普遍指標に付随する無限可積分系とパンルヴェ方程式

津田 照久 （神戸大学自然科学）

普遍指標とは分割 (ヤング図形) の組に対応するシューア多項式の一般化である．本講演では普遍指標の特徴付ける無限次元可積分系 (=UC 階層) とパンルヴェ方程式の関係について，特に代数的な解に注目して解説する．

1 はじめに

普遍指標 (universal character) とは小池和彦によるシューア多項式の一般化である．シューア多項式 S_λ が一般線形群の分割 λ に対応した既約多項式表現の指標であるのに対して，普遍指標 $S_{[\lambda,\mu]}$ は，その分割の組 λ,μ に対応した既約有理表現の指標を与える ([5] 参照).

無限可積分系の理論と一般線形群の表現論は密接に関係している．事実，佐藤幹夫らが示したように (最も重要なソリトン方程式系である) KP 階層はシューア多項式が特徴付ける無限可積分系と看做される ([10, 16, 17] 等参照)．従って次の問いは自然であろう．

問 1.1. 普遍指標が特徴付ける無限可積分系は何か．

講演者は論文 [18, 22] に於いて一つの解答を与えた．要約すると，普遍指標の生成演算子 (頂点作用素) を導入することによって，可積分な無限階偏微分方程式の無限系列が具体的に構成される．以下，これを universal character の頭文字をとって UC 階層と呼ぶ．普遍指標がシューア多項式の一般化であることから期待される通り，UC 階層は KP 階層の自然な拡張を定める．

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{指標多項式}} & & \underline{\text{無限可積分系}} \\ \text{シューア多項式}\, S_\lambda & \rightarrow & \text{KP 階層} \\ \cap & & \cap \\ \text{普遍指標}\, S_{[\lambda,\mu]} & \rightarrow & \boxed{\textbf{UC 階層}} \end{array}$$

UC 階層の解全体は佐藤グラスマン多様体 SGM の直積を成しており，特に同次多項式解は普遍指標で特徴付けられる．

$$\begin{array}{l} \boxed{\{\text{UC 階層の解}\}} \simeq SGM \times SGM \\ \qquad\quad \cup \\ \qquad \{S_{[\lambda,\mu]}\}_{\lambda,\mu} \end{array}$$

一方，最近の研究によってパンルヴェ方程式やガルニエ系等，モノドロミー保存変形型の非線形微分方程式の代数的な解として，シューア多項式のみならず普遍指標が現れることが発見された (増田–太田–梶原 [9], 増田 [7, 8], T [19, 20, 22])．少し説明すると，パンルヴェ方程式はアフィン・ワイル群で記述される双有理変換の対称性 (岡本 [14], 野海–山田 [12]) を持ち，その固定点は方程式の代数解を生じる．対応する τ 函数はその正則性から，適当な特殊多項式 (梅村 et al. [11] 参照) を定めるが，それらがシューア多項式や普遍指標で表されるということである．

問 1.2. 普遍指標がパンルヴェ方程式に現れるのは何故か.

本講演の目的は無限可積分系の視点からこの現象に自然な解釈を与えることである. 先に結論を概念的に述べておくと,『**UC 階層の相似簡約 (similarity reduction) はパンルヴェ方程式と等価である**』ことに集約される. 普遍指標が UC 階層の同次多項式解であることを考慮すれば, パンルヴェ方程式の普遍指標解は直ちに従う. 実際には q-差分類似のレベルまで持ち上げて UC 階層とパンルヴェ方程式の関係を考察する.

始めに普遍指標と UC 階層についての結果を次節に説明する. 3 節ではその q-類似である q-UC 階層を導入し, 続く 4, 5 節でその相似簡約が q-パンルヴェ方程式と等価であることを示す. その帰結として, 特に q-パンルヴェ方程式の代数的な解が普遍指標によって得られる. 連続極限 $q \to 1$ によってパンルヴェ微分方程式の解が回復されることを注意しておこう. 参考の為, 6, 7 節にそれぞれ A 型 (高階) パンルヴェ微分方程式とガルニエ系の普遍指標解についてまとめておいた.

2 普遍指標と KP 階層の拡張

普遍指標は次のような捻れたヤコビ–トゥルーディ型の行列式で定義される.

定義 2.1 (小池 [5]). 分割の組 λ, μ に対して, 以下の多項式 $S_{[\lambda,\mu]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を普遍指標と呼ぶ.

$$S_{[\lambda,\mu]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \det\left(\begin{array}{ll} p_{\mu_{l'-i+1}+i-j}(\boldsymbol{y}), & 1 \le i \le l' \\ \hline p_{\lambda_{i-l'}-i+j}(\boldsymbol{x}), & l'+1 \le i \le l+l' \end{array}\right)_{1\le i,j\le l+l'}. \tag{1}$$

ここで $\sum_{n\in\mathbb{Z}} p_n(\boldsymbol{x})k^n = e^{\xi(\boldsymbol{x},k)}$, $\xi(\boldsymbol{x},k) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n k^n$ とおいた.

