ヤン・ミルズ方程式からパンルヴェ方程式，ガルニエ系へ
（Mason, Woodhouse, 村田の方法をもとに）

川向 洋之（三重大学教育学部）
新田 貴士（三重大学教育学部）

Mason 氏と Woodhouse 氏は，パンルヴェ方程式がヤン・ミルズ方程式の簡約化として得られることを示した．村田嘉弘氏は彼らの仕事を再構築し，より見やすい形に書き直した．今回の講演では，村田氏の仕事を参考に，反自己双対ヤン・ミルズ接続とモノドロミー保存変形との関係を説明し，いくつかの話題を述べる．

1 準備

始めに，記号の準備と言葉の定義を行う．

◇ **記号** $\cdots n, k$ は自然数で，$k < n$ とする．

$$\begin{aligned}
&M_{k,n} = \{X \,:\, k\times n \text{ 行列} \mid \operatorname{Rank} X = k\,\},\\
&M_{k,n}^0 = \left\{ X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n}\\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kn}\end{bmatrix} \in M_{k,n} \;\middle|\; \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k}\\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kk}\end{vmatrix} \neq 0 \right\},\\
&\bar{X} = \{\,GX \mid G \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{C})\,\}\ (X \in M_{k,n}),\\
&\bar{P}_n = \{\bar{V} \mid V \in M_{1,n}\,\},\quad \bar{P}_n^0 = \{\bar{V} \mid V \in M_{1,n}^0\,\},\\
&\bar{U}_n = \{\bar{X} \mid X \in M_{2,n}\,\},\quad \bar{U}_n^0 = \{\bar{X} \mid X \in M_{2,n}^0\,\},\\
&\bar{F}_n = \{(\bar{V}, \bar{X}) \in \bar{P}_n \times \bar{U}_n \mid {}^{\exists}(\zeta_0, \zeta_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}\ \text{ st }\ V = [\zeta_0, \zeta_1]\,X\,\},\\
&\bar{F}_n^0 = \{(\bar{V}, \bar{X}) \in \bar{F}_n \mid \bar{V} \in \bar{P}_n^0,\ \bar{X} \in \bar{U}_n^0\,\}.
\end{aligned}$$

なお，$\bar{P}_n^0, \bar{U}_n^0, \bar{F}_n^0$ の任意の元は

$$\overline{[1\ \ \zeta\ \ \lambda_1\ \ \lambda_2\ \cdots\ \lambda_{n-2}]},\quad \overline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-2}\\ 0 & 1 & y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-2}\end{bmatrix}},$$

$$\left(\overline{[1\ \ \zeta\ \ x_1 + \zeta y_1\ \cdots\ x_{n-2} + \zeta y_{n-2}]},\ \overline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-2}\\ 0 & 1 & y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-2}\end{bmatrix}}\right)$$

と表すことができるので，$\bar{P}_n^0 \cong \mathbb{C}^{n-1}$, $\bar{U}_n^0 \cong \mathbb{C}^{2n-4}$, $\bar{F}_n^0 \cong \mathbb{C}^{2n-3}$ とみなす事ができる．以下，この同一視の下で話を進める．

◇ **ジョルダン群** $\cdots \nu = (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_d)$ を n のコンポジション（$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_d = n$ を満たす正の整数 $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_d$ の組．ただし，$\nu_1 > \nu_2 > \cdots > \nu_d$ となっていなくてもよい）とし，

$$J_\nu = \left\{ J = \bigoplus_{k=1}^{d} J\big(h_0^{(\nu_k)}, \cdots, h_{\nu_k - 1}^{(\nu_k)}\big) \;\middle|\; \det J \neq 0,\ h_j^{(\nu_k)} \in \mathbb{C}\ (k = 1, \cdots, d;\ j = 0, \cdots, \nu_k - 1) \right\}$$

と置く．ここで $J(h_0,\cdots,h_{m-1})$ は

$$J(h_0,\cdots,h_{m-1})=\sum_{k=0}^{m-1}h_k\left.\begin{bmatrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&\ddots&1\\&&&&0\end{bmatrix}^k\right\}m$$

である．J_ν は $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の可換な部分群である．この群をタイプ ν のジョルダン群と呼ぶ．

