圧縮性オイラー方程式の球対称解について

–近似解の L^∞ 評価–

By

栢植 直樹

(京都大学数理解析研究所)

概 要

圧縮性非粘性気体の球対称な場合の時間大域解について考察する．この方程式の解の特徴として不連続解即ち衝撃波が生じる．空間1次元の場合は時間大域解の存在が知られているが, 多次元の場合は殆んど知られていない．この空間1次元の理論を使うため球対称の場合は極座標で考察する．そのため原点に特異点を持つ inhomogeneous term が生じる．本講演では半径1の固体球の外部での気体の運動を考えるため原点の特異点の影響は考えない．しかしながら原点を除いたとしても時間大域解の存在は特殊なもの ([C]) を除いて知られていない．近似解の L^∞ 評価を得られれば解の存在が従うが inhomogeneous term が障害になってこれを困難にしている．既存の結果では近似解の時間発展方向の変化のみしか評価されてこなかったが空間方向の変化も評価することでより一般的な場合に対してこの近似解の L^∞ 評価を得る事が目標である．

$$\begin{cases} \rho_t + m_x = -\dfrac{2}{x}m, \\ m_t + \left(\dfrac{m^2}{\rho} + p(\rho)\right)_x = -\dfrac{2}{x}\dfrac{m^2}{\rho}, \ \vec{x} \in \mathrm{R}^3, \ x = |\vec{x}| \geq 1. \end{cases} \tag{IGD}$$

- $\rho(x,t)$: 密度 • $m(x,t)$: 運動量 • $p(\rho) = \rho^\gamma/\gamma$: 圧力 • $\gamma \in (1, 5/3]$: 比熱比
- $u = m/\rho$ $(\rho > 0)$: 速度 • $c = \rho^\theta$ $(\theta = \frac{\gamma-1}{2})$: 音速 • $M = u/c$: マッハ数

$$v_t + f(v)_x = g(x,v), \quad v = {}^t(\rho, m) \tag{IGD$'$}$$

初期値境界値問題

$$\text{初期値}\quad v|_{t=0} = (\rho, m)|_{t=0} = (\rho_0(x), m_0(x)) \quad \text{境界値}\quad m|_{x=1} = 0$$

- Riemann invariant

$$z = \frac{m}{\rho} - \frac{\rho^\theta}{\theta} = u - \frac{\rho^\theta}{\theta}, \quad w = \frac{m}{\rho} + \frac{\rho^\theta}{\theta} = u + \frac{\rho^\theta}{\theta}, \quad \theta = \frac{\gamma - 1}{2}$$

- Characteristic speed
$\lambda_1 = \dfrac{m}{\rho} - \rho^\theta, \quad \lambda_2 = \dfrac{m}{\rho} + \rho^\theta$

注意 1 (Riemann invariatnt の性質)

$$u \geq 0 \text{のとき}, |w| \geq |z|, \ w \geq 0. \quad u \leq 0 \text{のとき}, |w| \leq |z|, \ z \leq 0.$$

注意 2 (速度と密度と Riemann invariant の関係)

$$\frac{w+z}{2} = u, \quad \frac{w-z}{2} = \frac{(\rho)^\theta}{\theta}.$$

注意 3 (Characteristic speed と Riemann invariant の関係)

$$z \leq \lambda_1, \quad \lambda_2 \leq w.$$

既存の結果 [C]

$$\begin{aligned}
&\rho_0, \ u_0 \in L^\infty(x \geq 1), \\
&0 \leq \rho_0(x)^\theta / \theta \leq u_0(x) \leq C \\
&(\Longleftrightarrow z(v_0(x)) \geq 0, \ w(v_0(x)) \leq C') \\
&\Longrightarrow \text{時間大域解}
\end{aligned}$$

初期値の条件は 常に速度が非負であるための十分条件

困難な点

$v^\Delta(x,t)$ の L^∞ 評価 (inhomogeneous term の増分の評価)$\Longleftarrow$ $\underline{z(v^\Delta)}$ (resp. $w(v^\Delta)$) の 下 (resp. 上) からの評価

主張 $C_2 \geq -C_1$ なる C_1, C_2 と $\phi = \frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}$ に対して ρ_0, $u_0 \in L^\infty(x \geq 1)$ が

$$z(v_0(x)) \geq -C_1 x^{-\phi}, \quad w(v_0(x)) \leq C_2$$

を満すならば (IGD) の初期値境界値問題は時間大域解をもつ.

