シュレディンガー方程式の解の構造とハミルトン流の漸近挙動

土居伸一 (大阪大学大学院理学研究科)

1. 目的と準備

$\mathbf{R}^d$ でシュレディンガー作用素

$$H = H_0 + W = -\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle + W$$

を考える. ここで $Q = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ は d 次実対角行列であり, $W \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$ は $W(x) = o(|x|^2)$ ($|x| \to \infty$) をみたす実関数である. H_0, H の全表象を順に h_0, h とおく:

$$h_0(x,\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2 + \frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle, \quad h(x,\xi) = h_0(x,\xi) + W(x).$$

一般に $f \in C^\infty(T^*\mathbf{R}^d)$ のハミルトンベクトル場を $H_f = \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)$ で表し, H_f の生成する流れ (即ち f のハミルトン流) を e^{tH_f} で表す. この講演では, $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ を初期値とする解 $u(t) = e^{-itH}u_0$(特に基本解 $K(t,x,y)$) の特異性と, $e^{tH_h}(y,\eta)$ の $|\eta| \to \infty$ での漸近挙動との関連について, W の影響が現れる場合を中心に説明する. それとともに, ハミルトン流 e^{tH_h} の漸近挙動ではとらえられない現象, すなわち異なる振動数をもつ振動子の共鳴により弱い特異性が生成される現象についても言及したい.

以下記号の準備をする. $K_0(t,x,y)$, $K(t,x,y)$ を順に e^{-itH_0}, e^{-itH} の超関数核とする.

$$e^{tH_{h_0}}(y,\eta) = (x^0(t,y,\eta), \xi^0(t,y,\eta)), \quad e^{tH_h}(y,\eta) = (x(t,y,\eta), \xi(t,y,\eta))$$

とおく. $\omega_j = \sqrt{|\lambda_j|}$, $T_j = \pi/\omega_j$ ($\lambda_j > 0$), $T_j = 0$ ($\lambda_j \le 0$), $\Sigma = \cup_j T_j\mathbf{Z}$ とおく. このとき

$$\begin{aligned}
&(x_j^0(t,y,\eta), \xi_j^0(t,y,\eta)) \\
&= \begin{cases}
(y_j + \eta_j t,\ \eta_j) & \text{if } \lambda_j = 0; \\
(y_j\cosh(\omega_j t) + \eta_j\frac{\sinh(\omega_j t)}{\omega_j},\ y_j\omega_j\sinh(\omega_j t) + \eta_j\cosh(\omega_j t)) & \text{if } \lambda_j = -\omega_j^2 < 0; \\
(y_j\cos(\omega_j t) + \eta_j\frac{\sin(\omega_j t)}{\omega_j},\ -y_j\omega_j\sin(\omega_j t) + \eta_j\cos(\omega_j t)) & \text{if } \lambda_j = \omega_j^2 > 0.
\end{cases}
\end{aligned}$$

行列 $A(t), B(t)$ を $e^{tH_{h_0}}(y,\eta) = (A(t)y + B(t)\eta, A'(t)y + B'(t)\eta)$ で定めると $A(t) = B'(t)$, $\Sigma = \{t \in \mathbf{R}; B(t) \text{ は正則でない}\}$.

表象クラスと特性集合. $\langle z\rangle = (1+|z|^2)^{1/2}$ ($z \in \mathbf{R}^n$) とおく. 全ての $\alpha \in \mathbf{N}_0^n = (\mathbf{N}\cup\{0\})^n$ に対して次の評価を満たす関数 $a \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ のなす集合を $S^m(\mathbf{R}^n)$ (resp. $S_+^m(\mathbf{R}^n)$) とおく:

$$|\partial_z^\alpha a(z)| \le C_\alpha\langle z\rangle^{m-|\alpha|}, \quad z \in \mathbf{R}^n \quad \left(\text{resp. } |\partial_z^\alpha a(z)| \le C_\alpha\langle z\rangle^{\max\{m-|\alpha|,0\}}, \quad z \in \mathbf{R}^n\right).$$

$a \in S^0(\mathbf{R}^n)$ に対して, $\mathrm{Char}\, a = \{\eta \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\};\ \liminf_{t\to\infty}|a(t\eta)| = 0\}$.

