日本数学会

2017年度年会

函数論分科会
講演アブストラクト

2017年3月

於　首都大学東京

日本数学会

2017年度年会

函数論分科会
講演アブストラクト

2017年3月

於　首都大学東京

函　数　論

3月24日（金）　第VII会場

9:30〜11:50

14:15〜16:05

16:20〜17:20　特別講演

3月25日(土)　　第VII会場

9:40〜11:50

16	阿部　誠 (広 島 大 理) 中村　豪 (愛知工大基礎教育)	開 Riemann 面内の領域に対する強い円板的性質	(10)	49
17	奥間智弘 (山 形 大 理)	Complex surface singularities with a fixed integral homology sphere link	(15)	51
18	本田竜広 (広島工大工) Cho-Ho Chu (Queen Mary Univ. of London) 濱田英隆 (九州産大工) G. Kohr (Babeş-Bolyai Univ.)	Bonk's distortion theorem for locally biholomorphic mappings on bounded symmetric domains in $\mathbb{C}^n$	(15)	53
19	泉池耕平 (山口大教育)	2 重単位開円板上の荷重 Hardy 空間における再生核の巡回性について	(15)	55
20	児玉秋雄 (金沢大理工)$^{\flat}$	On proper holomorphic self-mappings of generalized complex ellipsoids and generalized Hartogs triangles	(15)	57
21	山盛厚伺 (Academia Sinica) Liyou Zhang (Capital Normal Univ.)	$\mathbb{C}^2$ 内の準円型領域における原点を保存する正則自己同型写像について	(10)	59
22	細野元気 (東 大 数 理) 小池貴之 (京　大　理)	On minimal singular metrics of line bundles whose stable base locus admits holomorphis tubhular neighborhoods	(15)	61
23	松本和子 (東京理大理工)	$\mathbf{CP}^n$ の複素部分多様体までの Fubini-Study 距離の Levi form に対する Takeuchi の等式	(15)	63

13:15〜14:15　特別講演

	足立真訓 (東京理大理工)	レビ平坦面上の函数論: 平坦円周束における事例研究		65

The general sampling theory by using reproducing kernels

H. Fujiwara, Graduate School of Informatics, Kyoto University and
S. Saitoh, Institute of Reproducing Kernels
saburou.saitoh@gmail.com

November 17, 2016

We would like to propose a new method for the sampling theory which represents the functions by countable discrete point data in a very general reproducing kernel Hilbert space function space. The result may be looked as an ultimate sampling theorem in a reasonable sense. We shall give numerical experiments also as its evidences.

Conclusion:

We showed a general sampling theorem and the concrete numerical experiments for the simplest and typical examples. We gave the sampling theorem in the Sobolev Hilbert spaces with numerical experimences. For the Sobolev Hilbert spaces, sampling theorems seem to be a new concept.

For the typical Paley-Wiener spaces, the sampling points are automatically determined as the common sense, however, in our general sampling theorem, we can select the sampling points freely and so, case by case, following some *a priori* information of a considering function, we can take the effective sampling points. We showed these properties by the concrete examples.

References

[1] Castro, L.P., Fujiwara, H., Rodrigues, M.M. and Saitoh, S.: A new discretization method by means of reproducing kernels. In: Le Hung Son and Wolgang Tutscheke (eds.) Interactions between real and complex analysis, pp. 185–223 Sci. and Tech. Publication House (2012)

[2] Castro, L.P., Fujiwara, H., Rodrigues, M.M., Saitoh, S., Tuan, V.K.: Aveiro Discretization Method in Mathematics: A New Discretization Principle. In: Panos Pardalos and Themistocles M. Rassias (eds.) Mathematics without Boundaries: Surveys in Pure Mathematics, pp. 37–92 Springer, (2014)

[3] Fujiwara, H.: Exflib: Multiple-precision arithmetic library for scientific computation, http://www-an.acs.i.kyoto-u.ac.jp/ fujiwara/exflib

[4] Fujiwara, H.: Numerical real inversions of the Laplace transform and their applications, RIMS Koukyuuroku **1618**, 192–209 (2008)

[5] Fujiwara, H., Matsuura, T., Saitoh, S., Sawano, Y.: Numerical real inversion of the Laplace transform by using a high-accuracy numerical method, Further Progress in Analysis, 574–583, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, (2009)

[6] Fujiwara, H.: Numerical real inversion of the Laplace transform by reproducing kernel and multiple-precision arithmetric, Progress in Analysis and its Applications, Proceedings of the 7th International ISAAC Congress, World Scientific, 289–295 (2010)

[7] Fujiwara, H., Saitoh, S.: The General Sampling Theory by Using Reproducing Kernels, Panos M. Pardalos Themistocles M. Rassias Editors Contributions in Mathematics and Engineering In Honor of Constantin Carathodory, Springer (2016), 185-204.

[8] Higgins, J.R.: Sampling theory in Fourier and signal analysis: foundations. Clarendon Press, Oxford (1996)

[9] Higgins, J.R., Stens, R.L. (eds.): Sampling theory in Fourier and signal analysis: advanced topics. Clarendon Press, Oxford (1999)

[10] Jerri, A.J.: The Shannon sampling theorem–its various extensions and applications - a tutorial review, Proceedings of the IEEE **65** 1565–1596 (1977)

[11] Saitoh, S.: Integral transforms, reproducing kernels and their applications. Pitman Res. Notes in Math. Series **369**, Addison Wesley Longman, Harlow (1997)

[12] Saitoh, S.: Theory of reproducing kernels: Applications to approximate solutions of bounded linear operator functions on Hilbert spaces. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 **230**, 107–134 (2010)

[13] Saitoh, S.: A reproducing kernel theory with some general applications, Qian,T./Rodino,L.(eds.): Mathematical Analysis, Probability and Applications - Plenary Lectures: Isaac 2015, Macau, China, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, **177**(2016), 151-182. (Springer) .

[14] S. Saitoh and Y. Sawano, Theory of Reproducing Kernels and Applications, Developments in Mathematics, **44**(2016), Springer .

[15] Stenger, F.: Numerical methods based on sinc and analytic functions. Springer Series in Computational Mathematics **20** (1993)

[16] Vapnik, V.: Statistical learning theory. John Wiley & Sons (1998).

$\log 0 = \log\infty = 0$ and Applications

Hiroshi Michiwaki, NejiLaw Inc.,
Saburou Saitoh, Institute of Reproducing Kernels
E-mail: kbdmm360@yahoo.com.jp

November 17, 2016

In this talk, we will show that $\log 0 = \log\infty = 0$ by the division by zero $z/0 = 0$ and its fundamental applications. In particular, we will know that the division by zero is our elementary and fundamental mathematics.

Key Words: Division by zero, $1/0 = 0, 0/0 = 0$, $\log 0 = 0, \log\infty = 0$, $0^0 = 1, 0$; $e^0 = 1, 0$; $\cos 0 = 1, 0$; field, Y-field, point at infinity, infinity, Green function, Robin constant, capacity, conformal mapping, Riemann mapping function, Laurent expansion, singular integral, Hadamard finite part.

References

[1] J. P. Barukcic and I. Barukcic, Anti Aristotle - The Division of Zero by Zero. Journal of Applied Mathematics and Physics, **4**(2016), 749-761. doi: 10.4236/jamp.2016.44085.

[2] J. A. Bergstra, Y. Hirshfeld and J. V. Tucker, Meadows and the equational specification of division (arXiv:0901.0823v1[math.RA] 7 Jan 2009).

[3] J.A. Bergstra, Conditional Values in Signed Meadow Based Axiomatic Probability Calculus, arXiv:1609.02812v2[math.LO] 17 Sep 2016.

[4] L.P. Castro, H. Itou and S. Saitoh, *Numerical solutions of linear singular integral equations by means of Tikhonov regularization and reproducing kernels*, Houston J. Math. **38(4)**(2012), no. 4, 1261-1276.

[5] L. P. Castro and S. Saitoh, Fractional functions and their representations, Complex Anal. Oper. Theory **7** (2013), no. 4, 1049-1063.

[6] R. Estrada and R. P. Kanwal, *Singular Integral Equations*, Birkhäuser, Boston, 2000.

[7] M. Kuroda, H. Michiwaki, S. Saitoh, and M. Yamane, New meanings of the division by zero and interpretations on $100/0 = 0$ and on $0/0 = 0$, Int. J. Appl. Math. **27** (2014), no 2, pp. 191-198, DOI: 10.12732/ijam.v27i2.9.

[8] T. Matsuura and S. Saitoh, Matrices and division by zero z/0=0, Advances in Linear Algebra & Matrix Theory, 2016, 6, 51-58 Published Online June 2016 in SciRes. http://www.scirp.org/journal/alamt
http://dx.doi.org/10.4236/alamt.2016.62007.

[9] H. Michiwaki, S. Saitoh, and M.Yamada, Reality of the division by zero $z/0 = 0$. IJAPM International J. of Applied Physics and Math. 6(2015), 1–8. http://www.ijapm.org/show-63-504-1.html

[10] H. Michiwaki, H. Okumura and S. Saitoh, Division by Zero $z/0 = 0$ in Euclidean Spaces, International Journal of Mathematics and Computation 9, **28**(2016), Issue 1(in press),

[11] H. Michiwaki, S. Saitoh and M. Takagi, A new concept for the point at infinity and the division by zero z/0=0 (manuscript).

[12] S. G. Mikhlin and S. Prössdorf, *Singular Integral Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[13] N. I. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations*, Noordhoff, Groningen, 1972.

[14] H. Ogata, M. Sugihara and M. Mori, DE formulas for finite parts of Hadamard for partial integrals, RIMS Koukyuuroku, No. 792(1992), 206-219. Kyoto University.

[15] T. S. Reis and J.A.D.W. Anderson, Transdifferential and Transintegral Calculus, Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science 2014 Vol I WCECS 2014, 22-24 October, 2014, San Francisco, USA

[16] T. S. Reis and J.A.D.W. Anderson, Transreal Calculus, IAENG International J. of Applied Math., 45: IJAM 45 1 06.

[17] H. G. Romig, Discussions: Early History of Division by Zero, American Mathematical Monthly, Vol. 31, No. 8. (Oct., 1924), pp. 387-389.

[18] S. Saitoh, Generalized inversions of Hadamard and tensor products for matrices, Advances in Linear Algebra & Matrix Theory. **4** (2014), no. 2, 87–95. http://www.scirp.org/journal/ALAMT/

[19] S. Saitoh, A reproducing kernel theory with some general applications, Qian,T./Rodino,L.(eds.): Mathematical Analysis, Probability and Applications - Plenary Lectures: Isaac 2015, Macau, China, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, **177**(2016), 151-182. (Springer) .

[20] S. Saitoh, Hidden Values of Analytic Functions by Division by Zero $z/0 = 0$ (manuscript).

[21] S.-E. Takahasi, M. Tsukada and Y. Kobayashi, Classification of continuous fractional binary operations on the real and complex fields, Tokyo Journal of Mathematics, **38**(2015), no. 2, 369-380.

Analytic functions concerning with some subordinations

Shigeyoshi Owa (Yamato University)
Junichi Nishiwaki (Setsunan University)

Let $\mathcal{A}_n$ be the class of analytic functions of the form

$$f(z) = z + \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k \qquad (n = 2, 3, 4, \cdots) \tag{1}$$

in the open unit disk $\mathbb{U}$. If we consider a function

$$f(z) = z + \frac{1}{n} z^n \qquad (n = 2, 3, 4, \cdots), \tag{2}$$

then

$$0 < \frac{n(1 - r^{n-1})}{n - r^{n-1}} < \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) < \frac{n(1 + r^{n-1})}{n + r^{n-1}} < \frac{2n}{n+1} \qquad (z \in \mathbb{U}). \tag{3}$$

In view of the above, we say that $f(z) \in \mathcal{S}_n^*(\alpha)$ if $f(z) \in \mathcal{A}_n$ satisfies

$$0 < \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) < \alpha \qquad (z \in \mathbb{U}) \tag{4}$$

for some real $\alpha > 1$, and $f(z) \in \mathcal{K}_n(\alpha)$ if $f(z) \in \mathcal{A}_n$ satisfies $zf'(z) \in \mathcal{S}_n^*(\alpha)$ for some real $\alpha > 1$.

Let $p(z)$ and $q(z)$ be analytic in $\mathbb{U}$. Then $p(z)$ is said to be subordinate to $q(z)$, written by $p(z) \prec q(z)$, if there exists an analytic function $w(z)$ in $\mathbb{U}$, with $w(0) = 0$ and $|w(z)| < 1$ $(z \in \mathbb{U})$, and such that $p(z) = q(w(z))$. If $q(z)$ is univalent in $\mathbb{U}$, then $p(z) \prec q(z)$ is equivalent to $p(0) = q(0)$ and $p(\mathbb{U}) \subset q(\mathbb{U})$.

Theorem 1. *If $f(z) \in \mathcal{A}_n$ satisfies*

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{\alpha(1 + z^{n-1})}{\alpha + (2 - \alpha) z^{n-1}} \qquad (z \in \mathbb{U}) \tag{5}$$

for some real $\alpha > 1$, then

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - \frac{\alpha}{2(\alpha - 1)} \right| < \frac{\alpha}{2(\alpha - 1)} \qquad (z \in \mathbb{U}) \tag{6}$$

and $f(z) \in \mathcal{S}_n^*\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)$.

Theorem 2. *If $f(z) \in \mathcal{A}_n$ satisfies*

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) < \frac{(n-1)(\alpha-1)}{2} \qquad (z \in \mathbb{U}) \tag{7}$$

for some real $\alpha > 1$, then $f(z) \in \mathcal{S}_n^*\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$.

Theorem 3. *If $f(z) \in \mathcal{A}_n$ satisfies*

$$\sum_{k=n}^{\infty}(|2k-\alpha|-\alpha)|a_k| \leqq \alpha - |2-\alpha| \tag{8}$$

for some real $\alpha > 1$, then $f(z) \in \mathcal{S}_n^*(\alpha)$. The equality in (8) is attained for

$$f(z) = z + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\alpha-|2-\alpha|)n\epsilon}{k(k+1)(|2k-\alpha|+\alpha)} \qquad (|\epsilon| = 1). \tag{9}$$

Theorem 4. *Let $f(z) \in \mathcal{A}_n$ satisfies*

$$\frac{\beta(1+z^{n-1})}{\beta+(2-\beta)z^{n-1}} \prec \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{\alpha(1+z^{n-1})}{\alpha+(2-\alpha)z^{n-1}} \qquad (z \in \mathbb{U}) \tag{10}$$

for $1 < \beta < \alpha$. Then

$$h(z) \prec \frac{\gamma}{z^\gamma}\int_0^z \frac{t^\gamma f'(t)}{f(t)}dt \prec g(z) \qquad (z \in \mathbb{U}), \tag{11}$$

where $\gamma \neq 0$, $\operatorname{Re}\gamma \geqq 0$,

$$h(z) = \frac{\gamma}{z^\gamma}\int_0^z \frac{\beta(1+t^{n-1})t^{\gamma-1}}{\beta+(2-\beta)t^{n-1}}dt \tag{12}$$

and

$$g(z) = \frac{\gamma}{z^\gamma}\int_0^z \frac{\alpha(1+t^{n-1})t^{\gamma-1}}{\alpha+(2-\alpha)t^{n-1}}dt. \tag{13}$$

References

[1] S. S. Miller and P. T. Mocanu, *Differential Subordinations, Theory and Applications*, Marcel Dekker, 2000.

[2] S. Owa and H. M. Srivastava, *Analytic solution of a class of Briot-Bouquet differential equations*, Current Topics in Analytic Function Theory, World Scientific, Singapore, London (1992), 252–259.

Numerical solution of the radial Loewner equation

Ikkei HOTTA (Yamaguchi University)*1
Hirokazu SHIMAUCHI (Yamanashi Eiwa College)*2

1. Introduction

The Loewner equation provides a one-parametric family of conformal maps on the unit disk whose images describe a flow of an expanding simply-connected domain on the complex plane. It has been successfully used for various problems in Geometric Function Theory, in particular the extremal problems exemplified by the famous Bieberbach conjecture. Further we would like to remark that the Loewner equation has made remarkable advances in various fields, e.g. the cerebrated Schramm-Loewner Evolution, a stochastic version of the Loewner equation [7].

We formulate one of the standard models called the *radial case*, following Pommerenke's characterization (see e.g. [6]). A time-parametrized holomorphic function $f_t : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ $(t \geq 0)$ is said to be a *(radial) Loewner chain* if;

L1. f_t is injective, i.e., a conformal map on $\mathbb{D}$, for all $t \geq 0$,

L2. $f_t(0) = 0$ and $f_t'(0) = e^t$,

L3. $f_s(\mathbb{D}) \subset f_t(\mathbb{D})$ for all $t > s \geq 0$.

By the normalization of $f_t'(0)$, it follows a strict inclusion of the images $f_s(\mathbb{D}) \subsetneq f_t(\mathbb{D})$. It should be noted that it is differentiable with respect to t almost everywhere in $t \in [0, \infty)$ and independently in z. Further, it satisfies the *Loewner equation*

$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} = \frac{\partial f_t(z)}{\partial z} \cdot zp(z,t) \tag{1}$$

for all $z \in \mathbb{D}$ and almost all $t \in [0, \infty)$, where the term $p(z,t)$ is called a *Herglotz function*; measurable with respect to $t \in [0, \infty)$ for all fixed $z \in \mathbb{D}$, holomorphic with respect to $z \in \mathbb{D}$ for almost all fixed $t \in [0, \infty)$ and satisfies $\operatorname{Re} p(z,t) > 0$ for all $z \in \mathbb{D}$ and almost all $t \in [0, \infty)$.

On the other hands, one can construct a Loewner chain f_t that satisfies (1) for a given Herglotz function p. Further it is essentially uniquely determined. Hence, it is natural to ask how a Herglotz function p encodes analytic and geometric properties of f_t. A large number of researches are devoted to this problem, see for example [6], [4], [3], [1], [2] and references therein.

The aim of this talk is to present a simple method for the numerical solution of the Loewner equation in [5].

This work was supported by KAKENHI (26800053,16K16061).
2010 Mathematics Subject Classification: 34K28, 65E05.
Keywords: Loewner equation, conformal mapping.
*1 e-mail: ihotta@yamaguchi-u.ac.jp
web: http://web.cc.yamaguchi-u.ac.jp/~ihotta/
*2 e-mail: shimauchi@yamanashi-eiwa.ac.jp
web: https://sites.google.com/a/yamanashi-eiwa.ac.jp/hirokazu-shimauchi-home-page/home

2. Numerical Solution

Suppose that a Herglotz function p has the form $p(z,t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) z^n$ on $\mathbb{D}$. For given fixed time-parameters $t_0, t_1, \ldots, t_m$, we approximate the corresponding Loewner chain

$$f_{t_j}(z) = e^{t_j} z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k(t_j) z^k$$

by the Maclaurin polynomial of degree $N \in \mathbb{N}$. It is known that the coefficient $a_n(t)$ has the form [6, p.165]:

$$a_n(s) = -e^{ns} \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu \int_s^{\infty} e^{-nt} a_\nu(t) c_{n-\nu}(t) dt$$

where $n \in \mathbb{N}$ and $s \in \mathbb{R}$ with $n \geq 2, s \geq 0$. We discretize it as the recursive formula;

$$\widehat{a}_{n,M,h}(s) := -e^{ns} \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu \left(h \sum_{j=1}^{\lceil (M-s)/h \rceil} e^{-n(s+jh)} \widehat{a}_{\nu,M,h}(s+jh) c_{n-\nu}(s+jh) \right),$$

where h is a small positive real, $M > s$ a positive real and n ≥ 2 with $\widehat{a}_{1,M,h}(s) := e^s$. A number of methods of the numerical integration, e.g. the trapezium rule and Simpson's rule, are known. Here we employed the rectangle rule of the numerical integration for simplicity. The recursive formula can be justified with reasonable regularity.

Theorem 1 *Let $n \in \mathbb{N}$ and suppose the coefficients $c_1(t), c_2(t), \ldots, c_{n-1}(t)$ of a Herglotz function are piecewise continuous with respect to t. Then, for given $\varepsilon > 0$ and $s \in \mathbb{R}_0^+$, $|a_n(s) - \widehat{a}_{n,M,h}(s)| < \varepsilon$ holds when $M \in \mathbb{N}$ is large enough and $h \in \mathbb{R}^+$ is small enough.*

3. Numerical Experiments

We will show numerical results of the Loewner equaiton with some Herglotz functions. To observe precision and performance, we treat several examples that explicit solutions of the Loewner equation (1) can be obtained.

References

[1] F. Bracci, M. D. Contreras, and S. Díaz-Madrigal, *Evolution families and the Loewner equation I. The unit disc*, J. Reine Angew. Math. **672** (2012), 1–37.

[2] F. Bracci, M. D. Contreras, S. Díaz-Madrigal, and A. Vasil'ev, *Classical and stochastic Löwner-Kufarev equations*, Harmonic and complex analysis and its applications, Trends Math., Birkhäuser/Springer, Cham, 2014, pp. 39–134.

[3] M. D. Contreras, S. Díaz-Madrigal, and P. Gumenyuk, *Loewner chains in the unit disk*, Rev. Mat. Iberoam. **26** (2010), no. 3, 975–1012.

[4] P. L. Duren, *Univalent functions*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[5] I. Hotta and H. Shimauchi, *On a numerical algorithm for the solution of the radial loewner equation*, preprint (2016).

[6] Ch. Pommerenke, *Univalent functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

[7] O. Schramm, *Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees*, Israel J. Math. **118** (2000), 221–288.

対数螺旋格子上の円板充填

山岸　義和　　(龍谷大学)[*1]
須志田　隆道　(北海道大学)[*2]

1. はじめに

一つの複素数 $z = r\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\theta} \in \mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ が生成する対数螺旋格子 $\Lambda(z) = \{z^j : j \in \mathbb{Z}\}$ を考える。$R = \min_{j\in\mathbb{Z}} |z^j - 1|/(|z^j|+1)$ とすると $0 < R < 1$ である。各 $j \in \mathbb{Z}$ に対し、円板 $D(z^j, R|z^j|) = \{\zeta : |\zeta - z^j| \leq R|z^j|\}$ を考える。円板の族 $\mathcal{D} = \{D(z^j, R|z^j|) : j \in \mathbb{Z}\}$ において、円板同士は接することはあっても、重なり合うことはない。こうして得られる円板充填を、オランダの植物学者 Van Iterson は1907年、螺旋葉序の幾何学モデルとして考察した (図1(a))。

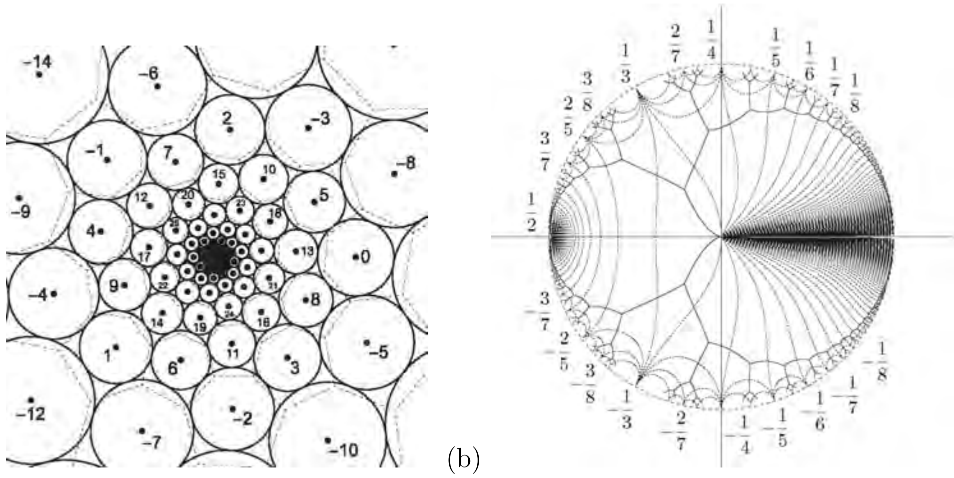


図 1: (a) $z = 0.616279\exp(2\pi i 0.958171)$ に対する対数螺旋格子 $\Lambda(z)$ 上の円板充填。三つの斜列係数 $5, 8, 13$ をもつ。図上の番号 j は 複素数 z^j を表す。点線は、同じ螺旋格子 $\Lambda(z)$ を母点集合とするときの平面のボロノイ分割。 (b) 単位円板 $\mathbb{D}$ は対数螺旋格子 $\Lambda(z)$ のパラメータ空間である。実線は、円板充填の van Iterson (1907) の分岐木 $\mathcal{F}$。点線は、ボロノイ分割の分岐図 [2]。

$\Lambda(z)$ は相似変換の対称性をもつ。円板 $D(1, R)$ が $D(z^m, R|z^m|)$ に接するときは、すべての $j \in \mathbb{Z}$ で $D(z^j, R|z^j|)$ は $D(z^{j+m}, R|z^{j+m}|)$ に接する。このときの $m > 0$ を、斜列係数 (parastichy number) と呼ぶ。多くの $z \in \mathbb{D}^*$ の場合、$\Lambda(z)$ は一つの斜列係数しか持たない。$\Lambda(z)$ が2つ以上の斜列係数をもつような $z \in \mathbb{D}^*$ 全体の集合 $\mathcal{F}$ を、van Iterson の分岐木と呼ぶ (図1(b))。パラメータ z を指定すれば円板充填が描画される GeoGebra のスクリプト [3] が公開されている。

本研究は科研費 (課題番号:15K05011) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 11A55,52C15,52C20,92C80
キーワード：spiral phyllotaxis, disk packing, Voronoi tiling, continued fraction
*1 〒520-2194 滋賀県大津市瀬田大江町横谷 1-5 龍谷大学 理工学部
e-mail: yg@rins.ryukoku.ac.jp
*2 e-mail: takamichi.sushida@es.hokudai.ac.jp

2. 平面の距離関数

補題 1 関数$d(z_1,z_2)=|z_1-z_2|/(|z_1|+|z_2|)$ は平面 $\mathbb{C}$ 上の距離関数である。

これは p-relative metric [4] および triangular ratio metric [5] の特殊な場合である。

円板 $D(z_1,R|z_1|)$ と $D(z_2,R|z_2|)$ が外接するとき、$R=d(z_1,z_2)$ である。$d(1,z^m)=d(z^j,z^{j+m})$, $d(1,z^m)=d(1,z^{-m})$ が成立つ。$0\le d(z,w)\le 1$ であり、原点はこの距離に関して孤立点となる。一点 z からの距離が一定の点集合は、実四次曲線の、パスカルのリマソンである。

Van Iterson は、関数$\sigma(z_1,z_2)=\frac{\sqrt{r_1r_2}}{r_1+r_2}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$, ($z_j=r_je^{\sqrt{-1}\theta_j}$, $r_j>0$, $\theta_j\in(-\pi,\pi]$, $j=1,2$) を用いた。d と σ の間には$\sigma(z_1,z_2)=\sqrt{1-d(z_1,z_2)^2}$ という関係が成立つ。関数 σ のほうが、変数分離形で使いやすい。

3. 円板充填とボロノイ分割

螺旋葉序の幾何学モデルとしては、円板充填のほかに、ボロノイ分割のタイリングを考える流儀もある。対数螺旋格子 $\Lambda(z)$ を母点集合とするボロノイ分割のタイリングは、辺で隣り合うボロノイ領域を考えることによって斜列係数が定義される。多くの場合、各ボロノイ領域は六角形であり、三つの斜列係数をもつ。各ボロノイ領域が四角形となるとき、タイリングは二つの斜列係数をもつ。そのような生成元 z の集合は、図 1(b) の点線で示すような曲線の族となる。

$z=re^{\sqrt{-1}\theta}$, $\theta\in(-\pi,\pi]$ とする。θ は葉序の分野で divergence angle (回転角) と呼ばれる。対数螺旋格子$\Lambda(z)$ を母点集合とする円板充填の斜列係数は、$\theta/2\pi$ の（主）近似分数であり [1]、ボロノイ分割の斜列係数は、$\theta/2\pi$ の（主ないし中間）近似分数である [2] ことがわかっている。

補題 2 $\Lambda(z)$ を母点集合とするボロノイ分割が四角形タイリングであり、斜列係数を m,n とする。このとき、四点 $1,z^m,z^{m+n},z^n$ は、この順で同一円周にあり、距離 d について$d(1,z^{m+n})=d(z^m,z^n)>d(1,z^m),d(1,z^n)$ が成立つ。

命題 3 対数螺旋格子 $\Lambda(z)$ を母点集合とする円板充填の斜列係数は、ボロノイタイリングの斜列係数でもある。

定理 4 Van Iterson の分岐木 $\mathcal{F}$ は Farey 木の構造をもつ。したがって$\mathcal{F}\cup\{0\}$ は連結かつ単連結である。

参考文献

[1] F. Rothen, A.-J. Koch, Phyllotaxis or the properties of spiral lattices. II. Packing of circles along logarithmic spirals, *J. Phys. France* **50** (1989) 1603–1621.

[2] Y. Yamagishi, T. Sushida, and A. Hizume, Voronoi Spiral Tilings, *Nonlinearity* **28** (2015), 1077–1102.

[3] E. Freeman, Spiral Lattice, `http://tube.geogebra.org/material/simple/id/2975083`.

[4] A. Barrlund, The p-relative distance is a metric, SIAM. J. Matrix Anal. Appl., 21(2), 699-702, (1999).

[5] M. Vuorinen, Geometry of metrics, arXiv:1101.4293 (2011)

Abundance of semihyperbolic dynamics in the boundary of the Mandelbrot set

木坂 正史 (京都大学 大学院 人間・環境学研究科)*1
川平 友規 (東京工業大学 大学院 理工学研究科)*2

2次多項式 $P_c(z) := z^2 + c$ の**充填Julia集合** $\boldsymbol{K_c}$，**Julia集合** $\boldsymbol{J_c}$ は次で定義される：

$$K_c := \{z \in \mathbb{C} \mid P_c^n(z) \not\to \infty\}, \qquad J_c := \partial K_c$$

またパラメーター空間の部分集合として，次の**Mandelbrot集合**が定義される：

$$M := \{c \mid J_c \ :\ 連結\} = \{c \mid \{P_c^n(0)\}_{n=0}^{\infty} \ :\ 有界\}$$

また，多項式 $f(z)$ が $z_0 \in J(f)$ で **semihyperbolic** であるとは次のことをいう：z_0 の近傍 U とある $N \in \mathbb{N}$ が存在し，$f^{-n}(U)$ $({}^\forall n)$ の任意の連結成分 V に対して $f^n|_V : V \to U$ は

$$\deg(f^n|_V : V \to U) \leq N$$

を満たす．更に，任意の $z_0 \in J(f)$ で $f(z)$ が semihyperbolic であるとき，単に $f(z)$ は semihyperbolic であるという．多項式 $f(z)$ が semihyperbolic であるための必要十分条件は $f(z)$ が放物型周期点を持たず，かつ $c \in J(f)$ なる任意の臨界点 c が non-recurrent である（即ち $c \notin \omega(c)$）ことである（[**CJY**]）．f が hyperbolic ならば semihyperbolic である．また f が semihyperbolic ならば Siegel disk や Cremer 点は存在せず，また $J(f)$ の2次元 Lebesgue 測度は0であることが知られている．この点で semihyperbolic な力学系は比較的理解しやすいものだと言える．

特に2次多項式 $P_c(z)$ で $c \in \partial M$ の場合を考えると，$P_c(z)$ の臨界点は0のみなので，$P_c(z)$ が semihyperbolic であることは臨界点0が J_c の属し，かつ non-recurrent であることと同値である．例えば c が Misiurewicz パラメーター（P_c の臨界点0が前周期的になる，即ち，${}^\exists k,\ l \geq 1 \ \ P_c^k(P_c^l(0)) = P_c^l(0)$）なら定義より P_c は semihyperbolic となる．そこで

$$SH := \{c \in \partial M \mid P_c \ は\,\mathrm{semihyperbolic}\}$$

とすると次が成り立つ：

Theorem. P_c が semihyperbolic だが c が Misiurewicz パラメーターでないような c が ∂M に稠密に存在する．また

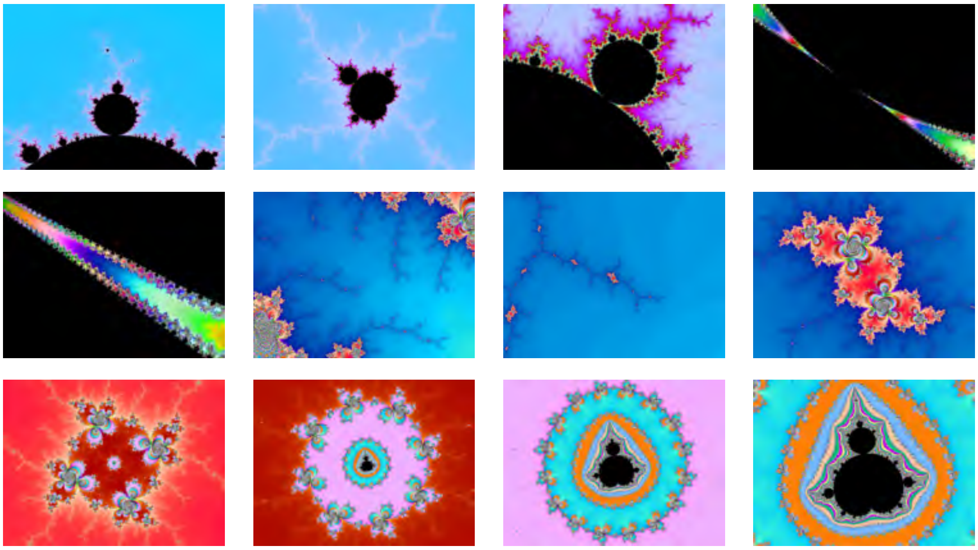
$$\dim_H(SH) = 2$$

である ($\dim_H$ は Hausdorff 次元を表す).