もし $C_1 \leq 0$ ならば [C] の結果に含まれるので以下 $C_1 > 0$ とする.

注意 4

$$\gamma \Longrightarrow 1 \text{ とすると } \textbf{(主張の初期値の条件)} \Longrightarrow \text{任意の } L^\infty$$

(cf. [MU2])

注意 5 主張の初期値の条件には $\rho_0(x) =$ 定数, $u_0(x) = 0$ を入れる事はできない.

記号

$$\forall \varepsilon > 0, \quad M_- = C_1.$$

M_+ は

$$\begin{cases} M_+ \geq \max\{C_1, C_2\}, \\ M_+^2 - M_-^2 - \frac{16}{\gamma+1}(M_+ + \varepsilon)M_- - \varepsilon \geq 0 \end{cases}$$

を満す定数.

注意 6

$$z(v_0(x)) \geq -M_- x^{-\phi}, \ w(v_0(x)) \leq M_+ + \varepsilon.$$

近似解

Δx: 空間差分　Δt: 時間差分　$j \in \mathbf{N}$　$n \in \mathbf{N} \cup 0$　$\Delta x / \Delta t = 2(M_+ + \varepsilon)$　$t_n = n\Delta t$

$t < n\Delta t$ まで近似解 $v^\Delta(x,t)$ が定義されているとする. このとき

$$v_j^n \equiv \frac{1}{\Delta x} \int_{(j-1)\Delta x + 1}^{j\Delta x + 1} v^\Delta(x, n\Delta t - 0) dx.$$

(i)**Riemann 問題**

$$\begin{cases} v_t + f(v)_x = 0, \\ v_{t=0} = \begin{cases} v_j^n, & x < j\Delta x + 1, \\ v_{j+1}^n, & x > j\Delta x + 1 \end{cases} \end{cases}$$

および **Riemann 初期値境界値問題**

$$\begin{cases} v_t + f(v)_x = 0, \\ v_{t=0} = v_1^n, \quad x > 1, \\ m|_{x=1} = 0 \end{cases}$$

を解く.

