On the standing wave solutions for some nonlinear Schrödinger equations

福泉麗佳（北大・理）

1. 序

本講演では, ポテンシャル項を伴った非線形シュレディンガー方程式

$$i\partial_t u = -\Delta u + V(x)u - |u|^{p-1}u, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^{1+n} \tag{NLS}$$

の定在波 (standing wave) 解 $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ のリヤプノフの意味での安定性について考え，２０００年１２月２６日に同会場で行われた研究集会「微分方程式の総合的研究」での太田雅人氏（埼玉大・理）の研究成果報告 ([21], [7]) 以降に，どのような進展があったかを紹介し, 主に [9] の結果の解説をする.

(NLS) において $u = u(t,x)$ は複素数値の未知関数, $n \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$ で, $n \geq 3$ のときは, さらにソボレフ空間 $H^1(\mathbb{R}^n)$ における劣臨界条件 $p < 1 + 4/(n-2)$ を仮定する. ポテンシャル $V(x)$ は与えられた実数値関数で, 典型例として

$$V(x) = c_0|x|^{-a} + \sum_{j=1}^{n} c_j^2 x_j^2, \quad c_j \in \mathbb{R}, \;\; 0 < a < \min\{2, n\}$$

を含むなるべく一般的な関数を考えているが，この講演では簡単に $V(x) = |x|^2$ に限って話を進める. より一般的な $V(x)$ に関しては, [7, 8, 9, 10] を参照していただきたい.

定在波 $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ において, $\omega \in \mathbb{R}$ は実のパラメータであり, $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ が (NLS) の解になるためには, $\phi_\omega(x)$ は定常問題

$$-\Delta\phi + \omega\phi + V(x)\phi - |\phi|^{p-1}\phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{SP}$$

の解でなければならないが, 以下では, $\phi_\omega(x)$ は, ω を１つ固定したとき, (SP) の非自明解のうち, 作用 S_ω を最小にする解 (基底状態解) であるとする. 基底状態解に対応する定在波解を基底定在波解と呼ぶことにする. $V(x) \equiv 0$ の場合, (NLS) は非線形光学やプラズマ物理などのモデル方程式として現れ, 基底定在波解のリヤプノフ安定性については２０年程前に調べられて完全に分かっている ([1, 4, 26] 参照). その後, これらの結果は, 非線形クライン・ゴルドン方程式などを含む抽象的なハミルトン系に対する孤立波解の安定性に関する一般論として, Grillakis, Shatah and Strauss [11, 12] にまとめられている. $V(x) \equiv 0$ でない場合も, 例えば, 磁気トラップされたボーズ・アインシュタイン凝縮のモデル方程式として, 調和ポテンシャル $V(x) = \sum_{j=1}^{3} c_j^2 x_j^2$ を伴った $n = p = 3$ の場合の (NLS) が現われる (例えば [25] 参照) など応用上重要である. 基底定在波解のリヤプノフ安定性はこれまで [6, 7, 8, 16, 19, 22, 27, 28] などで考察されている. $V(x) \equiv 0$ でない場合, Grillakis, Shatah and Strauss [11, 12] による一般論における安定性及び不安定性に関

する十分条件を直接, 具体的に確かめるのが困難である場合が多く, 様々な工夫が必要になることに注意する. この講演では, 論文 [7] を基本とした, そのような工夫の一端を紹介し, さらにその手法の応用例を述べる.

2. 問題の設定

これ以降, $V(x)=|x|^2$ の場合について記述する. (NLS) の解 $u(t)$ に対してエネルギー $E(u(t))$ と L^2 ノルム $\|u(t)\|_{L^2}^2$ は少なくとも形式的には保存量になる. ここで,

$$E(v) := \frac{1}{2}\|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|xv\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

である. そこで, エネルギー空間として

$$\Sigma := \{v \in H^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}):\ \|xv\|_{L^2}<\infty\}, \quad \|v\|_{\Sigma}^2 = (v,v)_{\Sigma},$$
$$(v,w)_{\Sigma} := \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^n}\left\{\nabla v(x)\cdot\overline{\nabla w(x)} + v(x)\overline{w(x)} + |x|^2 v(x)\overline{w(x)}\right\}dx$$

と定義して, 実ヒルベルト空間 Σ 上で (NLS) を考える. ソボレフ空間 $H^1(\mathbb{R}^n)$ における劣臨界条件 $p<1+4/(n-2)$ よりエネルギー汎関数 E は Σ 上定義される. さらに, (NLS) に対する初期値問題は Σ において時間局所的に適切であり, 解が存在する限り, エネルギーと粒子数の保存則, さらにはビリアル等式 (VI) が成り立つことが知られている ([3] の 9.2 節, [20] などを参照).

