日本数学会

2016年度秋季総合分科会

函数論分科会
講演アブストラクト

2016年9月

於　関西大学

日本数学会

2016年度秋季総合分科会

函数論分科会
講演アブストラクト

2016年9月

於　関西大学

函　数　論

9月15日(木)　第VIII会場

9:00〜11:45

				(分)	頁
1	尾和重義 H. M. Srivastava 早味俊夫 黒木和雄	(大和大教育) (Univ. of Victoria) (摂南大理工) (大阪体育大)	A new general idea for starlike and convex functions	(15)	1
2	坪井成文	((株)JSOL)	The defects of Hadamard gap series in the unit disk which is of small order	(15)	3
3	齋藤三郎 Luís P. Castro 山田陽	(群馬大*・再生核研)* (Univ. of Aveiro) (東京学大教育)	Solutions of Tikhonov functional equations and applications to multiplication operators on Szegö spaces	(15)	5
4	齋藤三郎 高木正子	(群馬大*・再生核研)* (再生核研)	Division by zero z/0=0 in complex analysis (draft)	(15)	7
5	米田力生	(金沢大人間社会)*	荷重付きブロック空間, 荷重付きディリクレ空間, BMOA 上の合成作用素	(10)	9
6	前田文之 水田義弘 大野貴雄 下村哲	(広島大*)* (広島大*) (大分大教育福祉) (広島大教育)	Sobolev's inequalities on non-homogeneous central Herz–Morrey–Musielak–Orlicz spaces	(15)	11
7	水田義弘 A. Nekvinda 下村哲	(広島大*)* (Czech Tech. Univ.) (広島大教育)	Optimal estimates for the fractional Hardy operator	(15)	13
8	西尾昌治 下村勝孝	(阪市大理)♭ (茨城大理)	Polyharmonic Bergman spaces on half spaces	(15)	15
9	伊藤健太郎 酒井良二 鈴木紀明	(名城大理工) (名城大理工) (名城大理工)	Uniform convergence of Fourier series for weighted orthogonal polynomials	(15)	17
10	田中清喜	(大同大)	多重調和ベルグマン空間について	(15)	19

14:15〜16:55

				(分)	頁
11	角大輝	(阪大理)	Finding roots of any polynomials by random relaxed Newton's methods	(15)	21
12	中根静男	(東京工芸大)	Stretching rays for cubic polynomials	(15)	23
13	天野政紀	(東工大理工)	新座標を用いたタイヒミュラー距離の評価	(15)	25
14	宮地秀樹	(阪大理)	Extremal length and the period matrices of branched covering spaces for associated quadratic differentials	(15)	27
15	柳下剛広	(山口大創成)	2 乗可積分タイヒミュラー空間上の Weil–Petersson 計量の曲率について	(15)	29
16	藤野弘基	(名大多元数理)	Quasisymmetric embedding of the integer set and its quasiconformal extension	(15)	31

A new general idea for starlike and convex functions

Shigeyoshi Owa (Yamato University)
H. M. Srivastava (University of Victoria)
Toshio Hayami (Setsunan University)
Kazuo Kuroki (Osaka University of Health and Sport Sciences)

Let $\mathcal{A}$ be the class of functions $f(z)$ which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ and normalized by $f(0) = 0$ and $f'(0) = 1$. If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some real α $(0 \leqq \alpha < 1)$, then $f(z)$ is said to be starlike of order α in $\mathbb{U}$. Similarly, we say that $f(z)$ is convex of order α in $\mathbb{U}$ if it satisfies

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some real α $(0 \leqq \alpha < 1)$.

It is well known that the Koebe function $f(z)$ given by

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + \sum_{n=2}^{\infty} nz^n$$

is starlike (of order 0) in $\mathbb{U}$ and that a function $f(z)$ given by

$$f(z) = \frac{z}{1-z} = z + \sum_{n=2}^{\infty} z^n$$

is convex (of order 0) in $\mathbb{U}$.

Taking the principal value for $\sqrt{z}$, we consider a function $f(z)$ given by

$$f(z) = \frac{z}{(1-\sqrt{z})^2} = z + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)z^{1+\frac{n}{2}} \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

Then we have that

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-\sqrt{z}}\right) > \frac{1}{2} \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

that is, that $f(z)$ is starlike of order $\dfrac{1}{2}$ in $\mathbb{U}$. Furthermore, we note that a function

$$f(z) = \frac{z}{1-\sqrt{z}} = z + \sum_{n=1}^{\infty} z^{1+\frac{n}{2}} \qquad (z \in \mathbb{U})$$

satisfies the following inequalities

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{2-\sqrt{z}}{2\,(1-\sqrt{z})}\right) > \frac{3}{4} \qquad (z \in \mathbb{U})$$

and

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{4-3\sqrt{z}+z}{2\,(2-\sqrt{z})\,(1-\sqrt{z})}\right) > 0 \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

that is, that $f(z)$ is starlike of order $\dfrac{3}{4}$ in $\mathbb{U}$ and convex (of order 0) in $\mathbb{U}$.

In view of the above, we introduce general classes $\mathcal{A}_k$ as follows.

Let $\mathcal{A}_k$ denote the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{1+\frac{n}{k}} z^{1+\frac{n}{k}} \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

which are analytic in the punctured open unit disk $\mathbb{U}_0 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$, where we take the principal value for $z^{\frac{1}{k}}$. If $f(z) \in \mathcal{A}_k$ satisfies the condition

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha \qquad (z \in \mathbb{U})$$

or

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some real α $(0 \leqq \alpha < 1)$, then we write $f(z) \in \mathcal{S}_k^*(\alpha)$ or $f(z) \in \mathcal{K}_k(\alpha)$, respectively.

With above definitions, we see that $f(z) \in \mathcal{K}_k(\alpha)$ if and only if $zf'(z) \in \mathcal{S}_k^*(\alpha)$, and that $f(z) \in \mathcal{S}_k^*(\alpha)$ if and only if $\displaystyle\int_0^z \frac{f(t)}{t}\,dt \in \mathcal{K}_k(\alpha)$.

In the present talk, we discuss the coefficient inequalities for $\mathcal{S}_k^*(\alpha)$ and $\mathcal{K}_k(\alpha)$. Moreover, we approach to properties and problems for these general classes.