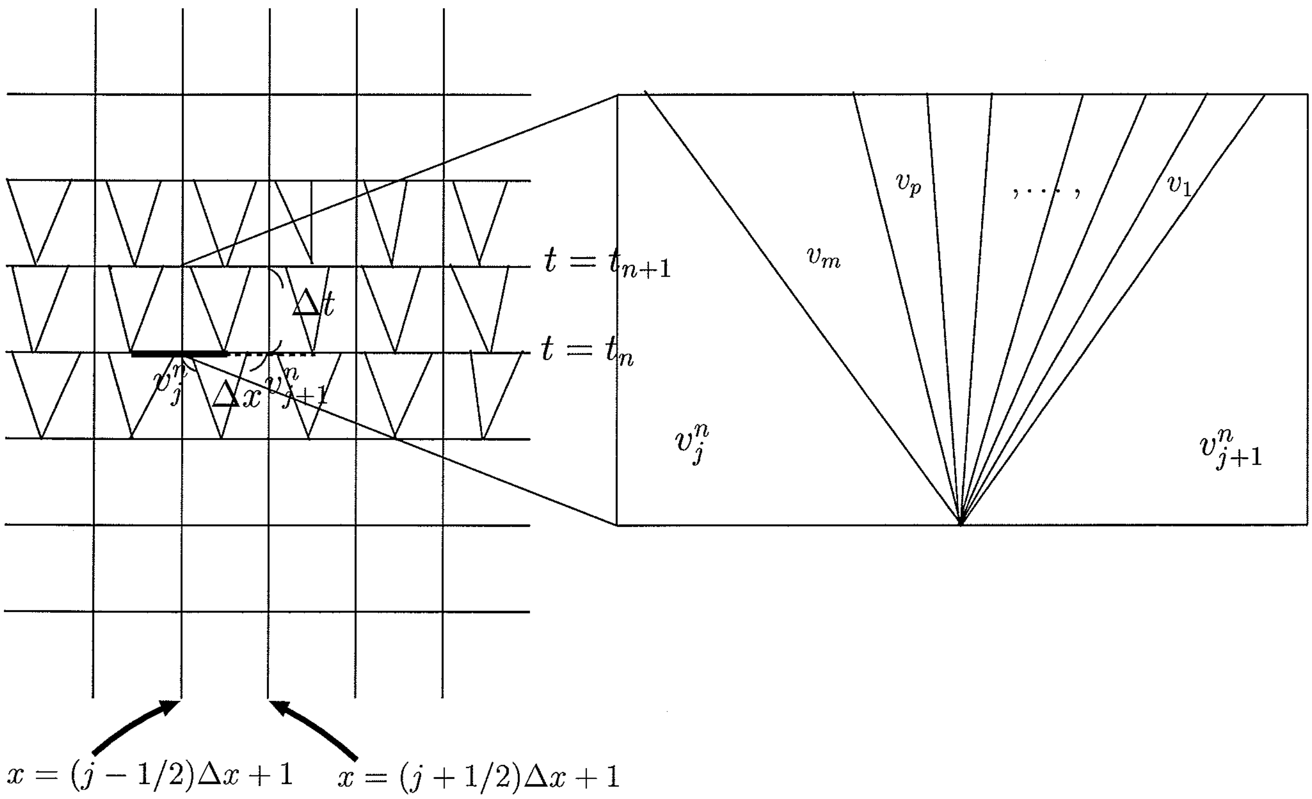

図 1: The cell

(ii) 定数部分 $(v_j^n, v_{j+1}^n, v_m, v_1, \dots, v_p)$ を以下の $v^\Delta(x,t)$ で置き換える．

$I = [(j-1/2)\Delta x + 1, (j+1/2)\Delta x + 1] = [x_l, x_r]$

$v^\Delta : I \times [n\Delta t, (n+1)\Delta t) \to \mathbf{R}^2$

$v^\Delta(x,t)$: 近似解　$v^n = (\rho^n, m^n) \in \mathbf{R}_{\geq 0} \times \mathbf{R}$: 近似解の $t = n\Delta t$ における初期値

• CFL 条件

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \geq \max_i \left| \sup_{(x,t)} \lambda_i(v^\Delta(x,t)) \right|$$

$x_0 \in I$ に対して v^n の値を用いて $v^\Delta(x,t)$ を以下のように定義する．例えば v_j^n の部分を置き換えるときは $x_0 = (j-1/2)\Delta x + 1$, $v^n = v_j^n$ として $v^\Delta(x,t)$ を構成する．同様に v_{j+1}^n の部分を置き換えるときは $x_0 = (j+1/2)\Delta x + 1$, $v^n = v_{j+1}^n$ として $v^\Delta(x,t)$ を構成する．

(I) $w(v^n) > M_+$ のとき (従来の近似解)

$v^\Delta(x,t)$ を

$$\rho^\Delta(x,t) = \rho^n - \frac{2}{x} m^n (t - n\Delta t),$$
$$m^\Delta(x,t) = m^n - \frac{2}{x}\frac{(m^n)^2}{\rho^n}(t - n\Delta t)$$

とする ([C] 参照).