命題 1 ([3, 20]) For any $u_0 \in \Sigma$, there exist $T=T(\|u_0\|_{\Sigma})>0$ and a unique solution $u(t)\in C([0,T),\Sigma)$ of (NLS) with $u(0)=u_0$ satisfying

$$E(u(t))=E(u_0), \quad \|u(t)\|_{L^2}^2 = \|u_0\|_{L^2}^2, \quad t\in[0,T).$$

In addition, if $u_0\in\Sigma$ satisfies $|x|u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, then the virial identity

$$\frac{d^2}{dt^2}\|xu(t)\|_{L^2}^2 = 16(E(u(t)) - \|xu(t)\|_{L^2}^2) \tag{VI}$$

holds for $t\in[0,T)$.

次に, (SP) の基底状態解を定義するために, 作用と呼ばれるエネルギー空間 Σ 上の汎関数 S_ω を

$$S_\omega(v) := E(v) + \frac{\omega}{2}\|v\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2}\|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{\omega}{2}\|v\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|xv\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

と定義する. 定常問題 (SP) は作用 S_ω のオイラー・ラグランジュ方程式 $S'_\omega(\phi)=0$ と同値であることに注意する.

定義 (SP) の非自明解全体の集合

$$\{v\in\Sigma:\ S'_\omega(v)=0,\ v\neq 0\}$$

を $\mathcal{X}_\omega$ と表すことにする.

$$\{\phi \in \mathcal{X}_\omega : \ S_\omega(\phi) \le S_\omega(v) \ \text{ for all } \ v \in \mathcal{X}_\omega\}$$

の元を (SP) の基底状態解と呼ぶ.

線形作用素 $-\Delta + |x|^2$ の最小固有値を λ_1 とする，すなわち

$$\lambda_1 = \inf\{\|\nabla v\|_{L^2}^2 + \|xv\|_{L^2}^2 : \ v \in \Sigma, \ \|v\|_{L^2} = 1\}.$$

このとき，任意の $\omega > -\lambda_1$ に対して (SP) の Σ に属する正値球対称解 $\phi_\omega(x)$ が一意的に存在し (SP) の基底状態解になっている (球対称性に関しては [18], 一意性に関しては [13, 14, 15] を参照). よって, 任意の $\omega > -\lambda_1$ に対して, (SP) の基底状態解全体の集合 $\mathcal{G}_\omega$ は $\mathcal{G}_\omega = \{e^{i\theta}\phi_\omega : \ \theta \in \mathbb{R}\}$ で与えられる.

この講演で考える安定性とは，以下の意味での安定性である.

定義 Let Ω be a subset of Σ. We say that Ω is stable for (NLS) if for any $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that if $u_0 \in \Sigma$ satisfies $\inf\{\|u_0 - w\|_\Sigma : \ w \in \Omega\} < \delta$, then the solution $u(t)$ of (NLS) with $u(0) = u_0$ exists for all $t \ge 0$ and satisfies

$$\sup_{t \ge 0} \inf\{\|u(t) - w\|_\Sigma : \ w \in \Omega\} < \varepsilon.$$

Otherwise, Ω is said to be unstable.

