# Strichartz型およびMorawetz型評価式からみた半線型波動方程式の初期値問題の適切性について[1]

肥田野久二男（三重大学教育学部）

## 1　波動方程式 $\Box u = 0$ の解がみたす不等式

～局所平滑化の観点から～

波動方程式の初期値問題

$$\Box u = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

$$u(0) = f,\ \partial_t u(0) = g \tag{1.2}$$

については, Strichartz 型評価式

$$\begin{aligned} &\|u\|_{L^q((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)} \le C(\|f\|_{\dot{H}^s} + \|g\|_{\dot{H}^{s-1}}), \\ &n \ge 2,\ \frac{n+1}{q} = \frac{n}{2} - s,\ \frac{2(n+1)}{n-1} \le q < \infty\ \left(\Leftrightarrow \frac{1}{2} \le s < \frac{n}{2}\right) \end{aligned} \tag{1.3}$$

および Morawetz 評価式

$$\|\,|x|^{-3/2}u\,\|_{L^2((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)} \le C(\|f\|_{\dot{H}^1} + \|g\|_{L^2}) \quad (n \ge 4) \tag{1.4}$$

は, 初期値のなめらかさと比べたときに解のなめらかさが少し改良されることを教えてくれる基本的な評価式である. 不等式 (1.3) を Sobolev 型不等式

$$\|v\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C\|v\|_{\dot{H}^s}, \quad 2 \le q < \infty,\ \frac{n}{q} = \frac{n}{2} - s \tag{1.5}$$

と右辺に現れるノルム中の微分のオーダーの損失の点から比べる. (1.3) で許される $q$ をひとつ取ろう. (1.5) の $s = n\big((1/2) - (1/q)\big)$ と比べて (1.3) では $s = n\big((1/2) - (1/q)\big) - (1/q)$ にすぎないにもかかわらず, 解 $u$ が $\|u(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} < \infty$ (a.a. $t > 0$) をみたしていることがわかる. 視点をかえて今度は (1.3) で許される $s$ をひとつ取ろう. $q_0, q_1$ を

$$\frac{1}{q_0} = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{2} - s\right), \quad \frac{1}{q_1} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{2} - s\right)$$

で決めると $q_0 < q_1$ であり, 局所的には $L^{q_1}(\mathbb{R}^n)$ は $L^{q_0}(\mathbb{R}^n)$ よりもなめらかさがよい空間とみなせる. 空間高次元波動方程式の解はソボレフ型埋蔵定理から従うル

[1] 2004 年 12 月 24-25 日.「微分方程式の総合的研究」（東京大学）にて.

ベーグ空間よりも指数がすこし高いルベーグ空間にほとんどすべての時刻で属し,よって空間局所的ななめらかさは初期値とくらべて改良されることがわかる.

Morawetz 評価式 (1.4) も同様の情報を与えてくれることを見よう. まず波動方程式の空間変数の平行移動のもとでの不変性と (1.4) の右辺のノルムが平行移動のもとで不変であることから, (1.4) よりはもう少し一般的に

$$\| |x-x_0|^{-3/2}u \|_{L^2((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)} \le C(\|f\|_{\dot{H}^1}+\|g\|_{L^2}) \quad (n\ge 4) \tag{1.6}$$

がすべての $x_0\in\mathbb{R}^n$ で成立することに注意する. 今度の比較対象は Hardy の不等式

$$\| |\cdot - x_0|^{-1}v(\cdot) \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le C\|v\|_{\dot{H}^1} \quad (n\ge 3)$$

である. 波動方程式の解はほとんどすべての時刻で

$$\| |\cdot - x_0|^{-3/2}u(t,\cdot) \|_{L^2(B(x_0,1))} < \infty$$

$(B(x_0,1):=\{x:|x-x_0|<1\})$ をみたすことになり $\| |\cdot - x_0|^{-1}f(\cdot) \|_{L^2(B(x_0,1))}<\infty$ しかみたさない初期値と比べて空間局所的ななめらかさが改良されることがわかるのである.

