球面への調和写像の孤立特異点の近傍での挙動の解析

中島　徹　（静岡大工）

以下次の記号を用いる。

$$\Omega \subset \mathbb{R}^m:\ \text{有界領域} \qquad \partial\Omega \in C^\infty$$

$$\mathbb{B}^m = \{x \in \mathbb{R}^m |\ |x| < 1\} \qquad \mathbb{S}^{n-1} = \{y \in \mathbb{R}^n |\ |y| = 1\}$$

Definition 1 (Dirichlet energy)

$$W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^{n-1}) = \{u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n) |\ |u(x)| = 1 \quad \text{a.e. in } \Omega\}$$

$$\mathbf{E} : W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^{n-1}) \to \mathbb{R}$$

$$\mathbf{E}(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx$$

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \right)_{1 \le i \le n, 1 \le \alpha \le m} \qquad |\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{m} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \right)^2$$

境界値を固定したときの $\mathbf{E}$ の minimizer を考える。

Definition 2 (Energy minimizing map)

$u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^{n-1})$ が Energy minimizing map (以下 E.M.M.) であるとは，

$$v - u \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

を満たす任意の $v \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^{n-1})$ について

$$\mathbf{E}(u) \le \mathbf{E}(v)$$

が成立することえをいう。ただし

$$W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n) = \overline{C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)}$$

Remark 1 E.M.M. は調和関数や測地線の一般化と考えられる。しかし一般に不連続点 (特異点と呼ぶ。) を持つ。代表的な例は次。

$$x/|x| \in W^{1,2}(\mathbb{B}^m, \mathbb{S}^{m-1}) \quad (m \geq 3): \quad \text{E.M.M.}$$

これは 0 で連続ではない。

そこで次のような問題を考える。

Problem 1 E.M.M. の特異点の近傍での挙動を解析せよ。

Simon の結果と Brezis-Coron-Lieb の結果を合わせると次が成立する。

Theorem 1 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^2)$: E.M.M. として、$p \in \Omega$ を u の特異点とする。（この場合は常に孤立特異点となる。）このときある $R \in O(3)$ が存在して、u は p の近傍では

$$u(x) \sim R\frac{x-p}{|x-p|}$$

となる。（$\sim$ は漸近的な挙動を意味する。正確な意味は講演中に述べる。）

この結果を高次元化できないかを考える。

Problem 2 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ $(m \geq 4)$ で定義された E.M.M $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^{m-1})$ について、孤立特異点の近傍での挙動を解析せよ。

$m = 4$ のときには Simon の結果と筆者の結果をあわせると次が成立する。

Theorem 2 $\Omega \subset \mathbb{R}^4$, $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^3)$: E.M.M. として、$p \in \Omega$ を u の特異点とする。（この場合は常に孤立特異点となる。）このときある $R \in O(4)$ が存在して u は p の近傍では

$$u(x) \sim R\frac{x-p}{|x-p|}$$

となる。

Theorem 1 と **Theorem 2** は結果は似ているが、このような挙動をする**理由**は異なる。（よって証明方法も異なる。）講演では Theorem 2 の証明の概略を解説し、$m = 3$ と $m = 4$ の特異点の性質の違いについてふれる。

References

[1] H. Brezis, J. M. Coron, E. Lieb, *Harmonic maps with defects.* Comm. Math. Phys. **107**, (1986), 649–705.

[2] T. Nakajima, *Singular points of harmonic maps from 4-dimensional domains into 3-spheres.* to appear in Duke Math. J.

[3] L. Simon, *Asymptotics for a class of non-linear evolution equations, with applications to geometric problems.* Annals of Mathematics **118** (1983), 525–572