半導体中の電子流を記述する流体力学モデルの時間大域解について

西畑 伸也 (東京工業大学大学院・情報理工学研究科)

本講演では半導体中の電子の流れを記述する流体力学モデルに対して，講演者等によって得られた結果について論じる．特に 1 次元有界領域 $\Omega := (0,1)$ 上の初期境界値問題に対する定常解の漸近安定性について考察する．半導体中の電子の動きは次の方程式系によって記述される．

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \tag{1a}$$
$$(\rho u)_t + \big(\rho u^2 + p(\rho)\big)_x = \rho\phi_x - \rho u, \tag{1b}$$
$$\phi_{xx} = \rho - D. \tag{1c}$$

ここで ρ, u, ϕ は，それぞれ電子密度，電子速度，電位を表す未知関数である．従って，ρu は電流密度を意味する．また，$p(\rho) = K\rho^\gamma$ ($K > 0$, $\gamma \geq 1$, 工学的には $\gamma = 1$ が重要である)．$D(x)$ はドーピング・プロファイルと呼ばれる有界連続な正値関数である．初期値と境界値は，

$$(\rho, u)(0,x) = (\rho_0, u_0)(x), \tag{2}$$
$$\rho(t,0) = \rho_l > 0, \quad \rho(t,1) = \rho_r > 0, \tag{3}$$
$$\phi(t,0) = 0, \quad \phi(t,1) = \phi_r > 0 \tag{4}$$

で与えられているものとする．ここで，ρ_l, ρ_r, ϕ_r は定数である．

初期値境界値問題 (1) – (4) の古典解を考察する為，$(t,x) = (0,0)$ と $(t,x) = (0,1)$ において両立性条件を仮定する (すなわち，$\rho(0,0) = \rho_l$, $\rho(0,1) = \rho_r$, $(\rho u)_x(0,0) = 0$, $(\rho u)_x(0,1) = 0$)．さらに，初期値に対して亜音速条件と密度の強正値性を仮定する．

$$\inf_{x\in(0,1)} \big(p'(\rho_0(x)) - u_0^2(x)\big) > 0, \quad \inf_{x\in(0,1)} \rho_0(x) > 0. \tag{5}$$

(1) – (4) の解 (ρ, u) が初期値 (ρ_0, u_0) の近傍にあるならば，(ρ, u) も亜音速条件と密度の強正値性を満たす．

$$\inf_{x\in(0,1)} \big(p'(\rho) - u^2\big) > 0, \quad \inf_{x\in(0,1)} \rho > 0. \tag{6}$$

条件 (6) は双曲型方程式 (1a)，(1b) の二つ特性速度のうち一方は正で他方は負である事と同値である為，二つの境界条件 (3) と (4) で初期境界値問題 (1) – (4) は適切と成る．

本講演では，初期値境界値問題 (1) – (4) に対する解 (ρ, u, ϕ) が時間の経過と共に定常解 $(\tilde\rho, \tilde u, \tilde\phi)$ に漸近する事を示す．ここで，定常解とは時間に依存しない (1) の解で，境界条件 (3), (4) を満たす関数を意味する．従って，定常解は次の方程式系と境界条件を満たす．

$$(\tilde\rho\tilde u)_x = 0, \tag{7a}$$
$$\big(\tilde\rho\tilde u^2 + p(\tilde\rho)\big)_x = \tilde\rho\tilde\phi_x - \tilde\rho\tilde u, \tag{7b}$$
$$\tilde\phi_{xx} = \tilde\rho - D, \tag{7c}$$

$$\tilde\rho(0) = \rho_l > 0, \quad \tilde\rho(1) = \rho_r > 0, \quad \tilde\phi(0) = 0, \quad \tilde\phi(1) = \phi_r > 0. \tag{8}$$