関数空間. $\Lambda = (1 - \Delta + |x|^2)^{1/2}$ とおく. $\mathcal{B}^s(\mathbf{R}^d)$ は, ノルム $\|\Lambda^s\cdot\|$ による $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ の完備化である. $H^{(s,m)} = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d); \langle D\rangle^s\langle x\rangle^m f \in L^2(\mathbf{R}^d)\}$, $H^{(s,-\infty)} = \cup_{m\in\mathbf{R}}H^{(s,m)}$, $H^s = H^{(s,0)}$. なお $W \in S_+^2(\mathbf{R}^d)$ ならば写像 $\mathbf{R} \times \mathcal{B}^s(\mathbf{R}^d) \ni (t,\phi) \mapsto e^{-itH}\phi \in \mathcal{B}^s(\mathbf{R}^d)$ は連続である.

関連する仕事. Fujiwara [6], Zelditch [15], Weinstein [11], Yajima [13, 14], Kapitanski et al.[7], Wunsch [12], Ōkaji[10], Nakamura[8, 9] 等. [14], [15] には後で言及する.

2. 解の特異性の分散 ([4])

大前提の仮定: $W \in S^2_+(\mathbf{R}^d)$, $W(x) = o(|x|^2)$ $(|x| \to \infty)$. $u_0 \in \mathcal{B}^{s_0}(\mathbf{R}^d)$ に対して $u(t) = e^{-itH}u_0 \in C(\mathbf{R}_t, \mathcal{B}^{s_0}(\mathbf{R}^d))$ とおく. また $r > 0$ とする.

2.1. 主表象 h_0 による解の特異性の分散.

補題 2.1. I をコンパクト区間とすると, $x(t,y,\eta) = B(t)\eta + f_1(t,y,\eta) + f_2(t,\eta)$, $|f_1(t,y,\eta)| \le C\langle y\rangle$ $(t \in I, y, \eta \in \mathbf{R}^d)$, $\sup_{t\in I}|f_2(t,\eta)| = o(|\eta|)$ *as* $|\eta| \to \infty$.

定理 2.2. $t_0 \in \mathbf{R}$, $\eta_0 \in \mathbf{R}^d \setminus \mathrm{Ker}B(-t_0)$ とし, $\mathrm{Char}\, a \not\ni B(-t_0)\eta_0$ をみたすある $a \in S^0(\mathbf{R}^d)$ に対して $\langle x\rangle^r a(x)u_0 \in \mathcal{B}^{s_0}(\mathbf{R}^d)$ を仮定する. このとき $\mathrm{Char}\, b \not\ni \eta_0$ をみたす $b \in S^0(\mathbf{R}^d)$ と $0 < \varepsilon \ll 1$ があり, 次が成り立つ:

$$\langle x\rangle^{-r}\langle D\rangle^r b(D)u(t) \in C([t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon], \mathcal{B}^{s_0}(\mathbf{R}^d)).$$

系 2.3. $u_0 \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$ ならば,

$$u \in C^\infty(\mathbf{R}\setminus\Sigma, C^\infty(\mathbf{R}^d)); \quad WFu(t_0) \subset \{(y,\eta); \eta \in \mathrm{Ker}B(-t_0)\}\ (t_0 \in \Sigma).$$

注意. $W = 0$ の場合の基本解を考えてもわかるように, $t_0 \in \Sigma\setminus\{0\}$ のとき $u_0 \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$ であっても $u(t_0)$ の $\mathrm{Ker}B(-t_0)$ に含まれる方向の特異性は一般には分散しない.

2.2. 摂動 W による解の特異性の分散.