例えば $\mu = \emptyset$ の場合, $S_{[\lambda,\emptyset]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \det(p_{\lambda_i-i+j}(\boldsymbol{x})) = S_\lambda(\boldsymbol{x})$ となり, これはシューア多項式に等しい. また変数の重みを

$$\deg x_n = n, \quad \deg y_n = -n \quad (n = 1,2,\ldots)$$

と数えると $S_{[\lambda,\mu]}$ は次数 $|\lambda| - |\mu|$ の重み付き同次多項式になる. 次数の小さいものについて $S_{[\lambda,\mu]}$ の例を以下に挙げておく.

$$\begin{aligned}
S_{[\emptyset,\emptyset]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= 1 \\
S_{[(1),\emptyset]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= S_{(1)}(\boldsymbol{x}) = x_1 \\
S_{[(1),(1)]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= x_1 y_1 - 1 \\
S_{[(2,1),\emptyset]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= S_{(2,1)}(\boldsymbol{x}) = \frac{{x_1}^3}{3} - x_3 \\
S_{[(2,1),(1)]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \left(\frac{{x_1}^3}{3} - x_3\right) y_1 - {x_1}^2 \\
S_{[(2,1),(2,1)]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \left(\frac{{x_1}^3}{3} - x_3\right)\left(\frac{{y_1}^3}{3} - y_3\right) - (x_1 y_1 - 1)^2.
\end{aligned}$$

頂点作用素 X_n, Y_n $(n \in \mathbb{Z})$ を導入する.

$$\begin{aligned}
X_n &= X_n(\boldsymbol{x}, \partial_x, \partial_y) = \sum_{i\ge 0} p_{n+i}(\boldsymbol{x} - \widetilde{\partial}_y) p_i(-\widetilde{\partial}_x) \\
Y_n &= Y_n(\boldsymbol{y}, \partial_x, \partial_y) = \sum_{i\ge 0} p_{n+i}(\boldsymbol{y} - \widetilde{\partial}_x) p_i(-\widetilde{\partial}_y).
\end{aligned}$$

但し $\widetilde{\partial}_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x_3}, \ldots\right)$ と表した．これらは次の定理の意味で普遍指標の生成演算子を成す．

定理 2.2 ([18]). $S_{[\lambda,\mu]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = X_{\lambda_1}\cdots X_{\lambda_l}Y_{\mu_1}\cdots Y_{\mu_{l'}}\cdot 1.$

未知関数 $\tau = \tau(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ に対する双線形関係式

$$\sum_{m+n=-1} X_m^*\tau\otimes X_n\tau = \sum_{m+n=-1} Y_m^*\tau\otimes Y_n\tau = 0 \tag{2}$$

を考える．但し X_n^*, Y_n^* は，X_n, Y_n において $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\to(-\boldsymbol{x},-\boldsymbol{y})$ と符号を反転させたものとする．実は関係式 (2) は広田型微分方程式 (の母関数) に同値であることが分かる．

定義 2.3. 関係式 (2) から得られる $\tau = \tau(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ に対する一連の微分方程式全体を UC 階層と呼ぶ．

例えば，最も簡単な方程式として，$\sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1}(\widetilde{D}_x)p_n(\widetilde{D}_y)\tau\cdot\tau = 0$ がある (大文字 D は広田微分の記号)．UC 階層の含む全ての微分方程式は無限階である．

UC 階層の典型的な特殊解を挙げておくと，

(i) 全ての普遍指標 $S_{[\lambda,\mu]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$.

(ii) ソリトン解 $\tau = \tau_{m,n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};p_i,q_j,c_k)$.

ここで $\tau_{m,n}$ は次のような捻れたロンスキアン

$$\tau_{m,n} = \det\left(\frac{(\partial/\partial y_1)^{j-1}\left(e^{\xi(y,p_i{}^{-1})} + c_i e^{\xi(y,q_i{}^{-1})}\right),\quad 1\le i\le n}{(\partial/\partial x_1)^{m+n-j}\left(e^{\xi(x,p_i)} + c_i e^{\xi(x,q_i)}\right),\quad n+1\le i\le m+n}\right)_{1\le i,j\le m+n}$$

で定義される (p_i, q_i, c_i は任意定数).

一般解についても，普遍指標の和に展開することによって，その係数が $SGM\times SGM$ のプリュッカー座標であることが分かる．最後に KP 階層と UC 階層の解の関係を述べてこの節を終えよう．

定理 2.4 ([18]). 関数 $\tau = \tau(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が UC 階層の解である必要十分条件は，

$$\tau(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \tau_1(\boldsymbol{x}-\widetilde{\partial}_y)\tau_2(\boldsymbol{y}-\widetilde{\partial}_x)\cdot 1$$

を満たす KP 階層の解の組 $\tau_1(\boldsymbol{x}),\tau_2(\boldsymbol{x})$ が存在することである．

3 UC 階層の q-類似

有限部分集合 $I\subset\mathbb{Z}_{>0}, J\subset\mathbb{Z}_{<0}$ をとり，独立変数 $t_i\ (i\in I\cup J)$ についての q-差分作用素：

$$T_{i;q}(t_i) = \begin{cases} qt_i & (i\in I)\\ q^{-1}t_i & (i\in J)\end{cases}$$
$$T_{i;q}(t_j) = t_j \quad (i\neq j)$$