3. $V(x) \equiv 0$ の場合の結果

この節では, $V(x) \equiv 0$ の場合に対する既知の結果について簡単に振り返る. すなわち,

$$i\partial_t u = -\Delta u - |u|^{p-1}u, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^{1+n} \tag{NLS0}$$

及び対応する定常問題

$$-\Delta\phi + \omega\phi - |\phi|^{p-1}\phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{SP0}$$

について考える. ここで, $n \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$ で, $n \ge 3$ のときはさらに $p < 1 + 4/(n-2)$ を仮定する. このとき, 任意の $\omega > 0$ に対して (SP0) のソボレフ空間 $H^1(\mathbb{R}^n)$ に属する正値球対称解 $\psi_\omega(x)$ が一意的に存在する (一意性に関しては [17] を参照). よって, 任意の $\omega > 0$ に対して, (SP0) の基底状態解全体の集合 $\mathcal{G}_\omega^0$ は

$$\mathcal{G}_\omega^0 = \{e^{i\theta}\psi_\omega(\cdot + y) : \ \theta \in \mathbb{R}, \ y \in \mathbb{R}^n\}$$

で与えられる. さらに, $\mathcal{G}_\omega^0$ は $p < 1 + 4/n$ のとき任意の $\omega > 0$ に対して (NLS0) に対して安定 ([4] を参照) であり, $p \ge 1 + 4/n$ のとき任意の $\omega > 0$ に対して不安定である ($p > 1 + 4/n$ の場合は [1], $p = 1 + 4/n$ の場合は [26] を参照). これから, $p = 1 + 4/n$ は (NLS0) の基底定在波解の安

定性・不安定性に関する臨界冪であることが分かる．特に，$p=1+4/n$ のときは，E_0 を (NLS0) に対するエネルギー，すなわち，$v\in H^1(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$E_0(v):=\frac{1}{2}\|\nabla v\|_{L^2}^2-\frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

とすると，$\psi_\omega(x)$ は $E_0(\psi_\omega)=0$ を満たすため，ビリアル等式

$$\frac{d^2}{dt^2}\|xu(t)\|_{L^2}^2=16E_0(u(t))$$

を用いれば，爆発の意味での強い不安定性が従う．

また，Grillakis, Shatah and Strauss [11, 12] による一般論 (Shatah [23] も参照) では，安定性及び不安定性に関する十分条件は $\omega>0$ の関数 $d_0(\omega)=S_\omega^0(\psi_\omega)$ を用いて与えられる．すなわち，$d_0''(\omega_1)>0$ であれば $\mathcal{G}_{\omega_1}^0$ は安定であり，逆に，$d_0''(\omega_1)<0$ であれば $\mathcal{G}_{\omega_1}^0$ は不安定である．ここで，

$$S_\omega^0(v):=\frac{1}{2}\|\nabla v\|_{L^2}^2+\frac{\omega}{2}\|v\|_{L^2}^2-\frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

であり，(NLS0) に対する $H^1(\mathbb{R}^n)$ 上の作用汎関数である．(NLS0) はスケール変換 $\lambda^{2/(p-1)}u(\lambda x,\lambda^2 t)$, $\lambda>0$, に関して不変であるから，$\psi_\omega(x)=\omega^{1/(p-1)}\psi_1(\sqrt{\omega}x)$ が成り立ち，$d_0(\omega)=\omega^{2/(p-1)-n/2+1}d_0(1)$ が成り立つ．これから，$\omega>0$ に依らず，$p=1+4/n$ が臨界冪になることが分かる．

4. $V(x)=|x|^2$ の場合の結果

$V(x)=|x|^2$ の場合にも，Grillakis, Shatah and Strauss による安定性及び不安定性に関する十分条件は $\omega>-\lambda_1$ の関数 $d(\omega)=S_\omega(\phi_\omega)$ で与えられる．しかし，上のようなスケール不変性は存在しないので，実際にどのように $d''(\omega)$ を計算すればよいか，という問題が生じる．

ここで，$\phi_\omega\in\mathcal{G}_\omega$, $d(\omega)=S_\omega(\phi_\omega)=E(\phi_\omega)+(\omega/2)\|\phi_\omega\|_{L^2}^2$ に対して

$$d'(\omega)=\langle S_\omega'(\phi_\omega),\partial_\omega\phi_\omega\rangle+\frac{1}{2}\|\phi_\omega\|_{L^2}^2=\frac{1}{2}\|\phi_\omega\|_{L^2}^2$$