次に $t_0 \in \Sigma\setminus\{0\}$ とし, P_1 を $\mathrm{Ker}\, B(-t_0)$ への直交射影とし, $P_2 = I - P_1$ とおく. このとき $A(-t_0) = B'(-t_0)$ は $\mathrm{Im}\, P_1$ に制限して可逆である. W について 2 つの条件を仮定する.

(W1) ある $0 < \delta < 1$ に対して $W \in S^{1+\delta}_+(\mathbf{R}^d)$; $|\nabla^2 W(x)| = o(1)$ as $|x| \to \infty$.

(W2) (W1) における δ に対して, δ 次斉次の関数 $F_1, \dots, F_d \in C(\mathbf{R}^d\setminus\{0\}, \mathbf{R})$ があり, $F = (F_1,\dots,F_d)$ とおくと, $\lim_{|x|\to\infty}|\nabla W(x) - F(x)|/|x|^\delta = 0$.

$\phi, \psi : \mathbf{R}\times\mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ を次で定める:

$$\phi(t,\eta) = \int_0^t B(\tau)\nabla W(B(\tau)\eta)d\tau, \quad \psi(t,\eta) = -\int_0^t A(\tau)\nabla W(B(\tau)\eta)d\tau.$$

ϕ, ψ の定義式で ∇W を F に置き換えた $\mathbf{R}\times(\mathbf{R}^d\setminus\{0\})$ から $\mathbf{R}^d$ への写像を ϕ_∞, ψ_∞ とおく.

補題 2.4. (仮定 (W2) は不要である.) $I \ni t_0$ を有界閉区間とする. このとき

$$\begin{aligned}
P_1x(-t,y,\eta) =& A(-t_0)P_1\big(\phi(-t_0,\eta) - (t-t_0)\eta\big) + P_1r_1(t,\eta) + (t-t_0)r_2(t,\eta) + P_1f(t,y,\eta),\\
P_2x(-t,y,\eta) =& \big(A(-t_0)P_2\phi(-t_0,\eta) + B(-t_0)P_2\psi(-t_0,\eta)\big) + B(-t_0)P_2\eta\\
&+ P_2r_1(t,\eta) + (t-t_0)r_3(t,\eta) + P_2f(t,y,\eta).
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in I}|r_1(t,\eta)| = o(|\eta|^\delta)\ \ (|\eta|\to\infty); \quad && |r_2(t,y)| \le C(\langle\eta\rangle^\delta + |t-t_0|\langle P_1\eta\rangle);\\
&|r_3(t,y)| \le C(\langle\eta\rangle^\delta + \langle P_2\eta\rangle); && |f(t,y,\eta)| \le C\langle y\rangle.
\end{aligned}$$

定理 2.5. (仮定 (W2) は不要である.) ある $c_0 > 0$, $C_0 > 0$ に対して

$$P_1 \nabla^2 W(x) P_1 \geq c_0 |x|^{\delta-1} P_1 \quad \text{if } x \in \operatorname{Im} P_1 \text{ and } |x| \geq C_0 \tag{2.1}$$

を仮定する. このとき $\langle x \rangle^r u_0 \in \mathcal{B}^{s_0}(\mathbf{R}^d)$ ならば $\langle x \rangle^{-r}\big(\langle P_1 D \rangle^\delta + \langle P_2 D \rangle\big)^r u(t_0) \in \mathcal{B}^{s_0}(\mathbf{R}^d)$.

注意. $Q = \omega^2 I$ $(\omega > 0)$ のとき,

$$C^{-1}|x|^{\delta-1} I \leq \nabla^2 W(x) \leq C|x|^{\delta-1} I \ (|x| \gg 1)$$

なる $C > 0$ の存在を仮定すると, $0 \neq t_0 \in \Sigma = (\pi/\omega)\mathbf{Z}$ に対して $K(t_0, \cdot, \cdot) \in C^\infty(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ (Yajima[14]). 私の知る限り, これが W により解の特異性の構造が変わる唯一の結果であった.