を考える．簡単のため $T_{i_1i_2\ldots i_n;q} = T_{i_1;q}T_{i_2;q}\cdots T_{i_n;q}$ と表記する．

定義 3.1. q-差分方程式系

$$(t_i-t_j)T_{ij;q}(\tau_0)T_{k;q}(\tau_1) + (t_j-t_k)T_{jk;q}(\tau_0)T_{i;q}(\tau_1) + (t_k-t_i)T_{ki;q}(\tau_0)T_{j;q}(\tau_1) = 0 \tag{3}$$

を q-UC 階層と呼ぶ．但し $i,j,k\in I\cup J$ とする．

(3) は正確に云うと，変形された UC 階層の q-差分類似と考えられる．また，特別な場合として，q-KP 階層 (梶原–野海–山田 [4] 参照) を含んでいる．

さて，変数変換

$$x_n = \frac{\sum_{i\in I} t_i^{\,n} - q^n \sum_{j\in J} t_j^{\,n}}{n(1-q^n)}, \quad y_n = \frac{\sum_{i\in I} t_i^{\,-n} - q^{-n} \sum_{j\in J} t_j^{\,-n}}{n(1-q^{-n})} \tag{4}$$

の下で，$s_{[\lambda,\mu]}(\boldsymbol{t}) = S_{[\lambda,\mu]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ とおく．また便利の為，普遍指標を分割とは限らない任意の整数列 λ,μ の組に対しても考える．以下の意味で普遍指標は q-UC 階層を満たす．

定理 3.2 ([21]). 任意の整数 m と整数列の組 $[\lambda,\mu]$ に対して

$$\tau_0 = s_{[\lambda,\mu]}(\boldsymbol{t}), \quad \tau_1 = s_{[(m,\lambda),\mu]}(\boldsymbol{t})$$

は q-UC 階層 (3) の解である．

4 q-UC 階層から q-パンルヴェ方程式へ (A 型の場合)

q-UC 階層 (3) において，基底を q^2 に取り直し，$I=\{1,2\}, J=\{-1,-2\}$ の場合

$$(t_1-t_2)T_{1,2;q^2}(\tau_0)T_{-1;q^2}(\tau_1) + (t_2-t_{-1})T_{-1,2;q^2}(\tau_0)T_{1;q^2}(\tau_1) + (t_{-1}-t_1)T_{-1,1;q^2}(\tau_0)T_{2;q^2}(\tau_1) = 0$$

を考える．自己相似条件：

$$\tau_i(qt_{-2},qt_{-1},qt_1,qt_2) = q^{d_i}\tau_i(t_{-2},t_{-1},t_1,t_2) \quad (d_i\in\mathbb{C}: \text{定数})$$

を課す．変数の代入

$$t_1 = x, \quad t_2 = x^{-1}, \quad t_{-1} = -aq^{-2}, \quad t_{-2} = -aq^{-3} \tag{5}$$

の下，$f_i(x,a) = \tau_i(t_{-2},t_{-1},t_1,t_2)$ とおく．

補題 4.1. 関数 $f_i = f_i(x,a)$ は次の q-差分方程式を満たす．

$$\begin{aligned}&(x^{-1}+a)f_0(q^{-1}x,a)f_1(qx,aq) + q^{d_0-d_1}(x-x^{-1})f_0(x,a)f_1(x,aq)\\ &-(x+a)f_0(qx,a)f_1(q^{-1}x,aq) = 0.\end{aligned} \tag{6}$$

未知関数 $\varphi_i = \varphi_i(x)$ ($i\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$) に対する q-差分方程式系

$$\begin{aligned}\overline{\varphi_i} &= \varphi_i(qx) = \frac{\varphi_{i-1}}{a_i}\frac{G_{i-1}(\varphi)}{G_{i+1}(\varphi)}\\ G_i(\varphi) &= 1 + \varphi_{i-1} + \varphi_{i-2}\varphi_{i-1} + \cdots + \varphi_{i-N+1}\cdots\varphi_{i-1}\end{aligned} \tag{7}$$

を $A^{(1)}_{N-1}$ 型 q-パンルヴェ方程式 (q-$P(A_{N-1})$) と呼ぶ．但し a_i は $\prod_{i=1}^N a_i = q^{-N}$ を満たす定数パラメータとする．系 (7) は $A^{(1)}_{N-1}$ 型アフィン・ワイル群の対称性を持ち，$N=3,4$ の場合，それぞれパンルヴェ方程式 $P_{\mathrm{IV}}, P_{\mathrm{V}}$ の q-類似を与える．また，(7) は元来 q-KP 階層の相似簡約に由来する q-差分方程式系であり，従って特にシューア多項式で書かれる有理的な解を持つことが知られている (梶原–野海–山田 [4] 参照)．

