Some existence results for solutions to $SU(3)$ Toda system

大塚浩史 (木更津工業高等専門学校)
ohtsuka@nebula.n.kisarazu.ac.jp

本講演の内容は、Dongho Chae 氏（成均館大)、鈴木貴氏（阪大基礎工）との共同研究 [1, 13] に基く。

1　問題設定・結果

(M, g) を 2 次元コンパクトリーマン多様体、λ_1, λ_2 を非負定数とする。このとき、$SU(3)$ Toda system とは、次の方程式系である。

$$
\begin{aligned}
-\Delta_g u_1 &= 2\lambda_1 \left(\frac{e^{u_1}}{\int_M e^{u_1}} - \frac{1}{|M|} \right) - \lambda_2 \left(\frac{e^{u_2}}{\int_M e^{u_2}} - \frac{1}{|M|} \right) \\
-\Delta_g u_2 &= -\lambda_1 \left(\frac{e^{u_1}}{\int_M e^{u_1}} - \frac{1}{|M|} \right) + 2\lambda_2 \left(\frac{e^{u_2}}{\int_M e^{u_2}} - \frac{1}{|M|} \right) \\
\int_M u_1 &= \int_M u_2 = 0
\end{aligned} \tag{1}
$$

この方程式系は非可換自己双対ゲージ理論などで現れることが知られている [6, 16] が、$\lambda_2 = 0$ (または $\lambda_1 = 0$) のとき、$u = 2u_1$、$\lambda = 2\lambda_1$ とおくことで、

$$
-\Delta_g u = \lambda \left(\frac{e^u}{\int_\Omega e^u} - \frac{1}{|M|} \right) \quad \text{on} \quad M, \qquad \int_M u = 0 \tag{2}
$$

を得る。これは平均場方程式と呼ばれ、渦点の統計力学 ('93 Kiessling [8], '92,'95 Caglioti et al.[2, 3])、Chern-Simons-Higgs ゲージ理論 ('96 Tarantello [15]) などに現れ、近年多くの研究がなされている ([4, 12] 等も参)。(1) は (2) の拡張の一つといえる。なお、(1) の右辺に見出される $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ という行列を、Lie 代数 $su(N+1)$ の Cartan 行列である、$N \times N$ 行列

$$
\begin{pmatrix}
2 & -1 & & & \\
-1 & 2 & -1 & & \\
 & & \cdots & & \\
 & & -1 & 2 & -1 \\
 & & & -1 & 2
\end{pmatrix}
$$

とした場合の方程式系は、$SU(N+1)$ Toda system と呼ばれる。

(2) の解は、Hilbert 空間

$$E = \left\{ v \in H^1(M) \mid \int_M v = 0 \right\}$$

(但し内積は $\int_M \nabla u \cdot \nabla v$) における汎関数

$$J_\lambda(v) = \frac{1}{2} \int_M |\nabla v|^2 - \lambda \log \int_M e^v \tag{3}$$

の臨界点であるが、同様に (1) の解は、$E \times E$ 上で定義された汎関数

$$\begin{aligned} J_{\lambda_1,\lambda_2}(v_1, v_2) = \frac{1}{3} \int_M |\nabla v_1|^2 + \nabla v_1 \cdot \nabla v_2 + |\nabla v_2|^2 \\ -\lambda_1 \log \int_M e^{v_1} - \lambda_2 \log \int_M e^{v_2} \end{aligned} \tag{4}$$

の臨界点である。この変分構造を用いて、次の結果を得た。

Theorem 1. *M の genus は 1 以上とする。このとき、J_{λ_1,λ_2} は、*

$$4\pi < \max(\lambda_1, \lambda_2) < 8\pi, \qquad \min(\lambda_1, \lambda_2) \neq 4\pi, \tag{5}$$

$$\left(\lambda_1 - \frac{32\pi}{3}\right)\left(\lambda_2 - \frac{32\pi}{3}\right) > \left(\frac{16\pi}{3}\right)^2 \tag{6}$$

を満たす (λ_1, λ_2) において臨界点を持つ。(図 1 参)

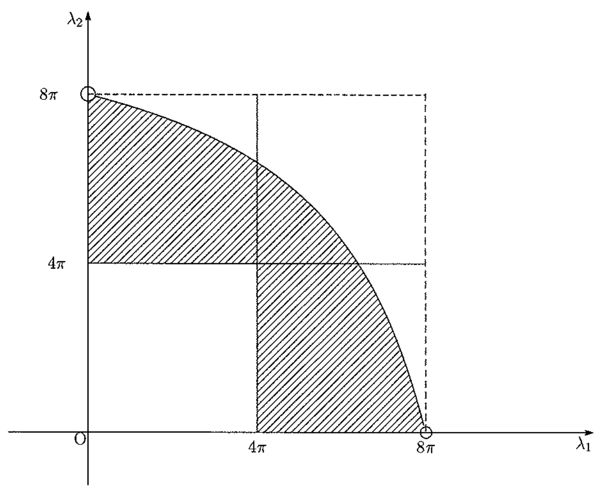

図 1: パラメータの範囲

2 関連する既存の結果

Trudinger-Moser 不等式により、

$$\lambda \in [0, 8\pi] \quad \Longrightarrow \quad \inf_{v \in E} J_\lambda(v) > -\infty \tag{7}$$