THE DEFECTS OF HADAMARD GAP SERIES IN THE UNIT DISK WHICH IS OF SMALL ORDER

NARUFUMI TSUBOI

Let

$$f(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{n_k} \tag{1}$$

be a power series convergent in the unit disk $\mathbf{D} = \{|z| < 1\}$ with Hadamard gaps, i.e.

$$n_{k+1}/n_k \geq q$$

for some $q > 1$. T. Murai (1980) proved that if an analytic function $f(z)$ in $\mathbf{D}$ given by (1) satisfies

$$\limsup_{k\to\infty} |c_k| > 0, \tag{2}$$

then the Nevanlinna defect $\delta(0, f)$ of $f(z)$ at 0 vanishes. More precisely he showed that if (and only if)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = +\infty, \tag{3}$$

then the Nevanlinna characteristic function $T(r, f)$ diverges as $r \to 1$ and if we assume (2), then the proximity function $m(r, 0)$ is bounded as $r \to 1$ through a suitable sequence of r. Remark that these results yield that $f(z)$ given by (1) satisfying (2) has no finite defective value, that is, $\delta(a, f)$ vanishes for arbitrary $a \in \mathbf{C}$.

Now we turn to consider the case where

$$\lim_{k\to\infty} c_k = 0. \tag{4}$$

It was recently shown that the coefficients $\{c_k\}$ of $f(z)$ satisfy (4) and

$$\log K / \log \sum_{k=1}^{K} |c_k|^2 = O(1),$$

then $f(z)$ has no finite defective value.

In this talk, we shall discuss the defects of Hadamard gap series (1) in $\mathbf{D}$ which is more small order.

Solutions of Tikhonov Functional Equations and Applications to Multiplication Operators on Szegö Spaces

L. P. Castro, University of Aveiro;
S. Saitoh, Institute of Reproducing Kernels;
A. Yamada, Tokyo Gakugei University

June 16, 2016

We consider a natural representation of solutions for the Tikhonov functional equation. This will be done by applying the theory of reproducing kernels to the approximate solutions of general bounded linear operator equations (when defined from reproducing kernel Hilbert spaces into general Hilbert spaces), by using the Hilbert-Schmidt property and tensor product of Hilbert spaces. As a concrete case, we shall consider generalized fractional functions formed by the quotient of Bergman functions by Szegö functions considered from the multiplication operators on the Szegö spaces.

References

[1] L.P. Castro and S. Saitoh, Fractional functions and their representations, *Complex Anal. Oper. Theory* **7**(4) (2013), 1049–1063.

[2] L.P. Castro, H. Fujiwara, S. Saitoh, Y. Sawano, A. Yamada and M. Yamada, Fundamental error estimates inequalities for the Tikhonov regularization using reproducing kernels, *Inequalities and Appications 2010*, International Series of Numerical Mathematics **161**, Springer, Basel (2012), 87–101.

[3] L.P. Castro, S. Saitoh, Y. Sawano and A.S. Silva, Discrete linear differential equations, *Analysis* **32**(3) (2012), 181–191.

[4] H.W. Engl, M. Hanke and A. Neubauer, *Regularization of Inverse Problems*, Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[5] H. Fujiwara, High-accurate numerical method for integral equation of the first kind under multiple-precision arithmetic, *Theoretical and Applied Mechanics Japan* **52** (2003), 192–203.

[6] H. Fujiwara, T. Matsuura, S. Saitoh and Y. Sawano, Numerical real inversion of the Laplace transform by using a high-accuracy numerical method, *Further Progress in Analysis*, World Sci. Publ., Hackensack, NJ (2009), 574–583.

[7] H. Fujiwara, Numerical real inversion of the Laplace transform by reproducing kernel and multiple-precision arithmetric, *Progress in Analysis and its Applications*, Proceedings of the 7th International ISAAC Congress, World Scientific (2010), 289–295.

[8] J.B. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Pure and Applied Mathematics **96**, Academic Press Inc., New York, 1981.

[9] D.A. Hejhal, *Theta Functions, Kernel Functions and Abel Integrals,* Memoirs of Amer. Math. Soc. **129**, Providence, R.I., 1972.

[10] H. Hochstadt, *Integral Equations*, John Wiley & Sons, New York, 1973.

[11] S. Saitoh, The Bergman norm and the Szegö norm, *Trans. Amer. Math. Soc.* **249** (1979), 261–279.

[12] S. Saitoh, *Integral Transforms, Reproducing Kernels and their Applications*, Pitman Research Notes in Mathematics Series **369**, Addison Wesley Longman, London, 1997.

[13] S. Saitoh, Theory of reproducing kernels: Applications to approximate solutions of bounded linear operator functions on Hilbert spaces, *AMS Translations*, Series 2, **230** (2010), 107–134.

[14] A.N. Tikhonov and V.Y. Arsenin, *Solutions of Ill-posed Problems* (English translation), Scripta Series in Mathematics, John Wiley & Sons, New York; V.H. Winston & Sons, Washington, D.C., 1977.

[15] A. Yamada, Equality conditions for general norm inequalities in reproducing kernel Hilbert spaces, *Advances in Analysis*, H.G.W. Begehr (ed.) et al., World Scientific, Hackensack, NJ (2005), 447–455.

(Complex Anal. Oper. Theory DOI 10.1007/s11785-016-0545-4 Complex Analysis and Operator Theory)

Division by Zero $z/0 = 0$ in Complex Analysis (draft)

Saburou Saitoh and Masako Takagi
Institute of Reproducing Kernels
E-mail: kbdmm360@yahoo.com.jp

June 16, 2016

In this talk, we will show and examine the values of analytic functions at isolated singular points in the sense of the division by zero $z/0 = 0$ with the general situation of the division by zero:

Introduction, fundamental theorem, applications to solutions with analytic parameter, linear fractional functions, examples of values at singular points, basic meanings of hidden values of analytic functions, hidden values of domain functions, conclusion and others.

Key Words: Division by zero, $1/0 = 0$, hidden values of analytic function, Laurent expansion, field, Y-field, reflection with respect to circle, point at infinity, infinity, analytic parameter, Sato hyperfunction, differential equation, derivative, parallel line, Euclidean space.

References

[1] M. Abramowitz and I. Stengun, HANDBOOK OF MATHEMATICAL FUNCTIONS WITH FORMULAS, GRAPHS, AND MATHEMATICAL TABLES, Dover Publishings, Inc.1972.

[2] L. V. Ahlfors, Complex Analysis, McGraw-Hill Book Company, 1966.

