一つまたは二つの束縛条件をみたす平面閉曲線の運動

東北大学大学院理学研究科　　岡部 真也

平面内のピアノ線のような弾性体でできた閉曲線 γ について, 次の二つの問題を考える:

問題 1. γ が囲む領域の内側とその外側が二種の非圧縮性粘性流体 F_i, F_o でそれぞれ満たされている状況を考える. このとき γ は曲げエネルギーを減らすように変形すると考えられる. しかし, 非圧縮性の仮定により, γ が囲む面積は一定となる. このような場合にも γ は曲げエネルギーを減らすように変形できるか? もし可能ならば, 最終的にどのような形状となるか?

問題 2. γ が囲む領域の内側とその外側から, それぞれ, 一様な圧力 p_i, p_o が γ にかかっているとする. $p := p_o - p_i > 0$ の場合, つまり外側からかかる圧力が内側からかかる圧力よりも大きい場合を考える. p が小さいときには円が安定であるが, p がある値をこえると座屈が生じる. このとき, γ はどのような振舞いをするか?

数学的にはこのような問題を, γ の運動はあるエネルギー汎函数の勾配流に支配され, 最終的な形状はそのエネルギー汎函数に対する変分問題によって決定されるものとして定式化する.

問題 1 に対応するエネルギー汎函数は

$$\mathcal{E}(\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^L \kappa^2(s)\, ds \tag{1}$$

で与えられる. ただし s, L, κ は, それぞれ, γ の弧長パラメータ, 周長, 曲率を表す. (1) は γ の弾性エネルギーを表し, total squared curvature として知られるものである. この問題に対しては, 周長および囲む面積が一定であるという束縛条件付き変分問題が考えられる. ([2], [6].) 周長は積分で与えられるため周長一定条件の下での曲線の運動は伸縮を許している. しかし γ としてはピアノ線を想定しているため, 伸び縮みしないものと考えられる. 従って, γ の運動を扱う際には周長一定に代えて非伸縮性を束縛条件とする. 非伸縮性は, γ が常に弧長パラメータで表示されるものとして定式化する. 非伸縮かつ囲む面積が一定であるという束縛条件に従う閉曲線のエネルギー (1) に対する勾配流方程式は次のようである:

$$\text{(GT)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \gamma}{\partial t} = -\dfrac{\partial^4 \gamma}{\partial x^4} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\left(v - 2\left|\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^2\right)\dfrac{\partial \gamma}{\partial x}\right\} + \lambda \boldsymbol{n}, \\ -\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left|\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^2 v = 2\left|\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^4 - \left|\dfrac{\partial^3\gamma}{\partial x^3}\right|^2 - \lambda\, \boldsymbol{n}\cdot\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}, \\ \displaystyle\int_0^L \left\{\left(\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right) v - \left(\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right)^3 + \lambda\right\} dx = 0. \end{cases}$$

ただし, $x \in S^1_L = \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ は空間変数, $t \geq 0$ は時間変数, $v(x,t)$ と $\lambda(t)$ は未知のスカラー函数である. また $\boldsymbol{n}(x,t)$ は $\gamma(x,t)$ の単位法線ベクトルを表す. (GT) の第一式は γ が変形する方向を与える. 第二式, 第三式は, それぞれ, 各時刻 $t > 0$ において γ が非伸縮であるための必要条件, γ の囲む面積が一定であるための必要十分条件を表している. (GT) の導出の手法は [1] を参考とした. (GT) に関して次が従う:

定理 1. ([3]) $|\gamma_0{}'(x)| \equiv 1$ をみたす滑らかな閉曲線 $\gamma_0(x)$ を与える. また, その周長を L, 囲む面積を $\mathcal{A}_0$, 回転数を 1 とする. このとき, 方程式 (GT) はすべての時間に関して一意的な古典解 $\gamma(x,t)$ をもち, かつ, $\gamma(x,t)$ は $|(\partial\gamma/\partial x)(x,t)| \equiv 1$ をみたす. さらに, $t \to \infty$ とするとき, $\gamma(x,t)$ は (GT) に対応する定常方程式の解に C^∞ 位相で収束する.

定理 1 では γ_0 が円である場合とそうでない場合で解の挙動が大きく異なるが, 詳細は講演で述べる.