◇ **GASDYM 方程式** $\cdots$ Φ_i,Ψ_i $(i=1,\ldots,n-2)$ は，$x_1,\ldots,x_{n-2},y_1,\ldots,y_{n-2}$ の解析関数を成分とする 2×2 行列で，$\mathrm{trace}\,\Phi_i=\mathrm{trace}\,\Psi_i=0$ $(i=1,\ldots,n-2)$ を満たすものとする．このとき，

$$L_i=\frac{\partial}{\partial y_i}-\zeta\frac{\partial}{\partial x_i}+\Psi_i-\zeta\Phi_i\quad(i=1,\ldots,n-2),$$

$$\varphi=\varphi(\bar{V},\bar{X}):\bar{F}_n^0 \text{ から } \mathbb{C}^2 \text{ への写像}$$

として，線型方程式系 $L_1\varphi=0,\ldots,L_{n-2}\varphi=0$ の積分可能条件から得られる系：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial y_i}\Psi_j-\frac{\partial}{\partial y_j}\Psi_i+[\Psi_i,\Psi_j]=0,\\&\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi_j-\frac{\partial}{\partial x_j}\Phi_i+[\Phi_i,\Phi_j]=0,\\&\frac{\partial}{\partial x_i}\Psi_j-\frac{\partial}{\partial y_j}\Phi_i+\frac{\partial}{\partial y_i}\Phi_j-\frac{\partial}{\partial x_j}\Psi_i+[\Phi_i,\Psi_j]+[\Psi_i,\Phi_j]=0.\end{aligned}$$

を GASDYM 方程式と呼ぶ．（とくに $n=4$ のとき，GASDYM 方程式は，反自己双対ヤン・ミルズ方程式になる）

◇ **ジョルダン群 J_ν の $\bar{U}_n,\bar{F}_n$ への作用** $\cdots$ ジョルダン群 J_ν の $\bar{U}_n$ および $\bar{F}_n$ への作用を

$$\begin{array}{ccc}J_\nu\times\bar{U}_n&\to&\bar{U}_n,\\ \Downarrow&&\Downarrow\\ (J,\bar{X})&\to&\overline{XJ}\end{array}\qquad\begin{array}{ccc}J_\nu\times\bar{F}_n&\to&\bar{F}_n\\ \Downarrow&&\Downarrow\\ (J,(\bar{V},\bar{X}))&\to&(\overline{VJ},\overline{XJ})\end{array}$$

と定義する．例えば，

$$\bar{X}=\overline{\begin{bmatrix}1&0&x_1&x_2\\0&1&y_1&y_2\end{bmatrix}}\in\bar{U}_4,\quad J=\begin{bmatrix}1&a&&\\&1&a&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}\in J_{(3,1)}$$

に対し，J の $\bar{X}$ への作用は

$$\begin{array}{cccl}J_{(3,1)}\times\bar{U}_4&\longrightarrow&\bar{U}_4&\\ \Downarrow&&\Downarrow&\\ (J,\bar{X})&\longrightarrow&\overline{XJ}&=\overline{\begin{bmatrix}1&a&x_1&x_2\\0&1&a+y_1&y_2\end{bmatrix}}\\ &&&=\overline{\begin{bmatrix}1&0&-a^2-ay_1+x_1&-ay_2+x_2\\0&1&a+y_1&y_2\end{bmatrix}}\end{array}$$

となる.

◇ **ジョルダン群 J_ν による標準形** $\cdots$ $\bar{P}_n$ と $\bar{U}_n$ は $\bar{P}_n = \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})\backslash M_{1,n}$, $\bar{U}_n = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\backslash M_{2,n}$ だったので，ジョルダン群 J_ν の各元の $(1,1)$ 成分は 1 としてよい．この仮定の下で，4 の分割に付随したジョルダン群を具体的に書くと次のようになる．

$$J_{(1,1,1,1)} = \left\{ X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\mathrm{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\mathrm{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\mathrm{c} \end{bmatrix} \;\middle|\; \det X \neq 0 \right\},$$

$$J_{(2,1,1)} = \left\{ X = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{a} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\mathrm{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\mathrm{c} \end{bmatrix} \;\middle|\; \det X \neq 0 \right\},$$

$$J_{(3,1)} = \left\{ X = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{a} & \mathrm{b} & 0 \\ 0 & 1 & \mathrm{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\mathrm{c} \end{bmatrix} \;\middle|\; \det X \neq 0 \right\},$$

$$J_{(2,2)} = \left\{ X = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{a} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\mathrm{b} & \mathrm{c} \\ 0 & 0 & 0 & 1+\mathrm{b} \end{bmatrix} \;\middle|\; \det X \neq 0 \right\},$$

$$J_{(4)} = \left\{ X = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} \\ 0 & 1 & \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; \det X \neq 0 \right\}.$$

