最大正則性定理とその自由境界問題への応用

清水 扇丈　(静岡大工)

本研究は，早稲田大学理工学部の柴田良弘先生との共同研究である．

自由境界をもつ非圧縮性粘性流体の運動を表面張力を考慮しない場合に考える．$\Omega_t \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqq 2)$ を非圧縮性粘性流体が占めており，$t=0$ でのみ与えられ $t>0$ とともに変化する有界領域とする．流速ベクトル $v(x,t)=(v_1,\ldots,v_n)^*$，圧力 $\theta(x,t)$ $(x \in \Omega_t)$ は Navier-Stokes 方程式

$$
\begin{aligned}
&v_t+(v\cdot\nabla)v-\mathrm{Div}\,S(v,\theta)=f(x,t) \quad \mathrm{div}\,v=0 && \text{in } \Omega_t,\ t>0\\
&S(v,\theta)\nu_t+\theta_0(x,t)\nu_t=0 && \text{on } \Gamma_t,\ t>0\\
&v|_{t=0}=v_0 && \text{in } \Omega
\end{aligned}
\tag{1}
$$

を満たす (cf. Solonnikov [1])．ここで Γ_t は Ω_t の境界，ν_t は Γ_t の単位外法線とする．また

$$S(v,\theta)=D(v)-\theta I,\ \ D_{ij}(v)=(\partial v_i/\partial x_j+\partial v_j/\partial x_i).$$

$f(x,t)$ は外力, $\theta_0(x,t)$ は圧力で $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ 全体で定義されているとする．$\theta(x,t)$ を $\theta+\theta_0$ とおくと $\theta_0(x,t)=0$ の場合に帰着できるので, 以下では $\theta_0=0$ とする．境界上の流体粒子は常に境界上にあり, また領域内部から境界上に流体粒子が発生することがないことを仮定する．問題を固定領域 $\Omega=\Omega_0$ で考えるために Lagrange 座標を用いる．$u(\xi,t)$ を Lagrange 座標での流速ベクトル，x を Euler 座標による Ω_t での流体粒子の位置とすれば $x=\xi+\int_0^t u(\xi,\tau)\,d\tau=X_u(\xi,t)$ となる．$\theta(X_u(\xi,t),t)=\pi(\xi,t)$ とおくと (1) は次の方程式となる：

$$
\begin{aligned}
&u_t-\mathrm{Div}\,[S(u,\pi)+U(u,\pi)]=f(X_u(\xi,t),t) && \text{in } \Omega\times(0,\infty)\\
&\mathrm{div}\,u+E(u)=\mathrm{div}\,[u+\tilde{E}(u)]=0 && \text{in } \Omega\times(0,\infty)\\
&[S(u,\pi)+U(u,\pi)]\nu=0 && \text{on } \Gamma\times(0,\infty)\\
&u|_{t=0}=u_0 && \text{in } \Omega.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

ここで Γ は Ω の境界で $C^{2,1}$ 級，ν は Γ の単位外法線，$U(u,\pi)$, $E(u)$, $\tilde{E}(u)$ は $V_j(0)=0$ を満たす $\int_0^t \nabla u\,d\tau$ の多項式 $V_j(\int_0^t \nabla u\,d\tau)$ $(j=1,2,3,4)$ により次で与えられる：

$$U(u,\pi)=V_1(\cdot)\nabla u+V_2(\cdot)\pi,\quad E(u)=V_3(\cdot)\nabla u,\quad \tilde{E}(u)=V_4(\cdot)u.$$

(2) の任意のデータに対する時間局所的な解の一意存在と，小さなデータに対する時間大域的な解の一意存在を示すことが目的である．(2) は準線形方程式であるので，線形化問題

$$
\begin{aligned}
u_t-\mathrm{Div}\,S(u,\pi)=f,\quad \mathrm{div}\,u=g=\mathrm{div}\,\tilde{g}\quad \text{in } \Omega\times(0,\infty)\\
S(u,\pi)\nu|_\Gamma=h,\quad u|_{t=0}=u_0
\end{aligned}
\tag{3}
$$

に対する最大正則性を証明することが鍵となる．まず解析的半群を生成する．$u\in W_q^2(\Omega)$ に対し

$$\Delta\pi=0\ \ \text{in}\ \ \Omega,\quad \pi|_\Gamma=\nu\cdot(D(u)\nu)-\mathrm{div}\,u|_\Gamma$$

の一意解 $\pi\in W_q^1(\Omega)$ が存在する．これを $\pi=K(u)$ とおく．

$$A_q u=-\mathrm{Div}\,S(u,K(u)),\quad \mathcal{D}(A_q)=\{u\in W_q^2(\Omega)^n\cap J_q(\Omega)\mid S(u,K(u))\nu|_\Gamma=0\}$$