宍倉の有名な結果に $\dim_H(\partial M) = 2$ というのがある（[**S**]）．よって上記の結果は「マンデルブロー集合の境界には比較的理解しやすい力学系が豊富に存在する」ことを示している（ただし，∂M の2次元 Lebesgue 測度が0であるなら **…** ）．

*1 e-mail: kisaka@math.h.kyoto-u.ac.jp
*2 e-mail: kawahira@math.titech.ac.jp

証明には以前の学会で報告した次の現象を用いる：c_0 を Misiurewicz または放物型パラメーター（即ち，P_{c_0} で臨界点 0 が前周期的になる，または P_{c_0} が放物型周期点を持つようなもの）とする．小さい Mandelbrot 集合 M_{s_0} を任意に 1 つとり，M_{s_0} 内の c_0 相当のパラメーター $s_0 \perp c_0 \in M_{s_0}$ の近傍を拡大すると $J_{c_0+\eta}$ ($^\exists \eta \in \mathbb{C}$, $|\eta|$：十分小, $c_0 + \eta \notin M$) に似た図形が見える．更にこの図形の中央部を拡大していくとこの図形の z^2 による逆像，更にその逆像 $\cdots$，という入れ子構造が見え，その果てに更に小さい Mandelbrot 集合が現れる（下図では c_0 は放物型（"Douady's fat rabbit"に対応する））．



具体的には $J_{c_0+\eta}$ に似た図形上の任意のパラメーター c に対して P_c が semihyperbolic であることを示す．

参考文献

[CJY] L. Carleson, P.W. Jones, and J-C. Yoccoz, Julia and John, *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)* **25** (1994), no. 1, 1–30.

[D-BDS] A. Douady, X. Buff, R. Devaney and P. Sentenac, Baby Mandelbrot sets are born in cauliflowers, In *The Mandelbrot set, theme and variations*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **274**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2000), 19–36.

[DH] A. Douady and J. Hubbard, On the dynamics of polynomial-like mappings, *Ann. Sci. École Norm. Sup.***18**, (1985), 287–343.

[M] C.T. McMullen, The Mandelbrot set is universal, In *The Mandelbrot set, theme and variations*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **274**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2000), 1–17.

[S] M. Shishikura, The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets, *Ann. of Math.* (2) **147** (1998), no. 2, 225–267.

強分岐被覆理論の一応用

Takanori MATSUNO (Osaka Pref. Univ. Col. of Tech.)*

1. Introduction.

R. D. M. Accola[1] developed a theory of strongly branchecd coverings of compact Riemann surfaces and among other applications of the theory, he constructed a Riemann surface admitting only the identity automorphism. In this talk, applying the theory of strongly branched coverings, for any given finite simple group, we construct a Riemann surface whose automorphism group is the finite simple group. Though Greenberg ' s well-known theorem[2][3], which states that, for any finite group, there exists a compact Riemann surface whose automorphism group is the finite group, is known, our method is very simple and easy.

2. Preliminary.

Let $\pi : C_1 \to C_2$ be a holomorphic mapping of compact Riemann surfaces of degree d_π and total ramification r_π. We denote by g_i the genus of C_i for $i = 1, 2$. From the Riemann-Hurwitz formula, we have

$$2g_1 - 2 = d_\pi(2g_2 - 2) + r_\pi.$$

Definition. The mapping π will be called strongly branched if

$$r_\pi > 2d_\pi(d_\pi - 1)(g_2 + 1).$$

Remark. If $d_\pi = 2$ and $g_2 = 0$ and $r > 4$, we are in the hyperelliptic case.

The function field on C_i will be denoted by M_i for $i = 1, 2$. M_2 is the subfield of M_1 of index d_π, obtained by lifting meromorphic functions from C_2 to C_1.

Definition. M_2 is called strongly branched subfield of M_1 if $\pi : C_1 \to C_2$ is a strongly branched covering.

Definition. A strongly branched subfield M_2 will be called a maximal strongly branched subfield of M_1, if whenever $M_2 \subset M_3 \subset M_1$ and $M_2 \neq M3$ then M_3 is not a strongly branched subfield of M_1. The corresponding definition will also holds for coverings.

Remark. If $\pi : C_1 \to C_2$ is a Galois and strongly branched covering whose covering transformation group G is a simple group , then π is a maximal strongly branched covering.

Keywords: branched covering, automorphism group.
*e-mail: matsuno@osaka-pct.ac.jp

3. Theorem.

Applying the theroy of strongly branched coverings, we have fairly simple new proof of the following theorem

Theorem. *Let G be any finite simple group. Then there is a compact Riemann surface whose automorphism group is isomorphic to G.*

References

[1] R.D.M. Accola, Strongly branched coverings of closed Riemann surfaces, Proc. Amer. Math. Soc., 26(1970), 315-322.

[2] R. Greenberg, Maximal Fuchsian group, Bull. Amer. Math. Soc., 69(1963), 569-573.

[3] S. Mizuta, M. Namba, Greenberg's theorem and equivalence problem of compact Riemann surfaces, Osaka J. Math.,43(2006), no.1, 137-178.

Hurwitz群についての一注意

Takanori MATSUNO (Osaka Pref. Univ. Col. of Tech.)*

1. Introduction.

Let X be a compact Riemann surface of genus $g \geq 2$. We denote by $\mathrm{Aut}(X)$ the full automorphism group of X. By a theorem of Hurwitz[1], the order $|\mathrm{Aut}(X)|$ is finite and the following inequality holds:

$$|\mathrm{Aut}(X)| \leq 84(g-1).$$

We call $\mathrm{Aut}(X)$ as Hurwitz group if the bound is attained. It is known that the bound is attained for infinitely many values of g[2]. The purpose of this talk is to show that the bound is often not sharp. In this talk, we often use the terminologies of branched coverings of complex manifolds.

2. Preliminary.

Lemma. *Let X be a compact Riemann surface of genus $g_X \geq 2$. Then X does not have any automorphism whose order is a prime number and is greater than $2g_X + 1$.*

Proof. Suppose that X has an automorphism, say σ, whose order is a prime number p with $p > 2g_X + 1$. Then σ generates a cyclic subgroup $H =< \sigma >$ of order p in $\mathrm{Aut}(X)$. We now consider the quotient space $Z = X/H$. The quotient mapping $\pi : X \to Z = X/H$ is a cyclic Galois branched covering over Z of degree p. π may branch at several points. Let l be the number of the branching points of π in X and let g_Z be the genus of Z. From the Riemann-Hurwitz formula, we have

$$2g_X - 2 = p(2g_Z - 2) + l(p-1).$$

If we reduce mod $p-1$, we have

$$2g_X - 2 \equiv 2g_Z - 2 \pmod{p-1}.$$

So as a result, the following congruence equality must hold:

$$2(g_X - g_Z) \equiv 0 \pmod{p-1}.$$

But it is impossible, since

$$0 < 2(g_X - g_Z) \leq 2g_X < p - 1.$$

Then X cannot have any automorphism whose order is a prime p with $p > 2g_X + 1$.

Keywords: branched covering, automorphism group, Hurwitz group.
*e-mail: matsuno@osaka-pct.ac.jp

3. Result.

Theorem. *Let* $p_1, \cdots, p_s$ *be mutually distinct* s *prime numbers and let* $n_1, \cdots, n_s$ *be* s *positive integers which satisfy the conditions:*

(1) $84 < p_1$,

(2) $84 p_1^{n_1} \cdots p_{j-1}^{n_{j-1}} < p_j \quad (j = 2, \cdots, s)$.

Then, if X *is a compact Riemann surface of genus* $g = p_1^{n_1} \cdots p_s^{n_s} + 1$, *the order of* $\mathrm{Aut}(X)$ *is strictly less than* $84(g-1)$.

Remark. The case $s = 1$ and $n_1 = 1$ of Theorem is given in [3].

References

[1] A. Hurwitz, *Über algebraishe Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich*, Math. Annalen 41(1893), 403-442.

[2] A.M. Macbeath, *On a theorem of Hurwitz*, Proc. Glasgow. Math. Assoc. 5(1961), 90-96.

[3] A. Mathew, *Automorphisms of compact Riemann surfaces*, (2011), unpublished

On holomorphic motions and the extension problem

志賀　啓成　(東京工業大学　理学院)*

1. Holomorphic motionとその拡張問題

リーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上の部分集合 E と複素多様体 M に対し，以下の条件を満たす写像 $\phi : M \times E \to \hat{\mathbb{C}}$ を M 上の（または M をパラメータ空間とする）E の holomorphic motion と呼ぶ：

1. M 内のある点 p_0 に対し，$\phi(p_0, \cdot) : E \to \hat{\mathbb{C}}$ は E 上の恒等写像.
2. 任意の $p \in M$ に対し，$\phi(p, \cdot) : E \to \hat{\mathbb{C}}$ は E 上で単射.
3. 任意の $x \in E$ に対し，$\phi(\cdot, x) : M \to \hat{\mathbb{C}}$ は正則.

これらの条件に加えて，E が $0, 1, \infty$ を含み，任意の $p \in M$ に対し，$\phi(p, \cdot)$ が $0, 1, \infty$ の3点をそれぞれ固定するとき，ϕ を正規化された (normalized) holomorphic motion と呼ぶ．任意の holomorphic motion は Möbius 変換の共役を取れば常に正規化される．

Holomorphic motion は Mañé-Sad-Sullivan の有名な論文で導入され，彼らは"λ-lemma"として，holomorphic motion に関する最初の定理を述べた．すなわち，単位円板 $\Delta = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\}$ をパラメータ空間とする E の holomorphic motion は，同じ Δ をパラメータ空間とする E の閉包 $\overline{E}$ の holomorphic motion として「quasiconformal」に拡張できる，ということを示した．

その後，この λ-lemma の拡張がなされ，とりわけ著しい結果として次の定理が Slodkowski [3] によって示された．

Theorem 1.1 (Slodkowski). $\hat{\mathbb{C}}$ 上の任意の部分集合 E に対し，Δ をパラメータ空間とする E の *holomorphic motion* は，常に Δ をパラメータ空間とする $\hat{\mathbb{C}}$ の *holomorphic motion* に拡張される．

さらに Earle-Kra-Krushkal は Slodkowski の定理を群同変な holomorphic motion の場合にも成り立つことを示した．ここで holomorphic motion $\phi : \Delta \times E \to \hat{\mathbb{C}}$ が群同変とはある群 $G \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ が存在して，$GE = E$ かつ

$$\phi(p, g(x)) = \theta_p(g)(\phi(p, x)), \quad (g, p, x) \in G \times \Delta \times E \tag{1}$$

を満たすような $\theta_p \in \mathrm{Hom}(G, \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}))$ が任意の $p \in \Delta$ に対して成立するときをいう．

ただし，彼らの証明の手法は Theorem 1.1 と同値な主張を用いて結果を得たものであることを注意しておく．

Theorem 1.1（とその群同変な主張）より，次の疑問は自然に問われる．

Q1. パラメータ空間が複素2次元以上の場合も成り立つか？

しかし，これは Hubbard の結果によって否定的であることが早々に知られていた．このことから，次を問うのも自然である．

本研究は科研費 (課題番号:16H03933) の助成を受けたものである。
* 〒152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1，東京工業大学 理学院 数学系
e-mail: shiga@math.titech.ac.jp

Q2. パラメータ空間が 1 次元だが単連結でない場合，すなわち Riemann 面の場合，同様の主張が成立する条件は何か？

2. Main Results

本講演では Q2 の一つの解答が得られたことを報告する：

Theorem 2.1. *Riemann* 面 X をパラメータ空間とする E の *holomorphic motion* $\phi : X \times E \to \hat{\mathbb{C}}$ が X 上の $\hat{\mathbb{C}}$ の *holomorphic motion* に拡張できるための必要十分条件は ϕ の *monodromy* が自明であることである．さらに，ある群 $G < PSL(2,\mathbb{C})$ に対して ϕ が G-同変ならば，上記条件の下で，ϕ は G-同変な X 上の $\hat{\mathbb{C}}$ の *holomorphic motion* に拡張できる．

この定理で述べている「monodromy の自明性」については講演中に解説するが，これは ϕ についてのあるトポロジカルな条件である．特に $X = \Delta$ の場合は常に満たされており，Theorem 1.1 を特別な場合として確認する結果にもなっている（我々の証明においては Theorem 1.1 の結果は用いない）．

Riemann 面上の holomorphic motion の拡張性に関しては，Chirka [1] も同様にトポロジカルな必要十分条件を得たとしていた．しかし残念ながら，彼の結果には反例が存在した．すなわち，以下のことが言える．

Theorem 2.2. $E = \{0, 1, \infty, w_1, \ldots, w_n\}$ とする $(n \geq 1)$．このとき，ある *Riemann* 面 X と X 上の E の *holomorphic motion* $\phi : X \times E \to \hat{\mathbb{C}}$ で *Chirka* の与えた条件を満たすが，X 上の $\hat{\mathbb{C}}$ の *holomorphic motion* には拡張できないようなものが存在する．

3. そのほか関連する考察

ここでは，Theorem 2.1 に関連する事柄を言及する．

1. Lifting の問題への応用．Beltrami 係数の空間から対応する Teichmüller 空間へは自然な正則射影が存在する．この射影の holomorphic section は local には存在するが global には存在しないことが知られている．Theorem 2.1 を用いれば，Riemann 面 X から Teichmüller 空間への正則写像に対しては，その lift が X 上で存在することがわかる．

2. Theorem 2.1 で得た monodromy の自明性をチェックするのは一般には困難である．しかし，特別な条件下では常に成り立っている．例えば，E が閉集合で，E の補集合の連結成分が全て単連結な場合，E の holomorphic motion の monodromy は常に自明になる．

3. Theorem 2.1 から，いわゆる Oka's Principle が成り立つことがわかる．

参考文献

[1] E. M. Chirka, On the extension of holomorphic motions, Dokl. Math. **70** (2004), 37–40.

[2] H. Shiga, Extension of holomorphic motions and monodromy, preprint.

[3] Z. Slodkowski, Holomorphic motions and polynomial hulls, Proc. AMS **111** (1991), 347–355.

パラメータ付きBernstein-Sato イデアルと ホロノミーD加群の計算

鍋島克輔 (徳島大学)*1
小原功任 (金沢大学)*2
田島慎一 (筑波大学)*3

パラメータ付きBernstein-Sato イデアルとそれに付随するホロノミーD加群の計算法を導出し計算機代数システムに実装した。

2つの偏微分作用素環を $\mathbb{C}\langle x,\partial_x\rangle$ と $\mathbb{C}\langle s,x,\partial_x\rangle$ と表し，$x=(x_1,\ldots,x_n)$，$\partial_x=(\partial_1,\ldots,\partial_n)$ ($\partial_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$)，$s=(s_1,s_2,\ldots,s_q)$ とする。$\mathbb{C}\langle x,\partial_x\rangle$ での非可換関係は $Q_W=\{x_ix_j=x_jx_i,\ \partial_j\partial_i=\partial_i\partial_j,\ \partial_jx_i=x_i\partial_j\ (i\neq j),\partial_ix_i=x_i\partial_i+1\}$ であり，$\mathbb{C}\langle s,x,\partial_x\rangle$ での非可換関係は $Q'_W=Q_W\cup\{s_js_j=s_is_j,s_ix_\ell=x_\ell s_i,s_i\partial_\ell=\partial_\ell s_i|1\leq i\leq j\leq q,1\leq \ell\leq n\}$ である。偏微分作用素 $g_1,\ldots,g_r\in\mathbb{C}\langle x,\partial_x\rangle$ (または $\mathbb{C}\langle s,x,\partial_x\rangle$) で生成されるイデアルを $Id(g_1,\ldots,g_r)$ で表す。

定数でない多項式 $f_1,f_2,\ldots,f_q$ に対し，$f_1^{s_1}f_2^{s_2}\cdots f_q^{s_q}$ のゼロ化イデアルを $\mathrm{Ann}(f_1^{s_1}f_2^{s_2}\cdots f_q^{s_q})$ と表す。すなわち，

$$\mathrm{Ann}\left(f_1^{s_1}f_2^{s_2}\cdots f_q^{s_q}\right):=\left\{p\in\mathbb{C}\langle s,x,\partial_x\rangle | p\cdot(f_1^{s_1}f_2^{s_2}\cdots f_q^{s_q})=0\right\}.$$

このゼロ化イデアル $\mathrm{Ann}(f_1^{s_1}f_2^{s_2}\cdots f_q^{s_q})$ はPoincaré-Birkhoff-Witt 代数を利用することで計算可能である [1]。

$(f_1f_2\cdots f_q)$ のBernstein-Sato イデアル $\mathcal{B}$ を

$$\mathcal{B}=\left(\mathrm{Ann}(f_1^{s_1}f_2^{s_2}\cdots f_q^{s_q})+Id(f_1f_2\cdots f_q)\right)\cap\mathbb{C}[s]$$

で定義する。このとき，$b(s)\in\mathcal{B}$ に対し，$b(s)f_1^{s_1}f_2^{s_2}\cdots f_q^{s_q}=p\cdot(f_1^{s_1+1}f_2^{s_2+1}\cdots f_q^{s_q+1})$ となる微分作用素 $p\in\mathbb{C}\langle s,x,\partial_x\rangle$ が存在する。

同様に，論文 [3] では，次のようなBernstein-Sato イデアルが定義されている。

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{f_j} &= \left(\mathrm{Ann}(f_1^{s_1}f_2^{s_2}\cdots f_q^{s_q})+Id(f_j)\right)\cap\mathbb{C}[s],\\ \mathcal{B}_{\Sigma} &= \left(\mathrm{Ann}(f_1^{s_1}f_2^{s_2}\cdots f_q^{s_q})+Id(f_1,f_2,\ldots,f_q)\right)\cap\mathbb{C}[s].\end{aligned}$$

これら3種類のBernstein-Sato イデアルは，$x\cup\partial\gg s$ となる項順序に関するグレブナー基底を計算することで得られる。また，$f_1,\ldots,f_q$ の係数にパラメータを含む場合も計算可能であり，今回，計算機代数システムRisa/Asirに実装した。以下，具体的な計算結果を見る。

パラメータ a を持つ多項式 $f_1=x^2+yz+z^4+axz^2,f_2=xy$ を考える。このとき，Bernstein-Sato イデアル $\mathcal{B}_\Sigma$ は次となる。

本研究は科学研究費補助金 課題番号 15K17513, 15K04891, 15KT0102の助成を受けております.
2010 Mathematics Subject Classification: 14F10, 32S25, 13P10
キーワード：Poincaré-Birkhoff-Witt algebra，comprehensive Gröbner basis
*1 〒770-8506 徳島市南常三島町2-1 徳島大学大学院理工学研究部
e-mail: nabeshima@tokushima-u.ac.jp
*2 〒920-1192 金沢市角間町　金沢大学理工研究域数物科学系
e-mail: ohara@se.kanazawa-u.ac.jp
*3 〒305-8571 つくば市天王台1-1-1 筑波大学大学院数理物質系数学域
e-mail: tajima@math.tsukuba.ac.jp

• $a^2-4\neq 0$ のとき，$\mathcal{B}_\Sigma = Id(s_1+1,(s_2+1)(5s_2+7)(5s_2+8))\cap Id(g_1)$，ただし，$g_1=(4s_1+5s_2+6)(4s_1+5s_2+7)(4s_1+5s_2+8)(4s_1+5s_2+9)(4s_1+5s_2+10)$。
• $a^2-4=0$ のとき，$\mathcal{B}_\Sigma = Id(s_1+1,(s_2+1)(5s_2+6))\cap Id(g_2)$，ただし，
$g_2=(2s_1+2s_2+3)(4s_1+5s_2+6)(4s_1+5s_2+7)(4s_1+5s_2+8)(4s_1+5s_2+9)$。

次に，$\{x^2+y^3+z^3,yz\}$ で定義される擬斉次完全交叉特異点 (T_7 特異点) を見る。このとき，s_1,s_2 をパラメータと見做し $I=\mathrm{Ann}((x^2+y^3+z^3)^{s_1}(yz)^{s_2})+Id(x^2+y^3+z^3,yz)$ の包括的グレブナー基底系を計算すると次となる。ここでは，$\partial_x=\frac{\partial}{\partial x},\partial_y=\frac{\partial}{\partial y}$，$\partial_z=\frac{\partial}{\partial z}$ を意味し，項順序は全次数辞書式項順序で $x\succ y\succ z\succ \partial_x\succ\partial_y\succ\partial_z$ である。

1. $s_1+1=s_2+1=0$ のとき，$G_1=\{yz,x^2+y^3+z^3,-3x\partial_x-2y\partial_y-2z\partial_z-10,2xz\partial_z+2x-3z^3\partial_x,-2xy\partial_y-2x+3y^3\partial_x\}$ が I のグレブナー基底である。
2. $s_1+1=4s_2+7=0$ のとき，$G_2=\{yz,xz,xy,y^3-z^3,x^2+2z^3,z^4,-z^2\partial_z-4z,-y^2\partial_z+z^2\partial_y,-y^2\partial_y-4y,-3x\partial_x-2y\partial_y-2z\partial_z-13,x\partial_z+2z^2\partial_x,-x\partial_y-2y^2\partial_x,-x\partial_z^2+4z\partial_x,y^2\partial_z^2+2z\partial_y,y\partial_z^2-z\partial_y^2,x\partial_y^2-4y\partial_x,y\partial_y\partial_z^2+6z\partial_x^2+z\partial_z^3+7\partial_z^2,6y\partial_x^2+y\partial_y^3+y\partial_z^3+6\partial_y^2\}$ が I のグレブナー基底である。
3. $6s_1+4s_2+7=0$ のとき，$G_3=\{x,y,z\}$ が I のグレブナー基底である。
4. $6s_1+4s_2+9=0$ のとき，$G_4=\{x,z^2,yz,y^2,y\partial_y+z\partial_z+3\}$ が I のグレブナー基底である。
5. $6s_1+4s_2+11=0$ のとき，$G_5=\{x,yz,z^3,-y^3,z^2\partial_z+3z,y\partial_y+z\partial_z+4\}$ が I のグレブナー基底である。
6. $(s_1+1)(6s_1+4s_2+7)(6s_1+4s_2+9)(6s_1+4s_2+11)\neq 0$ または『$s_1+1=0$ かつ $(s_2+1)(4s_2+1)(4s_2+3)(4s_2+5)(4s_2+7)\neq 0$』のとき，$G_6=\{1\}$ が I のグレブナー基底である。

この結果から，各ホロノミック D 加群 $Id(G_j)(1\leq j\leq 5)$ の support も得ることができる。$Id(G_j\cap\mathbb{C}[x,y,z])$ $(2\leq j\leq 5)$ の根基イデアルは，$Id(x,y,z)$ であるで，上の 2,3,4,5 のとき，support は $\mathbb{C}^3$ の原点，1 のとき，support は $x^2+y^3+z^3=yz=0$ である。

Bernstein-Sato イデアルの準素イデアル分解を計算すると

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\Sigma = Id(s_1+1,s_2^2+2s_2+1)\cap Id(s_1+1,4s_2+7)\cap Id(6s_1+4s_2+7)\\ \cap Id(6s_1+4s_2+9)\cap Id(6s_1+4s_2+11)\end{aligned}$$

となる。この分解と同様の場合分けが 1,2,3,4,5 で得られている。すなわち，Bernstein-Sato イデアルの各準素イデアル成分でのホロノミック D 加群を得ることができる。

一般に，これらの偏微分方程式系 G は多くの情報を含んでおり，これを解析することにより Bernstein-Sato イデアル $\mathcal{B}_\Sigma$ と特異点の性質を得ることができる。

参考文献

[1] J. Briançon and P. Maisonobe, Remarques sur l'idéal de Bernstein associé à des polynômes. prépublication Univ. Nice-Sophia Antipolis, n° 650, Mai, 2002.

[2] K. Nabeshima, K. Ohara and S. Tajima, Comprehensive Gröbner systems in rings of differential operators, holonomic D-modules and b-functions *Proc. ISSAC2016*, pages 349–356, ACM, 2016.

[3] J. Ucha and F. Castro-Jiménez, On the computation of Bernstein-Sato ideals. *J. Symb. Comp.*, **37**, pages 629–639. 2004.

多変数留数の計算アルゴリズムII (一般の場合)

小原功任　(金沢大学)
田島慎一　(筑波大学)

本稿では，多変数留数を exact に計算するアルゴリズムを与える．領域 $U \subset \mathbf{C}^n$ 上の正則関数の組 $F = \{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ が完全交叉であり，また，U における $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ の共通零点は一点 $\beta \in U$ だけであるとする．このとき U 上で正則な関数 $\varphi(x)$ に対し，積分

$$\mathrm{Res}_\beta\left(\frac{\varphi}{f_1\cdots f_n}dx\right) = \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^n \int_{\Gamma(\beta)} \frac{\varphi(x)}{f_1(x)\cdots f_n(x)}dx$$

を**多変数留数** (Grothendieck local residue) という ([1])．ここで $\Gamma(\beta) = \{x \in U \mid \|f_1(x)\| = \varepsilon, \ldots, \|f_n(x)\| = \varepsilon\}$ は，十分小さな $\varepsilon > 0$ で定まる実 n 次元サイクルである．多変数留数 Res_β は，F から定まる偏微分作用素 $T_F = \sum_\alpha c_\alpha(x)\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$ により，$\mathrm{Res}_\beta\left(\frac{\varphi}{f_1\cdots f_n}dx\right) = (T_F^*\varphi)|_{x=\beta}$ と表すことができることが知られている．したがって，偏微分作用素 T_F を求めることは多変数留数を求めることに等しい．

われわれの目標は，計算機に実装可能な，多変数留数の exact な計算アルゴリズムを与えることである．したがって，$f_1(x), \ldots, f_n(x)$ が多項式で与えられているときに，T_F を構成するアルゴリズムについて考える．多項式集合 F は 0次元イデアル I を生成するとしてよい．多項式イデアルの準素イデアル分解

$$I = I_1 \cap \cdots \cap I_N, \quad (\text{各 } \sqrt{I_k} \text{ は素イデアル})$$

の計算法はよく知られている．$V_{\mathbf{C}}(I)$ に台をもつ代数的局所コホモロジー類$\sigma = \left[\frac{1}{f_1\cdots f_n}\right]$ を考える．$Z_k = V_{\mathbf{C}}(\sqrt{I_k})$ と置く．準素イデアル分解は零点集合の既約分解 $V_{\mathbf{C}}(I) = Z_1 \cup \cdots \cup Z_N$ と対応しているが，さらに σ も既約成分 Z_k に台をもつコホモロジー類 σ_k の和$\sigma = \sigma_1 + \cdots + \sigma_N$ に分解される．Z_k に台をもつデルタ関数を δ_{Z_k} とする．このとき，$\sigma_k = T_k\delta_{Z_k}$ となる微分作用素 $T_k \in D_n$ が存在し，これがT_F の Z_k における制限を与える．したがって，$\{T_1, \ldots, T_N\}$ を求めることでわれわれの目的は達成される．ここで $D_n = \mathbf{C}\langle x, \partial\rangle$ はワイル代数である．

まず，準素イデアル I_k の重複を偏微分作用素で表すことを考えよう．重複度を m_k とする．偏微分作用素の集合$\mathcal{P}_k = \{P_1^{(k)}, \ldots, P_{m_k}^{(k)}\}$ が存在して (ネーター作用素基底)，

$$I_k = \{g \in \mathbf{C}[x] \mid \{P_1^{(k)}g, \ldots, P_{m_k}^{(k)}g\} \subset \sqrt{I_k}\}$$

と表される．$\mathcal{P}_k$ は以下のアルゴリズムで求まる．$\{\partial^\alpha \mid \alpha \in \mathbf{N}_0^n\}$ に全次数辞書式順序を入れる．$I_k \subset \sqrt{I_k}$ より $1 \in \mathcal{P}_k$ としてよいので，$\mathcal{P}_k = \{1\}$ とする．次に一階の作用素 $P = \partial_i + \sum_{j=i+1}^n a_j(x)\partial_j$, $(a_j(x) \in \mathbf{C}[x]/\sqrt{I_k})$ を考える．このとき，$\mathbf{C}[x]/\sqrt{I_k}$ は有限次元複素ベクトル空間であるから，未定係数により，$a_j(x)$ を表すことができる．よって，イデアルメンバーシップ問題 $P\,I_k \subset \sqrt{I_k}$ をみたす P を未定係数法で決定することができる．これを，$\mathcal{P}_k$ に加える．2階以上のネーター作用素$P = \partial^\alpha + \sum_{\beta<\alpha,|\beta|=|\alpha|} a_\beta(x)\partial^\beta$ は，任意の多項式 $h(x)$ との交換子 $[P, h] = Ph - hP$ の階数が $|\alpha|$ より小さく，また，$[P, h]\,I_k \subset \sqrt{I_k}$ を満すことから，低階のネーター作用素が分かっていれば，係数 $a_\beta(x)$

を未定係数法で決定することができる．見つけたものを追加していき，$\mathcal{P}_k$ の元の個数が重複度に一致したところでアルゴリズムを停止する．

次に，σ_k のみたす微分方程式系，つまり零化イデアル $\mathrm{Ann}_{D_n}(\sigma_k)$ の構成法を述べる．計算量の観点から，ワイル代数におけるグレブナー基底計算を回避し，多項式環 $\mathbf{C}[x]$ における問題へと帰着させる．まず $D_n I_k \subset \mathrm{Ann}_{D_n}(\sigma_k)$ が分かる．これで零階作用素は尽きる．次に一階作用素 $\ell = \sum_{i=1}^n a_i(x)\partial_i + c(x) \in D_n$ を考えると，$\ell \in \mathrm{Ann}_{D_n}(\sigma_k)$ の必要十分条件は，"任意の f_k について $\sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \in I_k$" である．この連立方程式を $\mathbf{C}[x]$-加群のシチジーの問題とみなして解くことにより，すべての $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ が得られる．二階以上の作用素 P は，任意の $g \in I_k$ に対して，交換子 $[P, g]$ が，$\mathrm{Ann}_{D_n}(\sigma_k)$ の低階の元となることを用いて，見つけることができる．

最後に，T_k を求めるためのアルゴリズムを述べよう．デルタ関数の零化イデアルが $\mathrm{Ann}_{D_n}(\delta_{Z_k}) = D_n\sqrt{I_k}$ であることに注意すると，$\sigma_k = T_k\delta_{Z_k}$ より，$\mathrm{Ann}_{D_n}(\sigma_k) \cdot T_k \subset D_n\sqrt{I_k}$ であることが分かる．また，$T_k \in \mathrm{Span}_{(\mathbf{C}[x]/\sqrt{I_k})}(\mathcal{P}_k)$ であることも分かる．$\mathcal{P}_k$ の元は $P_1^{(k)} = 1$ かつ全次数辞書式順序で $P_i^{(k)} < P_j^{(k)}$ $(i < j)$ となるように番号付けられていると仮定してよい．まずは $\mathrm{Ann}_{D_n}(\sigma_k) \cdot S_k \subset D_n\sqrt{I_k}$ をみたす微分作用素で，次の形となるものを決定したい (最高次の係数が 1)：

$$S_k = P_{m_k}^{(k)} + P_{m_k-1}^{(k)} s_{m_k-1}(x) + \cdots + P_2^{(k)} s_2(x) + s_1(x) \in D_n, \quad (s_i(x) \in \mathbf{C}[x]/\sqrt{I_k})$$

係数が $\mathbf{C}[x]/\sqrt{I_k}$ の元であることから，未定係数を用いて $s_1(x), \ldots, s_{m_k-1}(x)$ を表すと，条件 $\mathrm{Ann}_{D_n}(\sigma_k) \cdot S_k \subset D_n\sqrt{I_k}$ は多項式イデアルに対する，イデアルメンバーシップ問題と解釈することができる．よって多項式 $s_1(x), \ldots, s_{m_k-1}(x)$ が求まり，S_k も決まる．次に，最高次の係数 $h(x)$，つまり $T_k = S_k h(x)$ をみたす多項式 $h(x)$ を定める．ヤコビ行列式 $J = \det\left(\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\right)$ を用いると，$J\sigma_k = m_k\delta_{Z_k}$ をみたすことに注意する．このとき，$\sigma_k = T_k\delta_{Z_k}$ とあわせると，$JS_kh_k(x)\delta_{Z_k} = m_k\delta_{Z_k}$ であるから，

$$JS_kh_k(x) - m_k \in \mathrm{Ann}_{D_n}(\delta_{Z_k}) = D_n\sqrt{I_k}$$

でなければならない．やはり $h_k(x) \in \mathbf{C}[x]/\sqrt{I_k}$ とみなしてもよいので，未定係数法を用いて $h_k(x)$ を決定できる．よって，Z_k におけるネーター作用素 $T_k = S_kh_k(x)$ が定まる．すべての既約成分に対して，この手順を繰り返すことで，既約成分ごとに分解されたネーター作用素の組 $\{T_1, \ldots, T_N\}$ が得られる．

以上より，$\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ が多項式である場合に適用可能な，多変数留数の計算アルゴリズムが与えられた．われわれはまた，この計算アルゴリズムを計算機代数システム Risa/Asir に実装した．

参考文献

[1] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley Interscience, 1978.