だから，$\|\phi_\omega\|_{L^2}^2$ の増減を調べればよいことに注意する．

Rose and Weinstein [22] は $n=1$ で線形作用素 $-\Delta+V(x)$ が固有値をもつようなある特定の $V(x)$ に対して $\|\phi_\omega\|_{L^2}^2$ を数値計算した．線形作用素 $-\Delta+V(x)$ が固有値をもつとき，その最小固有値を λ_1 とすると，彼らの数値計算結果から次が予想される．

(予想１)　$p<1+4/n$ のとき，すべての $\omega>-\lambda_1$ に対して，(NLS) の基底定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ は安定であろう．

(予想２)　$p=1+4/n$ のとき，すべての $\omega>-\lambda_1$ に対して $\|\phi_\omega\|_{L^2}^2$ は増加し，$\omega\to\infty$ のとき，ある一定の値 $\|\psi_1\|_{L^2}^2$ に漸近していく．(すべての $\omega>-\lambda_1$ に対して，(NLS) の基底定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ は安定であろう.)

(予想３)　$p>1+4/n$ のとき，ある臨界値 $\omega_c>-\lambda_1$ があって，$-\lambda_1<\omega<\omega_c$ に対して (NLS) の基底定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ は安定であり，$\omega_c<\omega$ に対して不安定であろう．

予想１に関して, Rose and Weinstein [22] は, 標準的な分岐理論を用いて予想１が成り立つと主張しているが, $\omega\to-\lambda_1+0$ のとき $\|\phi_\omega\|_{L^2}^2$ が振動しながら 0 に収束する可能性を排除しきれていないように思われる．言い換えると，振動しながら収束する可能性を分岐理論で否定しようとすると，非線形項にある程度の滑らかさ (例えば，$p\geq 3$) が必要と思われる ([6, 16] を参照).

予稿集 ([21]) では，予想３の一部に関して以下の結果報告 (定理１) がなされた.

定理１　([7])　Let $p>1+4/n$ and $\phi_\omega(x)\in\mathcal{G}_\omega$. Then there exists $\omega_0>0$ such that the standing wave solution $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ of (NLS) is unstable for any $\omega\in(\omega_0,\infty)$.

定理１の証明では振動数 ω に関する $\phi_\omega(x)$ の漸近解析が重要な役割を果たす．詳しくは５節で説明するが，その解析を応用することで，上記の他の予想に対しても以下の結果が得られる.

定理２　([8])　Let $p<1+4/n$ and $\phi_\omega(x)\in\mathcal{G}_\omega$. Then there exists $\omega_1>0$ such that the standing wave solution $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ of (NLS) is stable for any $\omega\in(\omega_1,\infty)$.

定理３　([8])　Let $\phi_\omega(x)\in\mathcal{G}_\omega$. Then there exists $\omega_2>-\lambda_1$ such that the standing wave solution $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ of (NLS) is stable for any $\omega\in(-\lambda_1,\omega_2)$.

予想１が成立するという Rose and Weinstein [22] による主張での，$\|\phi_\omega\|_{L^2}^2$ が振動しながら 0 に収束する可能性を, この定理３によって排除することができた.

予想２に関して，実際は Rose and Weinstein の数値計算からは，安定となるか不安定となるか明確な予想は立てられない (と思う)．なぜなら，$V(x)\equiv 0$ で $p=1+4/n$ の場合, $\|\psi_\omega\|_{L^2}^2$ のグラフはすべての $\omega>0$ に対して一定値 $\|\psi_1\|_{L^2}^2$ であり，基底定在波解は爆発の意味で不安定だからである．そこで，$V(x)=|x|^2$ のときにこの場合と同様，爆発の意味での不安定性が示せるかどうか，もしくは，それとは異なって安定性をいうことができるか等，幾つかの試みがなされているが，定理３での ω が 十分 $-\lambda_1$ に近いところの安定性以外は解決されていない ([28, 29] 参照). 参考までに，$E(\phi_\omega)>0$ であることを注意しておく.

