重調和型 Ren-Wei 問題の最小エネルギー解の漸近挙動について

高橋太 (Futoshi Takahashi) （大阪市立大学大学院理学研究科）

Ω を $\mathbf{R^4}$ の有界領域、$p>1$ とする。この講演では次の4階楕円型境界値問題

$$(E_p)\begin{cases}\Delta^2 u = u^p & \text{in } \Omega \subset \mathbf{R^4},\\ u>0 & \text{in } \Omega,\\ u|_{\partial\Omega} = \Delta u|_{\partial\Omega} = 0\end{cases}$$

の最小エネルギー解について、特に $p\to\infty$ での漸近挙動を考察する。ここで $\Delta^2 = \Delta\Delta$ は $\mathbf{R^4}$ の重調和作用素で、(E_p) の境界条件は Navier 境界条件と呼ばれる。Ren と Wei は2次元有界領域での半線形楕円型境界値問題: $-\Delta u = u^p$, $u>0$ in $\Omega\subset\mathbf{R^2}$, $p>1$, $u|_{\partial\Omega}=0$ の最小エネルギー解の $p\to\infty$ のときの漸近挙動についていくつかの結果を示している ([1] [2]) が、(E_p) は Ren-Wei の取り扱った問題の自然な「高次元化」と考えられる。

(E_p) の最小エネルギー解 u_p とは、次の制約条件つき最小化問題

$$C_p^2 := \inf\{\int_\Omega |\Delta u|^2 dx : u\in H^2\cap H_0^1(\Omega), \|u\|_{p+1}=1\}$$

の（正値）最小化元 $\underline{u}_p$ から $u_p = C_p^{\frac{2}{p-1}}\underline{u}_p$ として得られるもので、変分法的に最も自然な解である。

Ren-Wei と同様に、次の結果が得られる。

Theorem 1. 定数 C_1, C_2 が存在して、十分大きな任意の p に対して次が成り立つ。

$$0 < C_1 < \|u_p\|_{L^\infty(\Omega)} < C_2 < \infty$$

つまり、最小エネルギー解自身は $p\to\infty$ のときに爆発することも0につぶれることもしない。

証明では、D. R. Adams の高階 Trudinger-Moser 不等式を用いて、C_p の $p\to\infty$ のときの漸近挙動

$$\lim_{p\to\infty} pC_p^2 = 64\pi^2 e$$

を得ることが議論の出発点となる。

領域に凸性を仮定するとき、Theorem 1 は次のように改良される。

Theorem 2. $\Omega\subset\mathbf{R^2}$ を滑らかな有界凸領域とする。このとき (E_p) の最小エネルギー解 u_p に対して次が成り立つ。

$$1 \le \liminf_{p\to\infty}\|u_p\|_{L^\infty(\Omega)} \le \limsup_{p\to\infty}\|u_p\|_{L^\infty(\Omega)} \le \sqrt{e}.$$

証明には Adimurthi-Grossi による blow-up argument と C.S Lin による極限方程式の解の分類定理を利用する。

この結果を用いて、領域が凸の場合には (E_p) の最小エネルギー解の領域内部での 1 点凝集現象を示すことができる。

より詳しく述べるためにいくつかの定義をする。$w_p := u_p/(\int_\Omega u_p^p dx)$ とおく。$\{w_p\}$ の部分列 $\{w_{p_n}\}$ に対して、$\{w_{p_n}\}$ の爆発点集合 S を通常のようにある部分列 $w_{p_n'}$ に対して $x_n \to x, w_{p_n'}(x_n) \to \infty$ となる $\{x_n\} \subset \Omega$ が存在する $x \in \overline{\Omega}$ の集合とする。

さらに $\{u_p\}$ の peak point を、その点の任意の近傍において u_p が $p \to \infty$ のときに L^∞ ノルムの意味で消えない点として定義する。Theorem 1 および $\int_\Omega u_p^p dx = O(1/p)$ $(p \to \infty)$ であることから、$\{u_{p_n}\}$ の最大点 $\{x_{p_n}\}$ の任意の集積点は $\{u_{p_n}\}$ の peak point であり、また $\{w_{p_n}\}$ の爆発点集合に含まれる事がわかる。

Theorem 3. $\Omega \subset \mathbf{R}^4$ を滑らかな有界凸領域とする。このとき w_p の任意の部分列 w_{p_n} $(p_n \to \infty)$ に対して、ある部分列 (再び w_{p_n} と記す) が存在してこの部分列の爆発点集合 S は $S = \{x_0\}, x_0 \in \Omega$ となる。

さらに次が成り立つ。

1. Ω の Radon 測度の弱収束の意味で
$$\frac{u_{p_n}^{p_n}(x)}{\int_\Omega u_{p_n}^{p_n} dx} \overset{*}{\rightharpoonup} \delta_{x_0}$$
が成り立つ。

2. $w_{p_n} \to G_4(\cdot, x_0)$ in $C^4_{loc}(\overline{\Omega} \setminus \{x_0\})$ が成り立つ。ここに $G_4(x,y)$ は Navier 境界条件つき Δ^2 の Green 関数である。

3. 爆発点 x_0 は Ω 上の (負値) Robin 関数 $R_4(x) = \left[G_4(x,y) + \frac{1}{8\pi^2}\log|x-y|\right]_{y=x}$ の臨界点となる。

参考文献

[1] X. Ren, and J. Wei. *On a two-dimensional elliptic problem with large exponent in nonlinearlity,* Trans. A.M.S. **343** (1994) 749-763.

[2] X. Ren, and J. Wei. *Single-point condensation and least-energy solutions,* Proc. A.M.S. **124** (1996) 111-120.

[3] F. Takahashi, *Asymptotic behavior of least energy solutions to a four-dimensional biharmonic semilinear problem,* Osaka J. Math. **42** (2005) 633-651.

[4] F. Takahashi, *Single-point condensation phenomena for a four-dimensional biharmonic Ren-Wei problem,* to appear in Calc. Var.