[3] J. P. Barukcic and I. Barukcic, Anti AristotleThe Division of Zero by Zero. Journal of Applied Mathematics and Physics, **4** (2016), 749-761. doi: 10.4236/jamp.2016.44085.

[4] J. A. Bergstra, Y. Hirshfeld and J. V. Tucker, Meadows and the equational specification of division (arXiv:0901.0823v1[math.RA] 7 Jan 2009).

[5] L. P. Castro and S. Saitoh, Fractional functions and their representations, Complex Anal. Oper. Theory **7** (2013), no. 4, 1049-1063.

[6] I. M. Gelfand, G. E. Shilov, Generalized functions, vol. I: properties and operations, translated by M. D. Friedman, A. Feinstein, C. P. Peltzer, Academic Press, 1964 (Russian original, Fizmatgiz, 1958).

[7] A. Kaneko, Introduction to hyperfunctions I (in Japanese), University of Tokyo Press, 1980.

[8] M. Kuroda, H. Michiwaki, S. Saitoh, and M. Yamane, New meanings of the division by zero and interpretations on $100/0 = 0$ and on $0/0 = 0$, Int. J. Appl. Math. **27** (2014), no 2, pp. 191-198, DOI: 10.12732/ijam.v27i2.9.

[9] T. Matsuura and S. Saitoh, Matrices and division by zero $z/0 = 0$, Advances in Linear Algebra & Matrix Theory, 2016, 6, 51-58 Published Online June 2016 in SciRes. http://www.scirp.org/journal/alamt
http://dx.doi.org/10.4236/alamt.2016.62007.

[10] H. Michiwaki, S. Saitoh, and M.Yamada, Reality of the division by zero $z/0 = 0$. IJAPM International J. of Applied Physics and Math. 6(2015), 1–8. http://www.ijapm.org/show-63-504-1.html

[11] H. Michiwaki, H. Okumura and S. Saitoh, Division by Zero $z/0 = 0$ in Euclidean Spaces, International Journal of Mathematics and Computation (in press).

[12] M. Morimoto, Introduction to Sato hyperfunctions (in Japanese), Kyouritu Publication Co. (1976).

[13] Z. Nehari, Conformal Mapping, Graw-Hill Book Company, Inc. 1952.

[14] S. Ponnusamy and H. Silverman, *COMPLEX VARIABLES WITH APPLICATIONS*, Birkäuser, 2006, Boston.

[15] T. S. Reis and J.A.D.W. Anderson, Transdifferential and Transintegral Calculus, Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science 2014 Vol I WCECS 2014, 22-24 October, 2014, San Francisco, USA.

[16] T. S. Reis and J.A.D.W. Anderson, Transreal Calculus, IAENG International J. of Applied Math., 45: IJAM 45 1 06.

[17] S. Saitoh, Generalized inversions of Hadamard and tensor products for matrices, Advances in Linear Algebra & Matrix Theory. **4** (2014), no. 2, 87–95. http://www.scirp.org/journal/ALAMT/

[18] S.-E. Takahasi, M. Tsukada and Y. Kobayashi, Classification of continuous fractional binary operations on the real and complex fields, Tokyo Journal of Mathematics, **38**(2015), no. 2, 369-380.

Composition operators on the weighted Bloch space, the weighted Dirichlet spaces, and $BMOA$ with closed range

米田　力生　(Rikio Yoneda)

金沢大学 (Kanazawa university)

For φ holomorphic self-map of the open unit disk D, the composition operator C_φ is defined by $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$. For $z, w \in D$, $0 < r < 1$, let $\varphi_z(w) = \dfrac{z-w}{1-\bar{z}w}$ and $dA(z)$ denote the area measure on D.

The space $\mathcal{B}_\alpha$ of D is defined to be the space of analytic functions f on D such that

$$\| f \|_{\beta_\alpha} = |f(0)| + \sup_{z \in D}(1-|z|^2)^\alpha \, |f'(z)| < +\infty \; .$$

Note that $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$ is the Bloch space .
The space $BMOA$ is defined to be the space of analytic functions f on D such that

$$\sup_{a \in D} \int_D (1 - |\varphi_a(z)|^2)|f'(z)|^2 dA(z) < +\infty.$$

For $\alpha > -1$, the weighted Dirichret space D^α is defined to be the space of analytic functions f on D such that

$$\int_D |f'(z)|^2 dA_\alpha(z) < +\infty,$$

where $dA_\alpha(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha dA(z)$.

Let X be Banach spaces and let T be a linear operator from X into X. Then T is called to be bounded below on X if there exists a positive constant $C > 0$ such that $\| Tf \| \geq C \| f \|$ for all $f \in X$.
By Schwarz-Pick lemma, the operator C_φ is bounded on the Bloch space $\mathcal{B}$. And C_φ is also bounded on the space $BMOA$. In [8] Nina Zorboska study the closed range composition operators on the Bergman spaces. H.Chen and P.Gauthier study the boundedness from below of composition operators on Bloch space in [6]. In this paper we study when the composition operators are bounded below on the the weighted Dirichlet space D^α, the weighted Bloch spaces $\mathcal{B}_\alpha$ and $BMOA$. In particular we study the relationship of C_φ with the closed range on $\mathcal{B}_\alpha$ and C_φ with the closed range on D^α.

In [1] J.R.Akeroyd and P.G.Ghatage proved the following result:

Theorem G. ([1]) *Let φ be a univalent, analytic self-map of the disk. Then C_φ is closed range on L^2_a if and only if φ is an automorphism of the disk.*

In [8] N.Zorboska proved the following result:

Theorem D.([8]) *Suppose φ is univalent self-map of the open unit disk D. Suppose φ is a univalent self-map of D. Then the following are equivalent.*

(1) $C_\varphi : L_a^2 \to L_a^2$ *is bounded below.*
(2) $C_\varphi : H^2 \to H^2$ *is bounded below.*
(3) $C_\varphi : D^\alpha \to D^\alpha$ *is bounded below for some* α, $\alpha > 1$.
(4) $C_\varphi : D^\alpha \to D^\alpha$ *is bounded below for all* α, $\alpha > 1$.