そこで Fibich and Wang [5] のアイデアをもとに，定理１，定理２，定理３で用いた ω に関する漸近解析を使って，ϕ_ω における線形化作用素の逆作用素が ω が十分大きいときに L^2 有界となることを示し，有界性を $d''(\omega)$ の計算に用いると，安定性 (定理４) が得られる．$d'(\omega)=(1/2)\|\phi_\omega\|_{L^2}^2$ であることを述べたが，形式的にこの $d'(\omega)$ の ω に関する微分を見れば，$\partial_\omega\phi_\omega$ という関数が出てくる．定常問題 (SP) を ω で微分したものを考察すると，この関数は

$$(-\Delta+|x|^2+\omega-p\phi_\omega^{p-1})\partial_\omega\phi_\omega=-\phi_\omega$$

を満たし，線形化作用素と関連することが分かる.

定理 4 ([9]) Let $p=1+4/n$ and $\phi_\omega(x)\in\mathcal{G}_\omega$. Then there exists $\omega_3>0$ such that the standing wave solution $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ of (NLS) is stable for any $\omega\in(\omega_3,\infty)$.

5. 証明中で鍵となる着想

前節で述べた ω に関する漸近解析について説明を付ける．$\phi_\omega(x)\in\mathcal{G}_\omega$ を

$$\phi_\omega(x)=\omega^{1/(p-1)}\tilde{\phi_\omega}(\sqrt{\omega}x),\quad \omega>0$$

とスケール変換する．このとき，スケール変換された関数 $\tilde{\phi_\omega}(x)$ は以下の方程式を満たす．

$$-\Delta\tilde{\phi_\omega}+\tilde{\phi_\omega}+\omega^{-2}|x|^2\tilde{\phi_\omega}-|\tilde{\phi_\omega}|^{p-1}\tilde{\phi_\omega}=0,\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

したがって形式的には，$\omega\to\infty$ のときポテンシャル項の影響が消えるように見える．この考察から，$\omega\to\infty$ のとき $\tilde{\phi_\omega}$ は $\omega=1$ の場合の (SP0) の基底状態解 $\psi_1(x)$ に何らかの意味で収束するのではないかと予想できる．(NLS0) の基底定在波解 $e^{it}\psi_1(x)$ は $p=1+4/n$ を境にして，安定・不安定が変わるので，ω が十分大きいときには，(NLS) の基底定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ は $e^{it}\psi_1(x)$ の性質にほぼ支配されて，$\omega\to\infty$ の極限において同様に $p<1+4/n$ では安定であり，$p\geq 1+4/n$ では不安定になるのではないかと考えられる．(但し，実際には $p=1+4/n$ の場合は全く異なることに注意して欲しい.) $\tilde{\phi_\omega}(x)$ から $\psi_1(x)$ への収束は，以下の補題により証明される．

補題 1 ([7]) $\lim_{\omega\to\infty}\|\tilde{\phi_\omega}-\psi_1\|_{H^1}=0.$

補題 1 は, $\tilde{\phi_\omega}(x)$ が制約条件付きの最小化問題

$$\inf\{\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}:\ v\in\Sigma\setminus\{0\},\ \tilde{I_\omega}(v)\leq 0\}$$

の最小化元であること, 及び $\psi_1(x)$ が

$$\inf\{\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}:\ v\in H^1(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\},\ I_1^0(v)\leq 0\}.$$

の最小化元であることを用いて, $\tilde{\phi_\omega}(x)$ と $\psi_1(x)$ のノルムをお互いに比較することで証明される．ここで,

$$I_1^0(v):=\|\nabla v\|_{L^2}^2+\|v\|_{L^2}^2-\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1},$$
$$\tilde{I_\omega}(v):=\|\nabla v\|_{L^2}^2+\|v\|_{L^2}^2+\omega^{-2}\|xv\|_{L^2}^2-\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}.$$

一方で, $-\lambda_1$ に近い ω での (NLS) の基底定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ に関しては, $\hat{\phi}_\omega(x)=\phi_\omega/\|\phi_\omega\|_2$ を考える．$\omega\to-\lambda_1$ のとき $\hat{\phi}_\omega(x)$ は最小固有値 λ_1 に対応する固有関数 $\Phi(x)$ に収束する．