簡単な計算により，次の命題を示すことができる．

命題 1 行列 $N_{(1,1,1,1)}, N_{(2,1,1)}, N_{(2,2)}, N_{(3,1)}, N_{(4)}$ を

$$N_{(1,1,1,1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & t \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad N_{(2,1,1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$N_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_{(3,1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$N_{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と定義する．$n=4$ の分割 ν に対し，J の元 J_ν と，有理関数 $t = t(x_1, x_2, y_1, y_2)$ で

$$\overline{XJ} = \overline{N_\nu} \qquad \left(X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & y_1 & y_2 \end{bmatrix} \right)$$

を満たすものが存在する．

この命題に現れた行列 N_ν を J_ν に付随した X の標準形と呼ぶことにする．

2　ヤン・ミルズ方程式とパンルヴェ方程式

次に，反自己双対ヤン・ミルズ方程式とジョルダン群から，どのようにしてパンルヴェ方程式がでてくるのかを説明する．説明の都合上，反自己双対ヤン・ミルズ方程式から IV 型パンルヴェ方程式を出すことにする．(他のタイプのパンルヴェ方程式も同様の計算で出せる.)

天下り的ではあるが，$\bar{F}^0$ 上の 2 次元ベクトル値関数 $\varphi=\varphi(\bar{V},\bar{X})$ に，次の条件を課す．

$$\varphi(\overline{VJ},\overline{XJ})=\varphi(\bar{V},\bar{X})\quad\left({}^{\forall}J\in J_{(3,1)}\right)\qquad\cdots(\natural)$$

このとき，次の命題が成り立つ．

命題 2 $(\natural)$ の仮定の下で，$\varphi=\varphi(\bar{V},\bar{X})$ は t,ξ の関数とみなすことができる．ここで t,ξ は

$$t=\frac{x_2+y_1y_2}{y_2},\quad \xi=\zeta-y_1$$

である．

命題 3 $(\natural)$ の仮定の下で，$\varphi=\varphi(\bar{V},\bar{X})$ は $\mathcal{X}_p\varphi=\mathcal{X}_q\varphi=\mathcal{X}_r\varphi=0$ を満たす．ここで，$\mathcal{X}_p$, $\mathcal{X}_q$, $\mathcal{X}_r$ は

$$\mathcal{X}_p=-y_1\frac{\partial}{\partial x_1}-y_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial y_1}+\frac{\partial}{\partial\zeta},\quad \mathcal{X}_q=\frac{\partial}{\partial x_1},\quad \mathcal{X}_r=x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+y_2\frac{\partial}{\partial y_2}$$

である．

簡単なのでこれらの命題の証明をつけておく．

(命題 2 の証明) X,V を

$$V=[1\ \ \zeta\ \ x_1+\zeta y_1\ \ x_2+\zeta y_2],\quad X=\begin{bmatrix}1&0&x_1&x_2\\0&1&y_1&y_2\end{bmatrix}$$

と置く．このとき，

$$J=\begin{bmatrix}1&a&b&0\\0&1&a&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1+c\end{bmatrix}\quad\left(a=-y_1,\,b=-x_1,\,c=-1+\frac{1}{y_2}\right)$$

とすれば，

$$\overline{VJ}=\overline{[1\ \ \xi\ \ 0\ \ t]},\quad \overline{XJ}=\overline{\begin{bmatrix}1&0&0&t\\0&1&0&1\end{bmatrix}}.$$

よって，$(\natural)$ より，$\varphi(\bar{V},\bar{X})=\varphi\left(\overline{[1\ \ \xi\ \ 0\ \ t]},\ \overline{\begin{bmatrix}1&0&0&t\\0&1&0&1\end{bmatrix}}\right)$．これは $\varphi=\varphi(\bar{V},\bar{X})$ が t,ξ の関数であることを意味する．□