[2] 田島慎一, Noether 作用素と多変数留数計算アルゴリズム, 京都大学数理解析研究所講究録 **1431**(2005),123–136.

[3] 小原功任, 田島慎一, 多変数留数の計算アルゴリズム (シェイプ基底をもつ場合), 日本数学会 2016 年度秋季総合分科会, 函数論分科会講演アブストラクト, 37–38.

マトリス双対を用いた孤立特異点の不変量の計算

渋田 敬史 (九州大学) 田島 慎一 (筑波大学)

$\mathcal{O}_{X,O} = \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ を原点 O における収束ベキ級数環, $\mathfrak{m} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \subset \mathcal{O}_{X,O}$ を極大イデアル, $F = \mathcal{O}_{X,O}^{\oplus r}$ を階数 r の自由 $\mathcal{O}_{X,O}$-加群とする. 部分加群 $N \subset F$ で F/N が長さ有限のとき (つまり, $\mathbb{C}$ ベクトル空間として有限次元のとき), N の被約標準基底と呼ばれる N の性質の良い生成系を, マトリス双対を用いたアルゴリズムにより計算することができる. このアルゴリズムはイデアルの場合 [1] の一般化になっている. また, この計算結果を利用して, N の所属判定問題, F の元の N に関する正規形, 部分加群の共通部分, 商 $N : g$ の計算などが容易にできるようになる. 応用として, 完全交差孤立特異点の不変量などを計算できる.

$f = (f_1, \ldots, f_r)$, $f_i \in \mathcal{O}_{X,O}$, とし, $\langle f_1, \ldots, f_r \rangle \subset \mathcal{O}_{X,O}$ は完全交差で孤立特異点であるとする. $r = 1$ のときは, 孤立特異点の超曲面になる. ミルナー数 $\mu(f)$ を

$$\mu(f) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{r-i} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X,O}/C_i$$

とする. ただし, $C_i = \langle f_1, f_2, ..., f_{i-1}, \frac{\partial(f_1,...,f_i)}{x_{j_1},...,x_{j_i}} \mid 1 \leq j_1 < \cdots < j_i \leq n \rangle$. チュリナ数 $\tau(f)$ を

$$\tau(f) = \dim_{\mathbb{C}} F/(fF + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{X,O} \frac{\partial f}{\partial x_i})$$

とする. ミルナー数, チュリナ数は上のアルゴリズムによって計算できる. $\mathcal{O}_{X,O}$ 加群 $F/(fF + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{X,O} \frac{\partial f}{\partial x_i})$ の単項式からなる $\mathbb{C}$ ベクトル空間としての基底を $\{m_1, \ldots, m_\tau\}$ も計算可能なので, f の versal deformation $f + \sum_{i=1}^{\tau} c_i m_i$ も計算できる.

また, $\mathfrak{m}$-準素イデアル $I \subset \mathcal{O}_{X,O}$ に対して, Hilbert–Samuel 重複度

$$e(I) = \lim_{k \to \infty} \frac{n!}{k^n} \ell(R/I^k)$$

も計算できる. I の整閉包 $\overline{I} \subset \mathcal{O}_{X,O}$ を, 以下の性質を満たす $g \in \mathcal{O}_{X,O}$ の集合がなすイデアルとする: ある O の開近傍 U と定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $x \in U$ に対して

$$|g(x)| \leq C(|\bar{f}_1(x)| + \cdots |\bar{f}_r(x)|).$$

$I \subset J \subset \mathcal{O}_{X,O}$ に対し, $\overline{I} = \overline{J}$ と $e(I) = e(J)$ は同値なので, $\overline{I}$ の所属判定問題も解くことができる.

参考文献

[1] S. Tajima, Y. Nakamura and K. Nabeshima, Standard bases and algebraic local cohomology for zero dimensional ideals, Advanced Studies in Pure Mathematics **56** (2009), 341–361.

Bloch functions on bounded symmetric domains

Cho-Ho CHU (Queen Mary, University of London)
Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University)*1
Tatsuhiro HONDA (Hiroshima Institute of Technology)
Gabriela KOHR (Babeş-Bolyai University)

This talk is an announcement of [5]. The classical Bloch functions on the unit disc in $\mathbb{C}$ play an important role in geometric function theory and have been widely studied. The concept of Bloch functions has been extended to various complex domains in finite or infinite dimensions. In particular, it has been extended by Hahn [7] and Timoney [16, 17] to bounded homogeneous domains in $\mathbb{C}^n$, and to infinite dimensional Hilbert balls by Wicker [18] and Blasco, Galindo and Miralles [2], where a Hilbert ball is the unit ball of a complex Hilbert space and is a rank one bounded symmetric domain.

Following our study in [4], [8] of $\mathbb{C}^n$*-valued* Bloch mappings on n-dimensional bounded symmetric domains, our objective in this talk is to focus on *complex-valued* Bloch functions on bounded symmetric domains which can be infinite dimensional. We introduce the concept of Bloch functions on a possibly infinite dimensional bounded symmetric domain and show that many equivalent conditions for Bloch functions on the unit disc U are also equivalent on bounded symmetric domains of all dimensions, including the cases studied in [2, 16]. This enables us to extend a number of results concerning Bloch functions on the unit disc to bounded symmetric domains.

To generalize to infinite dimensional domains, our idea is the substitute for the Bergman metric with the Kobayashi metric. To achieve our results, we make use of the underlying Jordan structures of bounded symmetric domains. This is facilitated by Kaup's Riemann mapping theorem [11] which asserts that a bounded symmetric domain is biholomorphic to the open unit ball of a JB*-triple, which is a complex Banach space equipped with a Jordan triple structure. More precisely, a complex Banach space X is called a *JB*-triple* if it admits a continuous *Jordan triple product* $\{\cdot,\cdot,\cdot\} : X^3 \longrightarrow X$ which is symmetric and linear in the outer variables, but conjugate linear in the middle variable, and satisfies the followings

(i) $\{x, y, \{a, b, c\}\} = \{\{x, y, a\}, b, c\} - \{a, \{y, x, b\}, c\} + \{a, b, \{x, y, c\}\}$;

(ii) $a \,\square\, a$ is a hermitian operator on X which has non-negative spectrum;

(iii) $\|a \,\square\, a\| = \|a\|^2$

for $a, b, c, x, y \in X$, where the *box operator* $a \,\square\, b : X \to X$ is defined by $a \,\square\, b(\cdot) = \{a, b, \cdot\}$. The open unit ball of a JB*-triple is also a bounded symmetric domain.

A *bounded symmetric domain* is a bounded open connected set $\mathcal{D}$ in a complex Banach space such that each point $a \in \mathcal{D}$ is an isolated fixed point of an involutive holomorphic bijection $s_a : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ (i.e. s_a^2 is the identity) with a holomorphic inverse s_a^{-1}. Finite dimensional bounded symmetric domains have been classified by Cartan, the irreducible ones come in four classical Cartan domains, and two exceptional domains of dimension 16 and 27 respectively (cf. [13, p. 33]). The classical domains can be represented as open unit balls of finite dimensional JB*-triples (cf. [3, Theorem 2.5.9]).

Partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP16K05217
*1 e-mail: h.hamada@ip.kyusan-u.ac.jp
web: http://www.ip.kyusan-u.ac.jp/J/kougaku/tb/hamada/

By identifying a bounded symmetric domain $\mathcal{D}$ as the unit ball $\mathbb{B}_X$ of a JB*-triple X, we can describe the geometry of $\mathcal{D}$ via $\mathbb{B}_X$ in terms of the ambient Jordan structures. For instance, the automorphisms and the Kobayashi metric of $\mathbb{B}_X$ can be described completely by the Jordan triple product, which is particularly useful in our computation involving bounded symmetric domains. We will refer to [3, 14, 15] for further relevant details and references.

Let Ω be a domain in a complex Banach space Y. We denote by $H(\mathbb{B}_X, \Omega)$ the set of holomorphic mappings from $\mathbb{B}_X$ to Ω. We will equip $H(\mathbb{B}_X, Y)$ with the topology of *locally uniform convergence*, as defined in [6, Chapter IV,§3], so that a sequence (f^k) in $H(\mathbb{B}_X, Y)$ converges to $f \in H(\mathbb{B}_X, Y)$ in this topology if it converges uniformly on any open ball *strictly* contained in $\mathbb{B}_X$, which is equivalent to uniform convergence on compact subsets of $\mathbb{B}_X$ if $\dim X < \infty$. The automorphism group of $\mathbb{B}_X$, denoted by $\mathrm{Aut}(\mathbb{B}_X)$, is the group of biholomorphic maps from $\mathbb{B}_X$ onto itself. For a bounded symmetric domain $\mathbb{B}_X$, the automorphism group $\mathrm{Aut}(\mathbb{B}_X)$ acts transitively on $\mathbb{B}_X$.

References

[1] J.M. Anderson, J. Clunie and Ch. Pommerenke, On Bloch functions and normal functions, J. Reine Angew. Math. 270 (1974), 12–37.

[2] O. Blasco, P. Galindo and A. Miralles, Bloch functions on the unit ball of an infinite dimensional Hilbert space, J. Funct. Anal. 267 (2014), 1188–1204.

[3] C.-H. Chu, Jordan structures in geometry and analysis, Cambridge Tracts in Mathematics 190, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[4] C.-H. Chu, H. Hamada, T. Honda and G. Kohr, Distortion of locally biholomorphic Bloch mappings on bounded symmetric domains, J. Math. Anal. Appl. 441 (2016), 830-843.

[5] C.-H. Chu, H. Hamada, T. Honda and G. Kohr, Bloch functions on bounded symmetric domains, J. Funct. Anal., to appear.

[6] T. Franzoni and E. Vesentini, Holomorphic maps and invariant distances, North-Holland, Amsterdam, 1979.

[7] K.T. Hahn, Holomorphic mappings of the hyperbolic space into the complex Euclidean space and the Bloch theorem, Canad. J. Math. 27 (1975), 446–458.

[8] H. Hamada, A distortion theorem and the Bloch constant for Bloch mappings in $\mathbb{C}^n$, J. Anal. Math., to appear.

[9] H. Hamada and G. Kohr, Pluriharmonic mappings in $\mathbb{C}^n$ and complex Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., 426 (2015), 635–658.

[10] H. Hamada and G. Kohr, α-Bloch mappings on bounded symmetric domains in $\mathbb{C}^n$, submitted.

[11] W. Kaup, A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces, Math. Z. 183 (1983), 503–529.

[12] W. Kaup, Hermitian Jordan triple systems and the automorphisms of bounded symmetric domains, Math. Appl. 303, 204–214, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.

[13] S. Kobayashi, Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings, second edition, World Scientific, Singapore, 2005.

[14] O. Loos, Bounded symmetric domains and Jordan pairs, University of California, Irvine, 1977.

[15] G. Roos, Jordan triple systems, pp. 425–534, in J. Faraut, S. Kaneyuki, A. Koranyi, Q.-k. Lu, G. Roos, Analysis and geometry on complex homogeneous domains. Progress in Mathematics, 185. Birkhauser, Boston, 2000.

[16] R.M. Timoney, Bloch functions in several complex variables, I, Bull. London Math. Soc. 12 (1980), 241–267.

[17] R.M. Timoney, Bloch functions in several complex variables, II, J. Reine Angew. Math. 319 (1980), 1–22.

[18] F.D. Wicker, Generalized Bloch mappings in complex Hilbert space, Canad. J. Math. 29 (1977), 299–306.

Composition operators between Bloch spaces on bounded symmetric domains

Cho-Ho CHU (Queen Mary, University of London)
Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University)*1
Tatsuhiro HONDA (Hiroshima Institute of Technology)
Gabriela KOHR (Babeş-Bolyai University)

This talk is an announcement of [2]. One of the interesting topics concerning Bloch functions is that of composition operators. The questions of boundedness and compactness of composition operators between Bloch spaces on the unit disc in $\mathbb{C}$ has been studied by many mathematicians (see [3, 12, 13, 14] and the references therein). On the Euclidean unit ball in $\mathbb{C}^n$, this problem has been investigated in [3] and the references therein (see also [16, 19, 20]).

Shi and Luo [16] showed that composition operators on the Bloch space of bounded homogeneous domains in $\mathbb{C}^n$ are bounded and they gave a sufficient condition for these operators to be compact. They further showed that the latter condition was also necessary for the Euclidean unit balls. Later, Zhou and Shi [21] proved that this condition is necessary for the classical Cartan domains. Recently, Dai [4] obtained further equivalent conditions for the compactness of composition operators on the Bloch space of the Euclidean unit ball.

We introduce the concept of Bloch functions on a possibly infinite dimensional bounded symmetric domain and we show boundedness of composition operators between Bloch spaces and prove various criteria for compactness of these operators, extending the aforementioned results in [4, 16, 21] for finite dimensional domains.

Let X and Y be JB*-triples with norm $\|\cdot\|_X$ and $\|\cdot\|_Y$, respectively. Given a holomorphic mapping $\varphi : \mathbb{B}_X \to \mathbb{B}_Y$, we define the composition operator $C_\varphi : H(\mathbb{B}_Y, \mathbb{C}) \to H(\mathbb{B}_X, \mathbb{C})$, induced by φ, by

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi$$

for $f \in H(\mathbb{B}_Y, \mathbb{C})$.

Our first result is the boundedness of a composition operator C_φ between Bloch spaces on infinite dimensional domains, which extends a finite dimensional result in [16, Theorem 1].

Theorem 1 *Let $\mathbb{B}_X$ and $\mathbb{B}_Y$ be bounded symmetric domains realized as the unit balls of JB*-triples X and Y, respectively. Let $\varphi \in H(\mathbb{B}_X, \mathbb{B}_Y)$. Then C_φ is a bounded linear operator from $\mathcal{B}(\mathbb{B}_Y)$ to $\mathcal{B}(\mathbb{B}_X)$. If $\varphi(0) = 0$, then*

$$\|C_\varphi(f)\|_{\mathcal{B}(\mathbb{B}_X)} \le \|f\|_{\mathcal{B}(\mathbb{B}_Y)} \quad \text{for} \quad f \in \mathcal{B}(\mathbb{B}_Y). \tag{1}$$

For a Hilbert ball $\mathbb{B}_X$ and $\dim Y < \infty$, the composition operator C_φ restricts to a map between the little Bloch spaces on $\mathbb{B}_Y$ and $\mathbb{B}_X$ exactly when the coordinate components of φ are in $\mathcal{B}(\mathbb{B}_X)_0$, which extends a result in [16, Theorem 2] for the Euclidean balls.

Partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP16K05217
*1 e-mail: `h.hamada@ip.kyusan-u.ac.jp`
web: `http://www.ip.kyusan-u.ac.jp/J/kougaku/tb/hamada/`

Proposition 2 *Let $\mathbb{B}_X$ be a Hilbert ball and let $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in H(\mathbb{B}_X, \mathbb{B}_Y)$, where $\dim Y = n < \infty$. Then C_φ is a bounded linear operator from $\mathcal{B}(\mathbb{B}_Y)_0$ to $\mathcal{B}(\mathbb{B}_X)_0$ if and only if $\varphi_j \in \mathcal{B}(\mathbb{B}_X)_0$ for $j = 1, \ldots, n$.*

References

[1] C.-H. Chu, Jordan structures in geometry and analysis, Cambridge Tracts in Mathematics 190, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[2] C.-H. Chu, H. Hamada, T. Honda and G. Kohr, Bloch functions on bounded symmetric domains, J. Funct. Anal., to appear.

[3] C.C. Cowen and B.D. MacCluer, Composition operators on spaces of analytic functions. CRC Press, Boca Raton, Florida, USA (1994)

[4] J. Dai, Compact composition operators on the Bloch space of the unit ball, J. Math. Anal. Appl. 386 (2012), 294–299.

[5] T. Franzoni and E. Vesentini, Holomorphic maps and invariant distances, North-Holland, Amsterdam, 1979.

[6] H. Hamada, Weighted composition operators from H^∞ to the Bloch space of infinite dimensional bounded symmetric domains, submitted.

[7] H. Hamada and G. Kohr, α-Bloch mappings on bounded symmetric domains in $\mathbb{C}^n$, submitted.

[8] W. Kaup, A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces, Math. Z. 183 (1983), 503–529.

[9] W. Kaup, Hermitian Jordan triple systems and the automorphisms of bounded symmetric domains, Math. Appl. 303, 204–214, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.

[10] S. Kobayashi, Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings, second edition, World Scientific, Singapore, 2005.

[11] O. Loos, Bounded symmetric domains and Jordan pairs, University of California, Irvine, 1977.

[12] K. Madigan and A. Matheson, Compact composition operators on the Bloch space, Trans. Amer. Math. Soc. 347 (1995), 2679–2687.

[13] S. Ohno, K. Stroethoff and R. Zhao, Weighted composition operators between Bloch-type spaces, Rocky Mountain J. Math. 33 (2003), 191–215.

[14] J. Ramos-Fernández, A new essential norm estimate of composition operators from α-Bloch spaces into μ-Bloch spaces. Internat. J. Math. 24 no. 14, 1350104, 7 pp. (2013)

[15] G. Roos, Jordan triple systems, pp. 425–534, in J. Faraut, S. Kaneyuki, A. Koranyi, Q.-k. Lu, G. Roos, Analysis and geometry on complex homogeneous domains. Progress in Mathematics, 185. Birkhauser, Boston, 2000.

[16] J. Shi and L. Luo, Composition operators on the Bloch space of several complex variables, Acta Math. Sinica 16 (2000), 85–98.

[17] R.M. Timoney, Bloch functions in several complex variables, I, Bull. London Math. Soc. 12 (1980), 241–267.

[18] R.M. Timoney, Bloch functions in several complex variables, II, J. Reine Angew. Math. 319 (1980), 1–22.

[19] X. Zhang and J. Xiao, Weighted composition operator between μ-Bloch spaces on the unit ball, Sci. China Ser. A Math. 48 (2005), 1349–1368.

[20] M.Z. Zhang and W. Xu, Composition operators on α-Bloch spaces of the unit ball, Acta Math Sinica, English series 23 (2007), 1991–2002.

[21] Z. Zhou and J. Shi, Compactness of composition operators on the Bloch space in classical bounded symmetric domains, Michigan Math. J. 50 (2002), 381–405.

Weighted composition operators from H^∞ to the Bloch space of bounded symmetric domains

Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University)*

This talk is an announcement of [9]. Ohno [18] investigated the weighted composition operators from the Hardy space H^∞ to the Bloch space on the unit disc in $\mathbb{C}$. The study of the weighted composition operators from H^∞ to the α-Bloch space was carried out in [15] for the polydisc case, and [16] and [23] for the case of the Euclidean unit ball. In [1], the bounded weighted composition operators from H^∞ to the Bloch space of a bounded homogeneous domain in $\mathbb{C}^n$ were characterized and operator norm estimates were derived. In [6], they obtained sharper estimates on the operator norm of the multiplication operators from H^∞ to the Bloch space on a general bounded symmetric domain in $\mathbb{C}^n$ and determined such norm precisely in the case when the symbol of the operator fixes the origin as well as when the domain is the Euclidean unit ball or a bounded symmetric domain in $\mathbb{C}^n$ that has the unit disc as a factor, up to a biholomorphic transformation, and the symbol is not subjected to any restriction. They used this norm to show that for a large class of bounded symmetric domains in $\mathbb{C}^n$, there are no isometries among these multiplication operators.

On the other hand, Wicker [22] and Blasco, Galindo and Miralles [2] generalized the Bloch space to the unit ball of an infinite dimensional complex Hilbert space and Chu, Hamada, Honda and Kohr [5] generalized the Bloch space to an infinite dimensional bounded symmetric domain realized as the open unit ball of a JB*-triple X.

In this talk, using the Bloch norm introduced in [5], we will generalize the results in [1] and [6] to the Bloch space on an arbitrary bounded symmetric domain realized as the open unit ball of a JB*-triple X and give positive answers to the conjectures in [6]. We note that the Bloch norm introduced in [5] is different from that in Timoney [20], but they are equivalent, in the finite dimensional case.

We characterize the bounded weighted composition operators from H^∞ into the Bloch space. We also give estimates on the operator norm. The lower estimate is an improvement of that in [1].

We show that the bounded multiplication operators from H^∞ into the Bloch space are precisely those whose symbols are bounded. We also determine the operator norm of the bounded multiplication operator. As a corollary, we show that there are no isometric multiplication operators.

We show that there are no isometric composition operators.

References

[1] Allen, R.F., Colonna, F.: Weighted composition operators from H^∞ to the Bloch space of a bounded homogeneous domain. Integral Equations Operator Theory **66**, 21–40 (2010)

[2] Blasco, O., Galindo, P., Miralles, A.: Bloch functions on the unit ball of an infinite dimensional Hilbert space. J. Funct. Anal. **267**, 1188–1204 (2014)

[3] Chu, C.-H.: Jordan structures in geometry and analysis, in: Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 190, Cambridge University Press, Cambridge (2012)

[4] Chu, C.-H., Hamada, H., Honda, T., Kohr, G.: Distortion of locally biholomorphic Bloch mappings on bounded symmetric domains. J. Math. Anal. Appl. **441**, 830-843 (2016)

Partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP16K05217
* e-mail: `h.hamada@ip.kyusan-u.ac.jp`
web: `http://www.ip.kyusan-u.ac.jp/J/kougaku/tb/hamada/`

[5] Chu, C.-H., Hamada, H., Honda, T., Kohr, G.: Bloch functions on bounded symmetric domains, J. Funct. Anal. to appear.

[6] Colonna, F., Easley, G.R., Singman, D.: Norm of the multiplication operators from H^∞ to the Bloch space of a bounded symmetric domain. J. Math. Anal. Appl. **382**, 621–630 (2011)

[7] Hahn, K.T.: Holomorphic mappings of the hyperbolic space into the complex Euclidean space and the Bloch theorem. Canad. J. Math. **27**, 446–458 (1975)

[8] Hamada, H.: A distortion theorem and the Bloch constant for Bloch mappings in $\mathbb{C}^n$. J. Anal. Math., to appear.

[9] Hamada, H.: Weighted composition operators from H^∞ to the Bloch space of infinite dimensional bounded symmetric domains, submitted.

[10] Hamada, H., Honda, T., Kohr, G.: Trace-order and a distortion theorem for linearly invariant families on the unit ball of a finite dimensional JB*-triple. J. Math. Anal. Appl. **396**, 829–843 (2012)

[11] Hamada, H., Honda, T., Kohr, G.: Growth and distortion theorems for linearly invariant families on homogeneous unit balls in $\mathbb{C}^n$. J. Math. Anal. Appl. **407**, 398–412 (2013)

[12] Hamada, H., Kohr, G.: Pluriharmonic mappings in $\mathbb{C}^n$ and complex Banach spaces. J. Math. Anal. Appl. **426**, 635–658 (2015)

[13] Hamada, H., Kohr, G.: α-Bloch mappings on bounded symmetric domains in $\mathbb{C}^n$, submitted.

[14] Kaup, W.: A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces. Math. Z. **183**, 503–529 (1983)

[15] Li, S., Stević, S.: Weighted composition operators from H^∞ to the Bloch space on the polydisc. Abstr. Appl. Anal. **2007** Art. ID 48478, 13 pp (2007)

[16] Li, S., Stević, S.: Weighted composition operators between H^∞ and α-Bloch spaces in the unit ball. Taiwanese J. Math. **12**, 1625–1639 (2008)

[17] Loos, O.: Bounded symmetric domains and Jordan pairs, University of California, Irvine (1977)

[18] Ohno, S.: Weighted composition operators between H^∞ and the Bloch space. Taiwanese J. Math. **5**, 555–563 (2001)

[19] Roos, G.: Jordan triple systems, pp. 425–534, in J. Faraut, S. Kaneyuki, A. Koranyi, Q.-k. Lu, G. Roos, Analysis and geometry on complex homogeneous domains. Progress in Mathematics, 185. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA (2000)

[20] Timoney, R.M.: Bloch functions in several complex variables, I. Bull. London Math. Soc. **12**, 241–267 (1980)

[21] Timoney, R.M.: Bloch functions in several complex variables, II. J. Reine Angew. Math. **319**, 1–22 (1980)

[22] Wicker, F.D.: Generalized Bloch mappings in complex Hilbert space. Canad. J. Math. **29**, 299–306 (1977)

[23] Zhang, M., Chen, H.: Weighted composition operators of H^∞ into α-Bloch spaces on the unit ball. Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **25**, 265–278 (2009)

特別講演

円周の微分同相写像のタイヒミュラー空間

松崎 克彦 (早稲田大学)*

概　要

擬等角写像によるタイヒミュラー空間論の枠組みでは，普遍タイヒミュラー空間の部分空間として各種の滑らかさをもつ円周の自己同相写像のタイヒミュラー空間が考えられる．とくに微分が α 次のヘルダー連続性をもつ微分同相写像のタイヒミュラー空間を定義し，この空間に関する基本的な性質を述べる．たとえば，このタイヒミュラー空間は複素バナッハ多様体の構造をもち，位相は微分同相写像族の $C^{1+\alpha}$-位相から誘導される位相と一致し，位相群としての構造ももつ．

円周の対称写像のなすタイヒミュラー空間は普遍タイヒミュラー空間の葉層化を与える．この空間は漸近的タイヒミュラー空間の理論で重要な役割を果たし，微分同相写像のタイヒミュラー空間を内包する．フックス群の対称写像による共役が与えるヘルダー連続微分をもつ微分同相写像群への表現の剛性を紹介し，その応用を述べる．可積分なベルトラミ微分が定義するタイヒミュラー空間も考察し，その上にヴェイユ・ピーターソン計量の拡張を導入する．この空間の性質を利用して，ヘルダー連続微分をもつ微分同相写像からなる群が，同じ滑らかさをもつ写像によりフックス群の共役となるための条件を与える．

1. 普遍タイヒミュラー空間

一般的には，閉曲面 Σ_g の複素構造（双曲構造）の変形空間のことをタイヒミュラー空間といい，T_g で表す．複素構造の変形空間とは，Σ_g 上の複素構造と基点からの道（マーキング）の組のことであり，道は連続写像のホモトピー類で表現する．マーキングの違いを無視するモノドロミーはタイヒミュラーモジュラー群（写像類群）Mod_g で与えられ，Σ_g 上の複素構造の全体の空間であるモジュライ空間は T_g/Mod_g で表される．

普遍タイヒミュラー空間 T は上記を含め任意のタイヒミュラー空間を記述できる対象であり，タイヒミュラーモジュラー群に相当する Mod をもつ．Σ_g $(g \geq 2)$ の複素構造をひとつ固定して，フックス群 Γ で一意化すると，$\Gamma \subset \mathrm{Mod}$ の T への作用の固定点からなる T の部分空間が T_g に相当する．

この節の内容は [1], [15], [19], [20], [27] などの著書に解説がある．

1.1. 擬対称写像群と普遍タイヒミュラー空間

$\mathbb{D}$ を単位円板，$\mathbb{S} = \partial\mathbb{D}$ を単位円周とする．$\mathbb{S} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ を保つ一次分数変換全体（$\cong PSL(2,\mathbb{R})$）を Möb で表し，メビウス変換群とよぶ．$\mathbb{D}$ の自己擬等角写像 $\widehat{g}:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 全体からなる擬等角写像群を $\mathrm{QC}(\mathbb{D})$ で表す．これは等角写像群 $\mathrm{Conf}(\mathbb{D})$ を含む．$\widehat{g} \in \mathrm{QC}(\mathbb{D})$ は $\mathbb{S}$ まで向きを保つ同相写像として拡張し，$q:\mathrm{QC}(\mathbb{D}) \to \mathrm{Homeo}(\mathbb{S})$ でこの境界拡張を表すとする．$q(\mathrm{Conf}(\mathbb{D})) = \mathrm{Möb}$ である．

定義　単位円周 $\mathbb{S}$ の向きを保つ自己同相写像 $g:\mathbb{S}\to\mathbb{S}$ で，単位円板 $\mathbb{D}$ の自己擬等

本研究は科研費 (課題番号:25287021) の助成を受けたものである．
2010 Mathematics Subject Classification: 30F60, 37E30
* 〒169-8050 東京都新宿区西早稲田 1-6-1 早稲田大学 教育学部数学科
e-mail: `matsuzak@waseda.jp`

角写像 $\widehat{g}:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ の境界拡張 $(g=q(\widehat{g}))$ となるものを**擬対称写像**という．その全体 $\mathrm{QS}=q(\mathrm{QC}(\mathbb{D}))$ を擬対称写像群と定義する．

一方，$g\in\mathrm{QS}$ の $\mathbb{S}$ 自身の写像としての特徴づけも存在し，それは，対称な点間隔を擬対称（一様な誤差を許す対称性）にうつすことで与えられる．この誤差の度合いは擬対称定数で定量化される．$g\in\mathrm{QS}$ は一般には絶対連続とは限らない．