We proved the following result:

Theorem. *Let $\alpha > 1$. Suppose φ is a univalent self-map of D. Then the following are equivalent.*
(1) $C_\varphi : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_\alpha$ *is bounded below.*
(2) $C_\varphi : D^\alpha \to D^\alpha$ *is bounded below..*
(3) $C_\varphi : L_a^2 \to L_a^2$ *is bounded below.*
(4) $C_\varphi : H^2 \to H^2$ *is bounded below.*
(5) φ *is an automorphism of the open unit disk* D.
Moreover, *let* $0 < \alpha < 1$, *and suppose that* $C_\varphi : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_\alpha$ *is bounded*
$$(i.e.\quad \sup_{z\in D}\left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^\alpha |\varphi'(z)| < +\infty).$$
Then the following are equivalent.
(1) $C_\varphi : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_\alpha$ *is bounded below for some* $0 < \alpha < 1$.
(2) $C_\varphi : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_\alpha$ *is bounded below for all* $0 < \alpha < 1$.
(3) $C_\varphi : \mathcal{B}_\gamma \to \mathcal{B}_\gamma$ *is bounded below for some* $\gamma > 1$.
(4) $C_\varphi : \mathcal{B}_\gamma \to \mathcal{B}_\gamma$ *is bounded below for all* $\gamma > 1$.
(5) $C_\varphi : L_a^2 \to L_a^2$ *is bounded below.*
(6) $C_\varphi : H^2 \to H^2$ *is bounded below.*
(7) $C_\varphi : \mathcal{D}^\gamma \to \mathcal{D}^\gamma$ *is bounded below for some* $\gamma > 1$.
(8) $C_\varphi : \mathcal{D}^\gamma \to \mathcal{D}^\gamma$ *is bounded below for all* $\gamma > 1$.
(9) $C_\varphi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ *is bounded below.*
(10) $C_\varphi : BMOA \to BMOA$ *is bounded below.*
(11) $C_\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ *is bounded below.*
(12) φ *is an automorphism of the open unit disk* D.

References

[1] J.R.Akeroyd and P.G.Ghatage, Closed-range composition operators on A^2, Illinois J.Math.52. No 2 (2008), 533-549.

[2] J.R.Akeroyd and P.G.Ghatage and M.Tjani, Closed-range composition operators on A^2 and the Bloch space, Integr.Equ.Oper.Theory (2010).

[3] P.S.Bourdon and J.A.Cima and A.L.Matheson, Compact composition operators on BMOA, Trans.Amer.Math.Soc.344(1994), 2183-2196.

[4] H.Chen and P.Gauthier, Boundedness From Below of Composition Operators on Bloch spaces, in preprint.

[5] P.Ghatage and D.Zheng and Nina Zorboska, Sampling sets and closed range composition operators on the Bloch space, Proceedings of the Amer.Math.Soc.133,5(2004), 1371-1377.

[6] P.Ghatage and D.Zheng, Hyperbolic derivatives and generalized schwartz-Pick estimates, Proceedings of the Amer.Math.Soc.132,11(2004), 3309-3318.

[7] M.Jovovic and B. MacCluer, Composition operators on Dirichlet spaces, Acta. Sci. Math. (Szeged) 63(1997), 229-297.

[8] N.Zorboska, Composition operators With Closed Range,Trans.Amer.Math.Soc.344(1994), 791-801.

Sobolev's inequalities on non-homogeneous central Herz-Morrey-Musielak-Orlicz spaces

前田 文之 (広島大学名誉教授)
水田 義弘 (広島大学名誉教授)
大野 貴雄 (大分大学・教育学部)
下村 哲 (広島大学・教育学部)

本講演では，非斉次中心 Herz-Morrey-Musielak-Orlicz 空間に属する関数のリースポテンシャル $I_\alpha f$ の Sobolev の不等式について紹介する．

関数 $\Phi(x,t)=t\phi(x,t):\mathbf{R}^N\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ は次を満たすものを考える：

(Φ1) $\phi(\,\cdot\,,t)$ は $\mathbf{R}^N$ 上可測関数で $\phi(x,\,\cdot\,)$ は $[0,\infty)$ 上連続関数である;

(Φ2) 定数 $A_1\ge 1$ が存在して，$A_1^{-1}\le\phi(x,1)\le A_1\quad(x\in\mathbf{R}^N)$;

(Φ3) $\phi(x,t)$ は $[0,\infty)$ 上一様に仮似単調増加である，つまり，定数 $A_2\ge 1$ が存在して，

$$\phi(x,t)\le A_2\phi(x,s)\quad(x\in\mathbf{R}^N,\ 0\le t<s);$$

(Φ4) $\phi(x,t)$ は一様に 2 倍条件を満たす，つまり，定数 $A_3\ge 1$ が存在して，

$$A_3^{-1}\phi(x,t)\le\phi(x,2t)\le A_3\phi(x,t)\quad(x\in\mathbf{R}^N,\ t>0).$$

$\bar\phi(x,t)=\sup_{0\le s\le t}\phi(x,s)$ とし，

$$\overline{\Phi}(x,t)=\int_0^t\bar\phi(x,r)\,dr\quad(x\in\mathbf{R}^N,\ t>0)$$

とする．このとき，開集合 $\Omega\subset\mathbf{R}^N$ に対して，

$$\|f\|_{L^\Phi(\Omega)}=\inf\left\{\lambda>0:\int_\Omega\overline{\Phi}(y,|f(y)|/\lambda)\,dy\le 1\right\}.$$

関数 $\omega(r):(0,\infty)\to(0,\infty)$ は次を満たすものを考える：

(ω1) $\omega(r)$ または $\omega(r)^{-1}$ は $(0,\infty)$ 上仮似単調増加である；

(ω2) $\omega(r)$ は 2 倍条件を満たす．

$0<q<\infty$ とする．$A(0,r)=B(0,2r)\setminus B(0,r)$ に対して，

$$\|f\|_{\mathcal{H}^{\Phi,q,\omega}(\mathbf{R}^N)}=\|f\|_{L^\Phi(B(0,2))}+\left(\int_1^\infty\left(\omega(r)\|f\|_{L^\Phi(A(0,r))}\right)^q\frac{dr}{r}\right)^{1/q}<\infty$$

を満たす $\mathbf{R}^N$ 上の可測関数 f からなる関数空間を $\mathcal{H}^{\Phi,q,\omega}(\mathbf{R}^N)$ とし，$\mathcal{H}^{\Phi,q,\omega}(\mathbf{R}^N)$ を非斉次中心 Herz-Morrey-Musielak-Orlicz 空間とよぶ ([1])．