以下，$N=2g+2$ (偶数) の場合のみを考える．このとき (7) は双線形方程式系

$$\begin{aligned}&(x^{-1}+a)\rho_{2j}\overline{\rho_{2j+1}} + q^{d_{2j}-d_{2j+1}}(x-x^{-1})\rho_{2j}\rho_{2j+1} - (x+a)\overline{\rho_{2j}}\rho_{2j+1} = 0\\ &(x^{-1}+a^{-1})\underline{\rho_{2j-1}}\,\overline{\rho_{2j}} + q^{d_{2j}-d_{2j-1}}(x-x^{-1})\rho_{2j-1}\rho_{2j} - (x+a^{-1})\overline{\underline{\rho_{2j-1}}}\,\underline{\rho_{2j}} = 0\end{aligned} \tag{8}$$

に等価に書き直される．これは先程見た q-UC 階層の相似簡約 (6) に他ならない！

定理 4.2 ([21]). q-$P(A_{2g+1})$ は周期的な q-UC 階層の相似簡約に等しい．

普遍指標 $S_{[\lambda,\mu]}$ は q-UC 階層の次数 $|\lambda|-|\mu|$ の同次多項式解を与えること (定理 3.2) から，次が直ちに従う．

定理 4.3 ([21]). q-$P(A_{2g+1})$ は $g+1$ コアの分割の組に対応した普遍指標で与えられる有理関数解を持つ．

解の表示を書き下す前に，記号の説明をしよう．整数列 $\boldsymbol{n}=(n_1,\dots,n_N)$ に対して，マヤ図形 $M(\boldsymbol{n})=\bigcup_{i=1}^{N}(N\mathbb{Z}_{<n_i}+i)$ を考え，その対応する分割を $\lambda(\boldsymbol{n})$ と書く．このような分割 $\lambda(\boldsymbol{n})$ にはフックの長さとして N の倍数が現れない．これを N コアの分割と呼ぶ．また分割 λ の共役を λ^T と表す．さて，変数変換 (4) および特殊化 (5)，つまり

$$x_n=\frac{x^n+x^{-n}-(-a)^n(1+q^{-n})}{n(1-q^{2n})},\quad y_n=\frac{x^n+x^{-n}-(-a)^{-n}(1+q^n)}{n(1-q^{-2n})}$$

の下で関数 $s_{[\lambda,\mu]}(x,a)=S_{[\lambda,\mu]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を考える．すると定理 4.3 の有理解は具体的に次のようになる．

任意の整数列の組 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^{g+1}$ と定数 $a\in\mathbb{C}^\times$ に対して

$$\begin{aligned}\rho_{2j}&=s_{[\lambda(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_1+\cdots+\boldsymbol{e}_j),\lambda^T(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_1+\cdots+\boldsymbol{e}_j)]}(x,a)\\ \rho_{2j+1}&=s_{[\lambda(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_1+\cdots+\boldsymbol{e}_j+\boldsymbol{e}_{j+1}),\lambda^T(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_1+\cdots+\boldsymbol{e}_j)]}(x,aq)\end{aligned}$$

とおく．但し $\boldsymbol{e}_i=(0,\dots,0,\overset{i}{\smile}{1},0,\dots,0)$ とした．このとき

$$\varphi_i(x)=\frac{x}{(a_iq)^{\frac{1}{2}}}\frac{\rho_{i+1}(q^{-1}x)\rho_{i-1}(x)}{\rho_{i+1}(x)\rho_{i-1}(q^{-1}x)}$$

は $a_{2j}=a^{-2}q^{2(g+1)(n_j-m_{j+1})+2|\boldsymbol{m}|-2|\boldsymbol{n}|-1}$, $a_{2j+1}=a^2q^{2(g+1)(m_{j+1}-n_{j+1})-2|\boldsymbol{m}|+2|\boldsymbol{n}|-1}$ に於ける q-$P(A_{2g+1})$ の解である．

これは $g=1$ の場合 (q-$P_{\rm V}$) の有理解の表示 (増田 [6]) の g が一般の場合への拡張である．

5 q-UC 階層から q-パンルヴェ VI 型方程式へ

未知関数 $f=f(\boldsymbol{a}),g=g(\boldsymbol{a})$ に対し，以下の q-差分系を q-パンルヴェ VI 型方程式 (q-$P_{\rm VI}$) と呼ぶ．

(9) $$f\overline{f}=b_7b_8\frac{(g+b_5)(g+b_6)}{(g+b_7)(g+b_8)},\quad g\underline{g}=b_3b_4\frac{(f+b_1)(f+b_2)}{(f+b_3)(f+b_4)}.$$

但し，変数 $\boldsymbol{a}=(a_0,\dots,a_5)$ は $a_0a_1{a_2}^2{a_3}^2a_4a_5=q$ を満たすものとする．また b_i は

$$\begin{gathered}b_1={a_3}^2{a_4}^{-1}a_5,\quad b_2={a_3}^2{a_4}^3a_5,\quad b_3={a_3}^{-2}{a_4}^{-1}a_5,\quad b_4={a_3}^{-2}{a_4}^{-1}{a_5}^{-3}\\ b_5={a_0}^{-1}a_1{a_2}^{-2},\quad b_6={a_0}^{-1}{a_1}^{-3}{a_2}^{-2},\quad b_7={a_0}^{-1}a_1{a_2}^2,\quad b_8={a_0}^3a_1{a_2}^2\end{gathered}$$