普遍タイヒミュラー空間 T を剰余類の集合により $T=\mathrm{M\ddot{o}b}\setminus\mathrm{QS}$ で定義する．$f\in\mathrm{QS}$ を代表元とする点を $[f]\in T$ で表す．$\mathbb{S}$ 上の QS を $\mathbb{D}$ に拡張して $\mathrm{QC}(\mathbb{D})$ を考えることにより，T に種々の構造を付加することができる．

擬対称写像群 QS は自然に右から普遍タイヒミュラー空間 $T=\mathrm{M\ddot{o}b}\setminus\mathrm{QS}$ に推移的に作用する．すなわち，$[f]\in T,\ g\in\mathrm{QS}$ に対して $g^*[f]=[f\circ g]$ と定義する：

$$T\times\mathrm{QS}\longrightarrow T:([f],g)\mapsto[f\circ g].$$

この QS が T のタイヒミュラーモジュラー群 Mod に相当するものである．

フックス群 $\Gamma\subset\mathrm{QS}$ の T への作用の固定点集合

$$T(\Gamma)=\{[f]\in T\mid\gamma^*[f]=[f]\ (\forall\gamma\in\Gamma)\}$$

はリーマン面 $\mathbb{D}/\Gamma$ のタイヒミュラー空間となる．条件 $\gamma^*[f]=[f]$ は $f\gamma f^{-1}\in\mathrm{M\ddot{o}b}$ と同値である．よって $T(\Gamma)$ は Γ の Möb の中での（擬対称写像による）変形空間とみなすことができる．

1.2. タイヒミュラー空間に関わる空間と写像

普遍タイヒミュラー空間に構造を与えるために基本となる空間と写像を以下のように定義する．

ベルトラミ係数の空間を

$$\mathrm{Bel}(\mathbb{D})=\{\mu\in L^\infty(\mathbb{D})\mid\|\mu\|_\infty<1\}$$

で定める．擬等角写像 $\widehat{g}\in\mathrm{QC}(\mathbb{D})$ の歪曲係数を $\mu_{\widehat{g}}(z)=\widehat{g}_{\bar{z}}/\widehat{g}_z$ で定義すると，$\mu_{\widehat{g}}$ は $\mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ に属する．逆に，ベルトラミ方程式 $w_{\bar{z}}/w_z=\mu(z)$ の解の存在と一意性（可測リーマン写像定理）より，任意の $\mu\in\mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ に対して，$\mu_{\widehat{g}}=\mu$ となる $\widehat{g}\in\mathrm{QC}(\mathbb{D})$ が $\mathrm{Conf}(\mathbb{D})$ の元の後からの合成を除いて一意的に存在する．これより

$$\mathrm{Conf}(\mathbb{D})\setminus\mathrm{QC}(\mathbb{D})=\mathrm{Bel}(\mathbb{D})$$

の同一視を得る．

境界拡張 $q:\mathrm{QC}(\mathbb{D})\to\mathrm{QS}$ の各項を $\mathrm{Conf}(\mathbb{D})=\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{D})\cong\mathrm{M\ddot{o}b}$ で割ると，

$$\mathrm{Conf}(\mathbb{D})\setminus\mathrm{QC}(\mathbb{D})=\mathrm{Bel}(\mathbb{D});\quad\mathrm{M\ddot{o}b}\setminus\mathrm{QS}=T$$

となる．これにより，タイヒミュラー射影 $\pi:\mathrm{Bel}(\mathbb{D})\to T$ を得る．

正則２次微分の空間を $\mathbb{D}^*=\widehat{\mathbb{C}}-\overline{\mathbb{D}}$ の双曲密度関数を $\rho_{\mathbb{D}^*}(z)=2/(|z|^2-1)$ として，バナッハ空間

$$B(\mathbb{D}^*)=\{\varphi\in\mathrm{Hol}(\mathbb{D}^*)\mid\|\varphi\|_\infty=\sup_{z\in\mathbb{D}^*}\rho_{\mathbb{D}^*}^{-2}(z)|\varphi(z)|<\infty\}$$

により定義する．このとき，ベアス射影 $\Phi : \mathrm{Bel}(\mathbb{D}) \to B(\mathbb{D}^*)$ を以下のように定める．

$\mu \in \mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ に対して，$\mathbb{D}$ 以外で 0 と拡張して $\widehat{\mathbb{C}}$ 上のベルトラミ係数 $\widehat{\mu} \in \mathrm{Bel}(\widehat{\mathbb{C}})$ を定義する．$\widehat{\mathbb{C}}$ におけるベルトラミ方程式の解の存在と一意性より，$w \in \mathrm{QC}(\widehat{\mathbb{C}})$ で $w_{\bar{z}}/w_z = \widehat{\mu}(z)$ をみたすものが $\mathrm{Conf}(\widehat{\mathbb{C}})$ の後からの合成を除き一意的に存在する．$\mathbb{D}^*$ への制限 $w|_{\mathbb{D}^*}$ は等角写像である．シュワルツ微分

$$S_w(z) = \left(\frac{w''(z)}{w'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{w''(z)}{w'(z)}\right)^2 \quad (z \in \mathbb{D}^*)$$

は $S_w \in B(\mathbb{D}^*)$（実際 $\|S_w\|_\infty < 3/2$）をみたす．ベルトラミ方程式の解の $\mathrm{Conf}(\widehat{\mathbb{C}})$ の合成による不定性はシュワルツ微分をとると消えるので，$\mu \in \mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ に対して $\varphi := S_w \in B(\mathbb{D}^*)$ が定義できる．これより $\varphi = \Phi(\mu)$ と定める．

ベルトラミ係数 $\mu_1, \mu_2 \in \mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ に対して，$\pi(\mu_1) = \pi(\mu_2)$ と $\Phi(\mu_1) = \Phi(\mu_2)$ は同値である．したがって $\Phi \circ \pi^{-1} : T \to B(\mathbb{D}^*)$ が単射写像として定義できる．この写像を $\beta := \Phi \circ \pi^{-1} : T \to \beta(T) \subset B(\mathbb{D}^*)$ と定義してベアス埋め込みという．$\beta(T)$ は有界集合である．

1.3. タイヒミュラー空間の構造

上で定義した空間と写像を図示すると以下のようになる：

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Bel}(\mathbb{D}) = \mathrm{Conf}(\mathbb{D}) \backslash \mathrm{QC}(\mathbb{D}) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\Phi"] & \\
T = \mathrm{M\ddot{o}b} \backslash \mathrm{QS} \arrow[rr, "\beta"'] & & \beta(T) = \Phi(\mathrm{Bel}(\mathbb{D})) \subset B(\mathbb{D}^*)
\end{tikzcd}$$

普遍タイヒミュラー空間 T の位相は，$\mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ からの π による商位相を与える．これは QS の擬対称定数から定義される位相と一致することが知られている．さらに $\mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ の双曲距離から誘導される擬距離がタイヒミュラー距離 d_T となる．

T および $\mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ は群構造をもつ．これは，群 QS および $\mathrm{QC}(\mathbb{D})$ の剰余類の代表系として，正規化条件をみたす元全体がとれること，およびその代表系が合成に関して群となることからわかる．ただし，位相群とはならない．このとき π は準同型で $\mathrm{Ker}\,\pi$ は自明なベルトラミ係数からなる正規部分群である．$\nu \in \mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ の逆元を右からかける $\mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ の右変換 $r_\nu : \mu \mapsto \mu * \nu^{-1}$ $(\nu \mapsto 0)$ は双正則自己同相写像である．

ベアス埋め込み β の連続性は，Φ の連続性と π の開写像性よりわかる．開写像性は $U \subset \mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ に対して $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{\nu \in \mathrm{Ker}\,\pi} r_\nu(U)$ であることに注意する．β の開写像性は，以下でみるように，任意の $\varphi \in \Phi(\mathrm{Bel}(\mathbb{D})) = \beta(T)$ において Φ が局所的に連続な切断（右逆写像）をもつことよりわかる．

定理 1 ([7]) ベアス埋め込み β は開集合 $\beta(T)$ の上への同相写像で，これにより，T は $B(\mathbb{D}^*)$ の有界領域としての複素構造をもつ．

さらに，ベアス射影 $\Phi : \mathrm{Bel}(\mathbb{D}) \to B(\mathbb{D}^*)$ は正則写像であり，任意の $\varphi \in \Phi(\mathrm{Bel}(\mathbb{D}))$ において，局所的に正則な切断 σ_φ をもつ．よって，$\mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ の正則な右変換 r_ν は，π により T の双正則変換 $R_\tau : T \to T$ $(\tau = \pi(\nu) \mapsto o = [\mathrm{id}])$ に射影される．これを T の基点変換という．

1.4. 原点の近傍での局所的な切断

ベアス射影 $\Phi : \mathrm{Bel}(\mathbb{D}) \to B(\mathbb{D}^*)$ の像 $\Phi(\mathrm{Bel}(\mathbb{D})) = \beta(T)$ は原点 0 中心で半径 1/2 の開円板 $U_0(1/2)$ を含むことが知られている．この円板上では Φ の正則切断が以下の形の線形な写像で具体的に与えられる．

定理 2 ([2]) $\sigma : U_0(1/2) \to \mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ を

$$\sigma(\varphi)(z) = -2\rho_{\mathbb{D}^*}^{-2}(z^*)(zz^*)^2\varphi(z^*)$$

で定義すると $\Phi \circ \sigma(\varphi) = \varphi$ をみたす．ここで $z^* = 1/\bar{z} \in \mathbb{D}^*$ は $z \in \mathbb{D}$ の $\mathbb{S}$ に関する鏡映点であり，$\rho_{\mathbb{D}^*}(z) = 2/(|z|^2 - 1)$ は $\mathbb{D}^*$ の双曲密度関数である．

1.5. 等角重心拡張による切断

境界拡張 $q : \mathrm{QC}(\mathbb{D}) \to \mathrm{QS}$ に対して，切断（右逆写像）$e : \mathrm{QS} \to \mathrm{QC}(\mathbb{D})$ として有用なものに等角重心拡張がある．

$g \in \mathrm{QS}$ に対して，$w \in \mathbb{D}$ から観察した平均を

$$\xi_g(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}} \gamma_w(g(\zeta))|d\zeta| = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}} \frac{g(\zeta) - w}{1 - \bar{w}g(\zeta)}|d\zeta|$$

で定義する．ただし，$\gamma_w \in \mathrm{Conf}(\mathbb{D})$ は $w \mapsto 0$ をみたす等角自己同相写像である．$\xi_g(w_0) = 0$ となる点 $w_0 \in \mathbb{D}$ は一意的に存在し，それを ξ_g の重心という．これを用いて $e(g)(0) = w_0$ と定める．一般の $z \in \mathbb{D}$ に対する $e(g)(z)$ は $\xi_{g\circ\gamma_z}$ の重心で与える．

この等角重心拡張 $e(g)$ は $\mathbb{D}$ の擬等角微分同相写像であり，構成の仕方より等角自然性

$$e(\gamma_1 \circ g \circ \gamma_2) = \gamma_1 \circ e(g) \circ \gamma_2 \quad (\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{M\ddot{o}b} \cong \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{D}))$$

をもつ．これより $\pi : \mathrm{Bel}(\mathbb{D}) \to T$ の切断 $s : T \to \mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ を得る．

定理 3 ([11]) 等角重心切断 $s : T \cong \beta(T) \to \mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ は実解析的である．この微分を複素化することにより，ベアス射影 Φ の $\mu \in \mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ における微分 $d_\mu\Phi$ の右逆複素線形写像が与えられる．とくに Φ の局所正則切断が得られる．

連続な大域的切断の存在により T（さらには等角自然性より任意のフックス群 Γ に対する $T(\Gamma)$) が可縮であることも示される．

2. 写像族による部分空間

擬対称写像群 QS の部分群に対象を限定して，普遍タイヒミュラー空間 T の部分空間を構成する．とくに写像になめらかさを要請すれば，このようにしてできた部分空間は，T のなかでフックス群の固定点集合で与えられる $T(\Gamma)$ とは別方向に広がる空間である．実際，フックス群 Γ が閉リーマン面を一意化するならば，非自明な $[f] \in T(\Gamma)$ に対して $f \in \mathrm{QS}$ は全特異な写像である．

なめらかさとは直接関連しないが,（漸近的な）対称写像群 $\mathrm{Sym} \subset \mathrm{QS}$ から構成される小タイヒミュラー空間 $T_0 = \mathrm{M\ddot{o}b} \setminus \mathrm{Sym} \subset T$ がこの方面の理論のひな形になる．

2.1. 漸近的等角写像，対称写像，小タイヒミュラー空間

漸近的等角の概念を用いて T の部分空間を導入する．ベルトラミ係数 $\mu \in \mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ と $t \in (0,1)$ に対して $\kappa_\mu(t) = \mathrm{ess.sup}_{|z|>1-t} |\mu(z)|$ とおく．減衰ベルトラミ係数の空間を

$$\mathrm{Bel}_0(\mathbb{D}) = \{\mu \in \mathrm{Bel}(\mathbb{D}) \mid \kappa_\mu(t) \to 0\ (t \to 0)\}$$

により定義する．

$\widehat{g} \in \mathrm{QC}(\mathbb{D})$ が漸近的等角写像であるとは，歪曲係数 $\mu_{\widehat{g}}$ が $\mathrm{Bel}_0(\mathbb{D})$ に属することである．漸近的等角写像全体からなる $\mathrm{QC}(\mathbb{D})$ の部分群を $\mathrm{AC}(\mathbb{D})$ と書き，漸近的等角写像群という．

定義　漸近的等角写像 $\widehat{g}$ の境界拡張による像 $g = q(\widehat{g}) \in \mathrm{QS}$ を**対称写像**といい，その全体からなる QS の部分群 $\mathrm{Sym} = q(\mathrm{AC}(\mathbb{D}))$ を対称写像群と定義する．

$g \in \mathrm{Sym}$ についても，$\mathbb{S}$ 自身の写像としての特徴づけが存在し，それは，対称な点間隔を漸近的対称（点間隔が小さくなれば，対称に近づく）にうつすことで与えられる．

小タイヒミュラー空間 を $T_0 = \mathrm{M\ddot{o}b} \setminus \mathrm{Sym}$ で定義する．これは T の位相で閉部分空間になる．位相は T の相対位相を与える．対応する減衰正則２次微分の空間を

$$B_0(\mathbb{D}^*) = \{\varphi \in B(\mathbb{D}^*) \mid \sup_{|z|<1+t} \rho_{\mathbb{D}^*}^{-2}(z)|\varphi(z)| \to 0\ (t \to 0)\}$$

で与える．これは $B(\mathbb{D}^*)$ の閉（バナッハ）部分空間である．

これらの空間に，普遍タイヒミュラー空間に関わる各写像を制限したとき，以下のような可換図式が成立することが示される ([16], [6])：

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Bel}_0(\mathbb{D}) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\Phi"] & \\ T_0 = \mathrm{M\ddot{o}b} \setminus \mathrm{Sym} \arrow[rr, "\beta"'] & & \beta(T) \cap B_0(\mathbb{D}^*) \end{tikzcd}$$

位相はそれぞれ元の空間の相対位相であるので，写像の連続性，したがって正則性は自明に成り立つ．

定理 4 ([16] [13] [14])　小タイヒミュラー空間 T_0 に関連して以下が成り立つ．

(1) $\Phi : \mathrm{Bel}_0(\mathbb{D}) \to B_0(\mathbb{D}^*)$ は正則である．

(2) Φ の局所切断 σ_φ は正則で $\varphi \in \beta(T) \cap B_0(\mathbb{D}^*)$ の近傍を $\mathrm{Bel}_0(\mathbb{D})$ の中にうつす．

(3) 等角重心切断 s は実解析的で $s(T_0) \subset \mathrm{Bel}_0(\mathbb{D})$ をみたす．T_0 は可縮である．

(4) 右変換 r_ν ($\nu \in \mathrm{Bel}_0(\mathbb{D})$) は $\mathrm{Bel}_0(\mathbb{D})$ の双正則自己同相写像で，双正則な T_0 の基点変換を導く．T_0 は T の部分群で位相群となる．

2.2. アファイン葉層化，漸近的タイヒミュラー空間

T の点 τ を原点 $o=[\mathrm{id}]$ にうつす基点変換を $R_\tau: T\to T$ とする．T を群とみなせば T_0 は部分群で，その τ^{-1} を代表元とする剰余類 $T_0\tau^{-1}$ が $R_\tau(T_0)$ である．

定理 5 ([15] [14]) 任意の $\tau\in T$ に対して，$\psi=\beta(\tau^{-1})\in B(\mathbb{D}^*)$ とおくと

$$\beta\circ R_\tau(T_0)=\beta(T)\cap\{\psi+B_0(\mathbb{D}^*)\}$$

が成り立つ．

これにより，剰余類分解 $T=\bigsqcup R_\tau(T_0)$ とアファイン部分空間による分解 $B(\mathbb{D}^*)=\bigsqcup\{\psi+B_0(\mathbb{D}^*)\}$ がベアス埋め込み β で一対一に保たれる．これを T の T_0 によるアファイン葉層化とよぶ．

漸近的タイヒミュラー空間を $AT=T_0\backslash T=\mathrm{Sym}\setminus\mathrm{QS}$ で定義する．位相は商位相で与える．上の定理より，ベアス埋め込み β は単射連続写像 $\widehat{\beta}: AT\to B_0(\mathbb{D}^*)\backslash B(\mathbb{D}^*)$ に射影する．この $\widehat{\beta}$ がさらに像の上への同相写像であることがわかり，AT に商バナッハ空間 $B_0(\mathbb{D}^*)\backslash B(\mathbb{D}^*)$ の有界領域としての複素構造を導入できる．

2.3. 可積分タイヒミュラー空間

ベルトラミ係数に双曲計量に関する可積分条件を課して，対応する T の部分空間を定義する．技術的理由により，以下では $p\geq 2$ に対して p 乗可積分性を考える．$\mathbb{D}$ の双曲密度関数を $\rho_{\mathbb{D}}(z)=2/(1-|z|^2)$ として，可積分ベルトラミ係数の空間を

$$\mathrm{Ael}^p(\mathbb{D})=\{\mu\in\mathrm{Bel}(\mathbb{D})\mid \|\mu\|_p^p=\int_{\mathbb{D}}|\mu(z)|^p\rho_{\mathbb{D}}^2(z)dxdy<\infty\}$$

とおく．

可積分タイヒミュラー空間を $T^p=\pi(\mathrm{Ael}^p(\mathbb{D}))$ により定義し，$T^p=\mathrm{M\ddot{o}b}\setminus\mathrm{Sym}^p$ をみたす QS の部分群を形式的に Sym^p と定義する．可積分正則 2 次微分の空間を

$$A^p(\mathbb{D}^*)=\{\varphi\in B(\mathbb{D}^*)\mid \|\varphi\|_p^p=\int_{\mathbb{D}^*}|\varphi(z)|^p\rho_{\mathbb{D}^*}^{2-2p}(z)dxdy<\infty\}$$

で与える．これは $B_0(\mathbb{D}^*)$ に含まれることが知られている．

注意 $g\in\mathrm{Sym}^p$ の $\mathbb{S}$ 自身の写像としての特徴づけは未解決問題であったが，最近 Sym^2 については，g が絶対連続で $h=\log g'$ が

$$\int_{\mathbb{S}\times\mathbb{S}}\frac{|h(x)-h(y)|^2}{\sin^2((x-y)/2)}dxdy<\infty$$

をみたすことと同値であることが Shen [29] により示された．

これらの空間に普遍タイヒミュラー空間に関わる写像を制限したとき，以下のような可換図式が成立することが示される ([9], [17])：

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Ael}^p(\mathbb{D}) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\Phi"] & \\ T^p=\mathrm{M\ddot{o}b}\setminus\mathrm{Sym}^p \arrow[rr, "\beta"'] & & \beta(T)\cap A^p(\mathbb{D}^*) \end{tikzcd}$$

ただし，位相はそれぞれの部分空間において，T およびもとの空間からの相対位相よりも強い位相を考える．実際，正則 2 次微分 φ のノルムには，定数 $c_p > 0$ が存在して $\|\varphi\|_\infty \le c_p \|\varphi\|_p$ なる評価がある．とくに $A^p(\mathbb{D}^*)$ の位相は $B(\mathbb{D}^*)$ からの相対位相より強い．$\mathrm{Ael}^p(\mathbb{D})$ には $\|\mu\|_p + \|\mu\|_\infty$ で定まる位相を与え，その π による商位相を T^p では考える．これらの位相のもとで，各写像の連続性を示すことが問題となる．正則性は連続性から一般論よりしたがう．

定理 6 ([9] [17] [31] [33] [36]) 可積分タイヒミュラー空間 T^p に関して以下が成り立つ．

(1) $\Phi : \mathrm{Ael}^p(\mathbb{D}) \to A^p(\mathbb{D}^*)$ は正則である．

(2) Φ の局所切断 σ_φ は正則で $\varphi \in \beta(T) \cap A^p(\mathbb{D}^*)$ の近傍を $\mathrm{Ael}^p(\mathbb{D})$ の中にうつす．

(3) 等角重心切断 s は連続で $s(T^p) \subset \mathrm{Ael}^p(\mathbb{D})$ をみたす．T_p は可縮である．

(4) $\nu \in s(T^p)$ に対して，右変換 r_ν は $\mathrm{Ael}^p(\mathbb{D})$ の双正則自己同相写像で，双正則な T^p の基点変換を導く．T^p は位相群である．

T^2 については，位相と両立する計量としてヴェイユ・ピーターソン計量が導入される ([9], [31])．原点 $o = [\mathrm{id}] \in T^2$ の接空間においてはヒルベルト空間 $A^2(\mathbb{D}^*)$ の内積を計量とし，任意の点 $\tau \in T^2$ の接空間においては，T^2 の基点変換の微分 $d_\tau R_\tau$ による原点での計量の引き戻しで与える．この計量の T^p での一般化については第 4 節で述べる．

2.4. 微分同相写像のタイヒミュラー空間

ある一定の滑らかさをもつ微分同相写像が定める T の部分空間を考える．具体的には，定数 $\alpha \in (0,1)$ に対して α 次のヘルダー連続微分をもつ微分同相写像群 $\mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ を扱う．ここで $g \in \mathrm{Diff}_+^1(\mathbb{S})$ が α 次のヘルダー連続微分をもつとは，ある定数 $c \ge 0$ が存在して，g の持ち上げ $\tilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について $|\tilde{g}'(x) - \tilde{g}'(y)| \le c|x-y|^\alpha$ が任意の $x, y \in \mathbb{R}$ でみたされることである．

微分同相写像群のタイヒミュラー空間を $T_0^\alpha = \mathrm{Möb} \setminus \mathrm{Diff}^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ と定義する．一方 α 次減衰ベルトラミ係数の空間を

$$\mathrm{Bel}_0^\alpha(\mathbb{D}) = \{\mu \in \mathrm{Bel}_0(\mathbb{D}) \mid \|\mu\|_{\alpha,\infty} = \mathrm{ess.sup}_{z\in\mathbb{D}}\, \rho_{\mathbb{D}}^\alpha(z)|\mu(z)| < \infty\}.$$

により定める．すなわち，$\mu \in \mathrm{Bel}_0^\alpha(\mathbb{D})$ は $\kappa_\mu(t) = O(t^\alpha)$ $(t \to 0)$ と同値である．α 次減衰正則 2 次微分のバナッハ空間を

$$B_0^\alpha(\mathbb{D}^*) = \{\varphi \in B_0(\mathbb{D}^*) \mid \|\varphi\|_{\infty,\alpha} = \sup_{z\in\mathbb{D}^*} \rho_{\mathbb{D}^*}^{-2+\alpha}(z)|\varphi(z)| < \infty\}$$

とする．

これらの空間に，普遍タイヒミュラー空間に関わる各写像を制限したとき，以下のような可換図式が成立することが示される ([8], [32], [4], [12])：

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Bel}_0^\alpha(\mathbb{D}) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\Phi"] & \\ T_0^\alpha = \mathrm{Möb} \setminus \mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S}) \arrow[rr, "\beta"'] & & \beta(T) \cap B_0^\alpha(\mathbb{D}^*) \end{tikzcd}$$

位相はそれぞれの部分空間において，T およびもとの空間からの相対位相よりも強い位相になっている．実際，$\mathrm{Bel}_0^\alpha(\mathbb{D})$ および $B_0^\alpha(\mathbb{D}^*)$ の重み付きの ∞ ノルムは重みなしの ∞ ノルムより大きい．T_0^α の位相は π による $\mathrm{Bel}_0^\alpha(\mathbb{D})$ の商位相を考える．また，$p\alpha > 1$ のとき，$T_0^\alpha \subset T^p$ であるが，このとき T_0^α の位相は T^p からの相対位相より強い．これらの位相のもとで，各写像の連続性を示すことが問題となる．正則性は連続性から一般論よりしたがう．

$\mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ には，id において C^1 収束と微分の α 次ヘルダー定数の収束から基本近傍系を定め，その右変換で任意の点での基本近傍系を与えて位相が定義できる．これを $\mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ の右一様位相とよぶことにする．すなわち $g \in \mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ に対して

$$p_{1+\alpha}(g) = \sup_{x\in\mathbb{S}} |g(x) - x| + \sup_{x\in\mathbb{R}} |\tilde{g}'(x) - 1| + \sup_{x,y\in\mathbb{R}} \frac{|\tilde{g}'(x) - \tilde{g}'(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

とおくと，$g_n \to g \in \mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ は $p_{1+\alpha}(g_n \circ g^{-1}) \to 0\ (n \to \infty)$ により定義される．T_0^α には $\mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ の右一様位相から誘導される位相も入る．

定理 7 ([24] [25]) 微分同相写像群のタイヒミュラー空間 T_0^α に関して以下が成り立つ．

(0) $\mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ の右一様位相から誘導される T_0^α の位相は π による $\mathrm{Bel}_0^\alpha(\mathbb{D})$ の商位相と一致する．

(1) $\Phi : \mathrm{Bel}_0^\alpha(\mathbb{D}) \to B_0^\alpha(\mathbb{D}^*)$ は正則である．

(2) Φ の局所切断 σ_φ は正則で $\varphi \in \beta(T) \cap B_0^\alpha(\mathbb{D}^*)$ の近傍を $\mathrm{Bel}_0^\alpha(\mathbb{D})$ の中にうつす．

(3) 等角重心切断 s は連続で $s(T_0^\alpha) \subset \mathrm{Bel}_0^\alpha(\mathbb{D})$ をみたす．T_0^α は可縮である．

(4) 右変換 r_ν ($\nu \in \mathrm{Bel}_0^\alpha(\mathbb{D})$) は $\mathrm{Bel}_0^\alpha(\mathbb{D})$ の双正則自己同相写像で，双正則な T_0^α の基点変換を導く．T_0^α は位相群である．

2.5. VMOA タイヒミュラー空間

カルレソン測度を与えるベルトラミ係数および $\mathbb{S}$ 上の BMO 保存性から新しい部分空間を考察することができる．$\mathbb{D}$ 上の測度 m がカルレソン測度であるとは，$\mathbb{S}$ 上の任意の区間 I に対して

$$C(I) = \{r\zeta \mid \zeta \in I,\ 1 - (2\pi)^{-1}|I| \le r \le 1\}$$

とおくとき，

$$\|m\|_c^2 = \sup_{I\subset\mathbb{S}} \frac{m(C(I))}{|I|} < \infty$$

をみたすことをいう．$\mathbb{D}$ 上のカルレソン測度の全体を $CM(\mathbb{D})$ であらわす．$\mathbb{D}^*$ 上のカルレソン測度も同様に定義する．またカルレソン測度が境界で退化するとは，$m(C(I))/|I| \to 0\ (|I| \to 0)$ をみたすことをいい，このようなものからなる $CM(\mathbb{D})$ の部分族を $CM_0(\mathbb{D})$ で表す．

境界で退化するカルレソン測度が定めるベルトラミ係数の空間を

$$\mathrm{Bel}_v(\mathbb{D}) = \{\mu \in \mathrm{Bel}(\mathbb{D}) \mid |\mu(z)|^2 \rho_{\mathbb{D}}(z)dxdy \in CM_0(\mathbb{D})\}$$

とし，境界で退化するカルレソン測度が定める正則２次微分の空間を

$$B_v(\mathbb{D}^*) = \{\varphi \in B(\mathbb{D}^*) \mid \rho_{\mathbb{D}^*}^{-3}(z)|\varphi(z)|^2 dxdy \in CM_0(\mathbb{D}^*)\}$$

とする．これは，$m^* = \rho_{\mathbb{D}^*}^{-3}(z)|\varphi(z)|^2 dxdy$ に対するカルレソンノルム $\|m^*\|_c$ によりバナッハ空間となり，$B_0(\mathbb{D}^*)$ に含まれることが示される．

一方，$\mathbb{S}$ 上の BMO 関数の引き戻しが BMO となるような向きを保つ自己同相写像として強擬対称写像が特徴づけられるが，それら全体のなす群を SQS とする．さらに $g \in \mathrm{QS}$ が強対称写像であることを g が絶対連続で $\log g' \in \mathrm{VMO}(\mathbb{S})$ となることで定義し，その全体のなす群を SS とする．$\mathrm{SS} \subset \mathrm{SQS} \cap \mathrm{Sym}$ が成り立つ．このとき，BMOA タイヒミュラー空間を $T_b = \text{Möb}\,\backslash \mathrm{SQS}$ で定義し，VMOA タイヒミュラー空間を $T_v = \text{Möb}\,\backslash \mathrm{SS}$ で定義する．以下では後者のみ扱う．

これらの空間に，普遍タイヒミュラー空間に関わる各写像を制限したとき，以下のような可換図式が成立することが示される ([5], [10], [30])：

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Bel}_v(\mathbb{D}) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\Phi"] & \\
T_v = \text{Möb}\,\backslash \mathrm{SS} \arrow[rr, "\beta"'] & & \beta(T) \cap B_v(\mathbb{D}^*)
\end{tikzcd}$$

位相はそれぞれの部分空間において，T およびもとの空間からの相対位相よりも強い位相になっている．$\mathrm{Bel}_v(\mathbb{D})$ には $m = |\mu(z)|^2 \rho_{\mathbb{D}}(z) dxdy$ のカルレソンノルム $\|m\|_c$ と $\|\mu\|_\infty$ との和から定まる位相を与え，T_v には π による商位相を与える．これらの位相のもとで，各写像の連続性を示すことが問題となる．正則性は連続性から一般論よりしたがう．

一方， SS には $\log g'$ の BMO ノルムから定義される位相（BMO 位相とよぶ）が入り，T_v にはそれから誘導される位相も入る．

定理 8 ([30] [10] [34] [35]) VMO タイヒミュラー空間 T_v に関して以下が成り立つ．

(0) SS の BMO 位相から誘導される T_v の位相は，π による $\mathrm{Bel}_v(\mathbb{D})$ の商位相と一致する．

(1) $\Phi : \mathrm{Bel}_v(\mathbb{D}) \to B_v(\mathbb{D}^*)$ は正則写像である．

(2) Φ の局所切断 σ_φ は正則で $\varphi \in \beta(T) \cap B_v(\mathbb{D}^*)$ の近傍を $\mathrm{Bel}_v(\mathbb{D})$ にうつす．

(3) 等角重心切断 s は 連続で $s(T_v) \subset \mathrm{Bel}_v(\mathbb{D})$ をみたす．T_v は可縮である．

(4) $\nu \in s(T_v)$ に対して，右変換 r_ν は $\mathrm{Bel}_v(\mathbb{D})$ の双正則自己同相写像で，双正則な T_v の基点変換を導く．

3. 剛性定理

フックス群 $\Gamma \subset \text{Möb}$ の擬対称写像 $f \in \mathrm{QS}$ による共役 $f\Gamma f^{-1}$ が Möb に属するような f の同値類の空間として Γ の変形空間であるタイヒミュラー空間 $T(\Gamma)$ が定義できた．Möb への表現をみるのと同様にして，QS の各種の部分群 P への表現を考えれば，

