場の量子論の作用素解析と
その量子光学及び固体物理学への応用

廣川 真男 (岡山大学大学院自然科学研究科)

A. Arai と講演者は [1] において、一般化されたスピン・ボゾン (GSB) 模型[1]を提唱し、その作用素解析を行って来た。GSB 模型は、ある物理系がボーズ粒子の作る量子場と相互作用する系を記述し、様々な物理における模型を数学的に包括する。量子場は、簡単に述べると、古典場の波動性をある波動方程式で表し、その解である波動関数で表された古典場を固有関数展開し、その展開係数を生成・消滅作用素で置き換えて粒子性を与えたものなので、その波動方程式の作用素値の解となる。本講演では、GSB 模型に関する作用素解析の結果を紹介し、GSB 模型の具体例として、量子光学及び固体物理学に現れる模型をとりあげ、現在まで展開されて来た作用素解析学が、その模型に対してどのような新しい結果を示し、また、示し得るのかを紹介する。

今、2 状態系や量子力学系などの物理系のエネルギー作用素 (Hamiltonian) が作用する状態空間を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ で与える。量子場と相互作用する前のその物理系の Hamiltonian を $\mathcal{H}$ 上の下に有界な自己共役作用素 A で与え、A は基底状態[2]を持つとする。例えば、考えている物理系がスピン系ならば、$\mathcal{H}$ は $\mathbb{C}^2$ で A は 2×2 の Hermite 行列。量子力学系ならば、$\mathcal{H}$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ で A は Schrödinger 作用素 $-\frac{1}{2}\Delta + V$ で与えられる。量子場との相互作用を担う作用素 B_j, $j = 1, \cdots, J$, を $\mathcal{H}$ 上の対称作用素で与える。Bose-Eintein 統計に従う量子場の Hamiltonian が作用する状態空間を次の Fock 空間 $\mathcal{F}_{\rm b}$ という Hilbert 空間で与える：$\mathcal{F}_b := \oplus_{n=0}^{\infty} \otimes_{\rm sym}^n L^2(\mathbb{R}^d)$。ここで、$\otimes_{\rm sym}^n L^2(\mathbb{R}^d)$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ の n 重対称テンソル積で、n ボーズ粒子 (ボゾン) の状態空間を意味する。ただし、$\otimes_{\rm sym}^0 L^2(\mathbb{R}^d) := \mathbb{C}$ とする。量子場の自由 Hamiltonian $H_{\rm b}$ 及び $\lambda \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対する Segal 場の作用素 $\Phi_{\rm S}(\lambda)$ を

$$H_{\rm b} := \int_{\mathbb{R}^d} \omega(k) a^\dagger(k) a(k) dk, \qquad \Phi_{\rm S}(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\overline{\lambda(k)} a(k) + \lambda(k) a^\dagger(k) \right) dk$$

で与える。これらの作用素の定義は講演で行う。ここで、$\omega(k) \geq 0$ は分散関係と呼ばれ、ボゾンの運動量 k に対するエネルギー $\omega(k)$ を表す。$a^\dagger(k)$ は生成作用素と呼ばれ、運動量 k のボゾンを生成し、逆に、$a(k)$ は消滅作用素と呼ばれ、運動量 k のボゾンを消滅させる。今、Bose-Einstein 統計に従う量子場を扱っているので、生成・消滅作用素の間には正準交換関係、$\left[a(k)\,,\, a^\dagger(k')\right] = \delta(k-k')$、$[a(k)\,,\, a(k')] = 0 = \left[a^\dagger(k)\,,\, a^\dagger(k')\right]$ が成り立つ。このとき、GSB 模型の状態空間は Hilbert 空間 $\mathcal{F}_{\rm GSB} := \mathcal{H} \otimes \mathcal{F}_{\rm b}$ で与えられ、GSB 模型の全 Hamiltonian $H_{\rm GSB}$ は

$$H_{\rm GSB} := A \otimes I + I \otimes H_{\rm b} + \alpha \sum_{j=1}^{J} B_j \otimes \Phi_{\rm S}(\lambda_j), \qquad I \text{ は恒等作用素},$$