で与えられ，$\overline{f},\underline{g}$ はそれぞれ $f(\dots,qa_2,q^{-1}a_3,\dots),g(\dots,q^{-1}a_2,qa_3,\dots)$ を表す．つまり a_2/a_3 が時間変数，他の $a_i\ (i\neq 2,3)$ が定数パラメータの役割を担う．連続の場合と平行して，q-$P_{\rm VI}$ は線形 q-差分方程式のコネクション保存変形 (モノドロミー保存変形の離散類似) を記述し，実際 $q\to 1$ の極限でパンルヴェ VI 型微分方程式に移行する (神保–坂井 [3])．

乗法的なルート変数 $\boldsymbol{a}$ への (拡大) アフィン・ワイル群 $\widetilde{W}(D_5^{(1)})=\langle s_0,\dots,s_5,\sigma_1,\sigma_2\rangle$ の作用を

$$s_i(a_j)=a_j{a_i}^{-C_{ij}},\quad \sigma_1(a_{\{0,1,2,3,4,5\}})={a_{\{5,4,3,2,1,0\}}}^{-1},\quad \sigma_2(a_{\{0,1,2,3,4,5\}})={a_{\{1,0,2,3,4,5\}}}^{-1}$$

とおく．ただし $C=(C_{ij})$ は $D_5^{(1)}$ 型のカルタン行列である．

定理 5.1 (T–増田 [23]). 以下は $\widetilde{W}(D_5^{(1)})$ の有理関数体 $\mathcal{L} = \mathbb{C}\left(\boldsymbol{a}^{1/2}\right)(\tau_1, \ldots, \tau_8)$ 上の実現を与える.

$$s_0(\tau_{\{7,8\}}) = \tau_{\{8,7\}}, \quad s_1(\tau_{\{5,6\}}) = \tau_{\{6,5\}}, \quad s_4(\tau_{\{1,2\}}) = \tau_{\{2,1\}}, \quad s_5(\tau_{\{3,4\}}) = \tau_{\{4,3\}}$$
$$s_2(\tau_5) = \left(b_7{}^{-\frac{1}{2}}\tau_1\tau_2 + b_7{}^{\frac{1}{2}}\tau_3\tau_4\right)\tau_7{}^{-1}, \quad s_2(\tau_7) = \left(b_5{}^{-\frac{1}{2}}\tau_1\tau_2 + b_5{}^{\frac{1}{2}}\tau_3\tau_4\right)\tau_5{}^{-1}$$
$$s_3(\tau_1) = \left(b_3{}^{-\frac{1}{2}}\tau_5\tau_6 + b_3{}^{\frac{1}{2}}\tau_7\tau_8\right)\tau_3{}^{-1}, \quad s_3(\tau_3) = \left(b_1{}^{-\frac{1}{2}}\tau_5\tau_6 + b_1{}^{\frac{1}{2}}\tau_7\tau_8\right)\tau_1{}^{-1}$$
$$\sigma_1(\tau_{\{1,2,3,4,5,6,7,8\}}) = \tau_{\{5,6,7,8,1,2,3,4\}}, \quad \sigma_2(\tau_{\{5,6,7,8\}}) = \tau_{\{7,8,5,6\}}.$$

また $(f,g) = \left(\dfrac{\tau_5\tau_6}{\tau_7\tau_8}, \dfrac{\tau_1\tau_2}{\tau_3\tau_4}\right)$ とおくと，定理より $\widetilde{W}(D_5^{(1)})$ の関数体 $\mathbb{C}(\boldsymbol{a})(f,g)$ への双有理表現が直ちに得られる (これは坂井 [15] の表現とも一致する). 平行移動 $\sigma_3 s_3 s_5 s_4 s_3 \sigma_2 s_2 s_0 s_1 s_2 \in \widetilde{W}(D_5^{(1)})$ の双有理作用が q-P_{VI} の離散的運動 $(f,g) \mapsto (\overline{f}, \overline{g})$ に他ならない. 但し $\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1$.

さて，$\ell = \sigma_2\sigma_3 s_0 s_1 s_4 s_5 s_2 s_3 s_2$ に注目しよう. 単純計算により $\ell(\tau_{\{1,5,3,7\}}) = \tau_{\{4,8,2,6\}}$ が従う. 適当な正規化因子を乗ずることを法として，4つの τ 函数 $\tau_{\{2,4,6,8\}}$ を ρ_i $(i = 0,1,2,3)$ で読み替える. 変数変換

$$\xi = a_2 a_3, \quad \eta = \frac{a_2}{a_3}, \quad \zeta = \frac{a_0 a_1 a_2}{a_3 a_4 a_5} q$$

を考える. $\ell^{\pm}(\xi,\eta,\zeta) = (q^{\pm}\xi, q^{-1}\zeta, q\eta)$ に注意する. すると q-P_{VI} は次の双線形関係式と同値である.