Γ の異なる変形空間が得られる．Γ の P での変形あるいは表現の剛性とは，$f \notin P$ による変形が自明なものとなる現象である．

特別なフックス群 Γ の性質（たとえば三角群）として剛性を考える場合が通常であるが，ここでは Γ は一般として，対称写像 $f \in \mathrm{Sym}$ による微分同相写像群 P への表現の剛性について述べる．

3.1. 対称写像による共役の剛性定理

対称写像による共役の剛性の基礎となる結果は以下のとおりである．このタイプの剛性定理の証明にはタイヒミュラー空間のベアス埋め込みを利用することが有効になるので，最も基本的な場合の証明でそれを紹介する．

定理 9 ([26]) 純楕円型ではない群 $\Gamma \subset \mathrm{M\ddot{o}b}$ の対称写像 $f \in \mathrm{Sym}$ による共役が $f\Gamma f^{-1} \subset \mathrm{M\ddot{o}b}$ をみたすならば $f \in \mathrm{M\ddot{o}b}$ である．

（証明） $\varphi = \beta([f]) \in B_0(\mathbb{D}^*)$ とおく．条件 $f\Gamma f^{-1} \subset \mathrm{M\ddot{o}b}$ は任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $\gamma^*\varphi = \varphi$ と同値である．このとき

$$\rho_{\mathbb{D}^*}^{-2}(z)|\varphi(z)| = \rho_{\mathbb{D}^*}^{-2}(z)|(\gamma^*\varphi)(z)| = \rho_{\mathbb{D}^*}^{-2}(\gamma(z))|\varphi(\gamma(z))|$$

がすべての $z \in \mathbb{D}^*$ で成り立つ．Γ の元の列で $|\gamma(z)| \to 1$ となるものを考えれば，$\varphi \in B_0(\mathbb{D}^*)$ より $\rho_{\mathbb{D}^*}^{-2}(z)|\varphi(z)| = 0$ がわかる．よって $\varphi = 0$ であり，これは $f \in \mathrm{M\ddot{o}b}$ を意味する． ■

ヘルダー連続微分をもつ微分同相写像群への表現に関して，次のような剛性定理が成り立つ．この結果の応用については以下で述べる．

定理 10 ([26]) 双曲型元を含む群 $\Gamma \subset \mathrm{M\ddot{o}b}$ の対称写像 $f \in \mathrm{Sym}$ による共役が $f\Gamma f^{-1} \subset \mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ をみたすならば $f \in \mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ である．

3.2. 普遍タイヒミュラー空間のアファイン葉層化

ヘルダー連続微分をもつ微分同相写像全体のなす群を

$$\mathrm{Diff}_+^{>1}(\mathbb{S}) = \bigcup_{\alpha>0} \mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$$

とおき，$T_0^{>0} = \mathrm{M\ddot{o}b} \setminus \mathrm{Diff}_+^{>1}(\mathbb{S})$ をヘルダー連続微分をもつ微分同相写像のタイヒミュラー空間と定義する．対応するベルトラミ係数の空間，正則 2 次微分の空間をそれぞれ $\mathrm{Bel}_0^{>0}(\mathbb{D})$, $B_0^{>0}(\mathbb{D}^*)$ とする．

小タイヒミュラー空間 T_0 による普遍タイヒミュラー空間 T のアファイン葉層化と同様にして，$T_0^{>0}$ による T のアファイン葉層化が得られる．すなわち，$T_0^{>0}\backslash T$ と $B_0^{>0}(\mathbb{D}^*)\backslash B(\mathbb{D}^*)$ がベアス埋め込みにより保たれる．

定理 11 ([26]) ベアス埋め込み $\beta : T \to \beta(T) \subset B(\mathbb{D}^*)$ は任意の $g \in \mathrm{QS}$ に対して

$$\beta(g^*(T_0^{>0})) = \beta(T) \cap \{\beta([g]) + B_0^{>0}(\mathbb{D}^*)\}$$

をみたす．

これより，β から像の上への同相写像 $\beta_0^{>0} : T_0^{>0}\backslash T \to B_0^{>0}(\mathbb{D}^*)\backslash B(\mathbb{D}^*)$ が定義できる．

3.3. 群不変対称構造のタイヒミュラー空間

フックス群 $\Gamma \subset \text{Möb}$ に対して，

$$\text{QS}(\Gamma) = \{f \in \text{QS} \mid f\Gamma f^{-1} \subset \text{Möb}\}$$

を考える．$\text{Möb} \setminus \text{QS}(\Gamma)$ は Γ のタイヒミュラー空間 $T(\Gamma)$ と一致する．同様にして

$$\text{QS}_{\text{Sym}}(\Gamma) = \{f \in \text{QS} \mid f\Gamma f^{-1} \subset \text{Sym}\}$$

とおくと，$\text{Möb} \setminus \text{QS}_{\text{Sym}}(\Gamma) \subset T$ は $T(\Gamma)$ を含む. Γ-不変対称構造のタイヒミュラー空間を

$$AT(\Gamma) = \text{Sym} \setminus \text{QS}_{\text{Sym}}(\Gamma) \subset AT$$

により定義する．これは Γ の対称写像群の中での変形空間とみなすことができる．リーマン面 $\mathbb{D}/\Gamma$ の漸近的タイヒミュラー空間とは異なるものであることに注意する．

普遍タイヒミュラー空間から漸近的タイヒミュラー空間への射影を

$$a : T = \text{Möb} \setminus \text{QS} \to AT = T_0 \backslash T = \text{Sym} \setminus \text{QS}$$

で表す．$AT(\Gamma)$ は $aT(\Gamma) := a(T(\Gamma))$ を含む．漸近的タイヒミュラー空間の商ベアス埋め込み $\hat{\beta} : AT \to B_0(\mathbb{D}^*)\backslash B(\mathbb{D}^*)$ により $AT(\Gamma)$ は $B_0(\mathbb{D}^*)\backslash B(\mathbb{D}^*)$ の Γ-不変部分空間の有界領域に埋め込まれる．これにより $AT(\Gamma)$ に複素構造が導入される.

定理 12 ([23]) 位数無限のフックス群 Γ が $\dim T(\Gamma) \neq 0$ をみたすとする．このとき $AT(\Gamma)$ は無限次元である．$T(\Gamma)$ は a により双正則に $AT(\Gamma)$ に埋め込まれ，$aT(\Gamma) \subsetneqq AT(\Gamma)$ となる.

3.4. 剛性問題の別の定式化

漸近的タイヒミュラー空間 AT の場合と同様にして，$DT = \text{Diff}_+^{>1}(\mathbb{S}) \setminus \text{QS}$ とおき，ここから AT への射影を $\theta : DT \to AT$ とする．対称写像群の中での変形空間と同様にして，フックス群 $\Gamma \subset \text{Möb}$ に対して,

$$\text{QS}_D(\Gamma) = \{f \in \text{QS} \mid f\Gamma f^{-1} \subset \text{Diff}_+^{>1}(\mathbb{S})\}$$

とし，Γ のヘルダー連続微分をもつ微分同相写像群の中での変形空間を

$$DT(\Gamma) = \text{Diff}_+^{>1}(\mathbb{S}) \setminus \text{QS}_D(\Gamma) \subset DT$$

により定義する．定理 10 と定理 11 より次がわかる．

定理 13 ([26]) 双曲型元を含むフックス群 $\Gamma \subset \text{Möb}$ に対して

$$\theta|_{DT(\Gamma)} : DT(\Gamma) \to AT$$

は単射であり，像は $aT(\Gamma) \subset \theta(DT(\Gamma)) \subset AT(\Gamma)$ をみたす.

定理 12 の仮定のもとでは $aT(\Gamma) \subsetneqq AT(\Gamma)$ である．定理 13 の $\theta(DT(\Gamma))$ に関する包含関係により，フックス群 Γ の対称写像群およびヘルダー連続微分をもつ微分同相写像群への表現の剛性を定義することができる．予想としては $aT(\Gamma) = \theta(DT(\Gamma))$ を主張する．

3.5. 高階の微分同相写像群への表現

定理 13 の応用として，2 階以上も含めて，微分の階数が 1 より大きい微分同相写像群 $\mathrm{Diff}_+^r(\mathbb{S})$ $(r>1)$ の中でのフックス群 Γ の変形について以下の結果を得る．前と同様に

$$D^rT = \mathrm{Diff}_+^r(\mathbb{S})\backslash \mathrm{QS}, \quad \theta^r : D^rT \to AT;$$
$$\mathrm{QS}_{D^r}(\Gamma) = \{f \in \mathrm{QS} \mid f\Gamma f^{-1} \subset \mathrm{Diff}_+^r(\mathbb{S})\}, \quad D^rT(\Gamma) = \mathrm{Diff}_+^r(\mathbb{S})\backslash \mathrm{QS}_{D^r}(\Gamma) \subset D^rT$$

を定義する．

定理 14 双曲型元を含むフックス群 $\Gamma \subset \text{Möb}$ と $r>1$ に対して

$$\theta^r|_{D^rT(\Gamma)} : D^rT(\Gamma) \to AT$$

は単射である．とくに $G \subset \mathrm{Diff}_+^r(\mathbb{S})$ がそのようなフックス群の擬対称共役で，$f \in \mathrm{Sym}$ が $fGf^{-1} \subset \mathrm{Diff}_+^r(\mathbb{S})$ をみたすならば $f \in \mathrm{Diff}_+^r(\mathbb{S})$ となる．

証明には，まず定理 13 を用いて f が微分同相写像であることをいい，Ghys-Tsuboi の結果の拡張 [28, p.152] を適用する．

AT に射影したフックス群 Γ の変形空間の包含関係は，

$$aT(\Gamma) \subset \theta^r(D^rT(\Gamma)) \subset \theta(DT(\Gamma)) \subset AT(\Gamma) \quad (r>1)$$

となる．Ghys [18] の剛性定理（以下の定理 22）はさらに Γ がココンパクトであるとき，十分大きい r に対して（たとえば $r \geq 3$）$aT(\Gamma) = \theta^r(D^rT(\Gamma))$ であることを含んでいる．

4. 微分同相写像群の共役問題

前節ではフックス群の擬対称写像による共役の剛性を問題にしたが，この節では与えられた微分同相写像群 G が同じ滑らかさをもつ微分同相写像 f によりフックス群に共役となるための条件について考察する．いいかえれば，フックス群から G への自明な変形が存在するための条件を G を用いて与える．

条件は，G の可積分タイヒミュラー空間への作用が固定点をもつための条件として定式化される．共役写像 f が G と同じ滑らかさをもつ微分同相写像としてとれることは剛性定理の帰結である．可積分タイヒミュラー空間にヴェイユ・ピーターソン計量を与え，その幾何学的な性質から等張変換群として作用する G の固定点の存在を示す．

4.1. 可積分タイヒミュラー空間のヴェイユ・ピーターソン計量

p 乗可積分タイヒミュラー空間 T^p $(p \geq 2)$ に対してヴェイユ・ピーターソン計量の拡張を定義することができる．まず，原点 $o = [\mathrm{id}] \in T^p \cong \beta(T) \cap A^p(\mathbb{D}^*)$ においては，接ベクトル $\varphi \in A^p(\mathbb{D}^*)$ の長さを $\omega_o^p(\varphi) = 2\|\ell_\varphi\|_*$ で与える．ここで $\|\ell_\varphi\|_*$ は，$\varphi \in A^p(\mathbb{D}^*)$ が定める $A^q(\mathbb{D}^*)$ $(1/p+1/q=1)$ 上の線形汎関数

$$\ell_\varphi : A^q(\mathbb{D}^*) \to \mathbb{C}; \quad \psi \mapsto \int_{\mathbb{D}^*} \psi(z)\overline{\varphi(z)}\rho_{\mathbb{D}^*}^{-2}(z)dxdy$$

の作用素ノルムである．任意の点 $\tau \in T^p$ に対しては，基点変換 $R_\tau : T^p \to T^p$ のベアス埋め込みによる共役を $R_\tau^* = \beta \circ R_\tau \circ \beta^{-1}$ として，計量の引き戻し $\omega_\tau^p(dR_\tau^*(\varphi)) = \omega_o^p(\varphi)$ により定義する．

定義 p 乗可積分タイヒミュラー空間 T^p $(p \geq 2)$ に対して，各点 $\tau \in T^p$ の接空間 $A^p(\mathbb{D}^*)$ 上の計量 ω_τ^p を **p-ヴェイユ・ピーターソン計量**という．ω_τ^p により誘導される T^p 上の距離 d_{WP}^p を p-ヴェイユ・ピーターソン距離という．

注意 任意の $\varphi \in A^p(\mathbb{D}^*)$ に対して $\|\varphi\|_p/3 \leq \|\ell_\varphi\|_* \leq \|\varphi\|_p$ が成り立つ．とくに $(A^p(\mathbb{D}^*), \|\cdot\|_p)$ と $(A^p(\mathbb{D}^*), \|\ell_\bullet\|_*)$ は同型であり，p-ヴェイユ・ピーターソン計量の定義に $\|\cdot\|_p$ を用いても定数倍の差しかない．

命題 15 p-ヴェイユ・ピーターソン計量は T^p 上の連続なフィンスラー計量であり，Sym^p の作用で不変である．Sym^p は (T^p, d_{WP}^p) に等長的，推移的に作用する．

4.2. ヴェイユ・ピーターソン計量の完備性

可積分タイヒミュラー空間 T^p 上のヴェイユ・ピーターソン計量の完備性については $p = 2$ の場合には Cui [9] により示されている．同様の議論で一般の場合の証明もできる．

補題 16 T^p の原点のある近傍 U と定数 $c \geq 1$ が存在して，任意の $\tau, \tau' \in U$ に対して

$$c^{-1}\|\beta(\tau) - \beta(\tau')\|_p \leq d_{WP}^p(\tau, \tau') \leq c\|\beta(\tau) - \beta(\tau')\|_p$$

が成り立つ．

この補題と T^p の等質性および $A^p(\mathbb{D}^*)$ の完備性より結論を得る．

定理 17 ([26]) p-ヴェイユ・ピーターソン距離 d_{WP}^p に関して T^p は完備である．

4.3. 計量の比較定理

普遍タイヒミュラー空間 $T \cong \beta(T) \subset B(\mathbb{D}^*)$ 上のタイヒミュラー計量 ω は，原点 $o \in T$ と接ベクトル $\varphi \in B(\mathbb{D}^*)$ に対して $\omega_o(\varphi) = 2\|\ell_\varphi\|_*$ で与えられる．ただし作用素ノルムは線形汎関数

$$\ell_\varphi : A^1(\mathbb{D}^*) \to \mathbb{C}; \quad \psi \mapsto \int_{\mathbb{D}^*} \psi(z)\overline{\varphi(z)}\rho_{\mathbb{D}^*}^{-2}(z)dxdy$$

に対するものである．この計量より定まる距離がタイヒミュラー距離 d_T と一致する．$1/p + 1/q = 1$ に対して $b_p = \sup_{A^1(\mathbb{D}^*)-\{0\}} \|\psi\|_q/\|\psi\|_1 < \infty$ とおくと，定義より直ちにタイヒミュラー計量の T^p への制限と p-ヴェイユ・ピーターソン計量について，次の比較を得る．

命題 18 任意の $\tau \in T^p$ と接ベクトル $\varphi \in A^p(\mathbb{D}^*)$ に対して $\omega_\tau(\varphi) \leq b_p\omega_\tau^p(\varphi)$ が成り立つ．とくに $d_T \leq b_p d_{WP}^p$ が T^p 上で成り立つ．

一方，p-ヴェイユ・ピーターソン距離は，ベルトラミ微分の p 乗可積分ノルムと ∞ ノルムで評価することが可能である．

定理 19 ([26]) 任意の $\mu \in \mathrm{Ael}^p(\mathbb{D})$ に対して，$d_{WP}^p(o, \pi(\mu)) \leq C\|\mu\|_p$ が成り立つ．ここで C は $\|\mu\|_\infty$ のみによる定数である．

4.4. 2乗可積分タイヒミュラー空間の固定点

2乗可積分タイヒミュラー空間 T^2 での群作用の固定点の存在を考えることにより，微分同相写像群 G のフックス群への共役問題の解答を以下のように述べることができる．ただし，G が T^2 に作用するようにするために，G の滑らかさに条件がつくことに注意する．

定理 20 ([26]) 非可換群 $G \subset \mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ $(\alpha > 1/2)$ がメビウス変換群に $f \in \mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ により共役（すなわち $fGf^{-1} \subset \mathrm{M\ddot{o}b}$）となるための必要十分条件は，次の (1) と (2) の両方が成り立つことである．

(1) 正定数 $k_\infty < 1$ が存在して，任意の $g \in G$ が $\inf_{\pi(\mu)=[g]} \|\mu\|_\infty \leq k_\infty$ をみたす；

(2) 正定数 $k_2 < \infty$ が存在して，任意の $g \in G$ が $\inf_{\pi(\mu)=[g]} \|\mu\|_2 \leq k_2$ をみたす．

（証明の概略） 必要性をみるのは容易なので，十分性のみ概略を示す．$\alpha > 1/2$ のとき，$\mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S}) \subset \mathrm{Sym}^2$ が成り立つ．これより G の T への作用は，2乗可積分タイヒミュラー空間 T^2 を不変にすることがわかる．また，その作用は T^2 のヴェイユ・ピーターソン距離 d_{WP}^2 に関して等長的である．定理 19 から，条件 (1)，(2) より，原点 $o = [\mathrm{id}] \in T^2$ の軌道 $G(o)$ は d_{WP}^2 に関して有界である．一方，定理 17 より (T^2, d_{WP}^2) は完備であり，$p = 2$ の場合，ヴェイユ・ピーターソン計量はエルミート計量で負曲率をもつことが [31], [37] により示されている．これより (T^2, d_{WP}^2) は CAT(0) 空間であり，その性質より，有界軌道をもつ G は T^2 に固定点 τ をもつことがわかる．$f \in \mathrm{Sym}^2 \subset \mathrm{Sym}$ を用いて $\tau = [f]$ とおくと，$fGf^{-1} \in \mathrm{M\ddot{o}b}$ である．$\Gamma = fGf^{-1}$ に対して定理 10 を適用すると $f^{-1} \in \mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ が従う． ■

4.5. 共役問題の一般化

定理 20 における仮定 $\alpha > 1/2$ をおかない一般の主張が可能かどうかを考察する．任意の $g \in \mathrm{Sym}^p$ $(p \geq 2)$ に対して

$$\kappa_p(g) = \inf_{\pi(\mu)=[g]} \left(\int_{\mathbb{D}} \left(\frac{|\mu(z)|^2}{1-|\mu(z)|^2} \right)^{p/2} \rho_{\mathbb{D}}^2(z)dxdy \right)^{1/p}$$

と定義する．

定理 21 ([26]) 非可換群 $G \subset \mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ が $f \in \mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ により $fGf^{-1} \subset \mathrm{M\ddot{o}b}$ となるための十分条件は，$p\alpha > 1$ をみたす p に対して $\kappa_p(g) \leq \varepsilon_p$ がすべての $g \in G$ で成り立つことである．ここで，ε_p は p のみにより定まる十分小さな正定数である．

注意 定理 20 と同様な主張ができない理由は，(T^p, d_{WP}^p) の等長変換群が有界軌道をもてば固定点をもつことがまだ証明できないからである．かわりに一様凸なバナッハ空間 $A^p(\mathbb{D}^*)$ への等長作用で固定点の存在を示し，それが $T^p \cong \beta(T) \cap A^p(\mathbb{D}^*)$ に存在することを主張するために，軌道が十分に原点に近いという仮定をおいた．

5. ヘルダー連続微分をもたない微分同相写像群への表現

剛性定理や共役問題において，微分同相写像に微分のヘルダー連続性を課すことはタイヒミュラー空間論の枠組みでは本質的である．この条件をはずすとどのようになるのかを次の Ghys の剛性定理をもとにして考える．この定理は，十分なめらかな微分同相群の中へのココンパクトなフックス群の忠実な表現は，本質的にそのクラスの元での共役で与えられることを主張している．

定理 22 ([18]) Γ_0 を閉リーマン面を一意化するフックス群とする．任意の中への同型写像 $\theta : \Gamma_0 \to \mathrm{Diff}^3_+(\mathbb{S})$ に対して，あるフックス群 Γ への同型 $\theta_0 : \Gamma_0 \to \Gamma$ と $f \in \mathrm{Diff}^3_+(\mathbb{S})$ が存在して，$\theta(\gamma) = f\theta_0(\gamma)f^{-1}$ $(\forall \gamma \in \Gamma_0)$ が成り立つ．

この定理が $\mathrm{Diff}^1_+(\mathbb{S})$ に対しては成立しないであろう理由を，タイヒミュラー空間論から説明するのがこの節の目標である．定理 9 より，この課題のためには，フックス群 Γ に対してある $f \in \mathrm{Sym} - \mathrm{Diff}^1_+(\mathbb{S})$ で $f\Gamma f^{-1} \subset \mathrm{Diff}^1_+(\mathbb{S})$ となるものを構成すればよい．

5.1. $\mathrm{Diff}^1_+(\mathbb{S})$ のベルトラミ係数による特徴づけ

歪曲係数 $\mu \in \mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ をもつ $\mathbb{D}$ の擬等角自己同相写像を $\widehat{f^\mu} \in \mathrm{QC}(\mathbb{D})$, その境界拡張を $f^\mu = q(\widehat{f^\mu}) \in \mathrm{QS}$ とする．$\kappa_\mu(t) = \mathrm{ess.sup}_{|z|>1-t}\, |\mu(z)|$ による $f^\mu \in \mathrm{Diff}^1_+(\mathbb{S})$ であるための十分条件は以下のように知られている．

定理 23 ([8] [3]) $\displaystyle\int_0 \frac{\kappa_\mu(t)}{t}dt < \infty$ ならば $f^\mu \in \mathrm{Diff}^1_+(\mathbb{S})$ となる．

$f^\mu \in \mathrm{Diff}^{1+\alpha}_+(\mathbb{S})$ は $\kappa_\mu(t) = O(t^\alpha)$ と同値で，このとき条件 $\int_0 \frac{\kappa_\mu(t)}{t}dt < \infty$ はみたされている．一方，明らかな必要条件としては次がある．関連する結果として，$\int_0 \frac{\kappa_\mu(t)^2}{t}dt < \infty$ ならば f^μ が強対称写像（SS）であることも知られている．

命題 24 $f^\mu \in \mathrm{Diff}^1_+(\mathbb{S})$ ならば $f^\mu \in \mathrm{SS}$ である．

この命題より $f = f^\mu \in \mathrm{Sym} - \mathrm{Diff}^1_+(\mathbb{S})$ の候補を以下のように構成する．$\mu_0 \in \mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ を Γ-不変なベルトラミ係数とする．これは $\pi(\mu_0) \in T(\Gamma)$ を意味し，より具体的には

$$(\gamma^*\mu_0)(z) := \mu_0(\gamma(z))\frac{\overline{\gamma'(z)}}{\gamma'(z)} = \mu_0(z) \quad (\forall \gamma \in \Gamma)$$

をみたすものである．簡単のため，さらに $|\mu_0(z)| \equiv c > 0$ となるものを選ぶ（タイヒミュラー微分など）．$0 < \varepsilon \le 1/2$ に対して

$$\mu(z) = \left\{ \left(\frac{1}{-\log(1-|z|)} \right)^\varepsilon \wedge 1 \right\} \mu_0(z)$$

とおく．$\mu \in \mathrm{Bel}_0(\mathbb{D})$ より $f^\mu \in \mathrm{Sym}$ は明らかである．一方

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{|\mu(z)|^2}{1-|z|}dxdy \asymp \int_0^1 \frac{1-t}{t(\log t)^{2\varepsilon}}dt = \infty$$

がわかる．これが $\mu * \mathrm{Ker}\,\pi = \pi^{-1}(\pi(\mu))$ に属するすべてのベルトラミ係数で言えれば，$f^\mu \notin \mathrm{SS}$ より $f^\mu \notin \mathrm{Diff}^1_+(\mathbb{S})$ がわかる．

5.2. 微分可能性の証明

上で構成した μ に対し $\widehat{f}=\widehat{f}_\mu$ とし，$\widehat{f}\gamma\widehat{f}^{-1}$ $(\gamma\in\Gamma\subset \mathrm{Möb}(\mathbb{D}))$ の歪曲係数 $\nu(z)$ を計算する．

$$|\nu(\widehat{f}(z))|=|\mu_{\widehat{f}\gamma\widehat{f}^{-1}}(\widehat{f}(z))|=\left|\frac{(\gamma^*\mu)(z)-\mu(z)}{1-\overline{(\gamma^*\mu)(z)}\mu(z)}\right|\leq\frac{|(\gamma^*\mu)(z)-\mu(z)|}{1-\|\mu\|_\infty^2}$$

であるが，最後の項の分子は

$$\begin{aligned}|(\gamma^*\mu)(z)-\mu(z)|&\asymp\left|\left(\frac{1}{-\log(1-|\gamma(z)|)}\right)^{\varepsilon}-\left(\frac{1}{-\log(1-|z|)}\right)^{\varepsilon}\right||\mu_0(z)|\\&\leq\varepsilon\left(\frac{1}{\xi}\right)^{1+\varepsilon}|\log(1-|\gamma(z)|)-\log(1-|z|)|\end{aligned}$$

のように評価される．

ここで ξ は $-\log(1-|\gamma(z)|)$ と $-\log(1-|z|)$ の間のある実数で，この間隔は z によらず γ のみによる $|\log|\gamma'(z)||$ と比較可能な定数で押さえられる．これより

$$|\nu(\widehat{f}(z))|=O((-1/\log(1-|z|))^{1+\varepsilon})\quad(|z|\to 1)$$

を得る．最後に $1-|\widehat{f}(z)|=O((1-|z|)^{1/K_{\widehat{f}}})$（$K_{\widehat{f}}$ は $\widehat{f}$ の最大歪曲度）を用いると，$t=1-|z|$ として

$$\kappa_\nu(t)=O\left(\left(\frac{1}{-\log t}\right)^{1+\varepsilon}\right);\quad\int_0\frac{\kappa_\nu(t)}{t}dt<\infty$$

がわかる．よって定理 23 より $f\gamma f^{-1}\in\mathrm{Diff}_+^1(\mathbb{S})$ となる．

注意　同様の議論で $f\in\mathrm{Sym}-\mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ かつ $f\Gamma f^{-1}\subset\mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ をみたす $f=f^\mu$ を構成しようとする．$\mu(z)=(1-|z|)^\beta\mu_0(z)$ $(\beta<\alpha)$ とおくと $\kappa_\mu(t)=O(t^\beta)$ より $f^\mu\notin\mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ は期待できる．しかし，$\widehat{f}\gamma\widehat{f}^{-1}$ の歪曲係数の計算は

$$\begin{aligned}|(\gamma^*\mu)(z)-\mu(z)|&\asymp\left|e^{\beta\log(1-|\gamma(z)|)}-e^{\beta\log(1-|z|)}\right||\mu_0(z)|\\&\leq\beta e^{\beta\xi}|\log(1-|\gamma(z)|)-\log(1-|z|)|\\&\preceq\beta|\gamma'(z)|^\beta(1-|z|)^\beta|\log|\gamma'(z)||=O((1-|z|)^\beta)\end{aligned}$$

であるため，指数関数の微分で冪 β をより大きくできず，$f\gamma f^{-1}\in\mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ とは結論できない．

参考文献

[1] L. Ahlfors, *Lectures on quasiconformal mappings*, Van Nostrand, 1966 (邦訳：谷口雅彦, 擬等角写像講義, 丸善, 2015).

[2] L. Ahlfors and G. Weill, *A uniqueness theorem for Beltrami equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 975–978.

[3] J. M. Anderson, J. Becker and F. D. Lesley, *On the boundary correspondence of asymptotically conformal automorphisms*, J. London Math. Soc. **38** (1988), 453–462.

[4] J. M. Anderson, A. Cantón and J. L. Fernández, *On smoothness of symmetric mappings*, Complex Var. Theory Appl. **37** (1998), 161–169.

[5] K. Astala and M. Zinsmeister, *Teichmüller spaces and BMOA*, Math. Ann. **289** (1991), 613–625.

[6] J. Becker and C. Pommerenke, *Über die quasikonforme Fortsetzung schlichter Funktionen*, Math. Z. **161** (1978), 69–80.

[7] L. Bers, *A non-standard integral equation with applications to quasiconformal mappings*, Acta Math. **116** (1966), 113–134.

[8] L. Carleson, *On mappings, conformal at the boundary*, J. Anal. Math. **19** (1967), 1–13.

[9] G. Cui, *Integrably asymptotic affine homeomorphisms of the circle and Teichmüller spaces*, Sci. China Ser. A **43** (2000), 267–279.

[10] G. Cui and M. Zinsmeister, *BMO-Teichmüller spaces*, Illinois J. Math. **48** (2004), 1223–1233.

[11] A. Douady and C. J. Earle, *Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle*, Acta Math. **157** (1986), 23–48.

[12] E. Dyn′kin, *Estimates for asymptotically conformal mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. **22** (1997), 275–304.

[13] C. J. Earle, F. P. Gardiner and N. Lakic, *Asymptotic Teichmüller space, Part I: The complex structure,* In the tradition of Ahlfors and Bers, Contemporary Math. **256** (2000), 17–38.

[14] C. J. Earle, V. Markovic and D. Saric, *Barycentric extension and the Bers embedding for asymptotic Teichmüller space*, Complex manifolds and hyperbolic geometry, Contemporary Math. vol. 311, pp. 87–105, Amer. Math. Soc., 2002.

[15] F. P. Gardiner and N. Lakic, *Quasiconformal Teichmüller theory*, Mathematical Surveys and Monographs vol. 76, Amer. Math. Soc., 2000.

[16] F. Gardiner and D. Sullivan, *Symmetric structure on a closed curve*, Amer. J. Math. **114** (1992), 683–736.

[17] H. Guo, *Integrable Teichmüller spaces*, Sci. China Ser. A **43** (2000), 47–58.

[18] É. Ghys, *Rigidité différentiable des groupes fuchsiens*, Publ. Math. IHES. **78** (1994), 163–185.

[19] Y. Imayoshi and M. Taniguchi, *An introduction to Teichmüller spaces*, Springer, 1992.

[20] O. Lehto, *Univalent functions and Teichmüller spaces*, Graduate Texts in Mathematics vol. 109, Springer, 1986.

[21] K. Matsuzaki, *The universal Teichmüller space and diffeomorphisms of the circle with Hölder continuous derivatives*, Handbook of group actions (Vol. I), Advanced Lectures in Mathematics vol. 31, pp. 333–372, Higher Education Press and International Press.

[22] K. Matsuzaki, *Circle diffeomorphisms, rigidity of symmetric conjugation and affine foliation of the universal Teichmüller space*, Advanced Studies in Pure Mathematics vol. 72, Mathematical Society of Japan, pp. 145–180.

[23] K. Matsuzaki, *The Teichmüller space of group invariant symmetric structures on the circle*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. (to appear)

[24] K. Matsuzaki, *Teichmüller spaces of circle diffeomorphisms with Hölder continuous derivatives*, arXiv:1607.06300.

[25] K. Matsuzaki, *Continuity of the barycentric extension of circle diffeomorphisms of Hölder continuous derivatives*, arXiv:1607.06310.

[26] K. Matsuzaki, *Rigidity of groups of circle diffeomorphisms and Teichmüller spaces*, arXiv:1607.06316.

[27] S. Nag, *The complex analytic theory of Teichmüller spaces*, John Wiley & Sons, 1988.

[28] A. Navas, *Groups of circle diffeomorphisms*, Chicago Lectures in Math., Univ. Chicago Press, 2011.

[29] Y. Shen, *Weil-Petersson Teichmüller space*, arXiv:1304.3197.

[30] Y. Shen and H. Wei, *Universal Teichmüller space and BMO*, Adv. Math. **234** (2013), 129–148.

[31] L. Takhtajan and L. Teo, *Weil-Petersson metric on the universal Teichmüller space*, Mem. Amer. Math. Soc. **183** (2006), No. 861.