補題 2 ([8]) $\lim_{\omega\to-\lambda_1}\|\hat{\phi}_\omega-\Phi\|_\Sigma=0.$

6. 定理4の証明の概略

$p_0 = 1 + 4/n$ とする．$\phi_\omega \in \mathcal{G}_\omega$ の変分法的特徴づけを用いて，

$$d(\omega) = S_\omega(\phi_\omega) = \frac{p_0 - 1}{2(p_0 + 1)} \|\phi_\omega\|_{p_0+1}^{p_0+1} = \frac{p_0 - 1}{2(p_0+1)} \omega \|\tilde{\phi_\omega}\|_{p_0+1}^{p_0+1}, \quad \omega > 0$$

と変形し，ω が十分大きいところで $d''(\omega) > 0$ となることを示していく．4節でも少し触れたが，以下の $\tilde{\phi_\omega}(x)$ の性質を使う．

命題 2 Let $1 < p$ and $p < 1 + 4/(n-2)$ if $n \geq 3$. Define the linearized operator $\tilde{L_\omega}$ on $\{v \in H^2_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^n) : |x|^2 v \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$ by

$$\tilde{L_\omega} := -\Delta + 1 + \omega^{-2}|x|^2 - p\tilde{\phi_\omega}^{p-1}(x), \qquad \omega > 0.$$

Then we have

(i) ([2]) $\tilde{\phi_\omega}(r) \to 0$ as $r \to \infty$. (independent of ω)

(ii) ([2]) There exist $C_0(n) > 0$, $r_0(n,p) > 0$ and $\omega_4(n,p) > 0$ such that

$$|\tilde{\phi_\omega}(r)| \leq C_0 r^{-(n-1)/2} e^{-r/2}$$

for any $r \geq r_0$ and $\omega \geq \omega_4$.

(iii) $\tilde{L_\omega}$ is invertible and $\tilde{L_\omega}^{-1}$ is bounded for sufficiently large ω, i.e., there exist $\omega_5 > 0$ and $C_2 > 0$ such that for any $\omega \geq \omega_5$

$$\|\tilde{L_\omega} v\|_2 \geq C_2 \|v\|_2$$

for any $v \in H^2_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^n)$ and $|x|^2 v \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

(iv) ([24]) $\omega \mapsto \tilde{\phi_\omega}$ is a C^1 mapping from $(0, \infty)$ to Σ for sufficiently large ω.

$L_0 := -\Delta + 1 - p\psi_1^{p-1}$ とする．任意の $v \in H^2_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^n)$ に対して，$\|L_0 v\|_2 \geq C_1 \|v\|_2$ であるような定数 $C_1 > 0$ が存在することが知られている．命題2 (iii) での定数 C_2 が ω に依存しないように，線形化作用素 $\tilde{L_\omega}$ を L_0 の摂動とみなして (iii) を示す．

補題 3 Let $1 < p$ and $p < 1 + 4/(n-2)$ if $n \geq 3$.

$$\text{(i)}\ \tilde{L_\omega}\left(\frac{\partial \tilde{\phi_\omega}}{\partial \omega}\right) = 2\omega^{-3}|x|^2 \tilde{\phi_\omega},$$

$$\text{(ii)}\ \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\phi_\omega}^p(x) \frac{\partial \tilde{\phi_\omega}}{\partial \omega}(x)\,dx = -\frac{2\omega^{-3}}{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 \tilde{\phi_\omega}^2(x)\,dx.$$

$p = 1 + 4/n$ であることと，補題3，命題2 (iii) を使って，直接

$$
\begin{aligned}
d''(\omega) &= \omega^{-3}\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2\tilde{\phi_\omega}^2(x)dx - 4\omega^{-5}\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2\tilde{\phi_\omega}\tilde{L_\omega}^{-1}(|x|^2\tilde{\phi_\omega})dx \\
&\geq \omega^{-3}\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2\tilde{\phi_\omega}^2(x)dx - C\omega^{-5}\int_{\mathbb{R}^n} |x|^4\tilde{\phi_\omega}^2(x)dx
\end{aligned}
$$

と計算し，命題2 (ii) を用いて評価していく．

参考文献

[1] H. Berestycki and T. Cazenave, "Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon non linéaires," C. R. Acad. Sci. Paris. **293** (1981) 489–492.

[2] H. Berestycki and P. L. Lions, "Nonlinear scalar field equations, I-Existence of a ground state," Arch. Rat. Mech. Anal. **82** (1983) 313–346.

