Benjamin-Ono 方程式の初期値問題に対する適切性[1]

瀬片 純市
九州大学大学院数理学府
東北大学大学院理学研究科

本講演では以下のような Benjamin-Ono 方程式の初期値問題について考える.

$$(BO) \qquad \begin{cases} \partial_t u + \mathcal{H}_x \partial_x^2 u + u\partial_x u = 0, & t,\ x \in \mathbf{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

ここに, $\mathcal{H}_x$ は Hilbert 変換, すなわち, $\mathcal{H}_x = \mathcal{F}^{-1}(-i\xi/|\xi|)\mathcal{F}$ とする.

水面波の動きを記述する方程式としては, 浅水波の場合は Korteweg-de Vries (KdV) 方程式などがよく知られているが, 方程式 (BO) は底が深い水面波の動きを表すモデルとして現れる. またこの方程式は KdV 方程式と同様に完全可積分の方程式であり, ソリトン解を持つ.

本講演では初期値問題 (BO) の Sobolev 空間 $H^s(\mathbf{R})$ (あるいは重みつき S obolev 空間 $H^{s,\alpha}(\mathbf{R})$) における時間局所適切性, すなわち, 時間局所解の存在, 一意性および初期値連続依存性 について得られた結果を報告する.

初期値問題 (BO) の時間局所及び大域的適切性については Saut J. C. [10] をはじめ, Iorio R. Jr. [3], Abdelouhab L.-Bona J. L.-Felland M.-Saut J.-C. [1], Ponce G. [9], Koch H.-Tzvetkov N. [7], Kenig C. E.-Koenig K [5], Tao T. [11], Kato K. [4] によって研究されているが今のところ Tao T. [11] によって H^s, $s \geq 1$ ならば (BO) は適切であることが示されている. また Kato K. [4] によって, 粗くいって, 初期データが平均 0, すなわち, $\int u_0 dx = 0$ という条件下で H^s, $s > 1/2$ ならば (BO) は適切であることも示されている.

主定理を述べる前に関数空間をいくつか導入する. 重みつき Sobolev 空間を次のように定義する.

$$H^{s,\alpha} = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}); \|f\|_{H^{s,\alpha}} = \|\langle x\rangle^{\alpha}\langle D_x\rangle^s f\|_{L^2} < \infty\},$$

ここに, $\langle x\rangle^{\alpha} = (1+x^2)^{\alpha/2}$, $\langle D_x\rangle^s = \mathcal{F}^{-1}\langle\xi\rangle^s\mathcal{F}$.

また

$$Y_T = \{u : [0,T]\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}; \|u\|_{Y_T} < \infty\},$$

ここに, $\|u\|_{Y_T} = \|u\|_{L_T^\infty(H_x^{s,0}\cap H_x^{s_1,\alpha_1})} + \|\langle x\rangle^{-\rho}\langle D_x\rangle^{s+1/2}u\|_{L_x^{1/\epsilon}(L_T^2)} + \|\langle D_x\rangle^{\mu}\langle x\rangle^{\alpha_1}u\|_{L_x^2(L_T^\infty)}$, $\rho, \mu > 0$ は十分小さな定数, $0 < \epsilon < \rho$, $\|u\|_{L_T^p(L_x^r)} = \|(\|u\|_{L_x^r(\mathbf{R})})\|_{L^p([0,T])}$ とする.

主結果は以下の通りである.

Theorem 1. (i) $u_0 \in H^s \cap H^{s_1,\alpha_1} \equiv X^s$, $s_1 + \alpha_1 < s$, $1/2 < s_1$ かつ $1/2 < \alpha_1 < 1$ とする. このとき, ある $T > 0$ に対し, $[-T,T]$ で (BO) を満たす解 $u \in C([0,T];X^s)\cap Y_T$ が唯一つ存在する.
(ii) $\|u_0' - u_0\|_{X^s} < \delta$ とし, $u'(t)$ を u_0' を初期データとする (BO) の解とする. このとき $\delta > 0$ が十分小さければ, ある $T' \in (0,T)$ に対して次が成立する.

$$\|u' - u\|_{L_{T'}^\infty(X^s)} \leq C\|u_0' - u_0\|_{X^s},$$
$$\|\langle x\rangle^{-\rho}\langle D_x\rangle^{s+1/2}(u'-u)\|_{L_x^{1/\epsilon}(L_{T'}^2)} \leq C\|u_0' - u_0\|_{X^s}.$$

[1] 本研究は北直泰助教授 (宮崎大学教育文化学部) との共同研究による

Remarks.

