_{j,l}(x) \eta^{-(l+1/2)}. \end{aligned}$$

更に, (8) の場合, 変わり点と Stokes 曲線は次のように定義される.

**Definition 2.** (i) 2つの特性根  $\xi_j(x)$  と  $\xi_{j'}(x)$  が重なる点を (8) の (type  $(j, j')$  の) **変わり点** と呼ぶ. 即ち, 変わり点とは特性方程式 (9) の判別式の零点である.  
(ii)  $x = a$  を type  $(j, j')$  の変わり点とすると, 次式で定義される曲線を (8) の (type  $(j, j')$  の) **Stokes 曲線** と呼ぶ.

$$(11) \quad \operatorname{Im} \int_a^x (\xi_j(x) - \xi_{j'}(x)) dx = 0.$$

すると, 高階方程式 (8) の場合も, 各 Stokes 曲線を横切る際に WKB 解の Borel 和  $\Psi_j$  に Stokes 現象が起きることが確かめられる. 例えば, type  $(j, j')$  の単純変わり点から出る Stokes 曲線上では, (適当な正規化の下で) (6) と全く同じ形の **接続公式**

$$(12) \quad \Psi_j \longrightarrow \Psi_j \pm i\Psi_{j'} \quad \text{又は} \quad \Psi_{j'} \longrightarrow \Psi_{j'} \pm i\Psi_j$$

が成立する. これらの事実は, 変わり点の近傍における作用素  $P$  の分解定理を利用して, 議論を 2 階の場合に帰着することにより示される.

しかしながら, 次の BNR の例が示すように, 大域的な側面に関しては 2 階方程式と高階方程式で状況が異なる.

**Example.** (Berk-Nevins-Roberts [6])

$$(13) \quad \left( \frac{d^3}{dx^3} + 3\eta^2 \frac{d}{dx} + 2ix\eta^3 \right) \psi = 0.$$

方程式 (13) は 2 つの変わり点  $x = \pm 1$  を持つ. この 2 つの変わり点は type が異なる為に, そこから出る Stokes 曲線は虚軸上の点  $x = x_*$  と  $x = \bar{x}_*$  で交わる (図 1). 解の積分表示を調べると, 変わり点  $x = \pm 1$  から出る Stokes 曲線上だけでなく, この 2 つの交点を通る “新しい Stokes 曲線” の上でも WKB 解の Borel 和に Stokes 現象が起きていることが確認される.

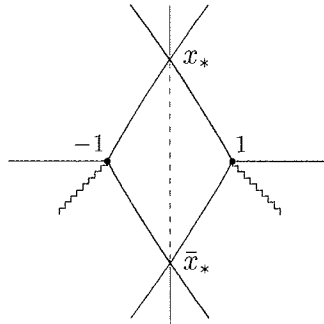


図 1 : 方程式 (13) の Stokes 曲線と新しい Stokes 曲線

2階方程式の場合には見られなかったこの新しい Stokes 曲線に対して、我々は次のような解釈を与えた．まず、通常の Stokes 曲線は変わり点を始点としており、そして変わり点では WKB 解  $\psi_j$  の Borel 変換  $\psi_{j,B}(x, y)$  の2つの特異点がぶつかっていたことを思い出そう（例えば2階の場合の (7) を参照）．実は、変わり点以外の点でも、WKB 解の Borel 変換の特異点がぶつかるという現象が起こり得る．このように WKB 解の Borel 変換の特異点がぶつかる点を仮想的変わり点と呼ぶ．より厳密には、Borel 変換  $\psi_{j,B}(x, y)$  が (8) を  $\eta$  に関して Borel 変換して得られる偏微分方程式

$$(14) \quad P_B \psi_B(x, y) = 0,$$

但し

$$(15) \quad P_B = p_B \left( x, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^m + q_1(x) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^{m-1} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) + \cdots + q_m(x) \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^m,$$