極大作用素

$$Mf(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)|\,dy$$

と $\alpha(0<\alpha<N)$ 次のリースポテンシャル

$$I_\alpha f(x)=\int_{\mathbf{R}^N}|x-y|^{\alpha-N}f(y)\,dy$$

を考える．

関数 $\Phi_\infty(t)=t\phi_\infty(t):[0,\infty)\to[0,\infty)$ は次を満たすものとする：

$(\Phi_\infty 0)$ $\phi_\infty(t)$ は $[0,\infty)$ 上単調増加関数かつ 2 倍条件を満たし，$\phi_\infty(t)>0\quad(t>0)$;

$(\Phi_\infty 1)$ 定数 $Q\geq 1$ が存在して，$Q^{-1}\Phi(x,t)\leq\Phi_\infty(t)\leq Q\Phi(x,t)\quad(g(x)\leq t\leq 1)$；

$(\Phi_\infty 2)$ 定数 $Q\geq 1$ が存在して，$g^*(x)=\max\{g(x),\,Mg(x)\}$ に対して，

$$\Phi_\infty(g^*(x))\leq Q(1+|x|)^{-N}\qquad(x\in\mathbf{R}^N);$$

$(\Phi_\infty\omega 1;-\alpha)$ 定数 $\varepsilon>0$ が存在して，$t\mapsto t^{\varepsilon+\alpha}\omega(t)^{-1}\Phi_\infty^{-1}(t^{-N})$ は $[1,\infty)$ 上仮似単調減少である；

$(\Phi_\infty\omega 2;-N)$ 定数 $\varepsilon>0$ が存在して，$t\mapsto t^{-\varepsilon+N}\omega(t)^{-1}\Phi_\infty^{-1}(t^{-N})$ は $[1,\infty)$ 上仮似単調増加である．

さらに，$\Phi(x,t)$ は次を満たすとする：

$(\Phi 3^*)$ 定数 $\varepsilon>0$ が存在して，$t\mapsto t^{-\varepsilon}\phi(x,t)$ は $(0,\infty)$ 上一様に仮似単調増加である；

$(\Phi 5)$ 任意の $\gamma>0$ に対して，ある定数 $B_\gamma\geq 1$ が存在して，

$$\phi(x,t)\leq B_\gamma\phi(y,t)\quad(|x-y|\leq\gamma t^{-1/N},t\geq 1);$$

$(\Phi 6)$ 関数 $g\in L^1(\mathbf{R}^N)$ と定数 $B_\infty\geq 1$ が存在して，$0\leq g(x)<1$ $(x\in\mathbf{R}^N)$ かつ

$$B_\infty^{-1}\Phi(x,t)\leq\Phi(x',t)\leq B_\infty\Phi(x,t)\quad(|x'|\geq|x|,g(x)\leq t\leq 1);$$

$(\Phi\alpha)$ 定数 $\varepsilon>0$ が存在して，$t\mapsto t^{\varepsilon+\alpha}\overline{\Phi}^{-1}(x,t^{-N})$ は $(0,\infty)$ 上一様に仮似単調減少である．

関数 $\Psi(x,t)=t\psi(x,t):\mathbf{R}^N\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ は次を満たすものを考える：

$(\Psi 0)$ $\psi(x,t)$ は $(\Phi 1)$ – $(\Phi 4)$ を満たす；

$(\Psi\Phi\alpha)$ 定数 $Q\geq 1$ が存在して，$\Psi\left(x,t\Phi(x,t)^{-\alpha/N}\right)\leq Q\Phi(x,t)\quad(x\in\mathbf{R}^N,t>0)$.

関数 $\Psi_\infty(t)=t\psi_\infty(t):[0,\infty)\to[0,\infty)$ は次を満たすものとする：

$(\Psi_\infty 0)$ $\psi_\infty(t)$ は $[0,\infty)$ 上単調増加関数かつ 2 倍条件を満たし，$\psi_\infty(t)>0\quad(t>0)$;

$(\Psi_\infty 1)$ 定数 $Q\geq 1$ が存在して，$Q^{-1}\Psi(x,t)\leq\Psi_\infty(t)\leq Q\Psi(x,t)\quad(g(x)\leq t\leq 1)$.

定理 ([1]). 定数 $C>0$ が存在して，

$$\|I_\alpha f\|_{\mathcal{H}^{\Psi,q,\omega}(\mathbf{R}^N)}\leq C\|f\|_{\mathcal{H}^{\Phi,q,\omega}(\mathbf{R}^N)}\quad(f\in\mathcal{H}^{\Phi,q,\omega}(\mathbf{R}^N)).$$

参考文献

[1] F-Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Boundedness of maximal operator, Hardy operator and Sobolev's inequalities on non-homogeneous central Herz-Morrey-Musielak-Orlicz spaces, preprint.

Optimal estimates for the fractional Hardy operator

水田 義弘　広島大学名誉教授
Aleš Nekvinda　Czech technical University
下村 哲　広島大学・教育学部

Let $\mathbb{R}^n$ denote the n-dimensional Euclidean space and Ω be an open subset of $\mathbb{R}^n$. For an integrable function u on a measurable set $E \subset \mathbb{R}^n$ of positive measure, we define the integral mean over E by

$$\fint_E u(x)\, dx = \frac{1}{|E|} \int_E u(x)\, dx,$$

where $|E|$ denotes the Lebesgue measure of E. We denote by $B(x,r)$ the open ball with center x and of radius $r > 0$, and by $|B(x,r)|$ its Lebesgue measure, i.e. $|B(x,r)| = \sigma_n r^n$, where σ_n is the volume of the unit ball in $\mathbb{R}^n$. For a locally integrable function f on Ω and $0 < \alpha \leqslant n$ we consider the fractional Hardy operator A_α, defined by

$$A_\alpha f(x) = \frac{1}{|B(0,|x|)|^{\alpha/n}} \int_{B(0,|x|)} f(t)\, dt,$$

the Hardy averaging operator A, defined by

$$Af(x) = \fint_{B(0,|x|)} f(t)\, dt$$

and the centered Hardy-Littlewood maximal operator M, defined by

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \fint_{B(x,r)} |f(y)|\, dy$$

by setting $f = 0$ outside Ω (for the fundamental properties of maximal functions, see Stein [5]). In the case $\alpha = n$, $A_\alpha f(x) = Af(x)$.

Let $1 < p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$ and

$$p_\alpha = \frac{np'}{\alpha p' - n} = \frac{np}{\alpha p - np + n}.$$

We know that A_α is bounded from L^p to L^{p_α} provided $n(1 - 1/p) < \alpha \leqslant n$. Clearly, $p_\alpha \geqslant p > 1$.