(a) Theorem 1 において初期データのクラス X^s は残念ながら Tao T. のクラス H^1 に含まれてしまうが, Koch H-Tzvetkov N. [8] によって H^s, $s > 0$ では data-solution flow-map $H^s(\mathbf{R}) \ni u_0 \longmapsto u(t) \in C([-T,T], H^s(\mathbf{R}))$ は一様連続ではないことが示されているため, 通常の Sobolev 空間 $H^s(\mathbf{R})$ においては上の Theorem (ii) のような強い安定性は得ることはできない.

(b) 初期データのクラス X^s にはソリトン解は含まれるが, Kato K. [4] の初期データのクラスにはソリトン解は含まれない.

(c) Theorem 1 において $\alpha_1 < 1$ という条件が付いているが, これは Hilbert 変換の symbol $-i\xi/|\xi|$ が $\xi = 0$ で滑らかでないことに起因する. 実際, Iorio R. Jr. [3] によって, $u(t) \in C([-T,T], H^4 \cap H^{0,4})$ ならば $u \equiv 0$ であることが示されている.

(d) 上で見たように $L^2(\mathbf{R})$, $H^{1/2}(\mathbf{R})$ における時間局所適切性は未だに open problem である. このクラスにおいては弱解の存在のみが知られている (Abdelouhab L. Bona J. L. Felland M. and Saut J.-C. [1], Ginibre J. and Velo G. [2] 参照).

証明は Kenig C. E. Ponce G. and Vega L. [6] に従い, (BO) を積分方程式に直し関数空間 Y_T 上で縮小写像の原理を用いるが, その際, 単純に彼らの方法を用いただけでは初期データに小ささを仮定しなければならない. 講演では初期データの小ささという条件をはずす方法を中心に説明する.

参考文献

[1] Abdelouhab L. Bona J. L. Felland M. and Saut J.-C., *Nonlocal models for nonlinear dispersive waves*, Phys. D **40**(1989), 360–392.

[2] Ginibre J. and Velo G., *Smoothing properties and existence of solutions for the generalized Benjamin-Ono equation*, J. Differential Equations **93**(1991), 150–212.

[3] Iorio R. Jr., *On the Cauchy problem for the Benjamin-Ono equation*, Comm. Partial Differential Equations **11** (1986), 1031–1081.

[4] Kato K., *work in preparation.*

[5] Kenig C. E. and Koenig K., *On the local well-posedness of the Benjamin-Ono and modified Benjamin-Ono equations*, Math. Res. Lett. **10** (2003), 879–895.

[6] Kenig C. E. Ponce G. and Vega L., *On the generalized Benjamin-Ono equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **342**(1994), 155–172.

[7] Koch H. and Tzvetkov N., *On the local well-posedness of the Benjamin-Ono equation*, Inter. Math. Res. Notes. (2003), 1449–1464.

[8] Koch H. and Tzvetkov N., *Nonlinear wave interactions for the Benjamin-Ono equation*, preprint 2003. http://math.univ-lille1.fr/ tzvetkov/preprints.html

[9] Ponce G., *On the global well-posedness of the Benjamin-Ono equation*, Differential Integral Equations **4** (1991), 527–542.

[10] Saut J-C., *Sur quelques généralisations de l'équation de Korteweg-de Vries.* (French) J. Math. Pures Appl. **58** (1979), 21–61.

[11] Tao T., *Global well-posedness of Benjamin-Ono equation in* $H^1(\mathbf{R})$, J. Hyperbolic Diff. Eqs. **1** (2004), 27–49.