[3] T. Cazenave, "Semilinear Schrödinger equations," Courant Lecture Notes in Mathematics, 10, American Mathematical Society, Courant Institute of Mathematical Sciences, 2003.

[4] T. Cazenave and P. L. Lions, "Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations," Comm. Math. Phys. **85** (1982) 549–561.

[5] G. Fibich and X. P. Wang, "Stability of solitary waves for nonlinear Schrödinger equations with inhomogeneous nonlinearities", Physica D. Vol. 175 (2003), 96–108.

[6] R. Fukuizumi, "Stability and instability of standing waves for the nonlinear Schrödinger equation with harmonic potential", Discrete Contin. Dynam. Systems. Vol. 7 (2001), 525–544.

[7] R. Fukuizumi and M. Ohta, "Instability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with potentials", Differential and Integral Eqs. Vol. 16 (2003), 691–706.

[8] R. Fukuizumi and M. Ohta, "Stability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with potentials", Differential and Integral Eqs. Vol. 16 (2003), 111–128.

[9] R. Fukuizumi, "Stability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with critical power nonlinearity and potentials," to apprear in Advances in Differential Equations.

[10] R. Fukuizumi, "Stability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with potentials," Séminaire EDP, 2003-2004, Ecole Polytechnique. IX-1 – IX-8.

[11] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, "Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I," J. Funct. Anal. **74** (1987) 160–197.

[12] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, "Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry II," J. Funct. Anal. **94** (1990) 308–348.

[13] M. Hirose and M. Ohta, "Structure of positive radial solutions to scalar field equations with harmonic potential", J. Differential Eqs. Vol. 178 (2002), 519–540.

[14] M. Hirose and M. Ohta, "Uniqueness of positive solutions to scalar field equations with harmonic potential", Preprint.

[15] Y. Kabeya and K. Tanaka, "Uniqueness of positive radial solutions of semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$ and Séré's non-degeneracy condition", Commun. Partial. Differential. Eqs. Vol. 24 (1999), 563–598.

[16] M. Kunze, T. Küpper, V. K. Mezentsev, E. G. Shapiro and S. Turitsyn, "Nonlinear solitary waves with Gaussian tails", Physica D. Vol. 128 (1999), 273–295.

[17] M. K. Kwong, "Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in $\mathbb{R}^n$, " Arch. Rational Mech. Anal. **105** (1989), 234–266.

[18] Y. Li and W. N. Ni, "Radial symmetry of positive solutions nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$", Commun. Partial Differential. Eqs. Vol. 18 (1993), 1043–1054.

[19] Y. G. Oh, "Stability of semiclassical bound states of nonlinear Schrödinger equations with potentials," Comm. Math. Phys. **121** (1989) 11–33.

[20] Y. G. Oh, "Cauchy problem and Ehrenfest's law of nonlinear Schrödinger equations with potentials," J. Differential Equations **81** (1989) 255–274.

[21] 太田雅人, "Instability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with potentials," 「微分方程式の総合的研究」予稿集, (2000).

[22] H. A. Rose and M. I. Weinstein, "On the bound states of the nonlinear Schrödinger equation with a linear potential," Phyica D **30** (1988) 207–218.

[23] J. Shatah, "Stable standing waves of nonlinear Klein-Gordon equations", Comm. Math. Phys. Vol. 91 (1983), 313–327.

[24] J. Shatah and W. Strauss, "Instability of nonlinear bound states," Comm. Math. Phys. **100** (1985) 173–190.

[25] 鶴見剛也・和達三樹, 「中性原子を用いたボーズ・アインシュタイン凝縮」, 科学 Vol. 69 No. 11 (1999) 937–944.

[26] M. I. Weinstein, "Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates," Comm. Math. Phys. **87** (1983) 567–576.

[27] J. Zhang, "Stability of standing waves for the nonlinear Schrödinger equations with unbounded potentials", Z. Angew. Math. Phys. **51** (2000), 489–503.

[28] J. Zhang, "Sharp criteria for blowup and global existence in nonlinear Schrödinger equations under a harmonic potential", (1999), Preprint.

[29] J. Zhang, "Stability of attractive Bose-Einstein condensates", Journal of Statistical Physics. **101** (2000), 731–745.