[32] L. Tam and T. Wan, *Quasi-conformal harmonic diffeomorphism and the universal Teichmüller space*, J. Diff. Geom. **42** (1995), 368–410.

[33] S. Tang, *Some characterizations of the integrable Teichmüller space*, Sci. China Ser. A **56** (2013), 541–551.

[34] S. Tang, H. Wei and Y. Shen, *On Douady-Earle extension and the contractibility of the VMO-Teichmüller space*, J. Math. Anal. Appl. **442** (2016), 376–384.

[35] Y. Wu and Y. Qi, *Douady-Earle extension of the strongly symmetric homeomorphism*, Kodai Math. J. **39** (2016), 410–424.

[36] M. Yanagishita, *Introduction of a complex structure on the p-integrable Teichmüller space*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **39** (2014), 947–971.

[37] M. Yanagishita, *Kählerity and negativity of Weil-Petersson metric on square integrable Teichmüller Space*, J. Geom. Anal. (to appear)

開 Riemann 面内の領域に対する強い円板的性質

阿部 誠・中村 豪 *

本稿の内容は Abe・Nakamura［2］の概要である．

複素空間はつねに被約かつ第 2 可算とする．複素空間 R の局所解析的集合 E について，制限写像 $\mathscr{O}(R) \to \mathscr{O}(E)$ の像が $\mathscr{O}(E)$ においてコンパクト開位相に関して稠密であるとき，E は R において Runge であるという．

一方，複素空間 R の開集合 D が R において**強い円板的性質**をみたすとは，写像 $\varphi : \overline{\Delta} \to R$ が連続，$\varphi|_\Delta$ が正則，$\varphi(\partial\Delta) \subset D$ ならば $\varphi(\overline{\Delta}) \subset D$ が成り立つことである．ただし，$\Delta := \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < 1\} \subset \mathbb{C}$.

命題 1 R を Stein 空間，D を R の Stein 開集合とする．このとき，D の任意の連結成分が R において Runge ならば，D は R において強い円板的性質をみたす．

注意 2 R を複素空間，D を R の開集合とするとき，D が R において Runge ならば，D の任意の連結成分は R において Runge である．逆は一般には正しくない．例えば，$R := \mathbb{C} \setminus \{0\}$，$E_1 := \{t \in \mathbb{C} \mid 0 < |t| < 1\}$，$E_2 := \{t \in \mathbb{C} \mid |t| > 1\}$，$D := E_1 \cup E_2$ のとき，E_1，E_2 は R において Runge であるが，D は R において Runge でない（Narasimhan［5, p. 159］）．

定理 3（Abe［1］） Stein 多様体 R の開集合 D が単連結かつ有理型 $\mathscr{O}(R)$ 凸ならば，D は R において強い円板的性質をみたす．

一般には，命題 1 の逆は正しくない．Nishino［6］，Duval［4］，Wold［7］により，$\mathbb{C}^2$ 内の単連結かつ有理凸な連結開集合で，$\mathbb{C}^2$ において Runge ではないものが存在する．命題 3 より，これらは $R = \mathbb{C}^2$ の場合の反例である．一方，$\mathbb{C}$ 内の開集合 D が $\mathbb{C}$ において Runge であることと D が $\mathbb{C}$ において強い円板的性質をみたすことは同値である．そこで，$\dim R = 1$ のとき，命題 1 の逆が正しいかどうかについて調べたい．

コンパクトでない 1 次元連結複素多様体を**開 Riemann 面**という．任意の開 Riemann 面は Stein である（Behnke・Stein［3］）．開 Riemann 面は，$\mathbb{C}$ の連結開集合と両正則のとき，**単葉型**とよばれる．

定理 4 R を単葉型 Riemann 面，D を R の開集合とする．このとき，次の２条件は同値である．

(1) D は R において強い円板的性質をみたす．

(2) D の任意の連結成分は R において Runge である．

---

* 本研究は部分的に独立行政法人日本学術振興会学術研究助成基金助成金基盤研究（C）（課題番号 25400147）の助成を受けた．

注意 5 一般の開 Riemann 面 R について, 命題 1 の逆が正しいわけではない. $T := \mathbb{C}/\Gamma$, $\Gamma := \langle \alpha, \beta \rangle_{\mathbb{Z}}$, を 1 次元複素トーラス, $\pi : \mathbb{C} \to T$ を射影とする. $0 < \rho < 1/2$ とし, $\tilde{W}_0 := \left\{ x\alpha + y\beta \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 < \rho^2 \right\}$, $R := T \setminus \{\pi(0)\}$, $W := \pi(\tilde{W}_0)$, $D := W \setminus \{\pi(0)\}$ とおく. このとき, D は R の連結開集合であり, D は R において強い円板的性質をみたす. しかし, D は R において Runge ではない.

問題 6 命題 1 の逆が成り立つような開 Riemann 面 R は単葉型に限るか？

定理 7 R を純 1 次元 Stein 空間とし, R の正規化の任意の連結成分は単葉型と仮定する. このとき, R の任意の開集合 D に対して, 次の 2 条件は同値である.

(1) D は R において強い円板的性質をみたす.

(2) D の任意の既約成分は R において Runge である.

注意 8 R を Stein 空間, D を R の Stein 開集合とするとき, D の任意の連結成分が R において Runge ならば, D の任意の既約成分は R において Runge である. 逆は一般には正しくない. 例えば, $R := \left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = z^2 (z+1) \right\} \setminus \left\{ (\frac{5}{4}, -\frac{15}{8}) \right\}$, $\tilde{R} := \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$, $\pi : \tilde{R} \to R$, $t \mapsto (t^2 - 1, t^3 - t)$, $\tilde{E}_1 := \left\{ t \in \mathbb{C} \mid 0 < \left| t + \frac{3}{2} \right| < 2 \right\}$, $\tilde{E}_2 := \left\{ t \in \mathbb{C} \mid \left| t + \frac{3}{2} \right| > 2 \right\}$, $\tilde{D} := \tilde{E}_1 \cup \tilde{E}_2$. $E_1 := \pi(\tilde{E}_1)$, $E_2 := \pi(\tilde{E}_2)$, $D := \pi(\tilde{D})$ とする. このとき, R は 1 次元既約 Stein 空間, $\pi : \tilde{R} \to R$ は R の正規化, D は R の連結開集合, $D = E_1 \cup E_2$ は D の既約分解であり, E_1, E_2 は R において Runge であるが, D は R において Runge ではない.

参考文献

[1] Abe, M.: Polynomial convexity and strong disk property. J. Math. Anal. Appl. **321**, 32–36 (2006)

[2] Abe, M., Nakamura, G.: Strong disk property for domains in open Riemann surfaces. Filomat **30**, 1711–1716 (2016)

[3] Behnke, H., Stein, K.: Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen. Math. Ann. **120**, 430–461 (1949)

[4] Duval, J.: Convexité rationelle des surfaces lagrangiennes. Invent. Math. **104**, 581–599 (1991)

[5] Narasimhan, R.: Imbedding of open Riemann surfaces. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II **1960**, 159–165 (1960)

[6] Nishino, T.: Un exemple concernant la convexité par rapport aux polynômes. J. Math. Kyoto Univ. **6**, 85–90 (1966)

[7] Wold, E.F.: A Fatou-Bieberbach domain in $\mathbb{C}^2$ which is not Runge. Math. Ann. **340**, 775–780 (2008)

阿部 誠（Makoto Abe）
〒739-8521 東広島市鏡山 1-7-1 広島大学 総合科学部 自然探究領域
e-mail: abem@hiroshima-u.ac.jp

中村 豪（Gou Nakamura）
〒470-0392 豊田市八草町八千草 1247 愛知工業大学 基礎教育センター
e-mail: gou@aitech.ac.jp

Complex surface singularities with a fixed integral homology sphere link

奥間 智弘 (山形大学)*

概 要

Fixing a topological type of a normal surface singularity, which is an integral homology sphere link of degree one, we compute fundamental analytic invariants of possible complex structures supported on it.

This is a joint work with A. Némethi (Rényi Institute of Mathematics).

複素2次元正規特異点 (X, o) の近傍は**リンク**といわれる実3次元多様体 Σ 上の錘と同相であり, リンクは特異点解消グラフ（最小良特異点解消の例外集合の双対グラフ）$\Gamma := \Gamma(X, o)$ により決定され, その逆も成り立つ．複素2次元正規特異点の位相型が与えられたとき，それを実現する複素構造をとらえることはもちろん，幾何種数 p_g などの基本的な不変量を求めることさえ一般には大変困難である．

リンクが有理ホモロジー球面である場合に制限すると，Γ の不変量

$$p_g(\Gamma) := \max\{p_g(Y, o) \mid (Y, o) \text{ は複素2次元正規特異点，} \Gamma(Y, o) = \Gamma\}$$

について，次のような結果が知られている．ただし，$\mathrm{Path}(\Gamma)$ はLaufer の計算列の方法から得られる Γ の不変量であり，$p_g(\Gamma) \leq \mathrm{Path}(\Gamma)$ を満たす ([2])．

Theorem 1 (cf. [3],[4]) 以下の特異点に対して $p_g(X, o) = p_g(\Gamma) = \mathrm{Path}(\Gamma)$ が成り立つ.

(1) weighted homogeneous normal surface singularities,
(2) superisolated hypersurface singularities,
(3) isolated hypersurface Newton–nondegenerate singularities,
(4) rational singularities,
(5) Gorenstein elliptic singularities (p_g is the length of the elliptic sequence).

特異点解消 $\widetilde{X}$ 上の標準因子がサイクル (これを $-Z_K$ と表す) に数値的同値であるとき，(X, o) は数値的 Gorenstein 特異点とよばれる．このとき，

$$p_g(X, o) = \dim H^0(\mathcal{O}_{\widetilde{X}})/H^0(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-Z_K))$$

が成り立ち，雑な言い方であるが，p_g は例外集合上での vanishing order が小さい関数の多さを表す．上の定理やこの事から，特異点 (X, o) が数値的 Gorenstein で $p_g(X, o) = p_g(\Gamma)$ を満たすとき，(X, o) が Gorenstein になることや，極大イデアルサイクルが最小になることを期待するのは自然なことかもしれない (講演者はそう思っていました)．しかし，今回報告する結果はそれが成り立たないことを示す．

本研究は科研費 (課題番号:26400064) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: Primary 32S25; Secondary 14B05, 14J17
キーワード：surface singularity, integral homology sphere, geometric genus, multiplicity, Kodaira singularity, splice type singularity
* 〒990-8560 山形市小白川町一丁目4-12 山形大学 理学部
e-mail: okuma@sci.kj.yamagata-u.ac.jp

我々は，図 1 に示した Γ を固定し，可能な p_g の値とそれを実現する特異点の基本的な性質について考察した．

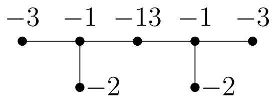


図 1: The graph Γ (すべての種数は 0, 数字は自己交点数)

Γ に対応するリンク Σ は整ホモロジー球面である (実際，交点行列はユニモジュラーである)．特に，数値的 Gorenstein である．基本サイクルを Z_{fun}, 極大イデアルサイクルを $Z_{\max}$ によって表す．Z_{fun} は Γ で決まるが，$Z_{\max}$ はそうではなく，複素構造による．ちなみに，最小特異点解消の例外集合は二つの $(2,3)$-cusp を持つ，自己交点数 (-1) の有理曲線である．

以下，(X,o) は $\Gamma(X,o)=\Gamma$ を満たす任意の複素2次元正規特異点とし，$\widetilde{X}\to X$ を最小良特異点解消とする．

Theorem 2 $\mathrm{Path}(\Gamma)=4$, $2\le p_g(X,o)\le 3$. If (X,o) is Gorenstein, then $p_g(X,o)=3$.

例外集合の既約成分を E_i と表し，E_1, E_4 を (-3)-curves とする．E_i^* は $E_i^*E_j=-\delta_{ij}$ を満たすサイクルを表す．また，mult は重複度，embdim は埋め込み次元を表す．

Theorem 3 次のいずれかが成り立つ．
(1) $p_g(X,o)=3$, $Z_{\max}=Z_{\mathrm{fun}}$, $\mathrm{mult}(X,o)=3$, $\mathrm{embdim}(X,o)=4$, and (X,o) is a non-Gorenstein Kodaira singularity ([1]).
(2) $p_g(X,o)=3$, $Z_{\max}=2Z_{\mathrm{fun}}$, $\mathrm{mult}(X,o)=4$, $\mathrm{embdim}(X,o)=4$, and (X,o) is a complete intersection of splice type ([6]).
(3) $p_g(X,o)=2$, $Z_{\max}=2Z_{\mathrm{fun}}$, E_1^*, or E_4^*, $\mathrm{mult}(X,o)=6$, $\mathrm{embdim}(X,o)=7$.

Corollary 4 $Z_{\max}=Z_{\mathrm{fun}}$ if and only if (X,o) is a Kodaira singularity.

Corollary 5 The following are equivalent:
(1) $Z_{\max}=2Z_{\mathrm{fun}}$, $p_g(X,o)=3$;
(2) (X,o) is a complete intersection of splice type;
(3) (X,o) is Gorenstein.

参考文献

[1] U. Karras, *On pencils of curves and deformations of minimally elliptic singularities*, **247** (1980), 43–65.

[2] András Némethi, *Lattice cohomology of normal surface singularities*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **44** (2008), no. 2, 507–543.

[3] András Némethi, Normal Surface Singularities, book in preparation.

[4] András Némethi and Baldur Sigurdsson, *The geometric genus of hypersurface singularities*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **18** (2016), no. 4, 825–851.

[5] Neumann, W.D.: A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities and degenerating complex curves, Trans. of Amer. Math. Soc. **268** (2) (1981), 299-344.

[6] Walter D. Neumann and Jonathan Wahl, *Complex surface singularities with integral homology sphere links*, Geom. Topol. **9** (2005), 757–811 (electronic).

Bonk's distortion theorem for locally biholomorphic mappings on bounded symmetric domains in $\mathbb{C}^n$

Cho Ho Chu (Queen Mary, University of London, England)
Hidetaka Hamada (Kyushu Sangyo University, Japan)*1
Tatsuhiro Honda (Hiroshima Institute of Technology, Japan)*2
Gabriela Kohr (Babeş-Bolyai University, Romania)

Let $\mathbb{B}^n$ be the Euclidean unit ball in $\mathbb{C}^n$. We denote by $H_{\rm loc}(\mathbb{B}^n, \mathbb{C}^n)$ the family of $\mathbb{C}^n$-valued locally biholomorphic mappings on $\mathbb{B}^n$. We set for $f \in H_{\rm loc}(\mathbb{B}^n, \mathbb{C}^n)$,

$$\|f\|_0 := \sup\left\{(1-\|z\|^2)^{\frac{n+1}{2n}}|\det Df(z)|^{1/n} : z \in \mathbb{B}^n\right\}.$$

Bonk's distortion theorem has been extended by Liu in [17, Theorem 7] to the family $H_{\rm loc}(\mathbb{B}^n, \mathbb{C}^n)$ as follows.

Theorem 1. *If $f \in H_{\rm loc}(\mathbb{B}^n, \mathbb{C}^n)$, $\|f\|_0 = 1$ and $\det Df(0) = 1$, then*

$$|\det Df(z)| \geq \Re \det Df(z) \geq \frac{\exp\left(\frac{-(n+1)\|z\|}{1-\|z\|}\right)}{(1-\|z\|)^{n+1}}, \quad z \in \mathbb{B}^n.$$

This inequality is sharp.

Using the above distortion theorem, a lower bound of the Bloch constant for $f \in H_{\rm loc}(\mathbb{B}^n, \mathbb{C}^n)$ was obtained in Liu [17].

We denote by $H_{\rm loc}(\mathbb{U}^n, \mathbb{C}^n)$ the family of $\mathbb{C}^n$-valued locally biholomorphic mappings on the unit polydisc $\mathbb{U}^n$ in $\mathbb{C}^n$. For $f \in H_{\rm loc}(\mathbb{U}^n, \mathbb{C}^n)$, we set

$$\|f\|_0 := \sup\left\{\prod_{j=1}^{n}(1-|z_j|^2)^{\frac{1}{n}}|\det Df(z)|^{\frac{1}{n}} : z \in \mathbb{U}^n\right\}.$$

The following distortion theorem has been shown by Wang and Liu [22, Theorem 3.2].

Theorem 2. *If $f \in H_{\rm loc}(\mathbb{U}^n, \mathbb{C}^n)$, $\|f\|_0 = 1$ and $\det Df(0) = 1$, then*

$$|\det Df(z)| \geq \Re \det Df(z) \geq \frac{\exp\left(\frac{-2n\|z\|}{1-\|z\|}\right)}{(1-\|z\|)^{2n}}, \quad z \in \mathbb{U}^n.$$

This inequality is sharp.

This theorem was also used in Wang and Liu [22] to derive a lower bound of the Bloch constant for classes of locally biholomorphic Bloch mappings on $\mathbb{U}^n$.

Both the Euclidean unit ball and the unit polydisc in $\mathbb{C}^n$ are examples of bounded symmetric domains in $\mathbb{C}^n$. The following natural questions arise.

Question 3. *Can we explain the difference of the exponents in the distortion bounds in Theorems 1 and 2?*

Question 4. *Can we extend Bonk's distortion theorem to other bounded symmetric domains in $\mathbb{C}^n$?*

We give an affirmative answer to both questions in this talk and as an application, we derive a lower bound of the Bloch constant for various classes of locally biholomorphic Bloch mappings on a bounded symmetric domain in $\mathbb{C}^n$.

This work has been supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP16K05217
2000 Mathematics Subject Classification: 32H99, 30C45, 46G20.
Keywords: distortion theorem, Bloch mappings, Bloch constant, bounded symmetric domains .
*1 e-mail: h.hamada@ip.kyusan-u.ac.jp
*2 e-mail: thonda@cc.it-hiroshima.ac.jp

References

[1] L.V. Ahlfors. An extension of Schwarz's lemma, Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938) 359–364.

[2] M. Bonk, On Bloch's constant, Proc. Amer. Math. Soc. 110 (1990) 889–894.

[3] M. Bonk, D. Minda and H. Yanagihara, Distortion theorems for locally univalent Bloch functions, J. Anal. Math. 69 (1996) 73–95.

[4] É. Cartan, Sur les domaines bornés homogènes de l'espace den variables complexes, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 11 (1935) 116–162.

[5] H. Chen and P. Gauthier, On Bloch's constant, J. Anal. Math. 69 (1996) 275–291.

[6] C.-H. Chu, H. Hamada, T. Honda and G. Kohr, Distortion theorems for convex mappings on homogeneous balls, J. Math. Anal. Appl. 369 (2010) 437–442.

[7] C.-H. Chu, H. Hamada, T. Honda and G. Kohr, Distortion of locally biholomorphic Bloch mappings on bounded symmetric domains, J. Math. Anal. Appl. 441 (2016), 830 – 843.

[8] C.H. FitzGerald and S. Gong, The Bloch theorem in several complex variables, J. Geom. Anal. 4 (1994) 35–58.

[9] K.T. Hahn, Holomorphic mappings of the hyperbolic space into the complex Euclidean space and the Bloch theorem, Canad. J. Math. 27 (1975) 446–458.

[10] H. Hamada, A distortion theorem and the Bloch constant for Bloch mappings in $\mathbb{C}^n$, J. Anal. Math., to appear.

[11] H. Hamada, T. Honda and G. Kohr, Linear invariance of locally biholomorphic mappings in the unit ball of a JB*-triple, J. Math. Anal. Appl. 385 (2012) 326–339.

[12] H. Hamada, T. Honda and G. Kohr, Trace-order and a distortion theorem for linearly invariant families on the unit ball of a finite dimensional JB*-triple, J. Math. Anal. Appl. 396 (2012) 829–843.

[13] H. Hamada, T. Honda and G. Kohr, Growth and distortion theorems for linearly invariant families on homogeneous unit balls in $\mathbb{C}^n$, J. Math. Anal. Appl. 407 (2013) 398–412.

[14] H. Hamada and G. Kohr, Pluriharmonic mappings in $\mathbb{C}^n$ and complex Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. 426 (2015) 635–658.

[15] H. Hamada and G. Kohr, α-Bloch mappings on bounded symmetric domains in $\mathbb{C}^n$, submitted.

[16] W. Kaup, A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces, Math. Z. 183 (1983) 503–529.

[17] X.Y. Liu, Bloch functions of several complex variables, Pacific J. Math. 152 (1992) 347–363.

[18] X.Y. Liu and D. Minda, Distortion theorems for Bloch functions, Trans. Amer. Math. Soc. 333 (1992) 325–338.

[19] R.M. Timoney, Bloch functions in several complex variables, I, Bull. London Math. Soc. 12 (1980) 241–267.

[20] J.F. Wang, Distortion theorem for locally biholomorphic Bloch mappings on the unit ball $\mathcal{B}^n$. Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2) 38 (2015) 1657–1667.

[21] J.F. Wang and T.S. Liu, Bloch constant of holomorphic mappings on the unit ball of $\mathbb{C}^n$, Chin. Ann. Math. Ser. B 28 (2007) 677–684.

[22] J.F. Wang and T.S. Liu, Bloch constant of holomorphic mappings on the unit polydisk of $\mathbb{C}^n$, Sci. China Ser. A 51 (2008) 652–659.

2重単位開円板上の荷重Hardy空間における再生核の巡回性について

泉池　耕平（山口大学）

1　導入

2次複素空間$\mathbb{C}^2$の2重単位開円板$\mathbb{D}^2$上のHardy空間を$H^2(\mathbb{D}^2)$で表す。

定義 1 $H^2(\mathbb{D}^2)$の閉部分空間Mが不変であるとは、$zM \subset M$かつ$wM \subset M$を満たすときにいう。また、集合$E \subset H^2(\mathbb{D}^2)$を含む最小の不変部分空間を$[E]$で表す。

本講演では、1991年にNakaziによって出された次の予想について考える。

問題 2 任意の関数$f \in H^2(\mathbb{D}^2)$によって生成される不変部分空間$M_f = [\{f\}]$に対して、

$$M_f \ominus [zM_f + wM_f] = \mathbb{C} \cdot g, \quad g \neq 0$$

かつ$M_f = [g]$を満たすか？

2　M_fと$H^2(d\mu)$の関係

非零関数$f \in H^2(\mathbb{D}^2)$に対して、

$$d\mu = |f|^2\, dm \quad \text{on } \mathbb{T}^2$$

とおく。ここで、dmは$\mathbb{T}^2$上の正規化されたルベーグ測度である。さらに、$\mathbb{C}^2$上の多項式環$\mathcal{C}$の$L^2(d\mu)$-閉包を$H^2(d\mu)$によって表記する。

命題 3 任意の$f \in H^2(\mathbb{D}^2)$に対して、$M_f = fH^2(d\mu)$である。

定義 4 (1) $\lambda \in \mathbb{D}^2$ に対する $H^2(d\mu)$ の再生核 $K_\mu^\lambda \in H^2(d\mu)$ は、

$$f(\lambda) = \langle f, K_\mu^\lambda \rangle_{H^2(d\mu)} \quad \text{for all } f \in H^2(d\mu)$$

を満たす関数である。
(2) 関数 $f \in H^2(d\mu)$ が巡回ベクトルであるとは、$f\mathcal{C}$ が $H^2(d\mu)$ で稠密であるときにいう。

命題 5 $f \in H^2(\mathbb{D}^2)$ とする。そのとき、$[fK_\mu^\lambda] = M_f$ を満たすことと、再生核 K_μ^λ が $H^2(d\mu)$ の巡回ベクトルであることは同値である。

3 結果

定理 6 $H^2(d\mu)$ が巡回ベクトルでない再生核を持つような $f \in H^2(\mathbb{D}^2)$ が存在する。

定理 7 $H^2(d\mu)$ が $\mathbb{D}^2$ 上に零集合を持つ再生核を持つような $f \in H^2(\mathbb{D}^2)$ が存在する。

定理 8 $f \in H^2(\mathbb{D}^2)$ とし、$M_f = [f]$ とする。そのとき、

$$[M_f \ominus [zM_f + wM_f]] \neq M_f$$

を満たす関数 f が存在する。

参考文献

[1] A. Aleman, S. Richter, C. Sundberg; *Beurling's theorem for the Bergman space*, Acta Math. **117** (1996), 275–310.

[2] A. Beurling; *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space*, Acta Math. **81** (1949), 239–255.

[3] X. Chen, K. Guo; *Analytic Hilbert Modules*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2003.

[4] K.H. Izuchi; *Cyclicity of reproducing kernels in weighted Hardy spaces over the bidisk*, J. Funct. Anal. **272** (2017), 546–558.

[5] T. Nakazi; *Szegö's theorem on a bidisc*, Trans. Amer. Math. Soc. **328** (1991), 421–432.

On proper holomorphic self-mappings of generalized complex ellipsoids and generalized Hartogs triangles

Akio Kodama (Kanazawa University)*

Abstract

In this talk, we discuss proper holomorphic self-mappings of generalized complex ellipsoids and generalized Hartogs triangles and announce that, by using our previous results, we can obtain natural generalizations of some results due to Landucci, Chen-Xu and Zapalowski.

Let D_1 and D_2 be two domains in $\mathbf{C}^n$. A continuous mapping $f : D_1 \to D_2$ is said to be *proper* if $f^{-1}(K)$ is compact in D_1 for every compact subset K of D_2. In connection with proper holomorphic mappings, there is a fundamental question as follows:

QUESTION. *Let D be a bounded domain in $\mathbf{C}^n$ with $n > 1$. Then, is it true that every proper holomorphic mapping $f : D \to D$ must be biholomorphic?*

The main purpose of this talk is to announce that, by using our previous results and methods in [Complex Var. Elliptic Equ. **59** (2014), 1342–1349; Tohoku Math. J. **68** (2016), 29–45], we can obtain some results on this question in the case where D is a generalized complex ellipsoid or a generalized Hartogs triangle. In order to state our precise results, let us start with defining generalized complex ellipsoids and generalized Hartogs triangles. For any positive integers ℓ_i, m_j and any positive real numbers p_i, q_j with $1 \le i \le I$, $1 \le j \le J$, we set

$$\ell = (\ell_1, \dots, \ell_I),\ m = (m_1, \dots, m_J),\ p = (p_1, \dots, p_I),\ q = (q_1, \dots, q_J)$$

and define a *generalized complex ellipsoid* $\mathcal{E}_\ell^p$ and a *generalized Hartogs triangle* $\mathcal{H}_{\ell,m}^{p,q}$ by

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\ell^p &= \left\{ z \in \mathbf{C}^{|\ell|} \ ;\ \sum_{i=1}^{I} \|z_i\|^{2p_i} < 1 \right\} \quad \text{and} \\ \mathcal{H}_{\ell,m}^{p,q} &= \left\{ (z,w) \in \mathbf{C}^N \ ;\ \sum_{i=1}^{I} \|z_i\|^{2p_i} < \sum_{j=1}^{J} \|w_j\|^{2q_j} < 1 \right\}, \end{aligned}$$

respectively, where

$$\begin{aligned} &z = (z_1, \dots, z_I) \in \mathbf{C}^{\ell_1} \times \cdots \times \mathbf{C}^{\ell_I} = \mathbf{C}^{|\ell|},\ |\ell| = \ell_1 + \cdots + \ell_I, \\ &w = (w_1, \dots, w_J) \in \mathbf{C}^{m_1} \times \cdots \times \mathbf{C}^{m_J} = \mathbf{C}^{|m|},\ |m| = m_1 + \cdots + m_J, \\ &\text{and}\ \ \mathbf{C}^N = \mathbf{C}^{|\ell|} \times \mathbf{C}^{|m|},\ N = |\ell| + |m|. \end{aligned}$$

In general, both the domains $\mathcal{E}_\ell^p$ and $\mathcal{H}_{\ell,m}^{p,q}$ are not geometrically convex and their boundaries are not smooth. Notice that $\partial\mathcal{H}_{\ell,m}^{p,q}$ contains the origin 0 of $\mathbf{C}^N$.

2000 Mathematics Subject Classification: Primary 32A07; Secondary 32M05.
Keywords: Proper holomorphic mappings, Holomorphic automorphisms, Generalized complex ellipsoids, Generalized Hartogs triangles.

*e-mail: kodama@staff.kanazawa-u.ac.jp

In the case where D is a generalized complex ellipsoid $\mathcal{E}_\ell^p$ or a generalized Hartogs triangle $\mathcal{H}_{\ell,m}^{p,q}$, we have already known the following: If all the exponents p_i are positive integers, then $\mathcal{E}_\ell^p$ is a bounded pseudoconvex domain with real-analytic boundary. Hence, by a direct consequence of Bedford-Bell [Math. Ann. **261** (1982), 47–49], every proper holomorphic self-mapping of $\mathcal{E}_\ell^p$ is a biholomorphic mapping. Independently, Landucci [Trans. A. M. S. **282** (1984), 807–811] studied the structure of proper holomorphic mappings between generalized complex ellipsoids $\mathcal{E}_\ell^p$ and $\mathcal{E}_{\ell'}^{p'}$ with $\ell_i,\, \ell'_i = 1,\, p_i,\, p'_i \in \mathbf{N}\,(1 \leq i \leq I)$, and proved that every proper holomorphic self-mapping of such a generalized complex ellipsoid $\mathcal{E}_\ell^p$ must be a biholomorphic mapping. If some of p_i's are not integers, then the boundary of $\mathcal{E}_\ell^p$ is no longer real-analytic. However, as is shown by Dini-Primicerio [Ann. Mat. Pura Appl. **158** (1991), 219–229], even in such a case the same conclusion holds for $\mathcal{E}_\ell^p$, provided that all the ℓ_i's are equal to one. On the other hand, for generalized Hartogs triangles, Landucci also studied in [Ann. Mat. Pura Appl. **155** (1989), 193–203] the structure of proper holomorphic mappings between generalized Hartogs triangles $\mathcal{H}_{\ell,m}^{p,q}$ and $\mathcal{H}_{\ell',m'}^{p',q'}$ with $\ell_i,\, \ell'_i = 1,\, p_i,\, p'_i \in \mathbf{N}\,(1 \leq i \leq I)$ and $m,\, m' = 1,\, q,\, q' \in \mathbf{N}$. In particular, he found an example of a generalized Hartogs triangle $\mathcal{H}_{\ell,m}^{p,q}$ admitting a proper non-biholomorphic self-mapping. Landucci's result was later extended by Chen-Xu [Chin. Ann. of Math. Ser. B **22** (2001), 177-182; Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **18** (2002), 357–362] and Zapalowski [arXiv:1601.01806v1[math.CV]] to the class of generalized Hartogs triangles $\mathcal{H}_{\ell,m}^{p,q}$ with $\ell_i,\, m_j = 1,\, 0 < p_i,\, q_j \in \mathbf{R}$ for all i, j and $J > 1$.

In view of these results, it would be naturally expected that the same conclusion as in the case where $\ell_i,\, m_j = 1$ for all i, j is also valid for our generalized complex ellipsoids $\mathcal{E}_\ell^p$ with $\ell_i \geq 1$ or generalized Hartogs triangles $\mathcal{H}_{\ell,m}^{p,q}$ with $\ell_i,\, m_j \geq 1$. This cannot be achieved in full generality at this moment. However, under the assumption that all the exponents p_i and q_j are real numbers greater than or equal to one, we can give an affirmative answer to this. Before stating our results, observe that the boundary of $\mathcal{E}_\ell^p$ is C^2-smooth if and only if $p_i \geq 1$ for all $i = 1, \ldots, I$. Therefore, *in connection with the question above, it would be the class of generalized complex ellipsoids $\mathcal{E}_\ell^p$ with $p_i \geq 1$ for all $i = 1, \ldots, I$ that we should study first.*

As a main result, we can prove the following

THEOREM. *Let $\mathcal{E}_\ell^p$ be a generalized complex ellipsoid in $\mathbf{C}^{|\ell|}$ with $|\ell| \geq 2$. Assume that $1 \leq p_i \in \mathbf{R}$ for all $i = 1, \ldots, I$. Then every proper holomorphic mapping $f : \mathcal{E}_\ell^p \to \mathcal{E}_\ell^p$ is necessarily a holomorphic automorphism of $\mathcal{E}_\ell^p$.*

It should be emphasized that if $1 \leq p_i \in \mathbf{R}$ for all i, then $\mathcal{E}_\ell^p$ is a geometrically convex bounded domain with C^2-smooth (but not C^3-smooth) boundary $\partial\mathcal{E}_\ell^p$, in general, and our $\mathcal{E}_\ell^p$ admits the case where some of ℓ_i's are greater than one. Therefore our theorem is not an immediate consequence of any other papers.