定理 2.6. $\eta_0 \in \operatorname{Im} P_1 \setminus \{0\}$, $\tilde{\eta}_0 = P_1 \phi_\infty(-t_0, \eta_0) \neq 0$ とする. $\operatorname{Char} a \not\ni A(-t_0)\tilde{\eta}_0$ をみたすある $a \in S^0(\mathbf{R}^d)$ に対して $\langle P_1 x \rangle^r a(P_1 x) u_0 \in \mathcal{B}^{s_0}(\mathbf{R}^d)$ を仮定する. このとき $\operatorname{Char} b \not\ni \eta_0$ をみたす $b \in S^0(\mathbf{R}^d)$ があり, 次が成り立つ:

$$\langle x \rangle^{-r} \langle D \rangle^{\delta r} b(D) u(t_0) \in \mathcal{B}^{s_0}(\mathbf{R}^d).$$

定理 2.7. $\eta_0 \in \operatorname{Im} P_1 \setminus \{0\}$ が $\tilde{\eta}_0 = P_1 \phi_\infty(-t_0, \eta_0) \notin \{\lambda \eta_0; \lambda \geq 0\}$ をみたすと仮定し, Γ を $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ における $\tilde{\eta}_0$ と $-\eta_0$ で生成される錐的な凸閉集合とする. さらに $\operatorname{Char} a \cap A(-t_0)\Gamma = \emptyset$ をみたすある $a \in S^0(\mathbf{R}^d)$ に対して $\langle P_1 x \rangle^r a(P_1 x) u_0 \in \mathcal{B}^{s_0}(\mathbf{R}^d)$ を仮定する. このとき $\operatorname{Char} b \not\ni \eta_0$ をみたす $b \in S^0(\mathbf{R}^d)$ と $0 < \varepsilon \ll 1$ があり, 次が成り立つ:

$$\langle x \rangle^{-r}\big(\langle D \rangle^\delta + |t - t_0|\langle D \rangle\big)^r b(D) u(t) \in C([t_0, t_0 + \varepsilon], \mathcal{B}^{s_0}(\mathbf{R}^d)).$$

注意. (初期値の減衰条件の必要性). $\eta_0 \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$, $r, r_1 > 0$ とする. 恒等的に零でない $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$, $\operatorname{Char} b \not\ni \eta_0$ をみたす $b \in S^0(\mathbf{R}^d)$, $a \in S^0(\mathbf{R}^d)$, $C > 0$, $I_\varepsilon = [t_0, t_0 + \varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$ に対して次の評価が成り立つと仮定する: 任意の $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して

$$\sup_{t \in I_\varepsilon} \|\Lambda^{s_0} f(x)\big(\langle D \rangle^\delta + |t - t_0|\langle D \rangle\big)^r b(D) e^{-itH} u_0\| \leq C\|\Lambda^{s_0}\langle x \rangle^{r_1} a(x) u_0\| + C\|\Lambda^{s_0} u_0\|.$$

このとき $r \leq r_1$ である. さらに $r = r_1$ のとき, $\tilde{\eta}_0 = P_1 \phi_\infty(-t_0, \eta_0) \notin \{\lambda \eta_0; \lambda \geq 0\}$ が成り立ち, Γ を $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ における $\tilde{\eta}_0$ と $-\eta_0$ で生成される錐的な凸閉集合とすると, $\operatorname{Char} a \cap (A(-t_0)\Gamma + \operatorname{Im} P_2) = \emptyset$ が成り立つ. この条件を考慮して, 定理 2.7 では $P_1 x$ 変数に関する $A(-t_0)\Gamma$ での減衰を仮定した. 定理 2.2, 2.6 でも同様にアプリオリ評価から初期値の減衰条件が従う.

3. 解の特異性の伝播 ([3, 5])

この節では W について 2 つ条件を仮定する.