In this talk we improve the result of the second author and Pick [4] in the case when $\alpha = n = 1$ and Ω is a bounded interval, and that of the authors [2] within the framework of generalized Banach function spaces. Let $\hookrightarrow$ denote a continuous embedding and $\to$ denote a boundedness of an operator. Under the assumption $A_\alpha : X \to Y$ and $M : Y \to Y$ follow, we find the 'source' space $S_{\alpha,Y}$ and the 'target' space T_Y such that

(i) the fractional Hardy operator A_α satisfies

$$A_\alpha : S_{\alpha,Y} \to T_Y;$$

(ii) this result improves the classical estimate

$$A_\alpha : X \to Y$$

in the sense that

$$X \hookrightarrow S_{\alpha,Y},\ T_Y \hookrightarrow Y;$$

(iii) this result cannot be improved any further, at least not within the environment of generalized Banach function spaces in the sense that whenever Z is a generalized Banach function space strictly larger than $S_{\alpha,Y}$, then

$$A_\alpha : Z \not\to T_Y$$

and, likewise, when Z is a generalized Banach function space strictly smaller than T_Y, then

$$A_\alpha : S_{\alpha,Y} \not\to Z.$$

References

[1] C. Benett and R. Sharpley, Interpolation of operators, Pure and Applied Math. Vol. 129, Academic Press, 1988.

[2] Y. Mizuta, A. Nekvinda and T. Shimomura, Hardy averaging operator on generalized Banach function spaces and duality, Z. Anal. Anwend. **32**, 2013, 233–255.

[3] Y. Mizuta, A. Nekvinda and T. Shimomura, Optimal estimates for the fractional Hardy operator, Studia Math. **227**, 2015, 1-19.

[4] A. Nekvinda and L. Pick, Optimal estimates for the Hardy averaging operator, Math. Nachr. **283**, 2010, 262–271.

[5] E. M. Stein: Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.

Polyharmonic Bergman spaces on half spaces

Masaharu Nishio (Osaka City University)[*1]
Katsunori Shimomura (Ibaraki University)[*2]

Originally, Bergman spaces are introduced as the Hilbert space of holomorphic functions. Since holomorphic functions are also harmonic, many researches are also made on harmonic Bergman spaces. Recently, we introduced parabolic Bergman spaces and revealed the relations between harmonic Bergman spaces and parabolic Bergman spaces. In this talk, we generalize this relation to the case between polyharmonic Bergman spaces and polyparabolic Bergman spaces.

Let $\boldsymbol{H}$ be the upper half space of the $(n+1)$-dimensional euclidean space. We denote by $X = (x,t) = (x_1, \cdots, x_n, t)$ a point in $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{R}^n \times (0,\infty)$ and $|x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Laplacian on $\boldsymbol{H}$ is

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

For $1 \le p \le \infty$ and an integer $m \ge 1$, the polyharmonic Bergman space is

$$\boldsymbol{b}^{m,p} = \boldsymbol{b}^{m,p}(\boldsymbol{H}) := \{u \in C^\infty(\boldsymbol{H}) | \Delta^m u = 0, u \in L^p(\boldsymbol{H})\}.$$

Our main results are the following.

Theorem 1. *Let $m \ge 1$ be an integer and $1 \le p \le \infty$. Then $\boldsymbol{b}^{m,p}$ is a Banach space. Especially, $\boldsymbol{b}^{m,2}$ is a Hilbert space with reproducing kernel.*

Moreover, the reproducing kernel of $\boldsymbol{b}^{m,2}$ is given explicitly as follows. Let p_j $(j = 0, 1, 2, \dots)$ be the orthonormal Laguerre polynomial of degree j with respect to the weight $e^{-t}dt$. Let P be the Poisson kernel on the upper half space

$$P(x,t) := \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{t}{\left(|x|^2 + t^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

For $X_1 = (x_1, t_1), Y_1 = (y_1, s_1) \in \boldsymbol{H}$, we define

$$K^m(X_1, Y_1) := \sum_{k=0}^{m-1} p_k(-2t_1\partial_t) p_k(-2s_1\partial_s)(-2\partial_t P)(x-y, t+s)\Big|_{X=X_1, Y=Y_1}.$$

Here $p_k(-2t_1\partial_t)$ and $p_k(-2s_1\partial_s)$ stand for differential operators with constant coefficients. This kernel K^m is the reproducing kernel of $\boldsymbol{b}^{m,2}$. More precisely

Theorem 2. *Let $m \ge 1$ be an integer. The integral operator by the kernel K^m gives the orthogonal projection of $L^2(\boldsymbol{H})$ onto $\boldsymbol{b}^{m,2}$.*

This work is supported in part by JSPS KAKENHI Grant Number K15K04934.
2010 Mathematics Subject Classification: 31B30, 35K25, 46E22.
Keywords: mean value property, parabolic operators of fractional order, reproducing kernels, Laguerre polynomials, Bergman spaces, polyharmonic functions.
[*1] e-mail: nishio@sci.osaka-cu.ac.jp
[*2] e-mail: katsunori.shimomura.sci@vc.ibaraki.ac.jp

We consider parabolic operators

$$L^{(\alpha)} := \frac{\partial}{\partial t} + (-\Delta_x)^\alpha$$

for $0 < \alpha \le 1$, where

$$\Delta_x := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

is the Laplacian in the x-space. For $1 \le p \le \infty$ and an integer $m \ge 1$, we put

$$\boldsymbol{b}_\alpha^{m,p} = \boldsymbol{b}_\alpha^{m,p}(\boldsymbol{H}) := \{u \in C^\infty(\boldsymbol{H}) | (L^{(\alpha)})^m u = 0, t^k (L^{(\alpha)})^k u \in L^p(\boldsymbol{H}) \text{ for } 0 \le k \le m\},$$

and call it polyparabolic Bergman space. Then we can prove the following equality between polyharmonic Bergman spaces and polyparabolic Bergman spaces.

Theorem 3. *Let $m \ge 1$ be an integer and $1 \le p \le \infty$. Then*

$$\boldsymbol{b}^{m,p}(\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{b}_{1/2}^{m,p}(\boldsymbol{H}).$$

References

[1] M. Nishio, K. Shimomura, Reproducing kernels for iterated parabolic operators on the upper half space with application to polyharmonic Bergman spaces, preprint.