を満たすこと、そして (14) の解はその零陪特性曲線（即ち  $p_B(x, \xi, \eta) = 0$  を満たす

$$(16) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial p_B}{\partial \xi}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial p_B}{\partial \eta}, \quad \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\partial p_B}{\partial x}, \quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\partial p_B}{\partial y} (= 0)$$

の解曲線の  $(x, y)$  空間への射影）に沿って伝播することに注意して、次のように定義する．

**Definition 3.** 方程式 (14) の零陪特性曲線  $(x(t), y(t))$  の自己交叉点の  $x$  成分を、 $P$  の仮想的変わり点と呼ぶ．

BNR の方程式 (13) の場合、 $x = 0$  が（唯一の）仮想的変わり点となり、新しい Stokes 曲線はこの仮想的変わり点  $x = 0$  から出る Stokes 曲線と解釈できる．このように、通常の変わり点に加えて仮想的変わり点を導入し、それらを始点とする Stokes 曲線をすべて考えれば、高階方程式 (8) に対しても解の大域的挙動を追跡することが可能となる．更に、方程式が別のパラメータを含んでおりそのパラメータに関する変形を論じる場合は、こうした仮想的変わり点と新しい Stokes 曲線はより重要な役割を果たすことになる．（変形理論においては、通常の Stokes 曲線と新しい Stokes 曲線を区別することは本質的に不可能である．[3] を参照．）

問題は、一般の高階方程式の場合、多くの余分な仮想的変わり点が現れて、それらを取り除く必要が生じることである．どの仮想的変わり点や Stokes 曲線が余分であるかを判定する手続きを与えることは、今後の大きな課題である．([5] で提唱した“完全最急降下法”は、実用的にはかなり有用な判定法の一つである．)

**Remark.** 単独高階方程式と同様に、1階連立方程式系に対しても完全 WKB 解析を展開することが可能である．その場合は、1階連立系の固有多項式を特性方程式 (9) の代わりに用いれば良い．

## 2 Painlevé 型方程式の完全 WKB 解析

Painlevé 型方程式とは、線型方程式系の両立条件として現れるような非線型の常微分方程式である．有名な Painlevé 方程式がその代表例であるが、その高階版もいくつか

知られている．完全 WKB 解析は，付随する線型方程式系を通じて，こうした Painlevé 型の非線型方程式に対しても有効であることが次第に明らかになりつつある．ここでは， $P_I$ -hierarchy (cf. [16])

$$(P_I)_m \quad \frac{du_j}{dt} = 2\eta v_j, \quad \frac{dv_j}{dt} = 2\eta(u_{j+1} + u_1 u_j + w_j) \quad (j = 1, \dots, m)$$

(但し  $w_j$  は漸化式

$$(17) \quad w_j = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^j u_k u_{j+1-k} \right) + \sum_{k=1}^{j-1} u_k w_{j-k} - \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^{j-1} v_k v_{j-k} \right) + c_j + \delta_{jm} t$$

で定まる  $u_k, v_k$  の多項式) を主な題材として，Painlevé 型方程式に対する完全 WKB 解析の現状について概説する．なお， $(P_I)_m$  は次の線型方程式系の両立条件である．

$$(L_I)_m \quad \left( \frac{\partial}{\partial x} - \eta A \right) \psi = 0, \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} - \eta B \right) \psi = 0,$$

但し，係数行列  $A, B$  は， $x$  に関する多項式

$$(18) \quad U(x) = x^m - \sum_{j=1}^m u_j x^{m-j}, \quad V(x) = \sum_{j=1}^m v_j x^{m-j}, \quad W(x) = \sum_{j=1}^m w_j x^{m-j}$$

を用いて次式で与えられる．

$$(19) \quad A = \begin{pmatrix} V(x)/2 & U(x) \\ (2x^{m+1} - xU(x) + 2W(x))/4 & -V(x)/2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ u_1 + x/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

方程式  $(P_I)_m$  は，**零パラメータ解**と呼ばれる代数的に定まる形式冪級数解を持つ．

$$(20) \quad \hat{u}_j(t, \eta) = u_{j,0}(t) + \eta^{-1} u_{j,1}(t) + \dots, \quad \hat{v}_j(t, \eta) = v_{j,0}(t) + \eta^{-1} v_{j,1}(t) + \dots.$$