(II) $w(v^n) \leq M_+$ のとき

$v_0^\Delta(x)$ を

$$\begin{cases} m_x = -\dfrac{2}{x} m, \\ \left(\dfrac{m^2}{\rho} + p(\rho)\right)_x = -\dfrac{4\gamma}{(\gamma+1)x}\left(\dfrac{m^2}{\rho} + p(\rho)\right) \end{cases} \tag{1}$$

$$(\rho, m)|_{x=x_0} = (\rho^n, m^n)$$

の解．このとき $v_0^\Delta(x)$ は

$$\rho_0^\Delta(x) = \rho^n (x/x_0)^{-\frac{4}{\gamma+1}}, \quad m_0^\Delta(x) = m^n (x/x_0)^{-2},$$
$$z(v_0^\Delta(x)) = z(v^n)(x/x_0)^{-\phi}, \quad w(v_0^\Delta(x)) = w(v^n)(x/x_0)^{-\phi}$$

と書ける．

このとき $v^\Delta(x,t)$ を

$$\rho^\Delta(x,t) = \rho_0^\Delta(x) + h_1(x, v_0^\Delta(x))(t - n\Delta t),$$
$$m^\Delta(x,t) = m_0^\Delta(x) + h_2(x, v_0^\Delta(x))(t - n\Delta t)$$

とする．ここで

$$h_1(x,v) = 0,\ h_2(x,v) = \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)x}\frac{m^2}{\rho} + \frac{4\gamma}{(\gamma+1)x}p(\rho).$$

∗ 上の 2 つ近似解は x_0 と v^n に依存しているから $v^\Delta(x, x_0, t, v^n)$ とかくべきであるが簡単のため以下 $v^\Delta(x,t)$ と書く．

注意 7 (近似解 (II) に対する注意) 近似解 (II) は目標である $z(v^\Delta)$ の下からの評価をする上で 2 つ重要な性質を持っている．まず

$$h_1(x,v) = 0, \quad h_2(x,v) \geq 0$$

に注意する．次に

$$z(v_0^\Delta(x)) = z(v^n)(x/x_0)^\phi$$

と $z(v^n)$ だけで書けていること (i.e. $w(v^n)$ を用いずに書けること)．

一方これが近似解となるために (1) の右辺と $h(x,v) = (h_1(x,v), h_2(x,v))$ を足すと元の方程式の inhomogeneous term になるように選んでいる．この事を満すだけであれば (1) の右辺の選び方は無数にある．しかしながら (1) の第 1 式を第 2 式に代入して整理すると

$$\left(\frac{m^2}{\rho} - \rho^r\right)\frac{\rho_x}{\rho} = -\frac{4}{\gamma+1}\left(\frac{m^2}{\rho} - \rho^r\right)$$

となる．そのため (1) の右辺を適当に選んでしまうと一般には $\left(\frac{m^2}{\rho} - \rho^r\right) = 0$ (i.e. マッハ数が ±1) のとき方程式を解くことはできない．このような事がおこらないように (2) の右辺にも $\left(\frac{m^2}{\rho} - \rho^r\right)$ が表れるように (1) の右辺を選んでいる．

近似解の性質

(i) (I) の性質

時間が経つと $u^\Delta \geq 0$ であれば $z(v^\Delta)$ (resp. $w(v^\Delta)$) は増加 (resp. 減少) する.

一方 $u^\Delta \leq 0$ であれば $z(v^\Delta)$ (resp. $w(v^\Delta)$) は減少 (resp. 増加) する.

(ii) (II) の性質

時間が経つと $z(v^\Delta)$ は増加する.

補題 1

$z(v^\Delta(x, n\Delta t - 0)) \geq -M_- x^{-\phi} - o(\Delta x), \quad w(v^\Delta(x, n\Delta t - 0)) \leq M_+ + \varepsilon + o(\Delta x)$

ならば

$z(v_j^n) \geq -M_-\{(j - 1/2)\Delta x + 1\}^{-\phi} - o(\Delta x), \quad w(v_j^n) \leq M_+ + \varepsilon + o(\Delta x), \quad j \in \mathbf{N}$

が成り立つ. ただし $o(\Delta x)$ は M_+ と M_- のみに依存する.

