非線型摩擦項をもつ Klein-Gordon 方程式の解の漸近的振る舞いについて

砂川 秀明

筑波大学大学院数理物質科学研究科

sunagawa@math.tsukuba.ac.jp

2004年12月25日

以下の非線型 Klein-Gordon 方程式

$$\Box u + u = -g(\partial_t u)^3, \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R} \tag{1}$$

に対する初期値問題を考える (但し $\Box = \partial_t^2 - \partial_x^2$, $g \in \mathbb{R}$). $g > 0$ のとき, (1) の非線型項は摩擦のように働くと考えられるため, エネルギーの時間減衰を期待することは自然なことである. 実際, 初期値が適当な函数空間に属していれば $t \to \infty$ においてエネルギーノルム

$$\|u(t)\|_E := \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |\partial_t u(t,x)|^2 + |\partial_x u(t,x)|^2 + |u(t,x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

は $O((\log t)^{-1/2})$ のオーダーで減衰することが知られている ([N], [MM] 等). しかしその証明には

$$\|u(t)\|_E^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g|\partial_t u(s,x)|^4 dxds \tag{2}$$

が時間 t に依存しないということが本質的に用いられているため, 彼らの証明法からはエネルギー以外の量についての情報は全く得られそうにない. 本講演では

> **エネルギー以外の量の $t \to \infty$ における挙動については何が言えるだろうか?**
> **とくに解の各点的な漸近形はどうなっているのだろうか?**

という問題について考えてみたい. 以下, 初期データは

$$u(0,x) = \varepsilon u_0(x), \qquad \partial_t u(0,x) = \varepsilon u_1(x) \tag{3}$$

$(0 < \varepsilon \ll 1,\ u_0,\ u_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}))$ の形で与えられているとしよう. 主結果は以下の通り:

定理 1. $g > 0$ とする. このとき (1)–(3) の解について

$$\sum_{|\alpha| \le 1} \|\partial_{t,x}^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^p} \le \frac{C(1+t)^{-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}}{\sqrt{\log(2+t)}}$$

が任意の $p \in [1,\infty]$ に対して成り立つ. 更に, $t \to \infty$ のとき $x \in \mathbb{R}$ に関して一様に

$$u(t,x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{t}} \operatorname{Re}\left[a(x/t) e^{i(t^2-|x|^2)_+^{1/2}}\right]}{\sqrt{1 + \frac{3g}{4}|a(x/t)|^2 (1-|x/t|^2)_+^{-1} \log t}} + O\left(t^{-1/2}(\log t)^{-3/2}\right)$$

が成り立つ. 但し $i=\sqrt{-1}$, $(\,\cdot\,)_+=\max\{\,\cdot\,,0\}$. また, $a(y)$ は複素数に値をとる $y=x/t$ についての滑らかな函数であって, 十分大きな N に対して

$$|\partial_y^j a(y)| \le C_j(1-|y|^2)_+^{N-j}, \qquad j=0,1,2,\cdots,N$$

を満たすものである.

今回の証明では (2) が保存量であることを全く用いない. 実際, 上の結果は次のように一般化できる. F を $(u,\partial_t u,\partial_x u)$ に関する 3 次斉次多項式として,

$$\Box u+u=F(u,\partial_t u,\partial_x u), \qquad (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R} \tag{1'}$$

に対する初期値問題を考える. 非線型項 F に対して

$$K_F(z)=\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\cos\theta,\ -\cosh z\sin\theta,\ \sinh z\sin\theta)e^{-i\theta}d\theta$$

$(z\in\mathbb{R})$ とおくと, 定理 1 の証明と殆ど同じ方法によって次を示すことができる:

定理 2. 非線型項 F は

$$\inf_{z\in\mathbb{R}}\operatorname{Re}K_F(z)\ge 0$$

を満たすとする. このとき初期値問題 (1′)–(3) は唯一つの時間大域的な古典解を持ち, $t\to\infty$ のとき $x\in\mathbb{R}$ に関して一様に

$$u(t,x)=\frac{\frac{1}{\sqrt{t}}\operatorname{Re}\left[a(x/t)e^{\left\{i(t^2-|x|^2)_+^{1/2}+i\Psi_F(x/t)|a(x/t)|^2\mathcal{L}\left(t,\,|a(x/t)|^2\Phi_F(x/t)\right)\right\}}\right]}{\sqrt{1+2\Phi_F(x/t)|a(x/t)|^2\log t}}+O\big(t^{-1/2}(\log t)^{-3/2}\big)$$

が成り立つ. ここで $a(y)$ は先と同様, また $|y|<1$ に対して

$$\Phi_F(y)=\sqrt{1-y^2}\operatorname{Re}\big[K_F(\tanh^{-1}y)\big], \quad \Psi_F(y)=\sqrt{1-y^2}\operatorname{Im}\big[K_F(\tanh^{-1}y)\big].$$