[2] M. Nishio, K. Shimomura, and N. Suzuki, A mean value property of poly-temperatures on a strip domain, J. London Math. Soc., (2) **58** (1998) 381–393.

[3] M. Nishio, K. Shimomura, and N. Suzuki, α-parabolic Bergman spaces, Osaka J. Math., **42** (2005), 133–162.

Uniform convergence of Fourier series for weighted orthogonal polynomials

伊藤 健太郎 (名城大理工)*1
酒井 良二 (名城大理工)*2
鈴木 紀明 (名城大理工)*3

1. 導入

$\mathbb{R}$ 上の多項式近似について考察する際に, 多項式は $|x| \to \infty$ のときに発散するため, 適当な「重み」を乗せて考える必要がある. ここでは重み w は $\mathcal{F}(C^2+)$ と呼ばれる滑らかなクラスに属するものを扱う.

$w(x)$ に関する重み付き直交多項式系を $\{p_n(x)\}$ とする. $fw \in L^p(\mathbb{R})$ なる関数 f に対し, f の **Fourier 級数** (Fourier series) の第 $m-1$ 部分和を

$$s_m(f)(x) := \sum_{k=0}^{m-1} c_k(f)p_k(x)$$

と定義する. 但し,

$$c_k(f) := \int_{\mathbb{R}} f(t)p_k(t)w^2(t)dt$$

である.

$\mathcal{F}(C^2+)$ に属する重みを $w(x) = \exp(-Q(x))$ の形で表す. 関数

$$T(x) := \frac{xQ'(x)}{Q(x)}, \quad x \neq 0$$

の挙動によって $\mathcal{F}(C^2+)$ の重みは 2 種類に分類され, T が有界のとき w を **Freud 型**と呼び, 逆に T が有界でないとき w を **Erdős 型**と呼ぶ.

2. 主結果

w が Freud 型の場合には, $\mathbb{R}$ 上連続かつ $\mathbb{R}$ 内の任意の有界閉区間上で有界変動な関数 f が

$$\int_{\mathbb{R}} w(x)|df(x)| < \infty$$

かつ

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x)w(x) = 0$$

をみたすとき,

$$\lim_{n\to\infty} \|(s_n(f) - f)w\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0 \tag{2.1}$$

2010 Mathematics Subject Classification: 41A17, 41A10
キーワード：重み付き多項式近似, Fourier 部分和, Erdős 型重み, Dirichlet-Jordan の判定法
*1 e-mail: 133451501@ccalumni.meijo-u.ac.jp
*2 e-mail: ryozi@crest.ocn.ne.jp
*3 e-mail: suzukin@meijo-u.ac.jp
web: http://ccmath.meijo-u.ac.jp/~suzukin/

が成り立つことが知られている ([2]).

我々は, (2.1) を Erdős 型重みへ拡張した次の定理を示した: $w \in \mathcal{F}(C^2+)$ とする. $\mathbb{R}$ 上連続かつ $\mathbb{R}$ 内の任意の有界閉区間上で有界変動な関数 f が

$$\int_{\mathbb{R}} w(x)|df(x)| < \infty$$

かつ

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x)w(x) = 0$$

をみたすとき,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| (s_n(f) - f)\frac{w}{T^{1/2}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0. \tag{2.2}$$

が成り立つ.

$\mathcal{P}_n$ を次数が n 次以下の多項式全体とし.

$$E_{p,n}(w; f) := \inf_{P\in\mathcal{P}_n} \|w(f - P)\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

とおく. 定理の証明において, 次の不等式が重要な役割を果たす: $q < p$ のとき, ある定数 $C = C(w, p, q) \geq 1$ が存在して, 任意の $P \in \mathcal{P}_n$ に対して

$$\left\| P\frac{w}{\sqrt{T}} \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \left(\frac{n}{a_n} \right)^{(1/q)-(1/p)} \|Pw\|_{L^q(\mathbb{R})}.$$

が成り立つ. ここで a_n とは等式

$$n = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{a_n t Q'(a_n t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

より定まる n 次の **MRS** 数である. これに加えて, f に関する f に関する **de la Vallée-Poussin** 平均

$$v_n(f)(x) := \frac{1}{n} \sum_{j=n+1}^{2n} s_j(f)(x)$$

に関して

$$\left\| (f - v_n(f))\frac{w}{T^{1/4}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq CE_{\infty,n}(w; f)$$

が成り立つこと ([1, Corollary 10]), 更に

$$\|(f - s_n(f))w\|_{L^2(\mathbb{R})} = E_{2,n}(w; f)$$

であることを用いて定理は導かれる.

参考文献

[1] K. Itoh, R. Sakai and N. Suzuki, *The de la Vallée Poussin mean and polynomial approximation for exponential weight*, International Journal of Analysis. 2015, Article ID 706930, 8 pages, (2015).

[2] H. N. Mhaskar, *Extensions of the Dirichlet-Jordan criterion to a general class of orthogonal polynomial expansions*, J. Approx. Theory 42 (1984), 138-148.

多重調和ベルグマン空間について

田中 清喜 (大同大)*

$\mathbb{B}$ を N 次元ユークリッド空間の開単位球とし、$\mathbb{S}$ を単位球面とする。自然数 m に対して、polyharmonic Bergman space $b^{m,2}(\mathbb{B})$ を

$$b^{m,2}(\mathbb{B}) := H^m(\mathbb{B}) \cap L^2(\mathbb{B}, dx)$$

と定義する。ここで $H^m(\mathbb{B}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{B}) : \Delta^m f = 0\}$ とする。さらに true polyharmonic Bergman space $b^{(m),2}(\mathbb{B})$ を

$$b^{(1),2}(\mathbb{B}) = b^{1,2}(\mathbb{B}), \quad b^{(m),2}(\mathbb{B}) := b^{m,2}(\mathbb{B}) \ominus b^{m-1,2}(\mathbb{B}) \quad (m \geq 2)$$

と定義する。特に、

$$b^{m,2}(\mathbb{B}) = b^{(1),2}(\mathbb{B}) \oplus b^{(2),2}(\mathbb{B}) \oplus \cdots \oplus b^{(m),2}(\mathbb{B})$$

となることに注意しておく。これらの関数空間は再生核ヒルベルト空間であり、その再生核をそれぞれ $R_m(x,y)$, $R_{(m)}(x,y)$ と書くことにする。