$$(10) \qquad \begin{aligned} &(\eta + \xi^{-1})\ell(\rho_{2j})\ell^{-1}(\rho_{2j+1}) + q^{d_{2j+1}-d_{2j}}(\xi - \xi^{-1})\rho_{2j}\rho_{2j+1} - (\xi + \eta)\ell^{-1}(\rho_{2j})\ell(\rho_{2j+1}) = 0 \\ &(\eta^{-1} + \xi^{-1})\ell(\rho_{2j-1})\ell^{-1}(\rho_{2j}) + q^{d_{2j-1}-d_{2j}}(\xi - \xi^{-1})\rho_{2j-1}\rho_{2j} - (\xi + \eta^{-1})\ell^{-1}(\rho_{2j-1})\ell(\rho_{2j}) = 0. \end{aligned}$$

但し d_i は $\boldsymbol{a}$ で表される適当なパラメータである. 前節と同様の議論により以下が従う.

定理 5.2 ([23]). q-P_{VI} の双線形方程式系 (10) は4周期的な q-UC 階層の相似簡約である.

即ち q-P_{VI} の一般解は q-UC 階層の自己相似解に等しい. 特に普遍指標 $S_{[\lambda,\mu]}$ は q-UC 階層の同次多項式解を与えることから，直ちに次の定理が従う.

定理 5.3 ([23]). q-P_{VI} は2コアの分割の組に対応した普遍指標で与えられる代数関数解を持つ.

q-P_{VI} がパンルヴェ VI 型方程式の直接の q-類似であること，他の全ての (古典的) パンルヴェ方程式がその退化として捉えられることを考慮すると，この結果は『**パンルヴェ方程式の解に何故普遍指標が現れるのか？**』と云う問いに対する無限可積分系の視点からの自然な解答を与えている.

上記の q-P_{VI} の代数解に現れる多項式 $P_{[\lambda,\mu]}(\xi,\eta,\zeta)$ の例をいくつか挙げておこう. これは梅村多項式 ([11] 参照) の q-類似と考えられるものであり，また特別な場合 $(\lambda = (n), \mu = \emptyset)$ として，Al-Salam–Chihara 多項式 ([1] 参照) と呼ばれる超幾何型の q-直交多項式を含む.

λ	μ	$P_{[\lambda,\mu]}(\xi,\eta,\zeta)$
$\emptyset$	$\emptyset$	1
(1)	$\emptyset$	$1 + \xi^2 + (\eta + \zeta)\xi$
(2)	$\emptyset$	$q^2(1+\xi^4) + (1+q^2)(\eta+\zeta)(\xi+\xi^3) + ((1+q^2)(1+\eta\zeta) + \eta^2 + \zeta^2)\xi^2$
$(1,1)$	$\emptyset$	$1 + \xi^4 + (1+q^2)(\eta+\zeta)(\xi+\xi^3) + ((1+q^2)(1+\eta\zeta) + q^2(\eta^2+\zeta^2))\xi^2$
$\emptyset$	(1)	$\eta\zeta(1+\xi^2) + (\eta+\zeta)\xi$
$\emptyset$	(2)	$\eta^2\zeta^2(1+\xi^4) + (1+q^2)\eta\zeta(\eta+\zeta)(\xi+\xi^3) + (q^2(\eta^2+\zeta^2) + (1+q^2)\eta\zeta(1+\eta\zeta))\xi^2$
(1)	(1)	$q^2\eta\zeta(1+\xi^4) + q^2(\eta+\zeta)(1+\eta\zeta)(\xi+\xi^3) + ((1+q^2)^2\eta\zeta + q^2(\eta^2+\zeta^2))\xi^2$
(1)	(2)	$q^2\eta^2\zeta^2(1+\xi^6) + q^2\eta\zeta(\eta+\zeta)(1+q^2+\eta\zeta)(\xi+\xi^5)$ $+((1+3q^2+2q^4+q^6)\eta^2\zeta^2 + q^2(q^2(\eta^2+\zeta^2) + (1+q^2)\eta\zeta(1+\eta^2+\zeta^2)))(\xi^2+\xi^4)$ $+(\eta+\zeta)((1+q^2)(1+q^2+q^4)\eta\zeta + q^4(\eta^2+\zeta^2) + q^2(1+q^2)\eta^2\zeta^2)\xi^3$

上の表に観察されるように多項式 $P_{[\lambda,\mu]}$ の係数が全て正の整数であることは興味深い.

6 A 型高階パンルヴェ方程式と普遍指標

従属変数 $f_n = f_n(x)$ に対する以下の非線形常微分方程式系を $A^{(1)}_{N-1}$ 型高階パンルヴェ方程式と呼ぶ (野海–山田 [13] 参照).

