$\mathcal{A}$-超幾何微分差分方程式

小原功任　金沢大学理学部計算科学科
高山信毅*　神戸大学理学部数学科

1　問題

行列 $A = (a_{ij}) \in M(d, n, \mathbf{Z})$ をひとつとる．行列 A の列ベクトルたちは $\mathbf{Z}^d$ を張るものとしよう．また，差分作用素 $S_i : f(s_i) \mapsto f(s_i - 1)$ を考える．

定義 1 微分差分方程式系 $\mathbf{H}_A$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \partial_j - s_i\right) \bullet f &= 0, \qquad (i = 1, \ldots, d) \\ \left(\partial_j - \prod_{i=1}^{d} S_i^{a_{ij}}\right) \bullet f &= 0 \qquad (j = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

を $\mathcal{A}$-超幾何微分差分方程式と呼ぶ．

解析学においてパラメータ付きの積分を調べるのは基本的問題である．この問題との関連を説明しよう．

行列 A の i 番目の列ベクトルを a_i とし，次のような定積分を考える．

$$F(\beta, x) = \int_C \exp\left(\sum_{i=1}^{n} x_i t^{a_i}\right) t^{-\beta - 1} dt,$$

ここで $t = (t_1, \ldots, t_d)$．このとき，$F(s; x)$ は「形式的に」$\mathcal{A}$-超幾何微分差分方程式を満たす．

2　歴史

超幾何関数を調べる現代的方法として (1) 積分を幾何的に調べる手法，および，(2) 積分のみたす微分方程式を計算や代数的方法で調べる手法，の二つがあるといってよいと思う．(1) の方法についてはたとえば青本，喜多の "超幾何関数論" や吉田の "私説超幾何関数" 等の本がある．(2) の方法は代数解析の脈絡で常に意識されていたし，野海などの先駆的なアプローチ等もあったが，この方法による研究が再びさかんになったのは比較的最近である．[4] はこの方法に関する基礎づけの試みである．最近の研究状況については [3] およびその参考文献を御覧いただきたい．この講演の定理は (2) の手法により研究した成果である．なお講演では今後考えるべきいくつかの問題についても触れたい．

3　次元公式

解空間の次元を調べるのは基本的問題である．

定義 2 微分差分作用素環

$$D \;=\; \mathbf{C}(x_1, \ldots, x_n, s_1, \ldots, s_d)\langle \partial_1, \ldots, \partial_n, S_1^{\pm 1}, \ldots, S_d^{\pm 1} \rangle$$

の左イデアル I のランクを $\mathrm{rank}(I) = \dim_{\mathbf{C}(x,s)} D/I$ で定義する．ただし，D/I を $\mathbf{C}(x, s)$ 上のベクトル空間と考える．

$\mathbf{H}_A$ にでてくる微分差分作用素が生成する左イデアルも $\mathbf{H}_A$ と書くことにする．

行列 A が

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & * & \end{pmatrix}$$

なる条件 (同次条件) を満たすとき toric ideal I_A は同次イデアルとなる．さらに同次条件を満たすとき $\mathcal{A}$-超幾何微分方程式 $H_A(\beta)$ は全空間で確定特異点

*微分方程式の総合的研究 (2005), 講演者

をもつ (regular holonomic) ことが堀田により証明されている [2]. また Gel'fand, Zelevinsky, Kapranov は同次条件のもと, 1980 年代の終りに, トーリックイデアル I_A が Cohen-Macaulay ならば, $\mathcal{A}$-超幾何微分方程式 $H_A(\beta)$ のランク $\mathrm{rank}(H_A(\beta))$ は A の正規化体積 $\mathrm{vol}(A)$ に等しいことを示した. その後, 多くの人が正規化体積に等しくなる条件を研究した (詳しくは [4] およびその参考文献参照).