更に， $(P_I)_m$  を Hamilton 系の形に表示しその Birkhoff 標準形への変換を用いれば， $2m$  個の自由パラメータを含んだ次の形の形式解 (“**インスタントン解**”) も構成できる．

$$(21) \quad \begin{aligned} u_j(t, \eta; \alpha) &= u_{j,0}(t) + \eta^{-1/2} \sum_{k=1}^{2m} \alpha_k u_{jk,1/2}(t) \left( \exp \eta \int^t \nu_k dt \right) + \dots, \\ v_j(t, \eta; \alpha) &= v_{j,0}(t) + \eta^{-1/2} \sum_{k=1}^{2m} \alpha_k v_{jk,1/2}(t) \left( \exp \eta \int^t \nu_k dt \right) + \dots. \end{aligned}$$

ここで  $\nu_1, \dots, \nu_{2m}$  (但し  $\nu_{k+m} = -\nu_k$ ) は， $(P_I)_m$  の零パラメータ解における線型化方程式 (Fréchet 微分)  $(\Delta P_I)_m$  の最高次の係数行列の固有値を表す．これらの形式解が Painlevé 型方程式の完全 WKB 解析における主役を演じる．

さて， $(P_I)_m$  に対する変わり点と Stokes 曲線の定義を与えよう．

**Definition 4.** 線型方程式  $(\Delta P_I)_m$  (即ち  $(P_I)_m$  の零パラメータ解における Fréchet 微分) の変わり点，Stokes 曲線を，それぞれ  $(P_I)_m$  の**変わり点**，**Stokes 曲線**と呼ぶ．

即ち、インスタントン解の表示 (21) に現れた  $\nu_j$  が重根となる点が  $(P_1)_m$  の変わり点である。特に、或る  $j$  に対して  $\nu_j = -\nu_{j+m} = 0$  となる点を第 1 種の変わり点、2 つの異なる  $j, j' (\leq m)$  に対して  $\nu_j = \nu_{j'}$  又は  $\nu_j = \nu_{j'+m}$  が満たされる点を第 2 種の変わり点と呼ぶ。

このように  $(P_1)_m$  の変わり点と Stokes 曲線を定義すれば、それらが実は線型方程式系  $(L_1)_m$  の変わり点、Stokes 曲線と以下に述べるような関係を持つことが示される (cf. [7], [20]). 非線型方程式  $(P_1)_m$  の零パラメータ解を線型方程式系  $(L_1)_m$  の係数に代入した上で、 $(L_1)_m$  の WKB 解

$$(22) \quad \psi_{\pm} = \left( \exp \pm \eta \int^{(x,t)} \omega_L \right) \sum_{l=0}^{\infty} \psi_{\pm, l} \eta^{-(l+1/2)}$$

を考える。ここで  $\omega_L$  は、 $(L_1)_m$  の最高次の係数行列  $A_0, B_0$  の固有値  $\lambda_0, \mu_0$  を用いて、 $\omega_L = \lambda_0 dx + \mu_0 dt$  で与えられる 1-form である。するとこの 1-form  $\omega_L$  が、インスタントン解 (21) の記述に現れる 1-form  $\nu_j dt$  と次の関係で結ばれる。

**Fact 1.** (i) 線型方程式系  $(L_1)_m$  (正確にはその最初方程式) は  $m$  個の 2 重変わり点  $b_1(t), \dots, b_m(t)$  と 1 個の単純変わり点  $a(t)$  を持つ。  
(ii) 1-form  $\omega_L$  は closed (即ち  $d\omega_L = 0$ ) であり、さらに次を満たす。

$$(23) \quad \omega_L \Big|_{x=a(t)} = 0, \quad \omega_L \Big|_{x=b_j(t)} = \frac{1}{2} \nu_j(t).$$

この Fact 1 の帰結として、 $(P_1)_m$  と  $(L_1)_m$  という 2 つの方程式の変わり点、Stokes 曲線の間に成立する次の関係が導かれる。