が得られるが、特に $\lambda \in [0, 8\pi)$ において最小値が達成されることが分かる。

これに類する結果として、

$$(\lambda_1, \lambda_2) \in [0, 4\pi] \times [0, 4\pi] \quad \Longrightarrow \quad \inf_{(v_1, v_2) \in E \times E} J_{\lambda_1, \lambda_2}(v_1, v_2) > -\infty \tag{8}$$

及び、$(\lambda_1, \lambda_2) \in [0, 4\pi) \times [0, 4\pi)$ において (8) の最小値が達成されることが知られている ('01 Jost-Wang[7])。今回紹介する結果は、(λ_1, λ_2) がこの範囲外である。

$\max(\lambda_1, \lambda_2) > 4\pi$ のとき汎関数 J_{λ_1, λ_2} が下に非有界であるため、Thoerem 1 示すのに min-max 法を用いた。但し、汎関数 J_{λ_1, λ_2} の Palais-Smale 条件が一般には示されていないため、汎関数 J_{λ_1, λ_2} が持つパラメータに関する「単調性」を利用する、所謂「Struwe の方法」を用いた。すなわち、図 1 の a.e. (λ_1, λ_2) における臨界点の存在を示し、その後 blow-up analysis に基いて、除外されていたパラメータの値における臨界点の存在を示す、という手順を踏んだ。ここで blow-up analysis とは、パラメータの列 $(\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}) \longrightarrow (\lambda_1, \lambda_2)$ に対する (1) の解の列 $\{(u_{1,n}, u_{2,n})\}$ の、($E \times E$ において) コンパクトでない極限を調べ尽くすことである。

スカラーの場合も同様に、$\lambda > 8\pi$ において J_λ は下に非有界になるが、類似の結果として、次が知られている。

Theorem 2 ('99 Ding et al. [5]). *M の genus は 1 以上とする。このとき、J_λ は、$8\pi < \lambda < 16\pi$ において臨界点を持つ。*

今回の結果は、このスカラーの場合の $SU(3)$ Toda system への拡張といえる ($\lambda_2 = 0, \lambda = 2\lambda_1$ とせよ)。手法としても、Ding et al. を踏襲したものだが、min-max 法の設定、blow-up analysis において、Toda system 特有の工夫が必要であった。特に blow-up analysis は、スカラーの場合 ([10, 9, 12] など) と比較して、現時点でも未解明なことが多い。

講演では、これらのシステムの解析において困難であったことや、臨界点の非自明性に関する結果（'98 Struwe-Tarantello [14](スカラー), '02 Lucia-Nolasco [11](システム)) などにも触れたい。

参考文献

[1] D. Chae, H. Ohtsuka, and T. Suzuki, *Some existence results for solutions to $SU(3)$ Toda system*, preprint (submitted).

[2] E. Caglioti, P. L. Lions, C. Marchioro, and M. Pulvirenti, *A special class of stationary flows for two-dimensional Euler equations: A statistical mechanics description*, Comm. Math. Phys., 143 (1992), pp. 501–525.

[3] ——, *A special class of stationary flows for two-dimensional Euler equations: A statistical mechanics description. part II*, Comm. Math. Phys., 174 (1995), pp. 229–260.

[4] C.-C. Chen and C.-S. Lin, *Topological degree for a mean field equations on Riemann surfaces*, Comm. Pure Appl. Math., 56 (2003), pp. 1667–1803

[5] W. Ding, J. Jost, J. Li, and G. Wang, *Existence results for mean field equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 16 (1999), pp. 653–666.

[6] G. Dunne, *Self-dual Chern-Simons Theories*, no. 36 in Lecture Notes in Phys., Springer, Berlin, 1995.

[7] J. Jost and G. Wang, *Analytic aspects of the Toda system: I. A Moser-Trudinger inequality*, Comm. Pure Appl. Math., 54 (2001), pp. 1289–1319.

[8] M. K. H. Kiessling, *Statistical mechanics of classical particles with logarithmic interactions*, Comm. Pure Appl. Math., 46 (1993), pp. 27–56.

[9] Y. Y. Li, *Harnack type inequality: the method of moving planes*, Comm. Math. Phys., 200 (1999), pp. 421–444.

[10] Y. Y. Li and I. Shafrir, *Blow-up analysis for solutions of $-\Delta u = Ve^u$ in dimension two*, Indiana Univ. Math. J., 43 (1994), pp. 1255–1270.

[11] M. Lucia and M. Nolasco, *$SU(3)$ Chern-Simons vortex theory and Toda systems*, J. Differential Equations, 184 (2002), pp. 443–474.

[12] H. Ohtsuka and T. Suzuki, *Blow-up analysis for Liouville type equation in self-dual gauge field theories*, to appear in Comm. Contemp. Math.

[13] H. Ohtsuka and T. Suzuki, *Blow-up analysis for $SU(3)$ Toda system*, to appear in RIMS Kokyuroku.

[14] M. Struwe and G. Tarantello, *On multivortex solutions in Chern-Simons gauge theory*, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8), 1 (1998), pp. 109–121.

[15] G. Tarantello, *Multiple condensate solutions for the Chern-Simons-Higgs theory*, J. Math. Phys., 37 (1996), pp. 3769–3796.

[16] Y. Yang, *Solitons in Field Theory and Nonlinear Analysis*, Springer, New York, 2001.