(W3) $W \in S^1(\mathbf{R}^d)$;

(W4) 0 次斉次の関数 $F_1, \ldots, F_d \in C(\mathbf{R}^d \setminus \{0\}, \mathbf{R})$ があり, $F = (F_1, \ldots, F_d)$ とおくと, $\lim_{|x| \to \infty} |\nabla W(x) - F(x)| = 0$.

$E(t,s)=e^{itH_0}e^{-i(t-s)H}e^{-isH_0}$ とおくと, $\phi\in\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ に対して $v=E(\cdot,s)\phi$ はコーシー問題

$$(\partial_t+iP(t))v(t)=0 \quad \text{in } D'(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d), \quad v(s)=\phi,$$

の $C(\mathbf{R},\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d))$ での一意解である. ここで $P(t)=e^{itH_0}We^{-itH_0}=(W\circ e^{tH_{h_0}})^w$.

$\Phi_{ts}=e^{-tH_{h_0}}\circ e^{(t-s)H_h}\circ e^{sH_{h_0}}$ とおくと $(x(t),\xi(t))=\Phi_{ts}(y,\eta)$ は正準方程式

$$\begin{aligned}\dot{x}_j(t)&=\partial_{\xi_j}p(t,x(t),\xi(t)), & x_j(s)&=y_j,\\ \dot{\xi}_j(t)&=-\partial_{x_j}p(t,x(t),\xi(t)), & \xi_j(s)&=\eta_j \quad (j=1,\ldots,d),\end{aligned}$$

の解である. ただし $p(t)$ は $P(t)$ の Weyl 表象である: $p(t,x,\xi)=W\circ e^{tH_{h_0}}(x,\xi)$.

写像 $\tilde{\Phi}_{ts}:\mathbf{R}^d\times(\mathbf{R}^d\setminus\{0\})\to\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d$ を次で定義する: $\tilde{\Phi}_{ts}(y,\eta)=(\tilde{x}(t,s,y,\eta),\tilde{\xi}(t,s,y,\eta))$,

$$\tilde{x}(t,s,y,\eta)=y+\int_s^t B(\tau)F(B(\tau)\eta)\,d\tau, \quad \tilde{\xi}(t,s,y,\eta)=\eta-\int_s^t A(\tau)F(B(\tau)\eta)\,d\tau.$$

定理 3.1. 任意のコンパクト集合 $K\subset\mathbf{R}^d$ とコンパクト区間 $I\subset\mathbf{R}$ に対して

$$\lim_{|\eta|\to\infty}\sup_{s,t\in I,y\in K}\left|\Phi_{ts}(y,\eta)-\tilde{\Phi}_{ts}(y,\eta)\right|=0.$$

$\tilde{\Phi}_{ts}$ は $\mathbf{R}^d\times(\mathbf{R}^d\setminus\{0\})$ 上の流れではないが, 次の流れ Ψ_{ts} を誘導する:

$$\Psi_{ts}(y,\eta)=(\tilde{x}(t,s,y,\eta),\eta).$$

3.1. 最も強い特異性の伝播

H^s 波面集合. $f\in\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ とする. $x_0\in\mathbf{R}^d$ の近傍で 1 の値をとる関数 $a\in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ と $\xi_0\in\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ の錐近傍 Γ が存在して, Γ 上で 1 の値をとり, それ以外では 0 の値をとる関数を χ_Γ とおくと, $\chi_\Gamma(D)(af):=F^{-1}(\chi_\Gamma(\xi)F(af)(\xi))\in H^s$ が成立するとき, **f は x_0 で ξ_0 方向に H^s の滑らかさをもつ**という. この条件を満たさないような $(x_0,\xi_0)\in\mathbf{R}^d\times(\mathbf{R}^d\setminus\{0\})$ 全体を $WF_{H^s}f$ と表し, f の H^s 波面集合という.