**Fact 2.** (i) 非線型方程式  $(P_1)_m$  の変わり点  $t = \tau$  においては、線型方程式系  $(L_1)_m$  の 2 つの変わり点 (第 1 種の場合は 2 重変わり点と単純変わり点、第 2 種の場合は 2 個の 2 重変わり点) がぶつかる。  
(ii) さらに、 $t = \tau$  から出る  $(P_1)_m$  の Stokes 曲線上では、 $(L_1)_m$  のそれら 2 つの変わり点が  $(L_1)_m$  の Stokes 曲線で結ばれる。

**Remark.** 野海・山田系 ([14]) のように付随する線型方程式系のサイズが大きい場合は、上記の关系到線型方程式系の仮想的変わり点も関与してくる (cf. [15]).

Fact 2, (ii) は、非線型方程式  $(P_1)_m$  の Stokes 曲線の両側で、付随する線型方程式系  $(L_1)_m$  の Stokes 曲線の形状が変化することを意味している。この  $(L_1)_m$  の Stokes 曲線の形状の変化と、その一方で  $(L_1)_m$  のモノドロミーが保存されるという性質を組み合わせるにより、非線型方程式  $(P_1)_m$  の Stokes 曲線上でそのインスタントン解に Stokes 現象が起きることが説明される。例えば、 $(P_1)_1$  と同値な I 型の Painlevé 方程式  $d^2 u/dt^2 = \eta^2(6u^2 + t)$  の場合、そのインスタントン解  $u(t, \eta; \alpha) = u(t, \eta; \alpha_1, \alpha_2)$  の Stokes 曲線  $\arg t = -\pi/5$  を越えた解析接続が  $u(t, \eta; \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$  により与えられるとすると、 $(\alpha_1, \alpha_2)$  と  $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$  の間に次の接続公式が成立する ([17]).

$$(24) \quad \alpha_1 \chi(E) e^{-i\pi E} = \tilde{\alpha}_1 \chi(\tilde{E}) e^{-i\pi \tilde{E}}, \quad e^{2i\pi E} + \alpha_2 \chi(E) e^{2i\pi E} = \tilde{\alpha}_2 \chi(-\tilde{E}) e^{2i\pi \tilde{E}}$$

(但し  $E = -2\alpha_1\alpha_2$ ,  $\tilde{E} = -2\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2$ ,  $\chi(z) = \sqrt{\pi} 2^{z+1}/\Gamma(z+1)$ ).

2階、即ち従来の Painlevé 方程式の場合は、各単純変わり点（2階の場合、変わり点は全て第1種であることに注意）の近くでインスタントン解が I 型 Painlevé 方程式のインスタントン解に変換（簡約化）可能であることが証明できる ([9]). 従って、Painlevé 方程式の単純変わり点から出る Stokes 曲線上では、(24) と同じ形の接続公式が成立すると期待される．実際、例えば II 型 Painlevé 方程式に対する Ablowitz-Segur の接続問題は、接続公式 (24) の組み合わせで解くことができる ([18]). こうして、インスタントン解の意味づけをどのように行うかという問題は残るものの、2階の Painlevé 方程式については前節で論じた線型方程式と同様な取り扱いが可能であると考えられる．

高階 Painlevé 方程式に対しても、2階や線型方程式と同様な扱いが可能であることが、最近の研究で次第に明らかになってきた．これまでに得られた結果としては、

(1°) 第1種単純変わり点の近くでの I 型 Painlevé 方程式への変換．(零パラメータ解については [11, 12, 21] を参照．インスタントン解への拡張に関しては現在考察中.)

(2°) 第2種の変わり点の近くでの同様な変換論．(標準形の候補と考えられる方程式の見当はつきつつあり、零パラメータ解の変換についてはほぼ解決した状況．講演の中でより詳しく論じる予定である.)