目標

十分小さな Δx に対して

$$z(v^n) \geq -M_- {x_0}^{-\phi},\ w(v^n) \leq M_+ + \varepsilon$$

ならば

$$\begin{aligned} &z(v^\Delta(x, (n+1)\Delta t - 0)) \geq -M_- x^{-\phi}, \\ &w(v^\Delta(x, (n+1)\Delta t - 0)) \leq M_+ + \varepsilon, \quad x \in I. \end{aligned}$$

方針

近似解 (II) は常に

$$z(v^\Delta(x,t)) \geq -M_- x^{-\phi} \tag{2}$$

を満していているという非常に良い性質を持っている. 今まではこの $z(v^\Delta)$ の下からの評価が困難とされてきた[†]. あと残されているのは $w(v^\Delta)$ の上からの評価である. もし $w(v^\Delta)$ が

[†]注意 8 参照

増えていけば (2) が成り立っているから図 2 を見れば速度非負の領域に達し, [C] の議論を用いる事ができる. 即ち近似解 (I) を使う.

今までと異るのは近似解 (II) を用いる所にある. 今までは近似解 (I) が用いられてきた. 近似解 (I) は確に速度非負のときは近似解の L^∞ 評価をする上で非常に良い性質を持っている. しかしながら速度負になると**近似解の性質**を見ると不都合な性質を持ってしまう. そのため速度負を込めて近似解の L^∞ 評価を得るのは困難とされてきた. このような事は inhomogeneous term があることで起こる. そこで速度負のときは**主張**の仮定をおいて近似解 (II) を導入して $z(v^\Delta)$ の下からの評価を導く. このような評価が得られるのは (2) のように空間方向の変化に着目したからだと考えている. 実際近似解 (I) からは時間発展方向の変化しか読み取れないのである.

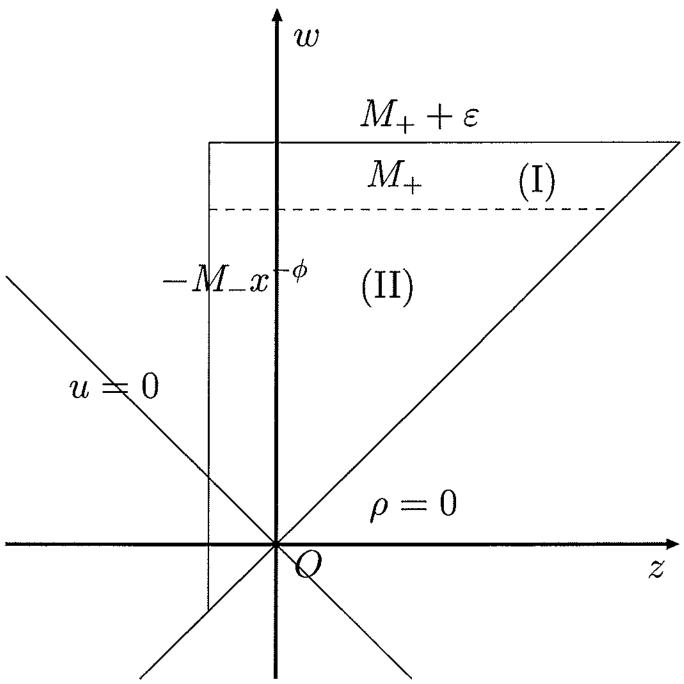

図 2: The (z, w)-plane

図 2 にはこの二つの近似解を使い分け方を (z, w) 平面に書いた. $v^n(x)$ が図 2 の (I) (resp. (II)) の領域にあるときは近似解 (I) (resp. (II)) を用いている.