(命題 3 の証明) 行列 J_1,J_2,J_3 を

$$J_1=\begin{bmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad J_2=\begin{bmatrix}1&0&b&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad J_3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1+c\end{bmatrix}$$

と置く．J_1 の $\bar{F}^0$ への作用は

$$\bar{V}=\overline{[1\ \ \zeta\ \ \lambda_1\ \ \lambda_2]},\quad \bar{X}=\overline{\begin{bmatrix}1&0&x_1&x_2\\0&1&y_1&y_2\end{bmatrix}}$$

$$\Longrightarrow\quad \overline{VJ_1}=\overline{[1\ \ a+\zeta\ \ a\zeta+\lambda_1\ \ \lambda_2]},\quad \overline{XJ_1}=\overline{\begin{bmatrix}1&0&-a^2-ay_1+x_1&-ay_2+x_2\\0&1&a+y_1&y_2\end{bmatrix}}$$

なので，J_1 が引き起こす $\bar{F}^0$ 上の座標変換は $(x_1,x_2,y_1,y_2,\zeta)\to(-a^2-ay_1+x_1,-ay_2+x_2,a+y_1,y_2,a+\zeta)$ となる．よって，この変換の無限小変換は

$$\mathcal{X}_p=-y_1\frac{\partial}{\partial x_1}-y_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial y_1}+\frac{\partial}{\partial\zeta}$$

で与えられる．一方，(b) より $\varphi(\overline{VJ_1},\overline{XJ_1})-\varphi(\bar{V},\bar{X})=0$．従って，この両辺を a で割り，$a\to 0$ とすると，

$$\lim_{a\to 0}\frac{\varphi(\overline{VJ_1},\overline{XJ_1})-\varphi(\bar{V},\bar{X})}{a}=0$$

を得る．これは $\mathcal{X}_p\varphi=0$ を意味する．

同様の計算を J_2,J_3 に対して行えば $\mathcal{X}_q\varphi=\mathcal{X}_r\varphi=0$ を得る．このことと，J_1,J_2,J_3 が $J_{(3,1)}$ の生成元をなすことから命題２が従う．□

J_1,J_2,J_3 は可換な行列なので，これらの無限小変換である $\mathcal{X}_p,\mathcal{X}_q,\mathcal{X}_r$ も可換なベクトル場になる．故に，

$$\mathcal{X}_p=\frac{\partial}{\partial p},\quad \mathcal{X}_q=\frac{\partial}{\partial q},\quad \mathcal{X}_r=\frac{\partial}{\partial r}$$

となるように座標変換 $(x_1,x_2,y_1,y_2,\zeta)\to(p,q,r,t,\xi)$ を取ることができる．(具体的には $p=y_1, q=(2x_1+y_1^2)/2, r=\log y_2, t=(x_2+y_1y_2)/y_2, \xi=-y_1+\zeta$ と取ればよい．) そこで，

$$\Phi_1dx_1+\Phi_2dx_2+\Psi_1dy_1+\Psi_2dy_2=Pdp+Qdq+Rdr+Tdt$$

となるように行列 P,Q,R,T を定め，$L_1\varphi=0$, $L_2\varphi=0$, $\mathcal{X}_p\varphi=\mathcal{X}_q\varphi=\mathcal{X}_r\varphi=0$ を (p,q,r,t,ξ) と P,Q,R,T で表してみる．すると，少々複雑な計算の後に

$$L_1\varphi=0,\ L_2\varphi=0,\ \mathcal{X}_p\varphi=\mathcal{X}_q\varphi=\mathcal{X}_r\varphi=0\implies\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\xi}\varphi=\left(P-\xi Q+\dfrac{R}{\xi+t}\right)\varphi & \cdots(a)\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial t}\varphi=\left(\dfrac{R}{\xi+t}-T\right)\varphi & \cdots(b)\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial p}\varphi=\dfrac{\partial}{\partial q}\varphi=\dfrac{\partial}{\partial r}\varphi=0 & \cdots(c)\end{cases}$$