更に、高階線型方程式の場合と同様に、高階 Painlevé 方程式に対しても Stokes 曲線の交叉や新しい Stokes 曲線の出現といった現象が見出されている（“西川現象”，cf. [13]）．ここで取り上げた  $P_1$ -hierarchy の場合はこうした新しい Stokes 曲線や仮想的変わり点の構造はかなり解明されている ([8]) が、一般の高階 Painlevé 方程式に対する仮想的変わり点や新しい Stokes 曲線を如何に解析するかは、今後論じられるべき重要な問題である．

## References

- [1] T. Aoki, T. Kawai, T. Koike and Y. Takei, On the exact WKB analysis of operators admitting infinitely many phases, *Adv. Math.*, **181**(2004), 165–189.
- [2] ———, On the exact WKB analysis of microdifferential operators of WKB type, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, **54**(2004), 1393–1421.
- [3] T. Aoki, T. Kawai, S. Sasaki, A. Shudo and Y. Takei, Virtual turning points and bifurcation of Stokes curves for higher order ordinary differential equations, *J. Phys. A*, **38**(2005), 3317–3336.
- [4] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei, New turning points in the exact WKB analysis for higher-order ordinary differential equations, *Analyse algébrique des perturbations singulières. I*, Hermann, Paris, 1994, pp. 69–84.
- [5] ———, On the exact steepest descent method: A new method for the description of Stokes curves, *J. Math. Phys.*, **42**(2001), 3691–3713.
- [6] H.L. Berk, W.M. Nevins and K.V. Roberts, New Stokes’ line in WKB theory, *J. Math. Phys.*, **23**(1982), 988–1002.

- [7] T. Kawai, T. Koike, Y. Nishikawa and Y. Takei, On the Stokes geometry of higher order Painlevé equations, *Astérisque*, Vol. 297, 2004, pp. 117–166.
- [8] ———, On the complete description of the Stokes geometry for the first Painlevé hierarchy, 数理解析研究所講究録, Vol. 1397, 2004, pp. 74–101.
- [9] T. Kawai and Y. Takei, WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter. III, *Adv. Math.*, **134**(1998), 178–218.
- [10] ———, 特異摂動の代数解析学, 岩波書店, 1998.
- [11] ———, On WKB analysis of higher order Painlevé equations with a large parameter, *Proc. Japan Acad.*, **80A**(2004), 53–56.
- [12] ———, WKB analysis of higher order Painlevé equations with a large parameter — Local reduction of 0-parameter solutions for Painlevé hierarchies ( $P_J$ ) ( $J = \text{I, II-1 or II-2}$ ), to appear in *Adv. Math.*.
- [13] Y. Nishikawa, Towards the exact WKB analysis of the  $P_{\text{II}}$  hierarchy, submitted.
- [14] M. Noumi and Y. Yamada, Higher order Painlevé equations of type  $A_l^{(1)}$ , *Funkcial Ekvac.*, **41**(1998), 483–503.
- [15] S. Sasaki, The role of virtual turning points in the deformation of higher order linear ordinary differential equations. I and II, 数理解析研究所講究録, Vol. 1433, 2005, pp. 27–64 and 65–109.
- [16] S. Shimomura, A certain expression of the first Painlevé hierarchy, *Proc. Japan Acad.*, **80A**(2004), 105–109.
- [17] Y. Takei, An explicit description of the connection formula for the first Painlevé equation, *Toward the Exact WKB Analysis of Differential Equations, Linear or Non-Linear*, Kyoto Univ. Press, 2000, pp. 271–296.
- [18] ———, On an exact WKB approach to Ablowitz-Segur’s connection problem for the second Painlevé equation, *ANZIAM J.*, **44**(2002), 111–119.
- [19] ———, 完全 WKB 解析, そして完全最急降下法 — 特異摂動の代数解析学続論 —, 数学, **55**(2003), 350–367.
- [20] ———, Toward the exact WKB analysis for higher-order Painlevé equations — The case of Noumi-Yamada systems, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **40**(2004), 709–730.
- [21] ———, On a local reduction of a higher order Painlevé equation and its underlying Lax pair near a simple turning point of the first kind, to appear in Séminaires et Congrès.