定理 3.2. $\phi\in H^{(s_0,-\infty)}$ ならば, $s_0<s\le s_0+1$ に対して

$$WF_{H^s}E(t,t_0)\phi=\Psi_{tt_0}(WF_{H^s}\phi), \quad t,t_0\in\mathbf{R}.$$

系 3.3 (周期的振動子). *$e^{tH_{h_0}}$ が周期的で最小周期 $2T$ であるとする. $\mathbf{R}^d\times(\mathbf{R}^d\setminus\{0\})$ 上の同相写像族 $(\chi_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ を次で定める:*

$$\chi_k(y,\eta)=e^{kTH_{h_0}}\circ\Psi_{kT,0}(y,\eta)=(A(kT)\tilde{x}(kT,0,y,\eta),A(kT)\eta). \tag{3.1}$$

(1) $\chi_{j+k}=\chi_j\circ\chi_k$ for all $j,k\in\mathbf{Z}$.

(2) $u_0\in H^{(s_0,-\infty)}$ に対して $u(t)=e^{-itH}u_0$ とおく. このとき $s_0<s\le s_0+1$ に対して,

$$WF_{H^s}u(kT)=\chi_k(WF_{H^s}u_0), \quad k\in\mathbf{Z}.$$

3.2. 方向別の特異性の伝播

方向別の特異性を考えると $s_0 < s \le s_0+1$ の条件がはずせる場合がある. $T_{\mathrm{total}} \in [0,\infty)$ を $T_{\mathrm{total}}\mathbf{Z} = \cap_j T_j\mathbf{Z}$ で定める. $\eta \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ に対して $T(\eta) \in [0,\infty)$ を $T(\eta)\mathbf{Z} = \{t \in \mathbf{R}; B(t)\eta = 0\}$ で定める.

定理 3.4. $G = \{\hat\eta \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\};\ T(\hat\eta) = T_{\mathrm{total}}\}$ とおくと $\phi \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$, $s \in \mathbf{R}$ に対して,

$$(\mathbf{R}^d \times G) \cap WF_{H^s}E(t,t_0)u_0 = \Psi_{tt_0}\big((\mathbf{R}^d \times G) \cap WF_{H^s}u_0\big),\ t, t_0 \in \mathbf{R}.$$

注意. $G = \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ となるための条件は, $Q \le 0$ または $\lambda > 0$ があり $Q = \lambda I$.
注意. 一般には G 以外の方向では条件 $s_0 < s \le s_0 + 1$ をはずせない.

系 3.5 (等方的振動子). $\omega > 0$ に対して $Q = \omega^2 I$ を仮定する. $\theta_k \in C(\mathbf{R}^d \setminus \{0\}, \mathbf{R}^d)$ を次式で定める:

$$\theta_k(\eta) = \begin{cases} (2/\omega^2)\cdot n(F(\eta) - F(-\eta)) & \textit{if } k = 2n,\ n \in \mathbf{Z}; \\ (2/\omega^2)\cdot \big(n(F(\eta) - F(-\eta)) + F(\eta)\big) & \textit{if } k = 2n+1,\ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

このとき $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$, $u(t) = e^{-itH}u_0$, $u_f(t) = e^{-itH_0}u_0$, $s \in \mathbf{R}$ に対して

$$\begin{aligned} WF_{H^s}u(k\pi/\omega) &= \big\{(-1)^k(y + \theta_k(\eta), \eta);\ (y,\eta) \in WF_{H^s}u_0\big\} \\ &= \big\{(y - \theta_k(-\eta), \eta);\ (y,\eta) \in WF_{H^s}u_f(k\pi/\omega)\big\},\quad k \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

3.3. 粗い局所化による特異性の伝播

$\eta \in \mathbf{R}^d \setminus (G \cup \{0\})$ 方向に対して $\mathrm{Ker}(B(T(\eta)) \times (\mathbf{R}^d \setminus \{0\})$ を相空間とする波面集合を考えると, Ψ_{ts} からこの相空間に誘導される流れに沿った特異性の伝播定理が $E(t,t_0)$ に対して (弱い特異性まで込めて) 証明できる. これに関しては詳細を省き, その応用例を一つ挙げる.

