DIRAC–KLEIN–GORDON 方程式の初期値問題

町原 秀二 (島根大学総合理工学部)

1. Dirac–Klein–Gordon 方程式

本講演では次の空間1次元 Dirac–Klein–Gordon 方程式 (DKG) の初期値問題を考える.

$$\text{DKG}\quad \begin{cases} \mathcal{D}\psi + m\psi = \phi\psi, & \psi(0)=\psi_0, \\ \Box\phi + M\phi = \psi^\dagger\psi, & \phi(0)=\phi_0,\ \partial_t\phi(0)=\phi_1. \end{cases}$$

ここで $m, M \geq 0$ は定数, ψ は2成分スピノル,

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t,x) \\ v(t,x) \end{pmatrix} \quad : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^2$$

Dirac operator $\mathcal{D}$ を $\mathcal{D} = i\gamma_0\partial_t + i\gamma_1\partial_x$ で γ_0, γ_1 は次の Dirac matrix,

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ϕ は実数値関数,

$$\phi = \phi(t,x) \quad : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

d'Alembert operator $\Box = \Box_c = \partial_t^2 - c^2\partial_x^2$. $\mathcal{D}$ と $\Box$ には次の関係がある.

$$\mathcal{D}^2 = -\Box_1 I$$

ここで I は 2×2 単位行列. 非斉次項はそれぞれ次のように書き下せる,

$$\phi\psi = \begin{pmatrix} \phi u \\ \phi v \end{pmatrix}, \quad \psi^\dagger\psi = (\overline{u}, \overline{v})\gamma_0 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 2\Re(\overline{u}v) \quad \text{for} \quad \psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

初期値を与えておく

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \end{pmatrix} \quad : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2,$$

$$\phi_0 = \phi_0(x),\ \phi_1 = \phi_1(x) \quad : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

2. 初期値問題を解く

Soboev 空間 H^s, $s \in \mathbb{R}$ を定義する,

$$\|f\|_{H^s} = \left\|\langle\xi\rangle^s \hat{f}\right\|_{L^2_\xi}$$

ここで $\langle x\rangle = 1 + |x|$, $\hat{f}(\xi) = \int e^{-ix\xi} f(x)dx$.

このとき既知の解の一意存在の結果として, Chadam [3] が時間大域解 $(\psi,\phi) \in H^1 \oplus H^1$, Bournaveas [2] が時間大域解 $(\psi,\phi) \in L^2 \oplus H^1$, Fang [4] が時間局所解 $(\psi,\phi) \in H^{-1/4+\varepsilon} \oplus H^{1/2+\delta}$, 時間大域解 $(\psi,\phi) \in L^2 \oplus H^{1/2+\delta}$ がある.

今回の主定理は次である.

Date: 平成17年12月16日.

定理 1. $0 \leq 2a < s \leq 1/2$ とする．DKG は $\psi_0 \in H^{-a}$, $\phi_0 \in H^s$, $\phi_1 \in H^{s-1}$ に対して $T > 0$ で一意の時間局所解 (ψ, ϕ) をもつ．そして次をみたす

$$\psi \in C(-T, T; H^{-a}), \quad \phi \in C(-T, T; H^s) \cap C^1(-T, T; H^{s-1}).$$

さらに $0 = a < s < 1/2$ のときは

$$\psi \in C(\mathbb{R}; L^2), \quad \phi \in C(\mathbb{R}; H^s) \cap C^1(\mathbb{R}; H^{s-1}).$$

3. 評価式

記号として t と x に関する Fourier 変換 $\widetilde{f}(\tau, \xi) = \int e^{-ix\xi - it\tau} f(t, x) dt dx$ と cut–off function

$$b_T(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T \\ 0, & |t| \geq 2T \end{cases} \in C_0^\infty$$

を用意する．次の非斉次方程式について

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x u = F, &\quad u(0, x) = u_0(x), \\ \partial_t v - \partial_x v = G, &\quad v(0, x) = v_0(x), \\ \partial_t^2 \phi - c^2 \partial_x^2 \phi = H, &\quad \phi(0, x) = \phi_0(x),\ \partial_t \phi(0, x) = \phi_1(x). \end{aligned}$$

補題 2. $a + b < 1/2$, $a \geq 0$ とする．

$$\left\| \frac{\langle \tau + \xi \rangle^{1-b}}{\langle \tau - \xi \rangle^a} \widehat{b_T} * \widetilde{u} \right\|_{L^2_\tau L^2_\xi} \lesssim \|u_0\|_{H^{-a}} + \left\| \frac{\widetilde{F}}{\langle \tau + \xi \rangle^b \langle \tau - \xi \rangle^a} \right\|_{L^2_\tau L^2_\xi},$$

$$\left\| \frac{\langle \tau - \xi \rangle^{1-b}}{\langle \tau + \xi \rangle^a} \widehat{b_T} * \widetilde{v} \right\|_{L^2_\tau L^2_\xi} \lesssim \|v_0\|_{H^{-a}} + \left\| \frac{\widetilde{G}}{\langle \tau + \xi \rangle^a \langle \tau - \xi \rangle^b} \right\|_{L^2_\tau L^2_\xi}.$$

補題 3. $a < 1/4$, $d \in \mathbb{R}$ とする．

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{\langle \tau + c\xi \rangle^{1-a} \langle \tau - c\xi \rangle^{1-a}}{\langle \xi \rangle^d} \widehat{b_T} * \widetilde{\phi} \right\|_{L^2_\tau L^2_\xi} \\ &\qquad \lesssim \|\phi_0\|_{H^{1-a-d}} + \|\phi_1\|_{H^{-a-d}} + \left\| \frac{\widetilde{H}}{\langle \xi \rangle^d \langle \tau + c\xi \rangle^a \langle \tau - c\xi \rangle^a} \right\|_{L^2_\tau L^2_\xi}. \end{aligned}$$

DKG の非斉次項の評価には次を使う．

補題 4. $\alpha + \beta > 1/2$ とする．$\max\{\alpha, \beta\} = 1/2$ のとき $\gamma < \min\{\alpha, \beta, \alpha + \beta - 1/2\}$, $\max\{\alpha, \beta\} \neq 1/2$ のとき $\gamma \leq \min\{\alpha, \beta, \alpha + \beta - 1/2\}$ で次が成立

$$\|fg\|_{H^{-\alpha}} \lesssim \|f\|_{H^\beta} \|g\|_{H^{-\gamma}}.$$

References

1. Daniella Bekiranov, Takayoshi Ogawa, and Gustavo Ponce, *Interaction equations for short and long dispersive waves*, J. Funct. Anal. **158** (1998), no. 2, 357–388.
2. N. Bournaveas, *A new proof of global existence for the Dirac Klein-Gordon equations in one space dimension*, J. Funct. Anal. **173** (2000), no. 1, 203–213.
3. John M. Chadam, *Global solutions of the Cauchy problem for the (classical) coupled Maxwell-Dirac equations in one space dimension*, J. Functional Analysis **13** (1973), 173–184.
4. Yung-fu Fang, *On the Dirac-Klein-Gordon equation in one space dimension*, Differential Integral Equations **17** (2004), 1321–1346.
5. J. Ginibre, Y. Tsutsumi, and G. Velo, *On the Cauchy problem for the Zakharov system*, J. Funct. Anal. **151** (1997), no. 2, 384–436.

E-mail address: `machihara@riko.shimane-u.ac.jp`