とおくと A_q $(1 < q < \infty)$ は $J_q(\Omega) = \{u = (u_1, \ldots, u_n)^* \in L_q(\Omega)^n \mid \operatorname{div} u = 0 \text{ in } \Omega\}$ 上の解析的半群を生成する．時間局所的な結果も得ているが，以下では時間大域的な結果を述べる．

$$W_{q,p}^{2,1}(\Omega \times (0,\infty)) = L_p((0,\infty), W_q^2(\Omega)) \cap W_p^1((0,\infty), L_q(\Omega))$$
$$W_{p,0}^1((0,\infty), L_q(\Omega)) = \{u \in W_p^1(\mathbb{R}, L_q(\Omega)) \mid u = 0 \text{ for } t < 0\}$$
$$H_{q,p}^{1,1/2}(\Omega \times \mathbb{R}) = H_p^{1/2}(\mathbb{R}, L_q(\Omega)) \cap L_p(\mathbb{R}, W_q^1(\Omega))$$
$$H_{q,p,0}^{1,1/2}(\Omega \times (0,\infty)) = \{u \in H_{q,p}^{1,1/2}(\Omega \times \mathbb{R}) \mid u = 0 \text{ for } t < 0\}$$
$$\mathcal{D}_{q,p}(\Omega) = [J_q(\Omega), \mathcal{D}(A_q)]_{1-1/p,p}$$
$$\mathcal{R} = \{Ax + b \mid A : n \text{ 次交代行列},\ b \in \mathbb{R}^n\}, \quad \{p_\ell\}_{\ell=1,\ldots,M} : \mathcal{R} \text{ の正規直交基}$$

とする．Weis 理論 [2] に基づき，全空間と半空間のモデル問題の解作用素の R-boundedness を示し，作用素値 Fourier multiplier の定理を適用することによりモデル問題の最大正則性を示す．局所化の方法により領域 Ω における解に戻すとき，剰余項として現れる低階項を解析的半群の $J_q(\Omega) \setminus \mathcal{R}$ 上での指数減衰性を用いて評価して (3) の指数安定な時間大域的最大正則性定理を得る．

Theorem 1. $1 < p, q < \infty$ とする．$\gamma_0 > 0$ が存在してある $\gamma \in [0, \gamma_0]$ に対し

$$u_0 \in \mathcal{D}_{q,p}(\Omega),\ e^{\gamma t} f \in L_p((0,\infty), L_q(\Omega))^n,$$
$$e^{\gamma t} g \in L_p((0,\infty), W_q^1(\Omega)),\ e^{\gamma t} \tilde{g} \in W_{p,0}^1((0,\infty), L_q(\Omega))^n,\ e^{\gamma t} h \in H_{q,p,0}^{1,1/2}(\Omega \times (0,\infty))^n$$

と直交条件

$$(u_0, p_\ell)_\Omega = 0, \quad (f(\cdot,t), p_\ell)_\Omega + (h(\cdot,t), g_\ell)_\Gamma = 0 \quad \text{a.e. } t > 0, \quad \ell = 1, \ldots, M$$

を満たすとする．このとき (3) の一意解 $(u, \pi) \in W_{q,p}^{2,1}(\Omega \times (0,\infty))^n \times L_p((0,\infty), W_q^1(\Omega))$ が存在して，次の指数安定評価式と直交条件を満たす：

$$\begin{aligned} \|e^{\gamma t} u\|_{W_{q,p}^{2,1}(\Omega \times (0,\infty))} + \|e^{\gamma t} \pi\|_{L_p((0,\infty), W_q^1(\Omega))} &\leqq C(\|u_0\|_{\mathcal{D}_{q,p}(\Omega)} + \|e^{\gamma t} f\|_{L_p((0,\infty), L_q(\Omega))} \\ &+ \|e^{\gamma t} g\|_{L_p((0,\infty), W_q^1(\Omega))} + \|e^{\gamma t} h\|_{H_{q,p}^{1,1/2}(\Omega \times (0,\infty))} + \|e^{\gamma t} \tilde{g}\|_{W_p^1((0,\infty), L_q(\Omega))}) \\ (u(\cdot,t), p_\ell)_\Omega &= 0 \qquad t \geqq 0, \quad \ell = 1, \ldots, M. \end{aligned}$$

Th.1 と縮小写像の原理により，$f = 0$ とした (2) の指数安定な時間大域解の一意存在定理を得る．

Theorem 2. $2 < p < \infty$, $n < q < \infty$. 以下を満たす ϵ, $\gamma > 0$ が存在する：$u_0 \in \mathcal{D}_{q,p}(\Omega)$, $\|u_0\|_{\mathcal{D}_{q,p}(\Omega)} \leqq \epsilon$ 及び $(u_0, p_\ell)_\Omega = 0$ $(\ell = 1, \ldots, M)$ ならば，$f = 0$ とした (2) の一意解 $(u, \pi) \in W_{q,p}^{2,1}(\Omega \times (0,\infty))^n \times L_p((0,\infty), W_q^1(\Omega))$ が存在し，次の指数安定評価式と直交条件を満たす：

$$\begin{aligned} \|e^{\gamma t} u\|_{W_{q,p}^{2,1}(\Omega \times (0,\infty))} + \|e^{\gamma t} \pi\|_{L_p((0,\infty), W_q^1(\Omega))} &\leqq C \|u_0\|_{\mathcal{D}_{q,p}(\Omega)} \\ (u(\cdot,t), p_\ell)_\Omega &= 0 \qquad t \geqq 0, \quad \ell = 1, \ldots, M. \end{aligned}$$

Th.2 は Solonnikov により $p = q > 3$ の場合に得られているが，Th.1 は新しい結果である．

参考文献 [1] Solonnikov, V.A., Math. USSR Izvestiya **31**, 381–405 (1988)
[2] Weis, L., Math. Ann. **319**, 735–758 (2001)