Our proof of this theorem is based on our previous result on the structure of holomorphic automorphism groups of generalized complex ellipsoids [Complex Var. Elliptic Equ. **59** (2014), 1342–1349] and an extension theorem of local CR-diffeomorphisms defined near a C^ω-smooth strictly pseudoconvex boundary point of a generalized complex ellipsoid due to Monti-Morbidelli [J. Math. Soc. Japan **64** (2012), 153–179].

Once the theorem above has been proved, we can apply the same method used in our previous paper [Tohoku Math. J. **68** (2016), 29–45] to clarify the structure of proper holomorphic self-mappings of generalized Hartogs triangles $\mathcal{H}_{\ell,m}^{p,q}$ in $\mathbf{C}^{|\ell|} \times \mathbf{C}^{|m|}$ with $1 \leq p_i,\, q_j \in \mathbf{R}$ for all i, j.

$\mathbb{C}^2$ 内の準円型領域における原点を保存する正則自己同型写像について

山盛厚伺 (Academia Sinica)[*1]
Liyou Zhang (Capital Normal University)

1. 導入

以下, 原点を含む複素領域のみ考える. Cartan により「有界な円型 (circular) 領域の原点を保存する正則自己同型写像は線形写像」が示された. 円型領域より広いクラスである準円型領域では, この定理の主張は一般には成立せず, 多項式写像が現れる. ここで複素領域 $D \subset \mathbb{C}^n$ が準円型 (quasi-circular) とは, $(e^{im_1\theta}z_1, \ldots, e^{im_n\theta}z_n) \in D$ が任意の $\theta \in \mathbb{R}, z = (z_1, \ldots, z_n) \in D$ で成立することをいい, $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ をウェイトと呼ぶ. 一般性を失わず, $m_1 \le \cdots \le m_n$, $\gcd(m_1, \ldots, m_n) = 1$ と仮定して良いことに注意する.

上述の通り, 準円型領域において原点を保存する正則自己同型写像は多項式写像となる. 本講演の目的は, この多項式写像をより詳しく分析することである. 最近の結果 (cf. [1], [2], [3]) により, この多項式写像の次数はウェイト m に対し定まる準レゾナンスオーダー (quasi-resonance order) なる数を越えないことが明らかになった. 一方, より深い理解のためには次に述べる問題が考察が必要不可欠である.

問題 1. ウェイト m を固定し, このウェイトを持つ準円型領域 $D \subset \mathbb{C}^n$ を考える. このとき D の正則自己同型な多項式写像 $f = (f_1, \cdots, f_n)$ に対し $(\deg f_1, \cdots, \deg f_n)$ が取りうるものを分類せよ.

本講演では $n = 2$ の場合にこの問題が解決されたことを報告する. また, Rong の予想 [3, p.97] が否定的に解決されることも報告する.

2. 主結果

次の定理はウェイトが $(1, m)$ の場合に得られた結果である [5].

定理 1. $D \subset \mathbb{C}^2$ をウェイトが $(1, m)$ であるような準円型領域とし, $f = (f_1, f_2)$ を原点を保存する正則自己同型写像とする. このとき, $(\deg f_1, \deg f_2)$ は次の 3 つのうちのいずれかである.

(i) $(\deg f_1, \deg f_2) = (1, 1)$,

(ii) $(\deg f_1, \deg f_2) = (1, m)$,

(iii) $(\deg f_1, \deg f_2) = (m, m^2)$.

一方, $2 \le m_1 \le m_2$ の場合には [4] で次の結果が既に得られている.

定理 2. $D \subset \mathbb{C}^2$ をウェイト (m_1, m_2) が $2 \le m_1 \le m_2$ を満たす準円型領域とし, $f = (f_1, f_2)$ を原点を保存する正則自己同型写像とする. このとき $(\deg f_1, \deg f_2) = (1, 1)$ である.

[*1] e-mail: `ats.yamamori@gmail.com`

上記2つの定理を組み合わせることで次の結果が得られる．

系 1. $D \subset \mathbb{C}^2$ をウェイトが (m_1, m_2) である準円型領域とし，$f = (f_1, f_2)$ を原点を保存する正則自己同型写像とする．このとき $(\deg f_1, \deg f_2)$ は $(1,1), (1, m_2), (m_2, m_2^2)$ のいずれかである．とくに $2 \leq m_1 \leq m_2$ ならば領域によらず常に $(\deg f_1, \deg f_2) = (1,1)$ である．

さて，これにより先行研究で得られた結果よりも詳細な情報が得られた．一方で，次数の情報は低次の項の情報を含まないため，$\mathrm{Iso}_0(D)$ の構造のより深い理解には次の問題の考察も必要不可欠である．

問題 2. 主結果で得られた各々の場合に多項式写像がいかなる形をしているか調べよ．

実は，上記の定理の証明で用いる手法はこの問題への回答も提供することを本講演で説明する．系1により $(\deg f_1, \deg f_2)$ のとりうるものは全て判明した．では，任意にウェイト $(1, m_2)$ を与えたとき $(\deg f_1, \deg f_2) = (1, m_2), (m_2, m_2^2)$ となるような原点を保存する正則自己同型写像を含む領域が実際に存在するか否かが問題となる．本講演では実際にそのような例が存在することも報告し，さらにその例が§1で述べたRongによる予想の反例になることを指摘する．

Rongの予想の詳細は紙面の都合上ここでは紹介できないが，もし予想が $\mathbb{C}^2$ 内のウェイトが $(1, m_2)$ の準円型領域について正しければ $\max(\deg f_1, \deg f_2) \leq m_2$ となる (i.e. 定理1(iii) となる例は存在しない)．従い，$(\deg f_1, \deg f_2) = (m_2, m_2^2)$ となる例が存在すれば反例となる．

3. 今後の問題

今回は $\mathbb{C}^2$ 内の領域のみ考察した．この結果を高次元化することがこれからの課題である．また，Rongの予想は一般には正しくないことが判明したが，それがいつ正しいかを調査することも残された問題である．任意の有界な準円型領域 $D \subset \mathbb{C}^2$ に対して Bergman 写像 σ_0^D は双正則であり，その像 $D' := \sigma_0^D(D)$ は代表領域となる．この領域 D' の等方部分群を用いてRongの予想で述べられている主張がいつ正しくなるか記述できると推測しているが，本原稿の執筆時点ではそれに成功していない．

参考文献

[1] F. Deng and F. Rong, On biholomorphisms between bounded quasi-Reinhardt domains. Ann. Mat. Pura Appl. (4) 195 (2016), no. 3, 835–843.

[2] J. Ning, H. P. Zhang and X. Y. Zhou, Proper holomorphic mappings between invariant domains in $\mathbb{C}^n$, Trans. Amer. Math. Soc. 369 (2017), no. 1, 517–536.

[3] F. Rong, On automorphisms of quasi-circular domains fixing the origin, Bull. Sci. Math. 140 (2016), no. 1, 92–98.

[4] A. Yamamori, Automorphisms of normal quasi-circular domains, Bull. Sci. Math., 138 (2014), 406–415.

[5] A. Yamamori and L. Zhang, A classification of origin-preserving automorphisms of quasi-circular domains in $\mathbb{C}^2$, preprint.

On minimal singular metrics of line bundles whose stable base locus admits holomorphis tubhular neighborhoods

細野　元気　(東京大学)[*1]
小池　貴之　(京都大学)[*2]

X を射影的複素多様体とし, L を X 上の正則直線束とする. また, $Y = \mathrm{SB}(L)$ を, L の stable base locus, すなわち, $Y = \bigcap_{s \in H^0(X,mL), m\in\mathbb{N}} \{s = 0\}$ とする. この状況で, L の **最小特異性計量** (すなわち, 曲率カレントが非負であるような L 上の特異 Hermite 計量のうち, 特異性が最小のもの) は, $X \setminus Y$ 上で局所有界であることが容易にわかる. したがって, 次のような問題が考えられる：

問題 1. Y に沿う L の最小特異性計量の挙動を記述せよ. 最小特異性計量の weight 関数は Y の近くで発散するか？また, 発散する場合, その発散はどの程度になるか？ □

L 上の最小特異性計量は, L が pseudo-effective ならば存在し, 例えば, L 上のなめらかな計量をひとつ固定したときに, 次の形で与えられる (h の平衡計量)：

$$h_e := h \cdot \exp(-\sup\{\varphi\colon X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \mid \varphi:\ \Theta_h\text{-plurisubharmonic and } \varphi \leq 0\})$$

ここで, Θ_h は h の Chern 曲率である. 一方, このような表示のみからは, Y 近傍での挙動を直接知ることはできず, 問題 1 を考える上では, さらに詳しい観察が必要である.

本講演では, 次のような条件の下で, 上記の問題 1 について考察した結果を紹介する：

条件 2. (i) Y は余次元 r の非特異な部分多様体である.
(ii) 法束 $N_{Y/X}$ が r 個の直線束への直和分解 $N_{Y/X} = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_r$ を持つ. さらに, それぞれの N_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, r)$ は曲率が負であるような C^∞ 級の計量を持つ. □

条件 2 を満たす重要な例として, 中山の例 ([N, IV, §2.6]) が挙げられる. これは, どのような modification を行っても Zariski 分解を持たない例である. [K1] では, 中山の例における最小特異性計量の挙動は, 次の凸集合を用いて得られることが示されている：

$$\square_L = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^r_{\geq 0} \mid |\alpha| \leq 1, c_1(L|_Y) + \textstyle\sum_{\lambda=1}^r \alpha_\lambda c_1(N_\lambda^{-1}) : \text{pseudo-effective}\},$$

ここで, $|\alpha| := \sum_{\lambda=1}^r \alpha_\lambda$ である.

本講演の主結果は, 以下に挙げるものである. この定理は, 特定の条件の下で最小特異性計量の挙動が $\square_L$ を用いて表されることを主張するものであり, 中山の例における最小特異性計量の解析のある種の一般化になっている.

定理 3. X を射影的な複素多様体, L を X 上の巨大 (big) な直線束, $Y = SB(L)$ とする. Y は Abel 多様体であるとする. 条件 2 の (i), (ii) を仮定する. さらに, 各 $\lambda = 1, 2, \ldots, r$ に対して $L|_Y \otimes N_\lambda^{-1}$ が positive で, 各 λ, μ について $N_\lambda \cong N_\mu$ が成り立つと仮定する. $L|_Y$,

本研究は科研費 (課題番号:16J04196, 15J08115), リーディング大学院プログラムの助成を受けたものである.
2010 Mathematics Subject Classification: 32J25, 14C20
キーワード：最小特異性計量, 管状近傍
[*1] 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科
e-mail: genkih@ms.u-tokyo.ac.jp
[*2] 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学理学研究科数学教室
e-mail: tkoike@math.kyoto-u.ac.jp

N_λ 上の C^∞ 級の Hermite 計量 $h_{L|_Y}$, h_{N_λ} をそれぞれ固定する．これは, $h_{N_\lambda}^{-1} \otimes h_{L|_Y}$ の Chern 曲率が正になるようにとる．このとき, L の最小特異性計量 $h_{\min,L}$ の local weight $\varphi_{\min,L}$ （すなわち, ある局所自明化の下で $h_{\min,L} = e^{-\varphi_{\min,L}}$ とあらわされるもの) は, Y の各点の近傍で,

$$\varphi_{\min,L}(z,y) = \log \max_{\alpha \in \square_L} \prod_{\lambda=1}^{r} |z_\lambda|^{2\alpha_\lambda} + O(1)$$

の形で表される．ここで, y は Y 上の座標を表し, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_r)$ は Y の局所的な定義関数である．$(\varphi_\alpha)_e$ は, $\mathbb{R}$-直線束 $L|_Y \otimes N_1^{-\alpha_1} \otimes N_2^{-\alpha_2} \cdots \otimes N_r^{-\alpha_r}$ 上の Hermite 計量 $h_{L|_Y} \otimes h_{N_1}^{-\alpha_1} \otimes h_{N_2}^{-\alpha_2} \cdots \otimes h_{N_r}^{-\alpha_r}$ から作られた平衡計量の local weight である． $\square$

以下, 定理の適用例として, Zariski による nef かつ巨大だが半豊富でない直線束の例の, 高余次元における類似を紹介する．[K2] では, 余次元が 1 である場合 (Zariski によるオリジナルの例) を扱い, 直線束が半正であることを示している．

まず, $\mathbb{P}^3$ の一般の二次曲面 Q_1, Q_2 をとる．$C = Q_1 \cap Q_2$ は非特異楕円曲線, Q_1 と Q_2 は横断的であるとしてよい．$p_1, \ldots, p_N \in C$ をとる．これら N 個の点において $\mathbb{P}^3$ を爆発したものを, $\pi : X := \mathrm{Bl}_{\{p_1,\ldots,p_N\}}\mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ と書き, $Y \subset X$ を, C の強変換とする．各 $\lambda = 1, \ldots, N$ に対して, $E_\lambda := \pi^{-1}(p_\lambda)$, $E := E_1 + \cdots + E_N$, $H = \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$ とする．また, 各 Q_λ の強変換を D_λ とする．以上の記号の下で, X 上の直線束 L を, $L := \mathcal{O}_X(H + D_1) = \mathcal{O}_X(3H - E)$ により定める．すると, L は巨大な直線束であり, $\mathrm{Bs}|L| \subset Y$ を確かめることができる．

以下, $N \geq 12$ とする．このとき, $N_{Y/X} = \mathcal{O}_X(D_1)|_Y \oplus \mathcal{O}_X(D_2)|_Y$ のように直和分解できる．最後の直和を $N_1 \oplus N_2$ と書く．$(D_\lambda.Y) = 8 - N < 0$ なので, N_λ は負の直線束であることがわかる．$L|_Y \otimes N_\lambda^{-1}$ の次数は, 4 である．以上により, (X, L, Y) は, 主定理の仮定を満たしている．$\square_L$ を計算すると,

$$\square_L = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} \mid (N-12)/(N-8) \leq |\alpha| \leq 1\}\}$$

のようになる．これにより, L の最小特異性計量を計算できる．

(1) $N = 12$ のとき．$p_1, \ldots, p_{12}$ を C 中 general にとると, $L|_Y$ は $\mathrm{Pic}^0(C)$ 内で non-torsion となる．このとき, L は nef かつ巨大だが半豊富でない (Zariski の例の類似)．この場合, $0 \in \square_L$ であることから, L 上の最小特異性計量が Y の周りで有界になることを確かめることができる．(さらに, [K2] と同様の議論により, L が半正になることを示すことができる).

(2) $N > 12$ のとき, L は巨大だが nef ではない．L の最小特異性計量は, Y に沿って極を持つ解析的特異性を持つことが分かる．

参考文献

[K1] T. Koike, Minimal singular metrics of a line bundle admitting no Zariski-decomposition, Tohoku Math. J. (2) Volume 67, Number 2 (2015), 297–321.

[K2] T. Koike, On minimal singular metrics of certain class of line bundles whose section ring is not finitely generated, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) Volume 65, Number 5 (2015), 1953–1967.

[N] N. Nakayama, Zariski decomposition and abundance, MSJ Mem. 14, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], **48**. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

$\mathbb{CP}^n$ の複素部分多様体までの Fibini-Study 距離の Levi form に対する Takeuchi の等式

松本　和子　(東京理科大・理工)*

1. はじめに

D を $\mathbb{CP}^n$ の擬凸領域 ($D \neq \mathbb{CP}^n$), D の境界 ∂D までの Fubini-Study 距離を$\delta_{\partial D}$ とする．1964 年に A. Takeuchi [1] は, 関数 $-\log \delta_{\partial D}$ が D で強多重劣調和であることを示し, $D \subsetneq \mathbb{CP}^n$ に対する Levi 問題 (擬凸領域は正則領域か?) を肯定的に解決した．その際に示された不等式の Greene-Wu [2] による精密化

$$i\partial\bar{\partial}(-\log \delta_{\partial D}) \geq \frac{1}{3}\omega_{FS} \qquad \text{on } D$$

は, 今日では "Takeuchi の不等式" と呼ばれ, 特に, $\mathbb{CP}^n$ ($n \geq 2$) 内の滑らかでコンパクト, かつ Levi 平坦な実超曲面の "非存在予想" に対するアプローチの 1 つとして, 重要な役割を果たしている．この非存在予想は, $n = 2$ の場合は未解決で, "Takeuchi の不等式" の精密化に関心が持たれていた．ここで, Levi 平坦な実超曲面とは, 局所的に複素超曲面によって foliate される実超曲面のことである．

M を $\mathbb{CP}^n$ の複素部分多様体, M までの Fubini-Study 距離を δ_M とする．このとき, M の近くで 関数 δ_M は C^ω 級である．今回, 関数 $-\log \delta_M$ の Levi form の表示 (Takeuchi の等式) を M の近くで求めることができたので, その結果について報告する．

2. 主結果

$n = 2$ の場合, 得られた結果は次の通りである．

Theorem. S を $\mathbb{CP}^2$ 内で局所的に $S = \{(t, f(t)) \mid t \in V\}$ によって定義された複素超曲面とする．ここで, $V \subset \mathbb{C}$ は開集合, $f : V \to \mathbb{C}$ は正則関数で, $0 \in V$, $f(0) = f'(0) = 0$ を満たすとする．S までの Fubuni-Study 距離を δ_S で表す．このとき, $\varepsilon > 0$ が存在して, $0 < |w| < \varepsilon$ に対して次が成り立つ.

$$\frac{\partial^2(-\log \delta_S)}{\partial z \partial \bar{z}}(0, w)|dz|^2 = \frac{|w|}{2 \cdot \tan^{-1}|w|} \cdot \frac{1 + |f''(0)|^2}{1 - |f''(0)|^2|w|^2} \cdot \frac{|dz|^2}{1 + |w|^2}$$

$$\frac{\partial^2(-\log \delta_S)}{\partial w \partial \bar{w}}(0, w)|dw|^2 = \frac{|w| - \tan^{-1}|w| + |w|^2\tan^{-1}|w|}{4 \cdot |w|(\tan^{-1}|w|)^2} \cdot \frac{|dw|^2}{(1 + |w|^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2(-\log \delta_S)}{\partial z \partial \bar{w}}(0, w)dz d\bar{w} = 0$$

Corollary. 関数 $-\log \delta_S$ の $\mathbb{CP}^2$ の Fubini-Study 計量に関する *2*つの固有値は,

$$\frac{\tan \delta_S}{2 \cdot \delta_S} \cdot \frac{1 + |f''(0)|^2}{1 - |f''(0)|^2 \tan^2 \delta_S}, \qquad \frac{\tan \delta_S - \delta_S + \tan^2 \delta_S \cdot \delta_S}{4 \cdot \tan \delta_S \cdot {\delta_S}^2}$$

である ($0 < \delta_S < \tan^{-1}\varepsilon$).

* 〒 278-8510 野田市山崎 2641　東京理科大学 理工学部 数学科
e-mail: matsumoto_kazuko@ma.noda.tus.ac.jp

3. 補足

Theorem および Corollary に現れる関数を

$$\varPhi(x) := \frac{x}{2\cdot\tan^{-1}x}\cdot\frac{1+|f''(0)|^2}{1-|f''(0)|^2x^2},\quad \varPsi(x) := \frac{x-\tan^{-1}x+x^2\tan^{-1}x}{4\cdot x(\tan^{-1}x)^2}$$

とおくと,

$$\lim_{x\to+0}\varPhi(x) = \frac{1+|f''(0)|^2}{2},\quad \lim_{x\to+0}\varPsi(x) = \frac{1}{3}$$

となる. Corollary の中の2つの固有値は, $\varPhi(\tan\delta_S)$ and $\varPsi(\tan\delta_S)$ と表されるが, 実関数 $\varPhi$ と $\varPsi$ は共に凸関数である. すなわち, $\varPhi'(x)>0$, $\varPhi''(x)>0$ $(0<x<1/|f''(0)|)$, $\varPsi'(x)>0$, $\varPsi''(x)>0$ $(x>0)$ を満たす.

4. コメント

1. 一般次元の $M\subset\mathbb{CP}^n$ に対しても, 関数 $-\log\delta_M$ の Levi form は求められている. 結果は行列表示の形になる ([5]).

2. $M\subset\mathbb{C}^n$ で, 距離が Euclid 距離の場合, 対応する結果 (Levi form の表示) は [3], [4] である.

5. Theorem の証明の方針

$\mathbb{CP}^n$ の Fubini-Study 計量は

$$ds^2 = \frac{\sum_{i=1}^n|dz_i|^2}{1+\sum_{i=1}^n|z_i|^2} - \frac{\sum_{i,j=1}^n\bar{z}_iz_j\,dz_id\bar{z}_j}{(1+\sum_{i=1}^n|z_i|^2)^2}$$

で与えられ, $\mathbb{CP}^n$ の2点 $z=(z_1,\ldots,z_n)$ と $w=(w_1,\ldots,w_n)$ の Fubini-Study 距離は

$$\delta_n(z,w) := \cos^{-1}\frac{|1+\sum_{i=1}^n z_i\bar{w}_i|}{\sqrt{1+\sum_{i=1}^n|z_i|^2}\sqrt{1+\sum_{i=1}^n|w_i|^2}}$$

と表されることを用いる.

参考文献

[1] A. Takeuchi, Domaines pseudoconvexes infinis et la métrique riemannienne dans un espace projectif, J. Math. Soc. Japan **16** (1964), 159–181.

[2] R. E. Greene and H. Wu, On Kähler manifolds of positive bisectional curvature and a theorem of Hartogs, Special issue dedicated to the seventieth birthday of Erich Kähler, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **47** (1978), 171–185.

[3] K. Matsumoto and T. Ohsawa, On the real analytic Levi flat hypersurfaces in complex tori of dimension two, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **52** (2002), 1525–1532.

[4] K. Matsumoto, Levi form of logarithmic distance to complex submanifolds and its application to developability, Complex analysis in several variables — Memorial Conference of Kiyoshi Oka's Centennial Birthday, 203–207, Adv. Stud. Pure Math. **42**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2004.

[5] K. Matsumoto, Takeuchi's equality for the Levi form of the Fubini-Study distance to complex submanifolds in complex projective spaces, 投稿中.

特別講演

レビ平坦面上の函数論：
平坦円周束における事例研究

足立 真訓 (東京理大・理工)*

概　要

複素多様体内の擬凸領域において, 境界の幾何を元に, 領域上の正則函数を論ずる広義のレビ問題は多変数函数論の主要問題の一つである. 強擬凸領域に対しては, 1970 年代までに基礎理論は確立したといえるが, 弱擬凸領域, 特にレビ平坦領域に対する理解はいまだ不十分であり, 例えば, 複素射影平面内のレビ平坦面の非存在予想は未解決である. 講演者は, この非存在予想を目指し, レビ平坦面の典型例である閉リーマン面上の平坦円周束を題材とし, レビ平坦面上の CR 函数, その囲む領域上の正則函数を調べてきた. 本講演では, この事例研究から得られた, レビ平坦 CR 多様体の射影埋め込み [1], レビ平坦境界の領域のディードリッヒ・フォルナエス指数 [2, 3, 4, 6] と重み付きベルグマン空間 [5, 7] に関する知見を概説する.

1. 複素射影平面内のレビ平坦面の非存在予想

n 次元複素多様体 X 内の滑らかな (=$\mathcal{C}^\infty$ 級) 有向実超曲面 M を考える. M が**レビ平坦面**であるとは, M が X の $(n-1)$ 次元複素部分多様体による滑らかな葉層構造 $\mathcal{F}$ を持つ時をいう. $\mathcal{F}$ を**レビ葉層**と呼ぶ. 最も易しい例は, $(X = \mathbb{C}^n, M = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R})$ であり, この時, レビ葉層は $\mathcal{F} = \{\mathbb{C}^{n-1} \times \{t\}\}_{t \in \mathbb{R}}$ である. レビ平坦面 M が実解析的であれば, 局所的に (X, M) は $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R})$ と双正則に同一視され (Cartan [20]), レビ葉層 $\mathcal{F}$ は M の近傍の $(n-1)$ 次元非特異正則葉層 $\widetilde{\mathcal{F}}$ に拡張する (Rea [50]). つまり, 実解析的なレビ平坦面は, ある正則葉層の安定集合となる. この事実から, レビ平坦面は多変数函数論だけでなく, 正則葉層の力学系理論においても基本的な研究対象となっている.

Poincaré–Bendixson の定理の複素版の類似として, 1980 年代後半, ブラジルの研究者たちにより次の予想が提案された (cf. Camacho–Lins Neto–Sad [17]):

予想. 複素射影平面 $\mathbb{CP}^2$ の余次元 1 の (特異) 正則葉層 $\widetilde{\mathcal{F}}$ を考える. どの葉の閉包にも $\widetilde{\mathcal{F}}$ の特異点が含まれるであろう.

この予想は $\mathbb{CP}^2$ 上の正則葉層 $\widetilde{\mathcal{F}}$ に対して “リミット・サイクル” の非存在を主張する. 仮に予想に反例があれば, 非自明な極小集合 $\mathcal{M}$ (つまり, 葉層により安定な閉集合であって, 包含関係で最小のもの) をもつ $\widetilde{\mathcal{F}}$ が存在する. その場合, $\mathcal{M}$ はホロノミーに制約を受けるか, 実解析的レビ平坦面となるという dichotomy が知られている (Cerveau [21]). それ以来, 次の複素射影平面内のレビ平坦面の非存在予想は多くの興味を集めている[1].

予想. $\mathbb{CP}^2$ 内に, 滑らかな閉レビ平坦面は存在しないであろう.

この予想の解決を主張する論文・プレプリントは多数存在するが, その全てに深刻なギャップが知られており (cf. Iordan–Matthey [39]), 本稿執筆時点で予想は未解決で

本研究発表は科研費 (課題番号: 26800057) の助成を受けたものである.
2010 Mathematics Subject Classification: 32E40; 32A36, 32T27, 32V10, 37F75
* e-mail: adachi_masanori@ma.noda.tus.ac.jp
[1] 独立な文脈で 1980 年代からロシアでも研究されていた (cf. Ivashkovich [40]).

ある．高次元の射影空間 $\mathbb{CP}^{\geq 3}$ における同種の予想は, Takeuchi [52] (cf. Matsumoto [43]) による複素射影空間上のレビ問題の解法を踏まえ, いずれも肯定的に解決しており (Lins Neto [42], Siu [51]), 特に後者は, 3次元以上のコンパクトケーラー多様体における, 正則法束が正の閉レビ平坦面の非存在定理として一般化され理解されている (cf. Brunella [15], Ohsawa [46], Biard–Iordan [14]).

ここでレビ平坦面 $M \subset X$ の**正則法束** $N_M^{1,0}$ とは, $N_M^{1,0} := (T_X^{1,0}|M)/T_M^{1,0}$ により定義される M 上の CR 直線束 (つまり, 変換函数が滑らか, かつ, 葉に沿って正則となる $\mathbb{C}$ 直線束) をさす．$T_M^{1,0}$ はレビ葉層 $\mathcal{F}$ の葉方向の接束 $T\mathcal{F}$ と同一視され, $N_M^{1,0}$ はレビ葉層 $\mathcal{F}$ の複素化された法束と滑らかに同型 $N_M^{1,0} \simeq \mathbb{C} \otimes TM/T\mathcal{F}$ であり, 位相的には自明である．一般に, M 上の CR 直線束が正であるとは, ある滑らかなファイバー計量 h が存在し, 葉に沿うチャーン接続に関する葉方向の曲率形式 $i\partial_{\mathcal{F}}\overline{\partial}_{\mathcal{F}}(-\log h)$ が全ての点で正定値になることをいう．ここで, $\partial_{\mathcal{F}}, \overline{\partial}_{\mathcal{F}}(= \overline{\partial}_b)$ はレビ葉層 $\mathcal{F}$ の葉方向の正則・反正則微分を表す.

レビ平坦面は, レビ形式が恒等的に消える実超曲面としても定義できる．複素領域は, 境界のレビ形式が至る所正定値のとき, 強擬凸領域と呼ばれる．強擬凸領域上で有効であった解析手法は, レビ平坦面では適用できるとは限らないが, 正則法束が正であれば, 以下に見るように, 正則法束の曲率形式が "高次のレビ形式" としての役割を果たし [2], 強擬凸領域上と類似した解析が行える場合がある.

さて, 話を進める前に, 2つの事実を注意しておこう.

注意. レビ平坦面を擬凸かつ擬凹な相対コンパクト領域の境界として特異性を許して定義すれば, $\mathbb{CP}^2$ 内に閉レビ平坦面は存在する．たとえば, $\mathbb{C} \times S^1 \subset \mathbb{C}^2$ (S^1 は単位円周) の閉包 M はそうである．M は無限遠で, ハルトークス三角形と同じ特異点を持つ.

注意. $\mathbb{C}^2$ 内の滑らかなコンパクトレビ平坦面の非存在は, 最大値原理から従う．$\mathbb{C}^2_{(z,w)}$ 上の座標函数 z, w を用いて, 強多重劣調和函数 $\varphi = |z|^2 + |w|^2$ を作る．仮にコンパクトなレビ平坦面 $M \subset \mathbb{C}^2$ が存在すれば, $\varphi|M$ はある点 $p \in M$ で最大値をとるが, レビ葉層の p を通る葉上に φ を制限すると内点で最大値を取ることになり矛盾である.

2. 閉リーマン面上の平坦円周束と正則円板束

$\mathbb{CP}^2$ 内のレビ平坦面の非存在予想には, いまだ決定的なアプローチが提案されていない．高次元における非存在定理の証明の論法に, 次の "反例" があるからである.

定理 1 (Diederich–Ohsawa [27], [28]. cf. Brunella [16], A. [1], [2])**.** *Σ, Σ' を同じ種数 ≥ 2 の閉リーマン面とし, 基本群の同一視 $\rho : \pi_1(\Sigma) \to \pi_1(\Sigma') < PSL(2, \mathbb{R})$ を固定する．Σ 上の平坦な (つまり, 変換函数が局所定数な) 線織面 $X_\rho := \Sigma \times_\rho \mathbb{CP}^1$ 内の平坦円周束 $M_\rho := \Sigma \times_\rho S^1$ は, 正則法束 $N_{M_\rho}^{1,0}$ が正の実解析的な閉レビ平坦面であり, さらに, 補集合 $X_\rho \setminus M_\rho$ の両成分はシュタイン多様体, またはシュタイン空間の固有改変となる.*

ここで $\times_\rho$ は **suspension** をさし, たとえば, $\Sigma \times_\rho \mathbb{CP}^1$ は, Σ の普遍被覆 $\widetilde{\Sigma}^{\mathrm{univ}}$ 上の直積空間 $\widetilde{\Sigma}^{\mathrm{univ}} \times \mathbb{CP}^1$ の基本群作用 $\gamma \cdot (z, w) := (\gamma z, \rho(\gamma)w)$ $(\gamma \in \pi_1(\Sigma))$ による商を指す．本稿では $PSL(2, \mathbb{R})$ は単位円周 $S^1 \simeq \mathbb{RP}^1$, 単位円板 $\mathbb{D}$ に作用するとみなす.