注意 8 もし速度負のときの $z(v^\Delta(x,t))$ の評価を近似解 (II) を用いずに近似解 (I) を用い

ておこなったとすれば次のような評価が得られる.

$$
\begin{aligned}
&z(v^{\Delta}(x,(n+1)\Delta t-0))\\
&=\frac{m^{\Delta}(x,(n+1)\Delta t-0)}{\rho^{\Delta}(x,(n+1)\Delta t-0)}-\left\{\rho^{\Delta}(x,(n+1)\Delta t-0)\right\}^{\theta}/\theta\\
&=\frac{m^n\left\{1-\dfrac{2}{x}u^n\Delta t\right\}}{\rho^n\left\{1-\dfrac{2}{x}u^n\Delta t\right\}}-\{\rho^n\}^{\theta}\left\{1-\frac{2}{x}u^n\Delta t\right\}^{\theta}/\theta\\
&\geq u^n-\{\rho^n\}^{\theta}/\theta+\frac{2}{x}\{\rho^n\}^{\theta}u^n\Delta t\\
&\geq z(v^n)+\frac{\theta}{2x}\left[\{w(v^n)\}^2-\{z(v^n)\}^2\right]\Delta t\\
&\geq z(v^n)-\frac{\theta}{2}\left\{z(v^n)\right\}^2\Delta t.
\end{aligned}
$$

ここで $v^{\Delta}(x,n\Delta t+0)=v^n$ だから

$$
\begin{aligned}
&\frac{z(v^{\Delta}(x,(n+1)\Delta t-0))-z(v^{\Delta}(x,n\Delta t+0))}{\Delta t}\\
&\geq-\frac{\theta}{2}\left\{z(v^{\Delta}(x,n\Delta t+0))\right\}^2
\end{aligned}
\tag{3}
$$

を得る.

$$
M_n=\sup_{x\in\{x\geq 1\}}\left\{-z(v^{\Delta}(x,n\Delta t+0)),w(v^{\Delta}(x,n\Delta t+0))\right\}
$$

とおく. (3) と ([C, Lemma 2.3]) から

$$
\frac{M_{n+1}-M_n}{\Delta t}\leq\frac{\theta}{2}(M_n)^2 \tag{4}
$$

となる. ここで関数 $f(t)=\dfrac{1}{-\frac{\theta}{2}t+\frac{1}{M_0}}$ を考えると

$$
f'(t)=\frac{\theta}{2}(f(t))^2,\quad f(0)=M_0
$$

を満す事に注意する. f の凸性から (4) より

$$
M_n\leq f(n\Delta t)
$$

を得る. そのため M_n の有界性は高々$t=2/(\theta M_0)$ までしか保証できない. これは (3) の右辺が原因であるが, それは元々inhomogeneous term から生じたのであった. 時間が Δt だ

け経つと inhomogeneous term はちょうど $\{(3)$ の右辺 $\times \Delta t\}$ に相当する分だけ $z(v^{\Delta}(x,t))$ を減少させる．このことから近似解の空間方向の変化に着目しなければ (言い換えれば時間発展方向の変化のみを評価していては) 現時点では近似解の L^{∞} 評価を出すのは非常に難しい．

* 正確には上記の議論をするとき Riemann 問題の解の評価等が必要である．それに関しては例えば [MT] や [C] を参照されたい．

参考文献

[C] G.-Q. Chen, Remarks on spherically symmetric solutions to the compressible Euler equations, *Proc. Royal. Soc. Edinburgh Sect. A* **127** (1997), 243–259.

[MT] T. Makino and S. Takeno, Initial-boundary value problem for the spherical symmetric motion of isentropic gas. *Japan J. Indust. Appl. Math.* **11** (1994), 171–183.

[MU1] T. Makino, K. Mizohata and S. Ukai, The global weak solutions of the compressible Euler equation with spherical symmetry, *Japan J. Indust. Appl. Math.* **9** (1992), 431-449.

[MU2] T. Makino, K. Mizohata and S. Ukai, The global weak solutions of the compressible Euler equation with spherical symmetry (II), *Japan J. Indust. Appl. Math.* **11** (1994), 417-426.