が得られる．―― 以下，説明の都合上，座標系 (p,q,r,t,ξ) を $J_{(3,1)}$ 不変な座標系，方程式 $(a),(b),(c)$ を $J_{(3,1)}$ 不変な線形方程式系と呼ぶことにする．

線形方程式系 $(a),(b),(c)$ において，

$$\frac{\partial}{\partial t}M=-TM,\quad \frac{\partial}{\partial\xi}M=0$$

となる行列 M を取り，ゲージ変換 $\varphi \to M\varphi$ を行うことにより，$T=0$ としてよい．このとき $(a),(b),(c)$ の積分可能条件は，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}P=[Q,R],\quad \frac{\partial}{\partial t}Q=0,\quad \frac{\partial}{\partial t}R=-[P+tQ,R],\\
&\frac{\partial}{\partial p}P=0,\quad \frac{\partial}{\partial p}Q=0,\quad \frac{\partial}{\partial p}R=0,\\
&\frac{\partial}{\partial q}P=0,\quad \frac{\partial}{\partial q}Q=0,\quad \frac{\partial}{\partial q}R=0,\\
&\frac{\partial}{\partial r}P=0,\quad \frac{\partial}{\partial r}Q=0,\quad \frac{\partial}{\partial r}R=0
\end{aligned}$$

となる．これらの式より，P,R は t のみの関数，Q は定数行列であることが分かる．以上より，次の命題が得られた．

命題 4 ヤン・ミルズ方程式と同値な条件 $[L_1,L_2]=0$ に，ジョルダン群 $J_{(3,1)}$ で決まる条件

$$[L_1,\mathcal{X}_*]=[L_2,\mathcal{X}_*]=0 \quad (*=p,q,r)$$

を課すと，行列型の非線形方程式

$$\frac{d}{dt}P=[Q,R],\quad \frac{d}{dt}Q=0,\quad \frac{d}{dt}R=-[P+tQ,R], \tag{1}$$

が得られる．

（IV 型パンルヴェ方程式を導くため，）この命題における Q を対角化可能[*1)]な行列としてみる．そうすると，Q を対角化する正則行列 X を取って，ゲージ変換

$$\varphi \to X\varphi$$

を行うことにより，始めから Q は対角行列と仮定することができる．このとき，次が成り立つ．

補題 1 行列 P,Q,R を

$$P=\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & -p_1 \end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & -q_1 \end{bmatrix},\quad R=\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & -r_1 \end{bmatrix}$$

と置くと，

$$q_1,\ -p_1,\ -r_1+\frac{p_2p_3}{2q_1},\ \sqrt{{r_1}^2+r_2r_3}$$

は t によらない定数である．

（補題 1 の証明） 線形方程式 (a) は $\xi=\infty$ の付近で，次の形の形式解を持つ．

$$\varphi=\widehat{\varphi}\,e^{T(\xi)}$$

$$\widehat{\varphi}=I+\varphi_1(t)\,\xi^{-1}+\varphi_2(t)\,\xi^{-2}+\cdots$$
$$\frac{d}{d\xi}T(\xi)=\begin{bmatrix} -q_1\xi+p_1+(2q_1r_1-p_2p_3)/(2q_1\xi) & 0 \\ 0 & q_1\xi-p_1-(2q_1r_1-p_2p_3)/(2q_1\xi) \end{bmatrix}$$

*1) 対角化可能でない場合には II 型パンルヴェ方程式がでる．

ここで I は 2×2 の単位行列，$\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots$ は 2×2 の ξ によらない行列である．この式を (b) に代入し，両辺の ξ^1,ξ^0,ξ^{-1} の係数を比べれば，命題の主張が得られる．$\square$

この補題により，(1) から，従属変数が 3 つの一階非線形偏微分方程式系を得る．特に変数 $p_1,p_2,p_3,q_1,r_1,r_2,r_3$ を

$$
(\sharp)\quad \begin{cases} p_1=-c_1c_2, \quad p_2=1/\tau, \quad p_3={c_1}^2\,\tau\left(2uv+\dfrac{u^2}{2}+su+4a_1\right), \quad q_1={c_1}^2, \\ r_1=\left(2uv+\dfrac{u^2}{2}+su-1\right)/2, \quad r_2=-\dfrac{u}{2c_1\tau}, \\ r_3=\tau\left\{\dfrac{c_1}{2}\left(2uv+\dfrac{u^2}{2}+su-2\right)\left(2v+s+\dfrac{u}{2}\right)-\dfrac{2a_0c_1}{u}\right\} \end{cases}
$$