初期値境界値問題 (1) – (4) に対する既存の研究 [2] では，ドーピング・プロファイル $D(x)$ が平坦な (定数に近い) 関数であるとの仮定下で，定常解の漸近安定性が示されていた．しかし，実際の半導体デバイスでは $D(x)$ は (深い) バスタブ形の関数であり，けっして平坦ではない．また，平坦とは限らない一般的な $D(x)$ に対し定常解の漸近安定性が [3] で証明されているが，同論文では周期境界条件を課していた．従って，微小な半導体デバイスに対する研究では工学的見地から重要と思われる，有界領域上ディリクレ境界条件下での定常解の漸近安定性の解明は未解決なまま残されていた．この問題に対する講演者等による主要な結果は，次の二つの定理にまとめられる．

定理 1. 任意の $\rho_l > 0$ に対して，ある $\delta_1 > 0$ が存在して $|\rho_l - \rho_r| + |\phi_r| \le \delta_1$ であれば、定常問題 (7), (8) の(6) を満たす解 $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\phi})(x) \in \mathcal{B}^2(\Omega)$ が一意的に存在する．

定理 2. $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\phi})$ を (6) を満たす定常問題 (7), (8) の解とする．また，初期値 $(\rho_0, u_0) \in H^2(\Omega)$ と境界値 ρ_l, ρ_r, ϕ_r は (3) – (5) と両立性条件を満たすとする．このとき，ある $\delta_2 > 0$ が存在して $|\rho_l - \rho_r| + |\phi_r| + \|(\rho_0 - \tilde{\rho}, u_0 - \tilde{u})\|_2 \le \delta_2$ であれば，初期値境界値問題 (1) – (4) の解 $(\rho, u, \phi) \in \mathfrak{X}_2([0,\infty))$ が一意的に存在して，(6) を満たす．さらに，$(\rho - \tilde{\rho}, u - \tilde{u}) \in \mathfrak{X}_2([0,\infty))$, $(\phi - \tilde{\phi}) \in \mathfrak{X}_2^2([0,\infty))$ であり，減衰評価

$$\|(\rho - \tilde{\rho}, u - \tilde{u})(t)\|_2 + \|(\phi - \tilde{\phi})(t)\|_4 \le C\|(\rho_0 - \tilde{\rho}, u_0 - \tilde{u})\|_2 e^{-\alpha t}$$

が成立する．ここで C と α は時間 t に依らない正の定数である．

以上は流体力学モデルに対する結果であるが，現在では半導体デバイスのさらなる微小化に伴い量子効果が無視出来なくなっている．それを考慮に入れた次の方程式系に対する最新の成果も，時間が許せば紹介する予定である．

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \tag{9a}$$

$$(\rho u)_t + \big(\rho u^2 + p(\rho)\big)_x - \frac{\epsilon^2}{2}\rho\left(\frac{\sqrt{\rho}_{xx}}{\sqrt{\rho}}\right)_x = \rho\phi_x - \rho u, \tag{9b}$$

$$\phi_{xx} = \rho - D. \tag{9c}$$

記号. 非負の整数 $i \ge 0$ に対し，$H^i(\Omega)$ は i 次の Sobolev 空間とし，そのノルムを $\|\cdot\|_i$ と表す．$\mathcal{B}^i(\Omega)$ は i 次 Höledr 空間を意味する．また，

$\mathfrak{X}_2([0,T]) := \bigcap_{k=0}^{2} C^k([0,T]; H^{2-k}(\Omega))$, $\mathfrak{X}_2^2([0,T]) := \bigcap_{k=0}^{2} C^k([0,T]; H^{4-k}(\Omega))$ とする．

本講演の内容は，主に**東京工業大学大学院情報理工学研究科・鈴木政尋氏**との共同研究による．

参考文献

[1] P. Degond and P. Markowich, On a one-demensional steady-state hydrodynamic model, *Appl. Math. Lett.* **3** (1990), 25–29.

[2] H. Li, P. Markowich and M. Mei, Asymptotic behaviour of solutions of the hydrodynamic model of semiconductors, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **132** (2002), 359–378.

[3] A. Matumura and T. Murakami, Asymptotic behaviour of solutions of solutions for a fluid dynamical model of semiconductor equation, to appear.