(i) $N = 2g+1$ $(g = 1, 2, \ldots)$ の場合

$$P(A_{2g}): \qquad \frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x} = f_n\left(\sum_{j=1}^{g} f_{n+2j-1} - \sum_{j=1}^{g} f_{n+2j}\right) + \alpha_n.$$

(ii) $N = 2g+2$ $(g = 1, 2, \ldots)$ の場合

$$P(A_{2g+1}): \qquad \frac{x}{2}\frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x} = f_n\left(\sum_{1\le j\le k\le g} f_{n+2j-1}f_{n+2k} - \sum_{1\le j\le k\le g} f_{n+2j}f_{n+2k+1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{g}\alpha_{n+2k}\right)f_n + \alpha_n\sum_{j=1}^{g} f_{n+2j}.$$

但し，変数の添字は $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ の元とする．$P(A_{N-1})$ はアフィン・ワイル群 $\widetilde{W}(A^{(1)}_{N-1})$ の対称性を持っており，α_n はルートに対応する定数パラメータである．$P(A_2), P(A_3)$ はそれぞれ $P_{\mathrm{IV}}, P_{\mathrm{V}}$ に等しい．

$N = 2g+2$ (偶数) の場合，この方程式は $g+1$ コアの分割の組に対応した普遍指標で与えられる有理関数解を持つ．

定理 6.1 ([19]). 任意の整数列の組 $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^{g+1}$ と定数 $a \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}\tau_{2j} &= S_{[\lambda(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_1+\cdots+\boldsymbol{e}_j),\lambda^T(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_1+\cdots+\boldsymbol{e}_j)]}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\\ \tau_{2j+1} &= S_{[\lambda(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_1+\cdots+\boldsymbol{e}_j+\boldsymbol{e}_{j+1}),\lambda^T(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_1+\cdots+\boldsymbol{e}_j)]}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}')\end{aligned}$$

とおく．但し変数の対応は

$$x_n = t + \frac{a}{n}, \quad y_n = -t + \frac{a}{n}, \quad x'_n = t + \frac{a+1}{n}, \quad y'_n = -t + \frac{a+1}{n}, \qquad t = -\frac{x^2}{4(g+1)}$$

とする．このとき

$$f_i = \frac{x}{2(g+1)} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log\frac{\tau_{i+1}}{\tau_{i-1}}$$

は $\alpha_{2j} = m_{j+1} - n_j + \frac{|\boldsymbol{n}|-|\boldsymbol{m}|+a+1}{g+1}$, $\alpha_{2j+1} = n_{j+1} - m_{j+1} + \frac{|\boldsymbol{m}|-|\boldsymbol{n}|-a}{g+1}$ に於ける $P(A_{2g+1})$ の解である．

7 ガルニエ系と普遍指標

ガルニエ系とはモノドロミー保存変形の立場によるパンルヴェ VI 型方程式 (P_{VI}) の高次元拡張であり，以下の多時間ハミルトン系に等価である ([2] 参照).

$$\frac{\partial q_i}{\partial s_j} = \frac{\partial H_j}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial s_j} = -\frac{\partial H_j}{\partial q_i} \quad (i, j = 1, \ldots, N).$$

ハミルトン関数は

$$
\begin{aligned}
s_i(s_i-1)H_i &= q_i\left(\alpha+\sum_j q_jp_j\right)\left(\alpha+\kappa_\infty+\sum_j q_jp_j\right)+s_ip_i(q_ip_i-\theta_i)\\
&\quad -\sum_{j(\neq i)} R_{ji}(q_jp_j-\theta_j)q_ip_j-\sum_{j(\neq i)} S_{ij}(q_ip_i-\theta_i)q_jp_i\\
&\quad -\sum_{j(\neq i)} R_{ij}q_jp_j(q_ip_i-\theta_i)-\sum_{j(\neq i)} R_{ij}q_ip_i(q_jp_j-\theta_j)\\
&\quad -(s_i+1)(q_ip_i-\theta_i)q_ip_i+(\kappa_1 s_i+\kappa_0-1)q_ip_i
\end{aligned}
$$

である．ここで $R_{ij}=s_i(s_j-1)/(s_j-s_i), S_{ij}=s_i(s_i-1)/(s_i-s_j), \alpha=-(\kappa_0+\kappa_1+\kappa_\infty+\sum_i\theta_i-1)/2$ とした．また $\kappa=(\kappa_0,\kappa_1,\kappa_\infty,\theta_1,\ldots,\theta_N)$ は付随する線形方程式の持つ $N+3$ 個の確定特異点の特性指数に相当する定数パラメータである．$N=1$ の場合ガルニエ系は P_{VI} のハミルトン系に等しい．

ガルニエ系は2コアの分割の組に対応する普遍指標で表される代数関数解を持つ．

定理 7.1 ([20, 22]). 整数 m,n に対して，$t_i=\sqrt{s_i}$ の多項式 $T_{m,n}(\boldsymbol{t})$ を考える．

$$T_{m,n}(\boldsymbol{t})=N_{m,n}S_{[\lambda,\mu]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

但し分割の組は，$u=|n-m-1/2|-1/2, v=|n+m-1/2|-1/2$ の下で，

$$\lambda=(u,u-1,\ldots,2,1),\quad \mu=(v,v-1,\ldots,2,1)$$

とおいた．また変数の対応を

$$x_n=\frac{-\kappa_\infty+\sum_i\theta_i t_i{}^n}{n},\quad y_n=\frac{-\kappa_\infty+\sum_i\theta_i t_i{}^{-n}}{n}$$