定理 3.6. $\omega > 0$ に対して $\mathrm{Ker}\,(Q - \omega^2 I) = \mathbf{R}^{d'} \times \{0\}$ $(0 < d' < d,\ d'' = d - d')$ を仮定する. $\phi_1 \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^{d'})$, $\phi_2 \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^{d''})$ とし, $u_0(x) = \phi_1(x')\phi_2(x'')$ とおくと, 全ての $t_0 = k_0\pi/\omega \in (\pi/\omega)\mathbf{Z} \setminus (\cup_{d'<j\le d} T_j\mathbf{Z})$ と $s \in \mathbf{R}$ に対して,

$$\begin{aligned} WF_{H^s}u(t_0) &= \Psi_{0,-t_0} WF_{H^s}u_f(t_0) \\ &= \Big\{\big(((-1)^k(y' + \theta_{k_0}(\eta',0)', \eta'), (y'',0)\big);(y',\eta') \in WF_{H^s}\phi_1,\ y'' \in \mathbf{R}^{d''}\Big\} \end{aligned}$$

ここで $\theta_k(\eta) = (\theta_k(\eta)', \theta_k(\eta)'')$ は系 3.5 で定義された関数である.

注意. 系 2.3 と定理 3.6 より, $T_j > T_k > 0$ なる任意の j,k に対して $T_j/T_k \notin \mathbf{Q}$, (W3), (W4) ならば, $WF_{H^s}K(t,\cdot,y) = \Psi_{0,-t}WF_{H^s}K_0(t,\cdot,y)$ $(s,t \in \mathbf{R})$ が成り立つことが従う.
注意. これ以前には, $T_j > 0$ $(\forall j)$, $T_j/T_k \notin \mathbf{Q}$ $(\forall j \ne k)$, $W \in S^0(\mathbf{R}^d)$ ならば $WFK(t,\cdot,y) \subset WFK_0(t,\cdot,y)$ であることが知られていた (Zelditch[15]).

3.4. 弱い特異性の生成

簡単のために $e^{tH_{h_0}}$ が周期的である場合を考える. このとき $2T_{\mathrm{total}}$ が最小周期である. $0 \ne \hat\eta \in \mathbf{R}^d \setminus G$ に対して $\hat T := T(\hat\eta)$ とおき, $\mathrm{Ker}B(\hat T) = \mathbf{R}^{d'} \times \{0\}$ $(0 < d' < d,\ d'' = d - d')$ と仮定する. $A(t) = \mathrm{diag}(a_1(t), \ldots, a_d(t))$ のとき $A_1(t) = \mathrm{diag}(a_1(t), \ldots, a_{d'}(t))$ とおく. このとき $A_1(\hat T) = \mathrm{diag}((-1)^{\hat T/T_1}, \ldots, (-1)^{\hat T/T_{d'}})$. また $e^{T_{\mathrm{total}}H_{h_0}}(x,\xi) = ((-1)^{T_{\mathrm{total}}/T_j}(x_j,\xi_j))_{1\le j\le d}$. 状況を簡単にするため $\hat T\mathbf{Z} \cap T_j\mathbf{Z} = T_{\mathrm{total}}\mathbf{Z}$ $(d' < j \le d)$ を仮定する.

命題 3.7. $\phi_1 \in H^{s_0}(\mathbf{R}^{d'})$, $\phi_2 \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^{d''})$, $u_0(x) = \phi_1(x')\phi_2(x'')$ とし, u_0 は零ではないとする. $s > s_0 + 1$, $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ とする.