（ただし a_0,a_1,c_1,c_2 は定数）と置くと，これらの式は

$$
\begin{aligned} &\frac{du}{ds}=\frac{\partial K}{\partial v}, \quad \frac{dv}{ds}=-\frac{\partial K}{\partial u}, \quad \frac{d\tau}{ds}=-\tau u, \\ &\left(K=2uv^2-2v-\frac{2a_0}{u}-2a_1u-2u\left(\frac{u+2s}{4}\right)^2\right) \end{aligned} \tag{2}
$$

となる．これは IV 型パンルヴェ方程式である．

注意 変数変換 ($\sharp$) の決め方を簡単に説明しておく —— 岡本氏の論文 [8] により，線形方程式

$$
\begin{aligned} &\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=p(x)z, \quad \frac{\partial z}{\partial t}=-\frac{1}{2}\frac{\partial A(x)}{\partial x}z+A(x)\frac{\partial z}{\partial x} \\ &p(x)=\frac{a_0}{x^2}+\frac{K}{2x}+a_1+\left(\frac{x+2t}{4}\right)^2+\frac{3}{4(x-\lambda)^2}-\frac{\lambda\nu}{x(x-\lambda)} \\ &K=2\lambda\nu^2-2\nu-\frac{2a0}{\lambda}-2a_1\lambda-2\lambda\left(\frac{\lambda+2t}{4}\right)^2, \quad A(x)=\frac{2x}{x-\lambda} \end{aligned} \tag{3}
$$

の積分可能条件から IV 型パンルヴェ方程式 (2) が得られることが知られている．一方，線形方程式：

$$
\frac{\partial}{\partial \xi}\varphi=A\varphi, \quad \frac{\partial}{\partial t}\varphi=B\varphi \quad \left(\varphi=\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{11}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{11}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix},\right)
$$

において，φ_2 を消去し，φ_1 だけの高階方程式を求めると，次のようになる：

$$
\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\varphi_1+p_1\frac{\partial}{\partial \xi}\varphi_1+p_2\varphi_1=0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\varphi_1=\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\frac{\partial}{\partial \xi}\varphi_1 \\ &p_1=-a_{11}-a_{22}-\frac{\partial}{\partial \xi}\log a_{12}, \\ &p_2=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}-\frac{\partial}{\partial \xi}a_{11}+a_{11}\frac{\partial}{\partial \xi}\log a_{12} \\ &\alpha_1=-\frac{a_{11}b_{12}-a_{12}b_{11}}{a_{12}}, \quad \alpha_2=\frac{b_{12}}{a_{12}} \end{aligned}
$$

さらに次を満たす w：

$$
\frac{\partial}{\partial \xi}w=-\frac{p_1}{2}w
$$

を取って，$\varphi_1 = w\,\phi$ とおくと，

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\,\phi = r\,\phi, \quad \frac{\partial}{\partial t}\,\phi = \beta_1\,\phi + \beta_2\,\frac{\partial}{\partial \xi}\,\phi \tag{4}$$

$$r = -p_2 + \frac{1}{4}{p_1}^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \xi}p_1$$

$$\beta_1 = -\frac{\partial}{\partial t}\log w + \alpha_1 - \frac{\alpha_2}{2}\,p_1, \quad \beta_2 = \alpha_2$$

となる．($\sharp$) は

$$A = P - \xi\,Q + \frac{R}{\xi + t}, \quad B = \frac{R}{\xi + t}$$

として，(4) が (3) と一致するように，変数 $\xi, t, p_1, p_2, p_3, q_1, r_1, r_2, r_3$ を変換した結果，得られたものである．

3 ジョルダン群の退化とパンルヴェ方程式の退化

ジョルダン群 J_ν $\big(\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_d)\big)$ の元 J に，パラメータ ε を導入し，適当な行列 $g(\varepsilon)$ で共役な行列 $g(\varepsilon)\,J\,g(\varepsilon)^{-1}$ を作れば，