で与えられる。ここで、$\alpha \in \mathbb{R}$ は結合定数とよばれ物理系と量子場の結合の強さを表す。また、$\lambda_j \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $j = 1, \cdots, J$。量子光学などで研究されている本来のスピン・ボゾン (SB) 模型は、GSB 模型で $\mathcal{H} := \mathbb{C}^2$, $J = 1$, $A := \mu\sigma_3/2$, $B_1 := \sqrt{2}\sigma_1$ とおくことで得られる。ただし、σ_j, $j = 0, 1, 2, 3$, は Pauli 行列。

$H_{\rm GSB}$ の作用素解析で、特筆すべき点は、フォトン (光子) や音響型フォノンのようにボゾンに質量が無い ($\mathrm{ess.inf}_{k\in\mathbb{R}^d}\, \omega(k) = 0$) 場合、$H_{\rm b}$ の離散スペクトル (固有値) は $\sigma_{\rm dis}(H_{\rm b}) = \{0\}$ で本質的スペクトル (真性スペクトル) は $\sigma_{\rm ess}(H_{\rm b}) = [0, \infty)$ となるため、A の最小固有値 $E_0(A)$ が $E_0(A) \in \sigma_{\rm dis}(A \otimes I + I \otimes H_{\rm b})$ で $\sigma_{\rm ess}(A \otimes I + I \otimes H_{\rm b}) = [E_0(A), \infty)$ となり、$A \otimes I + I \otimes H_{\rm b}$ の最小固有値として、かつ、本質的スペクトルの下限として埋め込まれ、これに相互作用が加わるので、加藤の摂動論や dilation operator を使った方法が使えない。さらに厄介なことに、場の量子論では、ボゾンに質量が無いときに、赤外発散 (赤外特異) の問題と向き合わなければならない。そこで、1997 年、1999 年と古い結果ではあるが、講演ではまず GSB 模型の Hamiltonian $H_{\rm GSB}$ に対する、自己共役性 [1] 及び基底状態の存在と非存在 [1, 2] を解説する。

また、2005 年は量子光学の年でもあるようなので、講演では GSB 模型の量子光学及び固体物理学への応用として、次の問題を中心に解説する：

<u>Superradiant Phase Transition</u>：ある量子力学系が、励起状態からよりエネルギーの低い状態に遷移し光を放射する過程には、外場としての電磁波が無くても (外界に光子が無くても) 起こる自然放射と、メーザーや

[1]この模型を Pauli-Fierz 模型と呼ぶ者もいるが、本来の Pauli-Fierz 模型とはかなり違った数学的性質を持つ。本来の Pauli-Fierz 模型に関しては F. Hiroshima の解説 [16] とそこにある参考文献を参照されたい。

[2]スペクトルの下限を最小固有値とする固有ベクトル。

レーザーの発振原理として使われる、外場としての電磁波 (外界の光子の存在) の影響で起こる誘導放射の 2 つがある。自然放射において、原子間の協同効果により、通常よりかなり強い放射が起こること (superradiant phase transition) が R. H. Dicke により [5] で指摘され、実験で確認されている。この Dicke の超放射を記述する模型を K. Hepp と E. Lieb が [8, 9] でさらに詳しく解析している。この Dicke 模型は、Lee-Friedrichs 模型などとも呼ばれるが、本講演では量子光学で呼ばれている Wigner-Weisskopf (WW) 模型という呼び名を使う。今、2×2 行列 c を $c := (\sigma_1 - i\sigma_2)/2$ で与えると、WW 模型は GSB 模型で $d = 3$, $\mathcal{H} := \mathbb{C}^2$, $J = 2$, $A := \mu c^* c$, $B_1 := (c^* + c)/\sqrt{2}$, $B_2 := i(c^* - c)/\sqrt{2}$, $\lambda_1 := \lambda \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $\lambda_2 := i\lambda$ とおくことによって得られる。[12] では、Lieb-Yamazaki のアイディア [18] を基に、[11] で求めた SB 模型の基底エネルギーの評価を改良したが、この際、SB 模型を 2 つの WW 模型に分解し、WW 模型のスペクトル解析を行う手法を取った。この手法の副産物として、Preparata の superradiant phase transition[7, 19] の数学としての証明を与えることとなった。G. Liberti と R. L. Zaffino が [17] で指摘するところによると、ここ 4 年の間に、凝縮系における superradiant phase transition の可能性に対する新たな関心が C. Emary ら [6]、S. Sivasubramanian ら [20]、そして [13] によってよせられ、それぞれの手法で研究されている。本講演では、GSB 模型に対する作用素解析の 1 つの応用例として、$|\alpha|$ が大きくなって行く過程で出現[3]する Preparata の非摂動論的な超放射的基底状態の存在とその数学的性質 [12, 13] を解説し、その周辺にある未解決問題を紹介する。