(1) $d' = 1$ の場合. $W \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ に対して $\int_{-\infty}^{\infty} W(y_1, \cdot)dy_1 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{d-1})$ が非負値 (または非正値) で恒等的に零ではないとすると

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{R}^d \times \{\hat{\eta}\}) \cap e^{-kT_{\mathrm{total}}H_{h_0}} WF_{H^s} u(kT_{\mathrm{total}}) \\
&= (\mathbf{R}^d \times \{\hat{\eta}\}) \cap \big(WF_{H^s}u_0 \cup \{(y_1, y''; \hat{\eta}_1, 0); (y_1, \hat{\eta}_1) \in WF_{H^{s-1}}\phi_1,\ y'' \in \mathbf{R}^{d-1}\}\big).
\end{aligned}
$$

(2) $d' \geq 2$ の場合. $W_1 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{d'})$, $W_2 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{d''})$ は共に非負値で恒等的に零でないとし, $W(x) = \pm W_1(x')W_2(x'')$ とおくと

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{R}^d \times \{\hat{\eta}\}) \cap e^{-kT_{\mathrm{total}}H_{h_0}} WF_{H^s} u(kT_{\mathrm{total}}) \\
&= (\mathbf{R}^d \times \{\hat{\eta}\}) \cap \big(WF_{H^s}u_0 \cup \{(y', y''; \eta', 0); (y', \hat{\eta}') \in WF_{H^{s-1}}\phi_1,\ y' \in S(\hat{\eta}),\ y'' \in \mathbf{R}^{d'}\}\big).
\end{aligned}
$$

ここで $T_{\mathrm{total}}/\hat{T} = n$ とおくとき

$$
S(\hat{\eta}) = \begin{cases} A_1(\hat{T})\mathrm{supp}\, W_1 + \hat{\eta}'\mathbf{R} & (n = 2) \\ \big(A_1(\hat{T})\mathrm{supp}\, W_1 \cup \mathrm{supp}\, W_1\big) + \hat{\eta}'\mathbf{R} & (n \geq 3) \end{cases}
$$

References

[1] W. Craig, T. Kappeler and W. Strauss, Microlocal dispersive smoothing for the Schrödinger equation, Comm. Pure Appl. Math. **48** (1995), 769-860.

[2] S. Doi, Smoothness of solutions for Schrödinger equations with unbounded potentials, to appear in Publ. RIMS.

[3] S. Doi, Singularities of solutions of Schrödinger equations for perturbed harmonic oscillators. *Hyperbolic Problems and Related Topics*, 185–199, Internatinal Press, Somerville, MA, 2003.

[4] S. Doi, Dispersion of singularities of solutions for Schrödinger equations, Comm. Math. Phys. **250** (2004), 473-505.

[5] S. Doi, Propagation and creation of singularities of solutions for Schrödinger equations, in preparation.

[6] D. Fujiwara, Remarks on the convergence of the Feynman path integrals, Duke Math. J. **47** (1980), 559-600.

[7] L. Kapitanski, I. Rodianski, and K. Yajima, On the fundamental solution of a perturbed harmonic oscillator, Topol. Methods in Nonlinear Anal. **9** (1997), 77-106.

[8] S. Nakamura, Propagation of the homogeneous wave front set for Schrödinger- type equations, to appear in Duke Math. J.

[9] S. Nakamura, Wave front set for solutions to Schrödinger equations, preprint.

[10] T. Ōkaji, Propagation of wave packets and smoothing properties of soluitons to Schrödinger equations with unbounded potential, preprint (version 8.4), 2000.

[11] A. Weinstein, A symbol class for some Schrödinger equations on $\mathbf{R}^n$, Amer. J. Math. **107** (1985), 1-21.

[12] J. Wunsch, The trace of the generalized harmonic oscillator, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **49** (1999), 351-373.

[13] K. Yajima, Smoothness and non-smoothness of the fundamental solution of time dependent Schrödinger equations, Comm. Math. Phys. **181** (1996), 605-629.

[14] K. Yajima, On fundamental solution of time dependent Schrödinger equations, Contemp. Math. **217** (1998), 49-68.

[15] S. Zelditch, Reconstruction of singularities for solutions of Schrödinger's equation, Comm. Math. Phys. **90** (1983), 1-26.