$\mathbb{CP}^{\geq 3}$ における閉レビ平坦面の非存在定理は, ambient が3次元以上のコンパクトケーラー多様体であること, レビ平坦面の正則法束が正であること, という2つの幾何学的

[2] 幾何学的には, レビ平坦面が強擬凸面で "近似" できるという状況を表す

条件に基づいて得られる．実際，この2つの性質を用いると，レビ平坦面が囲む領域上の$\overline{\partial}$方程式の重み付きL^2空間での解析を経由して，レビ平坦面上の$\partial_{\mathcal{F}}\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$補題を葉層の横断方向に対する連続性を持つ形で証明できる．この$\partial_{\mathcal{F}}\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$補題さえあれば，正則法束の曲率形式を$\partial_{\mathcal{F}}\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$完全形式として表し，そのポテンシャルに$M$上の最大値原理を適用して矛盾を得ることができる．しかし，定理1が示すように，2次元ではこの2つの定性的な条件のみから，必要な$\partial_{\mathcal{F}}\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$補題を得ることは不可能である...

従って，$\mathbb{CP}^2$における非存在予想に多変数函数論からアプローチできるとすれば[3]，$\mathbb{CP}^2$の幾何を十分に活用した定量的な解析を行わねばならない．そのためには，

- レビ平坦面上の CR 函数 / レビ平坦境界の領域上の正則函数は定量的にどのような構造を持つか．$\overline{\partial}_b$方程式 / $\overline{\partial}$方程式はどのような可解性を持つか．
- これら2つの問題を統制するレビ平坦面の幾何，レビ葉層の性質は何か．

という一般的な問題への指針を必要とする．しかし，この広義のレビ問題への知見は極めて限られている現状にある．そこで閉リーマン面上の平坦円周束M_ρと，その囲む領域である正則円板束$\Omega_\rho := \Sigma \times_\rho \mathbb{D}$を題材として，その上の CR 函数，正則函数を詳しく調べようというのである．この問題意識は，Barrett [10] に負う．

なお，閉リーマン面上の正則円板束に対する，オリジナルのレビ問題 (境界の擬凸性，いまはレビ平坦性，から領域の正則凸性が従うか) の解答は以下の通り．

定理 2 (Grauert [33], Diederich–Ohsawa [27], [28]. cf. A. [1])**.** *Σを閉リーマン面，$\rho \in \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma), PSL(2,\mathbb{R}))$とする．$\rho$が$U(1)$表現に($PSL(2,\mathbb{R})$-)共役でなければ，$\Omega_\rho$はシュタイン多様体，またはシュタイン空間の固有改変である．ρが$U(1)$表現に共役の時，像が無理回転を含めば$\mathcal{O}(\Omega_\rho) = \mathbb{C}$，含まなければ$\Omega_\rho$は正則凸だがシュタイン多様体でもシュタイン空間の固有改変でもない (たとえば，ρが自明表現のとき，Ω_ρは直積$\Sigma \times \mathbb{D}$に他ならない)．*

3. コンパクトレビ平坦CR多様体上の函数論

レビ平坦面をモデルとするCR多様体を**レビ平坦CR多様体**と呼ぶ．すなわち，滑らかな$(2n-1)$次元実多様体Mであって，複素$(n-1)$次元の複素多様体を葉とする滑らかな葉層構造$\mathcal{F}$が与えられているものをいう．レビ平坦 CR 多様体上では，**CR 函数**，つまり葉方向に正則な函数を考える．単に CR 函数といった時，横断方向の regularity は予め要請しないことに注意されたい．なお，実解析的なレビ平坦CR多様体は，複素近傍を構成し大域的にレビ平坦面として実現できるが，滑らかなものは大域的に実現できるとは限らない．例えば，Barrett [9] は Ueda [53] を用いて，S^3の標準的レーブ葉層はレビ平坦面として実現できないことを示した (cf. Barrett–Inaba [11], Koike–Ogawa [41])．

コンパクトレビ平坦面上の函数論の出発点は，次のリュービル型定理である．

定理 3 (Inaba [38])**.** *コンパクトレビ平坦CR多様体上の連続なCR函数は，レビ葉層の全ての葉上，定数となる．特に稠密葉が存在するコンパクトレビ平坦CR多様体上の連続なCR函数は定数函数に限る．*

[3] 幾何学的な立場から困難を述べれば，正則葉層の特異集合が$\mathbb{CP}^{\geq 3}$では次元を持つが，$\mathbb{CP}^2$では次元を持たず孤立集合となる点に困難がある．特異集合が次元をもてば，最大値原理から矛盾を導ける．

従って, 我々はコンパクト複素多様体上の函数論と同様に, コンパクトレビ平坦 CR 多様体においては, 特異性を許した "有理型" 函数を考えることが自然であろう. つまり, CR 直線束の CR 切断を考える (cf. Ghys [32]).

CR 切断に対し横断方向に有限回の可微分性のみ要求するならば, 十分に正な CR 直線束には切断が豊富に存在することが知られている.

定理 4 (Ohsawa–Sibony [48] cf. Ohsawa [45], Hsiao–Marinescu [37]). *正 CR 直線束 L を持つコンパクトレビ平坦 CR 多様体 M を考える. 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し, ある自然数 $N = N(k)$ が存在し, $m \geq N$ に対し, $L^{\otimes m}$ は $\mathcal{C}^k$ 級 CR 切断を無限次元持つ. さらに, $L^{\otimes m}$ の有限個の $\mathcal{C}^k$ 級 CR 切断により, M 上の点を分離でき, M を高次元の複素射影空間に $\mathcal{C}^k$ 級かつ CR に埋め込むことができる.*

それでは, CR 切断に横断方向の無限回の可微分性を要求するとどうなるであろうか. つまり, この小平型の埋込定理における $N(k)$ は k に対して有界に振る舞うであろうか. 答えは一般に否であり, レビ平坦面の幾何, ここでは正則法束の正値性が関係する.

主結果 1 (A. [1]). *Σ, Σ' を同じ種数 ≥ 2 の非双正則な閉リーマン面とする. 基本群の同一視 $\rho : \pi_1(\Sigma) \to \pi_1(\Sigma') < PSL(2, \mathbb{R})$ を固定し, 平坦円周束 $\pi : M_\rho \to \Sigma$ を考える. Σ 上の正直線束 $L \to \Sigma$ の π による引き戻し $\pi^* L \to M_\rho$ は, M_ρ 上の正 CR 直線束であるが, 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し, ある $k = k(m) \in \mathbb{N}$ が存在し, $\pi^* L^{\otimes m}$ の $\mathcal{C}^k$ 級 CR 切断の空間は引き戻しから来るもの $\pi^* H^0(\Sigma, L^{\otimes m})$ に退化する. 特に, この空間は有限次元であり, それらは π のファイバーの点を分離しない.*

閾値となる横断方向の可微分性 $k = k(m)$ は, 直線束の冪次数 m に高々線形に依存することも [1] で示されている. この $k(m)$ の評価における定数は, $\pi^* L^{\otimes m}$ の曲率を M_ρ の正則法束 $N^{1,0}_{M_\rho}$ の曲率と比較することにより得られる.

4. 葉層の調和測度とディードリッッヒ・フォルナエス指数

前節では, 連続, あるいは, 横断方向に高い可微分性をもつ CR 函数について考察したが, 一方, 横断方向の連続性を要請しない状況では, 以下が知られている.

定理 5 (Garnett [31]. cf. Hopf [36], Feres–Zeghib [29], Atsuji [8]). *種数 ≥ 2 の閉リーマン面 Σ, 基本群と普遍被覆変換群の同一視 $\rho_0 : \pi_1(\Sigma) \to PSL(2, \mathbb{R})$ をとり, 平坦円周束 M_{ρ_0} を考える. M_{ρ_0} 上の L^1 CR 函数 (したがって, L^2 CR 函数も) は, ルベーグ測度に関してほとんど全ての葉上, 定数函数である. また, 正則円板束 Ω_{ρ_0} 上のハーディー空間 $A^2_{-1}(\Omega_{\rho_0})$ は定数函数のみからなり, 特に, 有界正則函数は定数函数しかない.*

この定理は葉層の調和測度の方法により得られたものである. 3次元レビ平坦多様体 M において, **調和測度**とは, 超関数の意味で $\partial_{\mathcal{F}} \overline{\partial}_{\mathcal{F}} \mu = 0$ を満たす M 上の確率測度 μ のことである. 例えば, ホロノミー不変な横断測度は調和測度を定める. M がコンパクトであれば, 調和測度が少なくとも 1 つ存在することは分かる.

定理 5 における M_{ρ_0} では調和測度は一意的に存在し, ルベーグ測度類に属し, 体積形式

$$P_z(e^{i\theta}) \frac{2i dz \wedge d\overline{z}}{(1 - |z|^2)^2} \wedge d\theta, \quad [(z, e^{i\theta})] \in M_{\rho_0} = \mathbb{D} \times S^1 / \sim$$

の定める測度と定数倍を除いて一致する. $P_z(e^{i\theta}) := (1 - |z|^2) |\exp(i\theta) - z|^{-2}$ はポアソン核である. この良い性質を持つ調和測度の存在が定理 5 の証明の鍵である.

なお, 調和測度の方法により, 定理2で起こっている現象の一部を説明する次の結果が近年得られた.

定理 6 (Canales González [18])**.** 2次元複素多様体X内の実解析的レビ平坦境界の相対コンパクト領域Ωを考える. Ωがシュタイン多様体にもシュタイン空間の固有改変にもならない時, 境界のレビ葉層はホロノミー不変な横断測度を持つ.

定理5におけるレビ平坦面上の CR 函数 / レビ平坦境界の領域上の正則函数の挙動は, レビ葉層の調和測度によって統制されているが, 主結果1における CR 函数の挙動は, 正則法束の曲率によって統制されていた. これらを統一的に理解する幾何学的な枠組みはあるだろうか. また, 調和測度によるアプローチには特有の困難がある. すなわち, その存在証明は非構成的であり, 定量的な情報を得ることが困難で, たとえば, 調和測度の方法による$\mathbb{CP}^2$内のレビ平坦面の非存在予想へのアプローチ (Deroin [23])を推し進めることは難しい. この種の困難を別の枠組みで回避できないであろうか.

この答えになり得る概念として, ディードリッヒ・フォルナエス指数がある. ディードリッヒ・フォルナエス指数は, 元来, 擬凸領域の超凸性を測る指数として導入された.

定義 (Diederich–Fornæss [26])**.** 複素多様体X内の滑らかな擬凸境界を持つ相対コンパクト領域Ωを考える. Ωの定義函数r ($\Omega = \{x \in X \mid r(x) < 0\}$, $\partial\Omega$上$dr \neq 0$) のディードリッヒ・フォルナエス指数とは, $-(-r)^\eta$がΩ上コンパクト集合を除いて強多重劣調和となるような$\eta \in (0,1]$の上限値をいう. (存在しないときは0と定める.)

複素多様体X内のレビ平坦境界Mの領域Ωにおいては, ディードリッヒ・フォルナエス指数正の定義函数の存在は, 正則法束$N_M^{1,0}$の正曲率のエルミート計量の存在と同値である (Ohsawa–Sibony [47]. cf. Brunella [15], A. [2]). そこで, ディードリッヒ・フォルナエス指数と正則法束の幾何との関係が期待されるが, 実際, 次の意味で正しい.

主結果 2 (A. [2])**.** 複素多様体Xにおいて, レビ平坦境界Mを持つ相対コンパクト領域Ωを考える. ディードリッヒ・フォルナエス指数正の定義函数rに対し, その境界における法微分により正則法束$N_M^{1,0}$のエルミート計量hを定める. rのディードリッヒ・フォルナエス指数は,

$$\sup\left\{\eta \in (0,1) \mid i\partial_{\mathcal{F}}\overline{\partial}_{\mathcal{F}}(-\log\mu) - \frac{\eta}{1-\eta} i\partial_{\mathcal{F}}\log\mu \wedge \overline{\partial}_{\mathcal{F}}\log\mu > 0 \text{ on } T_M^{1,0}\right\}$$

と$N_M^{1,0}$のエルミート計量hから定まるレビ葉層の横断測度$\mu = \sqrt{h}$により計算される.

条件式の第一項は, hの葉方向の曲率形式の1/2倍に他ならないが, これとμに関してレビ葉層の無限小ホロノミーを測る第二項の比として指数が定まっている. 主結果2から, ディードリッヒ・フォルナエス指数と調和測度の間の次の関係が分かる.

系. $\dim X = 2$かつΩがディードリッヒ・フォルナエス指数1/2の定義函数を持てば, Mのレビ葉層はルベーグ測度類に属する調和測度を持つ.

特に定理5に現れたΩ_{ρ_0}はディードリッヒ・フォルナエス指数1/2の定義函数を持ち, まさにこの状況にある. Ω_{ρ_0}は, 次の意味で最良の状況にある.

主結果 3 (Fu–Shaw [30], A.–Brinkschulte [6]. cf. Demailly [24], Nemirovskiĭ [44], A. [3], [4])**.** n次元複素多様体X内のレビ平坦境界の相対コンパクト領域Ωについて, その定義函数のディードリッヒ・フォルナエス指数は$1/n$を超えない.

5. 重み付きベルグマン空間と非存在予想

ディードリッヒ・フォルナエス指数に関しては, 重み付きベルグマン空間に対する次の含意がよく知られている.

定理 7 (Berndtsson–Charpentier [12]. cf. Cao–Shaw–Wang [19]). *複素多様体 X 内の擬凸境界の相対コンパクト領域 Ω が, ディードリッヒ・フォルナエス指数 $\eta > 0$ の定義函数 r を持つとき, 重み付きベルグマン空間 $A^2_\alpha(\Omega, K_X)$ は $\alpha > -\eta$ に対し無限次元である.*

ここで X 上の正則直線束 L に関する重み $\alpha > -1$ のベルグマン空間 $A^2_\alpha(\Omega, L)$ とは, L のエルミート計量 h, X 上の体積形式 dV, Ω の定義函数 r に関して,

$$\|f\|^2_\alpha := \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_\Omega |f|^2_h (-r)^\alpha dV < \infty$$

となる $f \in H^0(\Omega, L)$ の集まりとして定義される. Γ はガンマ函数を表す. 定理5に現れたハーディー空間 $A^2_{-1}(\Omega, L)$ は, $\|f\|_{-1} := \lim_{\alpha \searrow -1} \|f\|_\alpha < \infty$ なる正則切断の集まりとして定義する. ハーディー空間に属する正則切断は, 境界値を L^2 CR 切断として持つことが知られている. L が自明束のときは, 単に $A^2_\alpha(\Omega)$ と書く.

$\mathbb{CP}^2$ 内に閉レビ平坦面 M が仮に存在したと仮定すれば, M は領域 Ω を囲み, フビニ・スタディ計量から正則法束 $N^{1,0}_M$ に誘導されるエルミート計量は正曲率を持ち, フビニ・スタディ計量に付随する Ω の定義函数は正のディードリッヒ・フォルナエス指数を持つ. したがって, 標準束 $K_{\mathbb{CP}^2}$ のベルグマン空間 $A^2_0(\Omega, K_{\mathbb{CP}^2})$ は無限次元となるので, 他方でその有限次元性が示せれば矛盾を導ける可能性がある. 実際, この方針から次の部分的な結果が得られる.

主結果 4 (A.–Brinkschulte [7]. cf. Bejancu–Deshmukh [13]). *$\mathbb{CP}^2$ にフビニ・スタディ計量を与え, 閉レビ平坦面 $M \subset \mathbb{CP}^2$ の存在を仮定する. この時, M 上には総実リッチ曲率 $\mathrm{Ric}^M(\xi, \xi)$ が -4 以下となる点が存在する.*

ここで総実リッチ曲率とは, 3次元多様体 M にフビニ・スタディ計量を制限して計算されるリッチ曲率 Ric^M のうち, 総実方向 $\mathrm{Ric}^M(\xi, \xi)$, $\xi \in TM \cap (T\mathcal{F})^\perp$ の値をさす. 主結果4の証明の方針であるが, 「$\mathrm{Ric}^M(\xi, \xi) > -4$」という幾何学的な仮定から出発し, 主結果3の証明で用いられる Demailly [24] のルロン・イェンセン型公式に相当する部分積分 (Griffiths [34]), ボホナーテクニックにより, ベルグマン空間 $A^2_0(\Omega, K_{\mathbb{CP}^2})$ の有限次元性を示して矛盾を導く. 総実リッチ曲率に関する仮定は, ガウスの公式を経由し, フビニ・スタディ計量が定めるレビ葉層の横断測度に関する無限小ホロノミーの評価と読み替えると, 部分積分の境界項の評価に見てとることができる.

一般の次数の直線束の重み付きベルグマン空間 $A^2_\alpha(\Omega, \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^2}(d))$ に対して, 同様の議論を行い, 主結果4を形式的に改善することは可能である. その際, ディードリッヒ・フォルナエス指数が評価に含まれることになる. しかし, 本質的な改善は得られない. その困難の主要部は, 無限次元性の側, 定理7における重みの評価の最良性にある. 定理7は $\overline{\partial}$ 方程式を重みで捻った中野の等式を用いて評価式付きで解くことで得られるが, その証明から推測されるように, また次節で具体的に見るように, シャープな結果を一般には与えない. (なお, $\mathbb{C}^n$ 内の擬凸領域に対しては, Chen [22] が Berndtsson–Charpentier [12] における重み付き L^2 空間での $\overline{\partial}$ 方程式の評価式付きの可解性を改善している.)

6. 正則円板束における重み付きベルグマン空間の無限次元性

$\mathbb{CP}^2$ における非存在予想に, 重み付きベルグマン空間の無限次元性・有限次元性からアプローチするためには, 定理7の改善が必要である. そのために正則円板束における事例を検討しよう.

定理5における正則円板束 Ω_{ρ_0} を考える. Ω_{ρ_0} はディードリッヒ・フォルナエス指数 $1/2$ の定義函数をもち, 定理7の方法から $A^2_\alpha(\Omega_{\rho_0})$ の無限次元性が $\alpha > -1/2$ に対し分かっている. 一方, 定理5より, ハーディー空間 $A^2_{-1}(\Omega_{\rho_0}) = \mathbb{C}$ は1次元である. そこで, $A^2_\alpha(\Omega_{\rho_0})$, $-1 < \alpha \leq -1/2$, の次元が問題となる. 答えは無限次元である.

主結果 5 (A. [5])**.** *Σ の標準環 $\bigoplus_{N=0}^{\infty} H^0(\Sigma, K_\Sigma^{\otimes N})$ からの次の線形写像は well-defined, 単射であり, その像は $\mathcal{O}(\Omega_{\rho_0})$ において広義一様収束位相で稠密となる.*

$$I : \bigoplus_{N=0}^{\infty} H^0(\Sigma, K_\Sigma^{\otimes N}) \hookrightarrow \bigcap_{\alpha > -1} A^2_\alpha(\Omega_{\rho_0}) \subset \mathcal{O}(\Omega_{\rho_0})$$

$$I(\psi)(z,w) := \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{B}(N,N)} \displaystyle\int_{\tau \in \overline{zw}} \dfrac{\psi(\tau)(d\tau)^{\otimes N}}{[w,\tau,z]^{\otimes(N-1)}} & \textit{for } N \geq 1, \\ \text{定数}\,\psi & \textit{for } N = 0 \end{cases}$$

ただし, Ω_{ρ_0} 上の正則函数は, 二重円板 $\mathbb{D}_z \times \mathbb{D}_w$ 上の $\pi_1(\Sigma)$ の対角作用で不変な正則函数と同一視している. また, Σ の不変被覆 $\mathbb{D}_\tau$ を用いて, $\psi \in H^0(\Sigma, K_\Sigma^{\otimes N})$ を $\psi(\tau)(d\tau)^{\otimes N} \in H^0(\mathbb{D}, K_{\mathbb{D}}^{\otimes N})$ と表示している. $\overline{zw}$ は z から w への $\mathbb{D}$ 内の積分路,

$$[w,\tau,z] := \frac{(w-z)d\tau}{(w-\tau)(\tau-z)}$$

は $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ 不変な $\mathbb{D}_\tau$ 上の有理型1形式, $\mathrm{B}(p,q)$ はベータ函数をそれぞれ表す.

Σ の標準環は無限次元であるから, 従って, 任意の $-1 < \alpha \leq -1/2$ に対して, $A^2_\alpha(\Omega_{\rho_0})$ は無限次元である. 線形写像 I により, Ω_{ρ_0} 上の不変正則函数が定まっていることは直接確認することができるが, これらの函数が全ての重み付きベルグマン空間に属することを確認するためには, I の構成を詳しく見なくてはならない.

$\Omega_{\rho_0} = \mathbb{D} \times \mathbb{D}/\pi_1(\Sigma)$ はシュタイン空間の固有改変であり, その中にはコンパクト複素曲線として対角集合の商 D が含まれている. D は Σ と双正則である. したがって, 標準環 $\bigoplus_{N=0}^{\infty} H^0(\Sigma, K_\Sigma^{\otimes N})$ は, $\bigoplus_{N=0}^{\infty} H^0(D, \mathcal{I}_D^N/\mathcal{I}_D^{N+1})$ と同一視される. ここで, $\mathcal{I}_D$ は $D \subset \Omega_{\rho_0}$ の定義イデアル層である. つまり, $\psi \in H^0(\Sigma, K_\Sigma^{\otimes N})$ は正則函数の D に沿う正則函数の ($(N-1)$ 次まで消えた) N 次のジェットとみなされる. 線形写像 I は D に沿う正則函数のジェット ψ を, Ω_{ρ_0} 上の正則函数 $I(\psi)$ に拡張しており, 特に L^2 ノルム最小の最良の拡張を与えている. 結果として, この最良の拡張 $I(\psi)$ はノルム $\|\cdot\|_\alpha$, $\alpha > -1$, の取り方には依存していないことを注意しておく.

正則函数のジェットの L^2 拡張定理については, いくつかの先行研究 ([49], [35], [25]) があるが, 決定的な結果は得られていない. 主結果5の証明においては, 一般論は利用できないため, ベキ級数による直接計算で最良の L^2 拡張を得た. ベキ級数による計算においては, 定理5の証明でも用いられた M_{ρ_0} のレビ葉層の調和測度を基準にして座標をとる. 重み付き L^2 ノルムの収束の評価には, Σ 上の標準環に作用する複素ラプラシアンのスペクトル理論を用い, その収束性は最終的に一般化超幾何函数 ${}_3F_2$ の収束性に帰着される.

主結果5における$\mathcal{O}(\Omega_{\rho_0})$の表示の応用を2つ挙げて, 本稿を終える.

- $A^2_\alpha(\Omega_{\rho_0})$の重み付きベルグマン核 $B_\alpha((z,w);(z',w'))$のリゴツカ型の表示式が得られる. Σの種数をg, $K_\Sigma^{\otimes N}$のベルグマン核を$B_N(\tau,\tau')(d\tau\otimes\overline{d\tau'})^{\otimes N}$, 正規化定数

$$c_{N,\alpha} := \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(N+2+\alpha)} {}_3F_2\left(\begin{matrix} N+1, N, N \\ 2N, N+2+\alpha \end{matrix}; 1\right)$$

と表すとき,

$$B_\alpha(z,w) = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\pi^2(4g-4)} + \frac{1}{\pi}\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{c_{N,\alpha}} \frac{1}{\mathrm{B}(N,N)^2} \int_{\tau\in\overline{zw}} \int_{\tau'\in\overline{z'w'}} \frac{B_N(\tau,\tau')(d\tau\otimes\overline{d\tau'})^{\otimes N}}{([w,\tau,z]\otimes\overline{[w',\tau',z']})^{\otimes(N-1)}}.$$

- 定理5におけるハーディー空間の自明性$A^2_{-1}(\Omega_{\rho_0}) = \mathbb{C}$の直接証明を与えることができる. 既知の証明は, ハーディー空間に属する正則函数の境界値に着目し, その定数性をM_{ρ_0}上のレビ葉層のエルゴード性を用いて導くものであった. この直接証明では正則函数の境界値を利用しない.

参考文献

[1] M. Adachi, *On the ampleness of positive CR line bundles over Levi-flat manifolds.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **50** (2014), 153–167.

[2] M. Adachi, *A local expression of the Diederich–Fornaess exponent and the exponent of conformal harmonic measures.* Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **46** (2015), 65–79.

[3] M. Adachi, *On a global estimate of the Diederich–Fornaess index of Levi-flat real hypersurfaces.* to appear in Adv. Stud. Pure Math. **72** (2017).

[4] M. Adachi, *A CR proof for a global estimate of the Diederich–Fornaess index of Levi-flat real hypersurfaces.* Springer Proc. Math. Stat. **144** (2015), 41–48.

[5] M. Adachi, *Weighted Bergman spaces of Levi-flat domains: geodesic segments on compact Riemann surfaces.* Preprint.

[6] M. Adachi and J. Brinkschulte, *A global estimate for the Diederich–Fornaess index of weakly pseudoconvex domains.* Nagoya Math. J. **220** (2015), 67–80.

[7] M. Adachi and J. Brinkschulte, *Curvature restrictions for Levi-flat real hypersrufaces in complex projective planes.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **65** (2015), 2547–2569.

[8] A. Atsuji, *Leafwise Brownian motions and some function theoretic properties of laminations.* Preprint.

[9] D. E. Barrett, *Complex analytic realization of Reeb's foliation of S^3.* Math. Z. **203** (1990), 355–361.

[10] D. E. Barrett, *Global convexity properties of some families of three-dimensional compact Levi-flat hypersurfaces.* Trans. Amer. Math. Soc. **332** (1992), 459–474.

[11] D. E. Barrett and T. Inaba, *On the topology of compact smooth three-dimensional Levi-flat hypersurfaces.* J. Geom. Anal. **2** (1992), 489–497.

[12] B. Berndtsson and P. Charpentier, *A Sobolev mapping property of the Bergman kernel.* Math. Z. **235** (2000), 1–10.

[13] A. Bejancu and S. Deshmukh, *Real hypersurfaces of $\mathbb{CP}^n$ with non-negative Ricci curvature.* Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 269–274.

[14] S. Biard and A. Iordan, *Non existence of Levi flat hypersurfaces with positive normal bundle in compact Kähler manifolds of dimension at least 3*, to appear in Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa.

[15] M. Brunella, *On the dynamics of codimension one holomorphic foliations with ample normal bundle.* Indiana Univ. Math. J. **57** (2008), 3101–3113.

[16] M. Brunella, *Codimension one foliations on complex tori.* Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **19** (2010), 405–418.

[17] C. Camacho, A. Lins Neto and P. Sad, *Minimal sets of foliations on complex projective spaces.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **68** (1988), 187–203.

[18] C. Canales González, *Levi-flat hypersurfaces and their complement in complex surfaces.* Preprint.

[19] J. Cao, M.-C. Shaw and L. Wang, *Estimates for the $\overline{\partial}$-Neumann problem and nonexistence of C^2 Levi-flat hypersurfaces in $\mathbb{CP}^n$.* Math. Z. **248** (2004), 183–221.

[20] E. Cartan, *Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes.* Ann. Mat. Pura Appl. **11** (1933), 17–90.

[21] D. Cerveau, *Minimaux des feuilletages algébriques de* $\mathbf{C}$P(n). Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **43** (1993), 1535–1543.

[22] B.-Y. Chen, *Weighted Bergman spaces and the $\overline{\partial}$-equation.* Trans. Amer. Math. Soc. **366** (2014), 4127–4150.

[23] B. Deroin, *Hypersurfaces Levi-plates immergées dans les surfaces complexes de courbure positive.* Ann. Sci. École Norm. Sup. **38** (2005), 57–75.

[24] J.-P. Demailly, *Mesures de Monge–Ampère et mesures plurisousharmoniques.* Math. Z. **194** (1987), 519–564.

[25] J.-P. Demailly, *Extension of holomorphic functions defined on non reduced analytic subvarieties.* Preprint.

[26] K. Diederich and J. E. Fornæss, *Pseudoconvex domains: bounded strictly plurisubharmonic functions.* Invent. Math. **39** (1977), 129–141.

[27] K. Diederich and T. Ohsawa, *Harmonic mappings and disc bundles over compact Kähler manifolds.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **21** (1985), 819–833.

[28] K. Diederich and T. Ohsawa, *On the displacement rigidity of Levi flat hypersurfaces — the case of boundaries of disc bundles over compact Riemann surfaces.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **43** (2007), 171–180.

[29] R. Feres and A. Zeghib, *Leafwise holomorphic functions.* Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 1717–1725.

[30] S. Fu and M.-C. Shaw, *The Diederich-Fornæss exponent and non-existence of Stein domains with Levi-flat boundaries.* J. Geom. Anal. **26** (2016), 220–230.

[31] L. Garnett, *Foliations, the ergodic theorem and Brownian motion.* J. Funct. Anal. **51** (1983), 285–311.

[32] É. Ghys, *Laminations par surfaces de Riemann*, Panor. Synthèses **8** (1999), 49–95.

[33] H. Grauert, *Bemerkenswerte pseudokonvexe Mannigfaltigkeiten.* Math. Z. **81** (1963), 377–391.

[34] Ph. A. Griffiths, *The extension problem in complex analysis. II. Embeddings with positive normal bundle.* Amer. J. Math. **88** (1966), 366–446.

[35] T. Hisamoto, *Remarks on L^2-jet extension and extension of singular hermitian metric with semipositive curvature.* Preprint.

[36] E. Hopf, *Fuchsian groups and ergodic theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **39** (1936), 299–314.

[37] C.-Y. Hsiao and G. Marinescu, *Szegő kernel asymptotics and Kodaira embedding theorems of Levi-flat CR manifolds.* Preprint.

[38] T. Inaba, *On the nonexistence of CR functions on Levi-flat CR manifolds.* Collect. Math. **43** (1992), 83–87.

[39] A. Iordan and F. Matthey, *Régularité de l'opérateur $\overline{\partial}$ et théorème de Siu sur la non-existence d'hypersurfaces Levi-plates dans l'espace projectif complexe $\mathbb{CP}_n$, $n \geq 3$.* C. R. Math. Acad. Sci. Paris **346** (2008), 395–400.

[40] S. Ivashkovich, Historical notes §1.10 of *Limiting behavior of trajectories of complex polynomial vector fields.* arXiv:1004.2618.

[41] T. Koike and N. Ogawa, *Local criteria for non embeddability of Levi-flat manifolds.* Preprint.

[42] A. Lins Neto, *A note on projective Levi flats and minimal sets of algebraic foliations.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **49** (1999), 1369–1385.

[43] K. Matsumoto, *Takeuchi's equality for the Levi form of the Fubini–Study distance to complex submanifolds in complex projective spaces.* Preprint.

[44] S. Yu. Nemirovskiĭ, *Stein domains with Levi-plane boundaries on compact complex surfaces.* Mat. Zametki **66** (1999), 632–635.

[45] T. Ohsawa, *On projectively embeddable complex-foliated structures*. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **48** (2012), 735–747.

[46] T. Ohsawa, *Nonexistence of certain Levi flat hypersurfaces in Kähler manifolds from the viewpoint of positive normal bundles*. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **49** (2013), 229–239.

[47] T. Ohsawa and N. Sibony, *Bounded p.s.h. functions and pseudoconvexity in Kähler manifold*. Nagoya Math. J. **149** (1998), 1–8.

[48] T. Ohsawa and N. Sibony, *Kähler identity on Levi flat manifolds and application to the embedding*. Nagoya Math. J. **158** (2000), 87–93.

[49] D. Popovici, L^2 *extension for jets of holomorphic sections of a Hermitian line bundle*. Nagoya Math. J. **180** (2005), 1–34.

[50] C. Rea, *Levi-flat submanifolds and holomorphic extension of foliations*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **26** (1972), 665–681.

[51] Y.-T. Siu, *Nonexistence of smooth Levi-flat hypersurfaces in complex projective spaces of dimension* ≥ 3. Ann. of Math. (2) **151** (2000), 1217–1243.

[52] A. Takeuchi, *Domaines pseudoconvexes infinis et la métrique riemannienne dans un espace projectif*. J. Math. Soc. Japan **16** (1964), 159–181.

[53] T. Ueda, *On the neighborhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle*. J. Math. Kyoto Univ. **22** (1982/83), 583–607.