## 2 Radial Strichartz estimates

ところで Strichartz 型評価式 (1.3) は, 球対称な初期値に対してはもう少し小さな $q$ についても成立する ([11], pp. 125–126). くわしくは

$$\begin{aligned} &\|u\|_{L^q((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)} \le C(\|f\|_{\dot{H}^s_{\mathrm{rad}}}+\|g\|_{\dot{H}^{s-1}_{\mathrm{rad}}}),\\ &n\ge 2,\ \frac{n+1}{q}=\frac{n}{2}-s,\ \frac{2n}{n-1}<q<\frac{2(n+1)}{n-1}\left(\Leftrightarrow \frac{1}{2n}<s<\frac{1}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.1}$$

が成り立つ. 一般の場合の (1.3) では $s\ge 1/2$ が仮定されるので, 球対称性のもとではもっと粗い初期値についても Strichartz 型評価式が成立すると言えよう.

実は評価式が時間大域的であることをあきらめると, さらに粗い球対称な初期値に対しても Strichartz 型評価式は成立する. 実際, 上の (2.1) で $q=\big(2n/(n-1)\big)+\varepsilon$ と取った評価式と簡単な評価式

$$\|u\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^n)} \le T^{1/2}(\|f\|_{\dot{H}^0}+\|g\|_{\dot{H}^{-1}}) \tag{2.2}$$

を補間して

$$\begin{aligned} &\|u\|_{L^q((0,T)\times\mathbb{R}^n)} \le CT^{\mu}(\|f\|_{\dot{H}^{(1/2)-(1/q)+\delta}_{\mathrm{rad}}}+\|g\|_{\dot{H}^{-(1/2)-(1/q)+\delta}_{\mathrm{rad}}}),\\ &n\ge 2,\ \delta>0\,(\text{任意に小}),\ \frac{n+1}{q}=\mu+\frac{n}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)-\delta,\ 2<q\le\frac{2n}{n-1} \end{aligned} \tag{2.3}$$

が従う．この式で許される $q$ を一つとる．上記 (2.3) と Sobolev 型不等式 (1.5) を右辺のノルム中に発生する微分のオーダーの損失の点から比較するとほぼ $1/n$ 倍であることに気付くが，球対称解はほとんどすべての時刻で $||u(t)||_{L^q(\mathbb{R}^n)} < \infty$ を満たすのである．$(1/2)-(1/q)$ は空間 1 次元の Sobolev 型不等式において現れる微分のオーダーの損失であるから，空間高次元の波動方程式の球対称解のなめらかさについては，ほぼ「1 次元的な状況 (1-d situation)」が起きていることが粗い初期値に対する Strichartz 型評価式の考察からわかる．

さて上記 (2.3) における $\delta>0$ であるが，実は空間 3 次元のときは $\delta=0$ ととれることが Sogge により示されていることに言及しておく．詳しくは

$$\begin{aligned} &||u||_{L^q((0,T)\times\mathbb{R}^3)} \le CT^{\mu}(||f||_{\dot{H}_{\mathrm{rad}}^{(1/2)-(1/q)}} + ||g||_{\dot{H}_{\mathrm{rad}}^{-(1/2)-(1/q)}}), \\ &n=3,\ \frac{3+1}{q} = \mu + \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right),\ 2<q<3 \end{aligned} \tag{2.4}$$