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g(\varepsilon)\,J\,g(\varepsilon)^{-1} \in J_{\nu'} \quad \Big(\nu' = (\nu_1 + \cdots + \nu_{k-1}, \nu_k + \nu_{k+1}, \nu_{k+2}, \cdots, \nu_d)\Big)$$

とすることができる．例えば，

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m & & & & \\ & a_1 & \ddots & \vdots & & & & \\ & & \ddots & a_2 & & & & \\ & & & a_1 & & & & \\ & & & & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ & & & & & b_2 & \ddots & \vdots \\ & & & & & & \ddots & b_2 \\ & & & & & & & b_1 \end{bmatrix}$$

の場合だと，

$$[a_1(\varepsilon),\ a_2(\varepsilon), \cdots,\ a_m(\varepsilon),\ b_1(\varepsilon),\ b_2(\varepsilon), \cdots,\ b_n(\varepsilon)] = [a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n]\,g(\varepsilon)$$

$$g(\varepsilon) = \begin{bmatrix} I_m & g_1(\varepsilon) \\ O & g_2(\varepsilon) \end{bmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l} \begin{bmatrix} g_1(\varepsilon) \\ g_2(\varepsilon) \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(1\ \varepsilon\ \varepsilon^2\ \cdots\ \varepsilon^{m+n-1})\,M\,\mathrm{diag}(1\ \varepsilon\ \varepsilon^2\ \cdots\ \varepsilon^{n-1})^{-1} \\ M \text{ の } (i,j) \text{ 成分} = \begin{cases} 0 & (i < j) \\ \dfrac{(i-1)!}{(i-j)!(j-1)!} & (i \geq j) \end{cases} \end{array} \right)$$

として，

$$g(\varepsilon)\begin{bmatrix} a_1(\varepsilon) & a_2(\varepsilon) & \cdots & a_m(\varepsilon) & & & & \\ & a_1(\varepsilon) & \ddots & \vdots & & & & \\ & & \ddots & a_2(\varepsilon) & & & & \\ & & & a_1(\varepsilon) & & & & \\ & & & & b_1(\varepsilon) & b_2(\varepsilon) & \cdots & b_n(\varepsilon) \\ & & & & & b_2(\varepsilon) & \ddots & \vdots \\ & & & & & & \ddots & b_2(\varepsilon) \\ & & & & & & & b_1(\varepsilon)\end{bmatrix} g(\varepsilon)^{-1} \quad \cdots (\star)$$

を考えれば，

$$(\star) \to \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m & b_1 & b_2 & \cdots\cdots\cdots & b_n \\ & a_1 & a_2 & \cdots & a_m & b_1 & b_2 \cdots\cdots & b_{n-1} \\ & & a_1 & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & & & \ddots & b_2 \\ & & & & \ddots & & & b_1 \\ & & & & & \ddots & & a_m \\ & & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & a_2 \\ & & & & & & & a_1 \end{bmatrix} \quad (\varepsilon \to 0)$$

となる．これを「ジョルダン群の退化」と言う．このことを利用するとパンルヴェ方程式の退化を自然に導くことができる．(詳細は講演で述べる)．

参考文献

[1] 原岡 喜重：超幾何関数（すうがくの風景），朝倉書店, (2002).

[2] M. Jimbo and T. Miwa : Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients, I. Phys. D 2 (1981), 306–352.

[3] H. Kimura, Y. Haraoka, and K. Takano : The generalized confluent hypergeometric functions, Proc. Japan Acad., Ser. A, **68** (1992), 290 – 295.

[4] H. Kimura, Y. Haraoka, and K. Takano : On confluences of the general hypergeometric systems, Proc. Japan Acad., Ser. A **69** (1993), 100 – 104.

[5] L. J. Mason, and N. M. J. Woodhouse : Integrability Self-Duality, and Twistor Theory, Oxfort University Press Inc., New York, (1996).

[6] Murata, Y. Painleve systems reduced from Anti-Self-Dual Yang-Mills equations. to appear in Proceedings of the London Mathematical Sosiety

[7]「超幾何系ワークショップ in 神戸 '99」における村田嘉弘氏の講演ノート（川向のプライベートノート）

[8] K. Okamoto : Isomonodromic deformation and Pailevé equations, and the Garnier system, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math. **33** (1986), 575 – 618.