問題 2 に関しては, [5] によって, 次のエネルギー汎函数に対する周長一定という束縛条件付き変分問題が提唱されている:

$$E(\gamma) = \mathcal{E}(\gamma) + p\mathcal{A}(\gamma). \tag{2}$$

ただし, $\mathcal{A}$ は γ が囲む面積であり, この第二項は圧力 p が γ になす仕事を表す. γ の運動に関しては, 問題 1 のように, 非伸縮性をみたす閉曲線のエネルギー (2) に対する勾配流方程式を導出し, 同様の結果を得ることができる. 問題 2 に対応する変分問題の Euler-Lagrange 方程式は周期境界条件をもつ曲率 κ に関する二階常微分方程式となる. 初期値問題の解の一意性から, この変分問題の任意の臨界点は次の境界値問題の解によって構成されることが容易に従う:

$$
\text{(P)} \qquad \begin{cases} \kappa''(s) + \dfrac{1}{2}\kappa^3(s) - \mu\kappa(s) - p = 0 \qquad \text{for} \quad s \in [0, L/(2n)], \\ \displaystyle\int_0^{L/(2n)} \kappa(s)\, ds = \frac{\pi}{n}, \\ \kappa'(0) = \kappa'(L/(2n)) = 0. \end{cases}
$$

ただし, n は $n \geq 2$ なる自然数であり, $'$ は弧長パラメータ s に関する微分を表す. (P) の第一方程式が Euler-Lagrange 方程式であり, κ とともに決定される Lagrange 乗数 μ を含んでいる. 二番目の積分条件は (P) の解から構成した閉曲線 γ の回転数が 1 であることを意味している. (P) の狭義単調な解は, この変分問題の n モード解とよばれる. なぜなら, (P) の狭義単調な解から全区間 $[0, L]$ 上の解で周期境界条件を満たすものを構成することができ, さらにその解に相当する閉曲線はちょうど n 個の対称軸をもつからである. $p \to \infty$ とするときの n モード解の漸近形に関して次が得られる:

定理 2. ([4]) $p > 0$ は十分大きいとする. このとき, (P) は狭義単調減少する解 $\kappa(s)$ をもつ. $p \to \infty$ とするときの $\kappa(s)$ および Lagrange 乗数 μ の漸近形は次で与えられる:

$$
\begin{aligned}
\max_{s \in [0, L/(2n)]} \kappa(s) &= \kappa(0) = A^* - \left(1/(4\sqrt{M_n}\sqrt{p}) + O(1/p)\right)\delta^2 + O(\delta^3), \\
\min_{s \in [0, L/(2n)]} \kappa(s) &= \kappa(L/(2n)) = B^* + \delta + O(\delta^2), \\
\mu &= M_n p + O(\sqrt{p}), \qquad\qquad s^* = O\left((\log p)/\sqrt{p}\right),
\end{aligned}
$$

ただし s^* は $\kappa(s^*) = 0$ をみたすものであり, A^*, B^*, M_n, δ は, それぞれ

$$
\begin{aligned}
A^* &= 2\sqrt{M_n}\sqrt{p} + O(1), & B^* &= -\frac{1}{M_n} + O(1/\sqrt{p}), \\
M_n &= L/(2(n-1)\pi), & \delta &= \sqrt{p}\exp\left[-L\sqrt{M_n}\sqrt{p}/(2n)\right]\left(1 + O(1/p^{1/8})\right),
\end{aligned}
$$

である. さらに, (P) の狭義単調増加する解は $\kappa(L/(2n) - s)$ と表される.

定理 2 により, p が十分大きい場合の n モード解に対応する閉曲線の形状がわかる.

参考文献

1. N. Koiso, *On the motion of a curve towards elastica*, in Actes da la Table Ronde de Géometrie Différentielle (Luminy 1992), Sémin Congr. 1, Soc. Math. France, Paris, 1996, 403-436.

2. W. Matsumoto, M. Murai, S. Yotsutani, *By which kind of sound, can one hear the shape of drum?*, RIMS Kokyuroku **1315** (2003), 156-175.

3. S. Okabe, *The motion of an elastic closed curve with constant enclosed area*, preprint.

4. S. Okabe, *Asymptotic form of solutions of the Tadjbakhsh-Odeh variational problem*, preprint.

5. I. Tadjbakhsh and F. Odeh, *Equilibrium states of elastic rings*, J. Math. Anal. Appl. **18** (1967), 59-74.

6. K. Watanabe, *Plane domains which are spectrally determined*, Annals of Global Analysis and Geometry **18** (2000), 447-475.

7. K. Watanabe, *The non-disk minimizer of the total squared curvature and area*, preprint.