を波動方程式の球対称解はみたす ([11], p. 125)．なめらかさの損失に関してまさに「1 次元的な状況」が起きていることがわかった．

**註．** 球対称な初期値に対する Strichartz 型評価式の最新の進展に関しては [12], [13] を参照するとよい．

# 3　半線型方程式の初期値問題 その 1．球対称解

**～Morawetz 型評価式を通して 1-d situation から John の世界へ～**

次に半線型波動方程式の初期値問題

$$\Box u = \lambda |u|^{p-1}u,\quad 0<t<T,\ x\in\mathbb{R}^n, \tag{3.1}$$

$$(u(0), \partial_t u(0)) = (f, g) \tag{3.2}$$

の $H^s \times H^{s-1}$ における適切性（解の一意存在性，初期値のなめらかさの存続性および解の初期値への連続的な依存性）を $s$ が小さい場合に考察しよう．まず空間 1 次元の場合を調べて，次に空間 3 次元の球対称解の時間局所的適切性に関して空間 1 次元的な状況（この詳細な意味はのちほど）が起きていることを報告する．

まず空間 1 次元のときに次が成り立つ．

**定理 3.1.** $n=1$, $p>1$, $(f,g)\in H^{s_*}\times H^{s_*-1}$ $(s_* = \max\{0, (1/2)-(1/p)\})$ とする．初期値問題 (3.1)–(3.2) は $H^{s_*}\times H^{s_*-1}$ で時間局所適切である．

波動方程式の場合，空間 1 次元では Strichartz 型評価式は存在しないことに注意する．この証明では問題を積分方程式に変換し，非線型項の評価には Sobolev 不

等式 $||v||_{L^\infty(\mathbb{R})} \le C||v||_{H^s}$ $(s > 1/2)$ の共役版等を使い $C([0,T]; H^{s_*})$ の枠組みで縮小写像の議論を実行する.

なお $s < s_*$ とすると, 初期値問題 (3.1)–(3.2) は $H^s(\mathbb{R}) \times H^{s-1}(\mathbb{R})$ で適切にはならないことが非線型項の係数 $\lambda$ の符号に関わらずにわかっており ([1]), $s_*$ は最良であることに触れておく.

次に空間高次元 $n \ge 2$ を考えよう. 非線型項の評価に Sobolev 型不等式 $||v||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C||v||_{H^\sigma}$ $(\sigma > n/2)$ を用いると, $C([0,T]; H^s)$ $(s > n/2)$ の枠組みで縮小写像の議論を容易に実行できて初期値問題 (3.1)–(3.2) の $H^s \times H^{s-1}$ $(s > n/2)$ での時間局所適切性が従う. しかしこの議論には 1, 2 章で線型方程式に対してみたような「空間高次元波動方程式の解について, 時間に関して積分するノルムを使うと空間変数に関して局所的になめらかさが改良される」とか「球対称な初期値については, 大変になめらかさが低い初期値についても局所平滑化評価がなりたつ」という大事な事実が全く反映されていない. 第 2 章の最後に述べた Sogge の議論を見直すことにより, 空間 3 次元の線型方程式 (1.1)–(1.2) の球対称解については時空 $L^q$-Morawetz 型評価式

$$\tag{3.3} \begin{gathered} || \, |x|^{-\sigma} u \, ||_{L^q((0,T)\times\mathbb{R}^3)} \le CT^\mu(||f||_{\dot{H}^{(1/2)-(1/q)}_{\rm rad}} + ||g||_{\dot{H}^{-(1/2)-(1/q)}_{\rm rad}}), \\ n = 3,\ \sigma \ge 0,\ \frac{3+1}{q} - \sigma = \mu + \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right),\ 2 \le q < \frac{3}{\sigma+1} \end{gathered}$$

を示すことが出来る. これを使って次を得る.

**定理 3.2.** $n = 3$, $2 \le p < 1 + \sqrt{2}$, $(f, g) \in \dot{H}^s_{\rm rad} \times \dot{H}^{s-1}_{\rm rad}$, $s = (1/2) - (1/p)$ とする. このとき初期値問題 (3.1)–(3.2) は $\dot{H}^s_{\rm rad} \times \dot{H}^{s-1}_{\rm rad}$ で時間局所適切である.