時間に余裕があるようであれば、GSB 模型に少々修正を加え、$d = 3$, $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}^3)$, $J = 1$, $A := -\frac{1}{2}\Delta + V$, $B_1 := 1$, $\lambda_1(k) := e^{-ikx}\lambda(k)$ として得られる[4]Nelson 模型を作用素解析することで、固体物理学における赤外発散の問題を調べた最近の結果 [10, 14, 15] か、または、講演者が最近研究し始めたバイポーラロン模型 ($d = 3$, $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}^3) \otimes L^2(\mathbb{R}^3)$, $J = 2$, $A := -\frac{1}{2}\Delta_1 \otimes I - I \otimes \frac{1}{2}\Delta_2 + U/|x_1 - x_2|$, $U > 0$, $B_1 := 1 =: B_2$, $\lambda_1(k) := e^{-ikx_1}\lambda(k)$, $\lambda_2(k) := e^{-ikx_2}\lambda(k)$) と量子場の満たす非線形 Schrödinger 方程式 (or Klein-Gordon 方程式) の話題に触れたい。

参考文献

[1] A. Arai and M. Hirokawa, *J. Funct. Anal.* **151** (1997), 455–503.

[2] A. Arai, M. Hirokawa, and F. Hiroshima, *J. Funct. Anal.* **168** (1999), 470–497.

[3] C. Billionnet, *J. Phys. A* **35** (2002), 2649–2673.

[4] C. Billionnet, *J. Math. Phys.* **45** (2005), 072101.

[5] R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **93** (1954), 99–110.

[6] C. Emary and T. Brandes, *Phys. Rev. E* **67** (2003), 066203.

[7] C. P. Enz, *Helv. Phys. Acta* **70** (1997), 141–153.

[8] K. Hepp and E. H. Lieb, *Ann. Phys.* **76** (1973), 360–404.

[9] K. Hepp and E. H. Lieb, *Phys. Rev. A* **8** (1973), 2517–2525.

[10] C. Hainzl, M. Hirokawa, and H. Spohn, *J. Funct. Anal.* **220** (2005), 424–459.

[11] M. Hirokawa, *J. Funct. Anal.* **162** (1999), 178–218.

[12] M. Hirokawa, *Rev. Math. Phys.* **13** (2001), 221–251.

[13] M. Hirokawa, *Phys. Lett. A* **294** (2002), 13–18.

[14] M. Hirokawa, Infrared Catastrophe for Nelson's Model. Non-Existence of Ground State and Soft-Boson Divergence, to appear in *Publ. RIMS.*

[15] M. Hirokawa, F. Hiroshima, and H. Spohn, *Adv. Math.* **191** (2005), 339–392.

[16] F. Hiroshima, 数学 **57** (2005), 70–112.

[17] G. Liberti and Y. R. L. Zaffino, *Phy. Rev. A* **70** (2004), 033803.

[18] E. H. Lieb and K. Yamazaki, *Phys. Rev.* **111** (1958), 728–733.

[19] G. Preparata, Quantum FIeld Theory of Super Radiance, in: R. Cherubini, P. Dalpianz, B. Minetti (Eds.), Problems of Fundamental Modern Physics, World Scientific, Singapore, 1990.

[20] S. Sivasubramanian, A. Widom, and Y. N. Srivastava, *Physica A* **301** (2001), 241–254.

[3] この出現の様子を物理的興味から C. Billionnet が [3, 4] で調べている。
[4] この λ_1 の定義をするときに数学的修正が必要となる。