で与え，$N_{m,n}$ は適当な正規化因子とする．このとき

$$q_i=\frac{t_i\dfrac{\partial}{\partial t_i}\log\dfrac{T_{m+1,n}}{T_{m,n+1}}}{\sum_j t_j\dfrac{\partial}{\partial t_j}\log\dfrac{T_{m+1,n}}{T_{m,n+1}}-2m+2n-1},\quad 2q_ip_i=\theta_i+m+n+t_i\frac{\partial}{\partial t_i}\log\frac{T_{m,n}}{T_{m,n+1}}$$

は $\kappa_0=1/2+m+n, \kappa_1=1/2+m-n$ に於けるガルニエ系の解である．

上の定理から，一般に $N\geq 2$ についてのガルニエ系も UC 階層の相似簡約として捉えられることが期待されるが，現時点では未解決である．

参考文献

[1] Gasper, G., Rahman, M.: *Basic hypergeometric series*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications **35**, Cambridge: Cambridge University Press, 1990

[2] Iwasaki, K., Kimura, H., Shimomura, S., Yoshida, M.: *From Gauss to Painlevé: a modern theory of special functions*. Aspects of Mathematics, vol. E16, Braunschweig: Vieweg Verlag, 1991

[3] Jimbo, M., Sakai, H.: A q-analog of the sixth Painlevé equation. Lett. Math. Phys. **38**, 145–154 (1996)

[4] Kajiwara, K., Noumi, M., Yamada, Y.: q-Painlevé systems arising from q-KP hierarchy. Lett. Math. Phys. **62**, 259–268 (2002)

[5] Koike, K.: On the decomposition of tensor products of the representations of the classical groups: By means of the universal characters. Adv. Math. **74**, 57–86 (1989)

[6] Masuda, T.: On the rational solutions of q-Painlevé V equation. Nagoya Math. J. **169**, 119–143 (2003)

[7] Masuda, T.: On a class of algebraic solutions to the Painlevé VI equation, its determinant formula and coalescence cascade. Funkcial. Ekvac. **46**, 121–171 (2003)

[8] Masuda, T.: Special polynomials associated with the Noumi–Yamada system of type $A_5^{(1)}$. Funkcial. Ekvac., in press

[9] Masuda, T., Ohta, Y., Kajiwara, K.: A determinant formula for a class of rational solutions of Painlevé V equation. Nagoya Math. J. **168**, 1–25 (2002)

[10] Miwa, T., Jimbo, M., Date, E.: *Solitons: Differential equations, symmetries and infinite dimensional algebras*. Cambridge Tracts in Mathematics **135**, Cambridge: Cambridge University Press, 2000

[11] Noumi, M., Okada, S., Okamoto, K., Umemura, H.: *Special polynomials associated with the Painlevé equations II*. In: Integrable Systems and Algebraic Geometry, eds. Saito, M.-H., Shimizu, Y. and Ueno, K., Singapore: World Scientific, 1998, pp. 349–372

[12] Noumi, M., Yamada, Y.: Affine Weyl groups, discrete dynamical systems and Painlevé equations. Comm. Math. Phys. **199**, 281–295 (1998)

[13] Noumi, M., Yamada, Y.: Higher order Painlevé equations of type $A_l^{(1)}$. Funkcial. Ekvac. **41**, 483–503 (1998)

[14] Okamoto, K.: Studies on the Painlevé equations, I. Ann. Mat. Pura Appl. (4) **146**, 337–381 (1987); II. Japan J. Math. **13**, 47–76 (1987); III. Math. Ann. **275**, 221–255 (1986); IV. Funkcial. Ekvac. **30**, 305–332 (1987)

[15] Sakai, H.: Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations. Comm. Math. Phys. **220**, 165–229 (2001)

[16] Sato, M.: Soliton equations as dynamical systems on an infinite dimensional Grassmann manifold. RIMS Koukyuroku **439**, 30–46 (1981)

[17] Sato, M.: *Soliton equations and universal Grassmann varieties.* Lecture notes taken by M. Noumi, Saint Sophia Univ. Lecture Notes **18**, 1984 (in Japanese)

[18] Tsuda, T.: Universal characters and an extension of the KP hierarchy. Comm. Math. Phys. **248**, 501–526 (2004)

[19] Tsuda, T.: Universal characters, integrable chains and the Painlevé equations. Adv. Math., in press

[20] Tsuda, T.: Toda equation and special polynomials associated with the Garnier system. Submitted. Preprint: nlin.SI/0408060

[21] Tsuda, T.: Universal characters and q-Painlevé systems. Submitted. Preprint: UTMS 2004–31

[22] Tsuda, T.: Universal characters and integrable systems. Ph.D. thesis, The University of Tokyo, 2003

[23] Tsuda, T., Masuda, T.: q-Painlevé VI equation arising from q-UC hierarchy. Submitted