**註.** ここで $s < (1/2) - (1/p)$ とすると, 非線型項の係数 $\lambda$ の符号が正の場合は初期値問題が適切にはならないことが Sogge により示されており ([11], p. 122), 定理中のなめらかさの仮定は最良であることもわかっている.

**註.** Sogge 自身も定理 3.2 を示している. 彼の方針は評価式 (2.4) と簡単な不等式

$$\tag{3.4} ||u||_{L^\infty((0,\infty); L^2(\mathbb{R}^3))} \le C(||f||_{L^2} + ||g||_{\dot{H}^{-1}})$$

とを補間して $L^q_t L^r_x$-Strichartz 型評価式を考案し, また非斉次波動方程式の解の評価式も別に示して縮小写像の議論を実行している. ただし彼の方法では, なめらかさの存続性

$$(u, \partial_t u) \in C([0,T]; \dot{H}^{(1/2)-(1/p)}_{\rm rad} \times \dot{H}^{-(1/2)-(1/p)}_{\rm rad})$$

を示すことは難しそうである.

球対称解に対する精密な評価式を駆使することにより, 空間高次元 $n = 3$ であるにもかかわらず非線型問題の Sobolev 空間における時間局所適切性を保障する

$s$の値がちょうど空間1次元の際に現れた数と一致する現象が起きてしまうことがわかった. $n=3$で$p<1+\sqrt{2}$のときはまさに "1-d situation" にあることになる.

さて$n=3,\ p>1+\sqrt{2}$のときはどうであろうか. この$1+\sqrt{2}$という数はF. John [4] の$C_0^3(\mathbb{R}^3)\times C_0^2(\mathbb{R}^3)$のデータに対する小さな時間大域解の存在と非存在に関する定理中の臨界指数として大変に有名である.

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\leq\frac{3}{2}-\frac{2}{p-1}\Leftrightarrow p\geq 1+\sqrt{2}$$

(等号は$p=1+\sqrt{2}$でのみ成立) に注意して次を得る.

**定理 3.3.** $n=3,\ 1+\sqrt{2}<p<3,\ (f,g)\in\dot{H}^s_{\mathrm{rad}}\times\dot{H}^{s-1}_{\mathrm{rad}}\ \left(s=(3/2)-(2/(p-1))\right)$とする. このとき初期値問題 (3.1)–(3.2) は$\dot{H}^s_{\mathrm{rad}}\times\dot{H}^{s-1}_{\mathrm{rad}}$で時間局所適切である. とくに初期値のノルムが小さいときは, 解は時間大域的に存在する.

Sobolev 空間$\dot{H}^s_{\mathrm{rad}}\times\dot{H}^{s-1}_{\mathrm{rad}}\ \left(s=(3/2)-(2/(p-1))\right)$は, 方程式 (3.1) に付随するスケール変換のもとでノルムが不変となる空間である. 初期値のそのようなノルムが小さいときに時間大域解の存在が示されるという「藤田・加藤原理」([10]) に則り, John の古典的定理の弱解版が球対称な場合に与えられた.

定理 3.3 の証明には次の時間大域的な時空$L^q$-Morawetz 型評価式

(3.5)

$$\||x|^{-\sigma}u\|_{L^q((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)}\leq C(\|f\|_{\dot{H}^s_{\mathrm{rad}}}+\|g\|_{\dot{H}^{s-1}_{\mathrm{rad}}}),$$

$$n\geq 2,\ \sigma\geq 0,\ \frac{n+1}{q}-\sigma=\frac{n}{2}-s,\ q\geq 2,\ \frac{n}{\sigma+\frac{n-1}{2}}<q<\frac{n}{\sigma}\ (<\infty\ \text{ if }\sigma=0)$$

が用いられる. 不等式 (2.1) の証明を見直すことによりこの不等式を得た.

