時間遅れをもつ差分方程式の解の漸近挙動について

松永秀章　(大阪府立大学工学部)

$\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}^+$, $\mathbf{Z}^-$ をそれぞれ整数, 非負の整数, 非正の整数からなる集合とし, $\mathbf{C}^k$ を適当なノルム $|\cdot|$ をもつ k 次元複素ユークリッド空間とする. 今

$$\mathcal{B}^\gamma := \left\{\phi : \mathbf{Z}^- \to \mathbf{C}^k \;\middle|\; \sup_{s\in\mathbf{Z}^-} |\phi(s)|\gamma^s < \infty\right\} \quad \text{for } {}^\exists\gamma > 1$$

におけるノルムを $\|\phi\| = \sup_{s\in\mathbf{Z}^-} |\phi(s)|\gamma^s$, $\phi \in \mathcal{B}^\gamma$ と定めると, $\mathcal{B}^\gamma$ は Banach 空間になる. また, 任意の関数 $x : (-\infty, m] \to \mathbf{C}^k$ と $n \leq m$ なる任意の $n \in \mathbf{Z}$ に対して, 関数 $x_n : \mathbf{Z}^- \to \mathbf{C}^k$ を $x_n(s) = x(n+s)$, $s \in \mathbf{Z}^-$ で定める.

本研究では, $\mathcal{B}^\gamma$ 上の関数差分方程式

$$x(n+1) = L(x_n), \tag{1}$$

$$x(n+1) = L(x_n) + G(n)x_n \tag{2}$$

を考える. ここで, L と $G(n)$, $n \in \mathbf{Z}^+$ は $\mathcal{B}^\gamma$ から $\mathbf{C}^k$ への有界線形作用素であり, $G(n)$ の作用素ノルム $\|G(n)\|$ は次式を満たすものとする：

$$\lim_{n\to\infty} \|G(n)\| = 0 \tag{3}$$

本研究の目的は, 方程式 (2) の解の漸近挙動について考察することである. そのために, 方程式 (1) に対する特性方程式を

$$\det\Delta(z) = \det\Big(zE - L(\omega_z E)\Big) = 0, \qquad |z| > \frac{1}{\gamma}$$

で定義する. ただし, E は $k \times k$ 単位行列を表し, ω_z は $\omega_z(s) = z^s$, $s \in \mathbf{Z}^-$ で定義されている. 得られた結果は次の通りである.

定理 1. 条件 (3) を仮定する. このとき, 方程式 (2) の任意の解 x に対して, 次の (I) または (II) が成り立つ：

(I) $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x_n\|} \leq \frac{1}{\gamma}$;

(II) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x_n\|} = |\lambda|$.

ここで, λ は $|\lambda| > 1/\gamma$ かつ $\det\Delta(\lambda) = 0$ を満たすある定数である.

定理 2. 条件 (3) を仮定する. このとき, 方程式 (2) の任意の解 x に対して, 次の (I) または (II) が成り立つ：

(I) $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x(n)|} \leq \frac{1}{\gamma}$;

(II) $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x(n)|} = |\lambda|$.

ここで, λ は $|\lambda| > 1/\gamma$ かつ $\det\Delta(\lambda) = 0$ を満たすある定数である.

主定理を証明するために, 以下の命題を準備する；任意の $(\tau,\phi)\in \mathbf{Z}\times\mathcal{B}^\gamma$ に対して $x_\tau=\phi$ かつ任意の $n\geq\tau$ に対して方程式 (1) を満たす関数 $x:\mathbf{Z}\to\mathbf{C}^k$ がただ一つ存在する. この x を (τ,ϕ) を通る方程式 (1) の解といい, $x(\cdot,\tau,\phi)$ と表す. 方程式 (1) に対する解作用素 $T(n)$, $n\in\mathbf{Z}^+$ を $T(n)\phi:=x_n(0,\phi)$, $\phi\in\mathcal{B}^\gamma$ で定義すると, $T(n)$ は $\mathcal{B}^\gamma$ 上の有界線形作用素であり, 半群の性質を満たす. このとき, 方程式 (2) の解の $\mathcal{B}^\gamma$ 内における次の表現公式が得られる (cf. [2]). ここで, $k\times k$ 行列値関数 $\Gamma(s)$, $s\in\mathbf{Z}^-$ を $\Gamma(0)=E$, $\Gamma(s)=O$ $(s=-1,-2,\cdots)$ で定める.

命題 1. 任意の $(\tau,\phi)\in\mathbf{Z}\times\mathcal{B}^\gamma$ に対して, 方程式 (2) の解 $x(\cdot)$ は

$$x_n=T(n-\tau)\phi+\sum_{j=\tau}^{n-1}T(n-j-1)(\Gamma G(j)x_j),\quad n\geq\tau$$

を満たす. 特に, 次式が成り立つ：

$$x_{n+1}=T(1)x_n+\Gamma G(n)x_n. \tag{4}$$

また, 絶対値が $1/\gamma$ より大きい $T:=T(1)$ のスペクトルは $\det\Delta(z)=0$ の根として特徴づけられる (cf. [3]). すなわち, $|\lambda|>1/\gamma$ のとき, $\lambda\in\sigma(T)\iff\det\Delta(\lambda)=0$ が成り立つ.

さて, $\rho>1/\gamma$ を $\det\Delta(z)\neq 0$ $(|^\forall z|=\rho)$ を満たす任意の数とし,

$$\Sigma_\rho:=\{\lambda\in\mathbf{C}\mid\det\Delta(\lambda)=0,\ \ |\lambda|>\rho\}$$

とおくと, Σ_ρ に対応して $\mathcal{B}^\gamma$ はある T 不変な閉部分空間 $U:=U_\rho$, $S:=S_\rho$ の直和に分解される：

$$\mathcal{B}^\gamma=U\oplus S. \tag{5}$$

ただし, T の制限作用素 $T^S\equiv T|_S:S\to S$, $T^U\equiv T|_U:U\to U$ はそれぞれ $\sigma(T^U)=\Sigma_\rho$, $\sigma(T^S)=\sigma(T)\setminus\Sigma_\rho$ を満たす. このとき, $\Pi^S:\mathcal{B}^\gamma\to S$, $\Pi^U:\mathcal{B}^\gamma\to U$ を $\mathcal{B}^\gamma$ の直和分解 (5) に対応する射影作用素とすると, 次の結果が成り立つ.

命題 2. 条件 (3) を仮定する. 方程式 (2) の解 x に対して $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|x_n\|}>1/\gamma$ とし,

$$\frac{1}{\gamma}<\rho<\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|x_n\|}\quad \text{かつ}\quad \det\Delta(z)\neq 0\ \ (|^\forall z|=\rho) \tag{6}$$

を満たす任意の ρ に対して $\mathcal{B}^\gamma$ の直和分解 (5) を考えると, 次式が成り立つ：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|\Pi^S x_n\|}{\|\Pi^U x_n\|}=0. \tag{7}$$

References

[1] H. Matsunaga and S. Murakami, Asymptotic behavior of solutions of functional difference equations, *J. Math. Anal. Appl.* (in press).

[2] S. Murakami, Representation of solutions of linear functional difference equations in phase space, *Nonlinear Anal.*, **30** (1997), 1153–1164.

[3] S. Murakami, Some spectral properties of the solution operator for linear Volterra difference systems, *New developments in difference equations and applications* (Taipei, 1997) 301–311, Gordon and Breach, 1999.

[4] M. Pituk, More on Poincare's and Perron's theorems for difference equations, *J. Difference Equ. Appl.*, **8** (2002), 201–216.