さて同次条件を満たさない時 $\mathcal{A}$-超幾何微分方程式は不確定特異点をもつ [4]. 同次条件を満たさない場合に $\mathcal{A}$-超幾何微分方程式のランク (解空間の次元) を初めて詳しく調べたのは Adolphson である [1]. Adolphson は $H_A(\beta)$ のパラメータ β が generic なとき, ランクが $\mathrm{vol}(A)$ と一致することを証明した.

我々が $\mathcal{A}$-超幾何微分差分方程式で証明したのは次の事実である.

定理 1 $\mathrm{rank}(\mathbf{H}_A) = \mathrm{vol}(A)$.

例 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ の時 $\mathcal{A}$-超幾何差分方程式 $(n = 3, d = 1)$ の解を $f(x_1, x_2, x_3, s_1)$ とおく. $F = (f, x_3\frac{\partial f}{\partial x_3}, S_1 \bullet f)^T$ とおくと F は $S_1 \bullet F = MF$,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{-1/6s_1x_1}{x_2} & \frac{1/2x_1x_3-2/3x_2^2}{x_2x_3} & \frac{(1/3s_1-1/3)x_2+1/6x_1^2}{x_2} \\ \frac{1/2s_1}{x_2} & \frac{-3}{2x_2} & \frac{-1/2x_1}{x_2} \end{pmatrix}$$

を満たす. 特にランクは 3. この結果を出力する yang のプログラムリストは以下のとおり.

```
extern Xm_noX $  Xm_noX = 1$
load("yang.rr")$
G12 = [ [[1,2,3]], [s1] ] $
GKZ = G12$
A = GKZ[0]; B = GKZ[1];
Ring = yang.define_gkz_ring(GKZ);
L = yang.gkz(GKZ);
V = L[1] $ L = L[0] $
Gr = yang.buchberger(L)$
Stdmon = yang.stdmon(Gr);
N = length(Stdmon);
Base = [<<0,0,0,0>>,<<0,0,1,0>>,<<0,0,0,1>>];
P = yang.pfaffian(Base,Gr);
print_tex_form(P[3]);
end$
```

4 証明の道具

計算代数システム Risa/Asir の上のパッケージ yang (`http://www.openxm.org`) を用いた計算機実験で定理を確信した.

$\mathrm{rank}(A) \leq \mathrm{vol}(A)$ の証明には, 斎藤睦の超幾何 b-関数を用いる. これには [4] の 4 章に解説してあるようにグレブナ基底や, 整数計画法との対応を用いる.

逆向きの不等式の証明のためには, $\mathrm{vol}(A)$ 個の一次独立な収束級数解を構成する. そのために I_A の同次化の手法を用いる. すなわち行列 A に対して, 同次条件を満たす新しい行列

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ & & \cdots & & 0 \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dn} & 0 \end{pmatrix}$$

を考える. このとき次の補題が定理の証明の鍵となる.

補題 1 *$w = (1, \cdots, 1, 0)$ の近傍の generic な重みベクトル w' に対して w' 方向の $\mathrm{vol}(A)$ 個の (微分方程式の解とみて一次独立な) $\mathbf{H}_{\tilde{A}}$ の超幾何級数解を構成できる. この級数解の dehomogenization ($x_{n+1} = 0$ への制限に類すること) は収束し, $\mathbf{H}_A$ の解となる.*

収束領域は Secondary cone (2 次扇) なる組み合わせ論的な対象 (Gel'fand, Kapranov, Zelevinsky により導入された概念) で特徴づけられる.

参考文献

[1] A.Adolphson: Hypergeometric functions and rings generated monomials. Duke Math. J. **73** (1994), 269–290.

[2] R.Hotta: Equivariant D-modules, math.RT/9805021.

[3] L.F.Matusevich, E.Miller, and U.Walther, Homological Methods for Hypergeometric Families, J. Amer. Math. Soc. **18** (2005),919–941.

[4] M.Saito, B.Sturmfels, N.Takayama: *Gröbner Deformations of Hypergeometric Differential Equations*, Springer, 2000.