**註.** Sogge 自身も定理 3.3 を示している. 彼の方針は評価式 (2.1) と簡単な不等式 (3.4) を補間して$L^q_tL^r_x$-Strichartz 型評価式を得て, また非斉次方程式の評価式も示して縮小写像の議論を行う. ただ彼の方法に従うとなめらかさの存続性を示すことは難しいと思われる. ここでの方法を用いると空間3次元の他に2と4次元の場合に対応する結果を得られる.

# 4 半線型方程式の初期値問題 その2. 一般の場合

空間3次元で, 初期値に球対称性を仮定しない一般の場合は次が知られている ([7], [9]).

**定理 4.1.** $n=3$とする.

(1) $1<p<2$とする. 初期値問題 (3.1)–(3.2) は$L^2\times\dot{H}^{-1}$で時間局所適切である.

(2) $p=2$とする. 初期値問題 (3.1)–(3.2) は$\dot{H}^{\varepsilon}\times\dot{H}^{-1+\varepsilon}\ (\varepsilon>0)$で時間局所適切である.

(3) $2 < p \leq 3$ とする．初期値問題 (3.1)–(3.2) は $\dot{H}^{1-(1/(p-1))} \times \dot{H}^{-1/(p-1)}$ で時間局所適切である．
(4) $p \geq 3$ とする．初期値問題 (3.1)–(3.2) は $\dot{H}^{(3/2)-(2/(p-1))} \times \dot{H}^{(1/2)-(2/(p-1))}$ で時間局所適切である．とくに初期値のノルムが小さいときは, 解は時間大域的に存在する．

この結果は, 初期値のなめらかさに関して最良であることがわかっている ([1], [6], [7])．定理の証明には Strichartz 型評価式 (1.3) やそれを拡張した $L_t^q L_x^r$-Strichartz 型評価式 ([2], [5],...) が用いられた．

## 5 空間次元 $n \geq 4$ について

空間次元 $n \geq 4$ における初期値問題 (3.1)–(3.2) の時間局所適切性に関する結果は, [7], [9], [5] を纏めると次の通りになる．$p_*(n) = (n+1)^2/\big((n-1)^2+4\big)$ とおく．
**定理 4.1.** $n \geq 4$ とする．
(1) $1 < p \leq 1 + (3/n)$ とする．初期値問題 (3.1)–(3.2) は $L^2 \times \dot{H}^{-1}$ で時間局所適切である．
(2) $1 + (3/n) \leq p \leq p_*(n)$ とする．初期値問題 (3.1)–(3.2) は $\dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1}$ ($s = (np-n-3)/(4p-2)$) で時間局所適切である．
(3) $p_*(n) \leq p \leq 1 + (4/(n-1))$ とする．初期値問題 (3.1)–(3.2) は $\dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1}$ ($s = ((n+1)/4) - (1/(p-1))$) で時間局所適切である．
(4) $p \geq 1 + (4/(n-1))$ とする．初期値問題 (3.1)–(3.2) は $\dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1}$ ($s = (n/2) - (2/(p-1))$) で時間局所適切である．とくに初期値のノルムが小さいときは, 解は時間大域的に存在する．

**註.** 関数 $u \mapsto |u|^{p-1}u$ の $u = 0$ でのなめらかさの欠如に原因した技術的と思われる条件を, 定理 4.1 では煩雑さを避けるために述べなかった．細部は上述の文献で確認してほしい．

定理 4.1 の (1) は最良かどうかわかっていない．(2) は Tao [15] により少し改善されているが, [1] の "small dispersion analysis" や Lindblad-Sogge の一連の手法をもってしても最良の結果になっているか不明のままである．なお (1) の証明に Lindblad と Sogge が $L_t^2 L_x^r$-Strichartz 型評価式を導入したことを付記しておく [7]．時間に関して $L^2$ の Strichartz 型評価式はちょうど「ぎりぎり」の場合に相当しており, 彼らの発見以前の論文では除外されていた．Lindblad-Sogge が到達できなかった「ぎりぎりのぎりぎり」の場合も含めて, 方程式 (1.1) の Strichartz 型評価式を完成させた論文が Keel-Tao [5] である．