さらに, $\mathcal{L}(\tau,\xi)$ は次式で与えられる:

$$\mathcal{L}(\tau,\xi)=-\int_1^\tau\frac{d\sigma}{(1+2\xi\log\sigma)\sigma}=\begin{cases}-\log\tau & \text{if }\ \xi=0,\\ -\frac{1}{2\xi}\log(1+2\xi\log\tau) & \text{if }\ \xi\ne0,\ 1+2\xi\log\tau>0.\end{cases}$$

注意 1. より一般に, 3 次準線型の Klein-Gordon 方程式

$$\Box u+u=F(u,\partial_t u,\partial_x u,\partial_t\partial_x u,\partial_x^2 u), \qquad (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}$$

に対しても, $K_F(z)$ の定義を

$$\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\cos\theta,\ -\cosh z\sin\theta,\ \sinh z\sin\theta,\ \cosh z\sinh z\cos\theta,\ -\sinh^2 z\cos\theta)e^{-i\theta}d\theta$$

に置き換えれば上の主張は成立する.

注意 2. この結果により, J.-M. Delortが [D1] で予想し, [D2] で十分性を証明した "非線型 Klein-Gordon 方程式に対する null condition" は, 小さな初期データに対する解の時間大域存在のための**必要条件ではない**ことがわかる. 実際, 3次の非線型項に話を限ると, 彼の考察した条件は

$$\mathrm{Re}\, K_F(z) \equiv 0$$

と同値である. この条件は上の主張において $\Phi_F(y) \equiv 0$ となる場合, つまり "phase の修正" だけが起こる場合に対応している (なお, Delort より前に [M], [K] によって得られていた大域存在のための十分条件は

$$K_F(z) \equiv 0$$

に相当する. これはちょうど $\Phi_F(y) = \Psi_F(y) \equiv 0$ となる場合であり, このとき非線型問題の解は時刻無限大において自由解のように振る舞う). これに対して定理2の条件は $\Phi_F(y) \geq 0$ に対応している. つまり非線型項が摩擦のように作用する場合も含んでいる.

注意 3. 定理2に述べた条件が満たされない場合には, 形式的に (3) のような漸近形を見つけようとしても必ず分母に $\sqrt{1 - C\varepsilon^2 \log t}$ $(C > 0)$ という形が現れる. このことから, 定理2の条件が満たされないときには古典解の最大存在時間は概ね $e^{1/C\varepsilon^2}$ に等しい (つまりこのくらいの時間で爆発する) と予想するのはきわめて自然なことと思われるが, それを証明することはたいへん難しい未解決問題である ($F = u_t^2 u_x$ の場合には B. Yordanov(1996?) によって古典解の最大存在時間は $e^{1/C\varepsilon^2}$ を上回らないことが示されている. ちなみに, $F = u_t^2 u_x$ に対して $K_F(z) = \frac{3}{8}\cosh^2 z \sinh z$).

参考文献

[A] S. Alinhac, *Blowup for nonlinear hyperbolic equations,* Birkhäuser, Boston, 1995.

[D1] J.-M. Delort, *Minoration du temps d'existence pour l'équation de Klein-Gordon non-linéaire en dimension 1 d'espace,* Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire **16** (1999), 563–591.

[D2] J.-M. Delort, *Existence globale et comportement asymptotique pour l'équation de Klein-Gordon quasi linéaire à données petites en dimension* 1, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (4) **34** (2001), 1–61.

[DFX] J.-M. Delort, D. Fang and R. Xue, *Global existence of small solutions for quadratic quasilinear Klein-Gordon systems in two space dimensions,* J. Funct. Anal. **211** (2004), 288–323.

[HN1] N. Hayashi and P. I. Naumkin, *Large time behavior for the cubic nonlinear Schödinger equation,* Canad. J. Math. **54** (2002), 1065–1085.

[HN2] N. Hayashi and P. I. Naumkin, *On the asymptotics for cubic nonlinear Schrödinger equations,* Complex Variables **49** (2004), 339–373.

[H] L. Hörmander, *Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations,* Springer Verlag, Berlin, 1997.

[K] S. Katayama, *A note on global existence of soluions to nonlinear Klein-Gordon equations in one space dimension,* J. Math. Kyoto Univ. **39** (1999), 203–213.

[MM] K. Mochizuki and T. Motai, *On energy decay-nondecay problems for wave equations with nonlinear dissipative term in* $\mathbb{R}^N$, J. Math. Soc. Japan **47** (1995), 405–421.

[M] K. Moriyama, *Normal forms and global existence of solutions to a class of cubic nonlinear Klein-Gordon equations in one space dimension,* Differential Integral Equations **10** (1997), 499–520.

[N] M. Nakao, *Energy decay of the wave equation with a nonlinear dissipative term,* Funkcial. Ekvac. **26** (1983), 237–250.

[S1] H. Sunagawa, *Large time asymptotics of solutions to nonlinear Klein-Gordon systems,* to appear in Osaka J. Math. **42** (2005).

[S2] H. Sunagawa, *Remarks on the asymptotic behavior of the cubic nonlinear Klein-Gordon equations in one space dimension,* to appear in Differential Integral Equations.

[S3] H. Sunagawa, *Large time behavior of solutions to the Klein-Gordon equation with nonlinear dissipative terms,* in preparation.