Lindblad-Sogge は, $p \leq 1 + (3/n)$ という条件が $L^2 \times \dot{H}^{-1}$ における適切性の問題で最良かどうか問題提起している ([7], p.369)．微分の損失の余地がないので,

$L^2$ のデータに対して (1.1) の解 $u$ 自身を評価する Strichartz 型評価式は波動方程式の場合は存在しない（球対称解に対しても存在しない．Lindblad-Sogge は非斉次方程式の解の評価を工夫した）．講演者によるこの方向のささやかな結果を述べておく ([3]).

**定理 4.2.** $n \geq 4$ とし，$2/n < p - 1 < 3/(n-1)$ とする．初期値問題 (3.1)–(3.2) は $L^2_{\mathrm{rad}} \times \dot{H}^{-1}_{\mathrm{rad}}$ で時間局所適切である．

証明では (1.1)–(1.2) に対する時間局所的時空 $L^2$ 評価式

$$|| \, |x|^{-(1/2)+\mu} u \, ||_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^n)} \leq C_\mu T^\mu (||f||_{L^2} + ||g||_{\dot{H}^{-1}}) \quad \left(0 < \mu < \frac{1}{2}\right)$$

が用いられる．この不等式自体は $n \geq 1$ で一般の $f$, $g$ について成り立つ．

# 参考文献


[1] Christ, M., Colliander, J., and Tao, T., *Ill-posedness for nonlinear Schrödinger and wave equations*, arXiv:math.AP/0311048.

[2] Ginibre, J. and Velo, G., *Generalized Strichartz inequalities for the wave equation*, J. Funct. Anal. **133** (1995), 50–68.

[3] Hidano, K., *Space-time $L^2$ approach to wellposedness in $L^2 \times \dot{H}^{-1}$ for semilinear wave equations*,

available at http://math1.edu.mie-u.ac.jp/~hidano/list.htm

[4] John, F., *Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions*, Manuscripta Math. **28** (1979), 235–268.

[5] Keel, M. and Tao, T., *Endpoint Strichartz estimates*, Amer. J. Math. **120** (1998), 955–980.

[6] Lindblad, H., *A sharp counterexample to local existence of low regularity solutions to nonlinear wave equations*, Duke Math. J., **72** (1993), 503–539.

[7] Lindblad, H. and Sogge, C. D., *On existence and scattering with minimal regularity for semilinear wave equations*, J. Funct. Anal., **130** (1995) 357–426.

[8] Morawetz, C. S., *Time decay for the Klein-Gordon equation*, Proc. Roy. Soc. A **306** (1968), 291–296.

[9] Nakamura, M. and Ozawa, T., *The Cauchy problem for nonlinear wave equations in the homogeneous Sobolev space*, Ann. Inst. H. Poincaré, Physique théorique, **71** (1999) 199–215.

[10] 小澤徹, 非線型シュレディンガー方程式の散乱理論–故岩崎敷久教授に献ぐ–, 1998 年度日本数学会年会総合講演・企画特別講演アブストラクト, pp. 1–17

[11] Sogge, C. D., Lectures on Nonlinear Wave Equations, Monographs in Analysis II, International Press, 1995.

[12] Sterbenz, J., *Angular regularity and Strichartz estimates for the wave equation*, arXiv:math.AP/0402192.

[13] Sterbenz, J. and Rodnianski, I., *Angular regularity and Strichartz estimates for the wave equation*, to appear in Int. Math. Res. Not.

[14] Strichartz, R. S., *Restriction of Fourier transform to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations*, Duke Math. J. **44** (1977), 705-713.

[15] Tao, T., *Low regularity semi-linear wave equations*, Comm. Partial Diff. Equations **24** (1999), 599-630.