日本数学会2015年度秋季総合分科会では $m = 2$ の場合の再生核の表示、評価についての結果を報告した。また Pessoa[6] によって、次元 $N = 2$ のときは Beuling-Ahlfors 変換が analytic Bergman space から true poly-analytic Bergman space への unitary 作用素の役割を果たすことから polyharmonic Bergman space の構造、核の表示は与えられている。

本講演では、$m \geq 2$, $N \geq 2$ の場合における polyharmonic Bergman space の構造、再生核の表示、評価に関する結果を与える。

定理 1.

$$\left\{ \sqrt{\frac{2(k+\frac{N}{2}+2m-2)}{|\mathbb{S}|}} \frac{\Gamma(k+\frac{N}{2}+m-1)}{\Gamma(k+\frac{N}{2})\Gamma(m)} G_{m-1}(k+\frac{N}{2}, k+\frac{N}{2}; |x|^2) e_j^k(x) \right\}_{j=1,\cdots,h_k, k=0,1,\cdots}$$

は $b^{(m),2}(\mathbb{B})$ の正規直交基底である。ここで $\{e_j^k\}_{j=1,\cdots,h_k}$ は、$\mathbb{S}$ 上の k 次同次調和多項式の正規直交基底を $\mathbb{B}$ 上に同次拡張した関数であり、$G_l(\alpha,\beta;t)$ は *Jacobi* 多項式

$$G_l(\alpha,\beta;t) := \frac{\Gamma(\beta)t^{1-\beta}(1-t)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta+l)} \frac{d^l}{dt^l}\left[t^{\beta+l-1}(1-t)^{\alpha-\beta+l}\right]$$

である。

また、$S_m f(x) := \Delta^{m-1}\left[(1-|x|^2)^{2(m-1)} f(x)\right]$ とすると次が成り立つ。

定理 2.

$$S_m : b^{1,2}(\mathbb{B}) \to b^{(m),2}(\mathbb{B})$$

は有界かつ全単射である。

2010 Mathematics Subject Classification: 31B30, 32A25
キーワード：polyharmonic function, Bergman space
* 〒457-8530 名古屋市南区滝春町10番地3
e-mail: ktanaka@daido-it.ac.jp

これらのことから、$b^{(m),2}(\mathbb{B})$（$b^{m,2}(\mathbb{B})$）の再生核の評価を得る。

定理 3. ある定数$C>0$ が存在して、任意の $x,y\in\mathbb{B}$ に対して

$$R_{(m)}(x,y)\leq\frac{C}{[x,y]^{\frac{N}{2}}}$$

が成り立つ。ここで、$[x,y]=1-2x\cdot y+|x|^2|y|^2$ である。

参考文献

[1] N. Aronszajn, T. M. Creese and L. J. Lipkin, Polyharmonic functions, Clarendon press, Oxford, 1983.

[2] S. Axler, P. Bourdon and W. Ramey, Harmonic function theory, Springer-Verlag, New York, 1992.

[3] R. Coifman and R. Rochberg, *Representation theorems for holomorphic and harmonic functions in L^p*, Astérisque **77** (1980), 1–66.

[4] M. Nicolescu, Les Fonctions Polyharmoniques, Hermann & Cie, Paris, 1936.

[5] M. Pavlović, *Decompositions of L^p and Hardy spaces of polyharmonic functions*, J. Math. Anal. Appl. **216** (1997), 499–509.

[6] L.V. Pessoa, *On the structure of polyharmonic Bergman type spaces over the unit disk*, Complex variables and elliptic equations **60** (2015), 1668–1684.

[7] A. K. Ramazanov, *On the structure of spaces of polyanalytic functions*, Math. Notes **72** (2002), 692–704.

[8] K. Tanaka, *Biharmonic Bergman space and its reproducing kernel*, submitted.

[9] K. Tanaka, *On the structure of the polyharmonic Bergman space on the unit ball*, submitted.

[10] N. L. Vasilevski, Commutative algebras of Toeplitz operators on the Bergman space, Operator Theory: Advances and Applications, **185** (2008).

Finding Roots of Any Polynomials by Random Relaxed Newton's Methods

角 大輝 (Sumi, Hiroki) 大阪大学大学院理学研究科数学専攻
E-mail: sumi@math.sci.osaka-u.ac.jp
http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~sumi/

In this talk, we develop the theory of random holomorphic dynamics. Applying it to finding roots of polynomials by random relaxed Newton's methods, we show that for any polynomial g, for any initial value $z \in \mathbb{C}$ which is not a root of g', the random orbit starting with z tends to a root of g almost surely, which is **the virtue of the effect of the randomness**.

Definition 1. (1) We denote by $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2$ the **Riemann sphere** endowed with the spherical distance.

(2) We set $\mathcal{P} := \{h : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid h \text{ is a polynomial}, \deg(h) \geq 2\}$.

(3) We set $\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda - 1| < 1\}$. Also, let $\mathfrak{M}_{1,c}(\Lambda)$ be the space of all Borel probability measure τ on Λ whose topological support $\operatorname{supp}\tau$ is a compact subset of Λ. For each $\tau \in \mathfrak{M}_{1,c}(\Lambda)$, let $\tilde{\tau} = \otimes_{n=1}^{\infty}\tau$. This is a Borel probability measure on $\Lambda^{\mathbb{N}}$.

(4) For each $g \in \mathcal{P}$ and for each $\lambda \in \Lambda$, let $N_{g,\lambda} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ be the rational map defined by $N_{g,\lambda}(z) = z - \lambda \frac{g(z)}{g'(z)}$ for each $z \in \hat{\mathbb{C}}$.

(5) For each $g \in \mathcal{P}$, let $Q_g := \{x \in \mathbb{C} \mid g(x) = 0\}$ and $\Omega_g := \mathbb{C} \setminus \{z_0 \in \mathbb{C} \mid g'(z_0) = 0, g(z_0) \neq 0\}$.

Remark 2. Note that $\sharp(\mathbb{C} \setminus \Omega_g) \leq \deg(g) - 1$.

Theorem 3. *Let $g \in \mathcal{P}$. Let $\tau \in \mathfrak{M}_{1,c}(\Lambda)$ such that $\operatorname{int}(\operatorname{supp}\tau) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda - 1| \leq \frac{1}{2}\}$, where $\operatorname{int}(\operatorname{supp}\tau)$ denotes the set of interior points of $\operatorname{supp}\tau$ with respect to the topology in Λ. Suppose that τ is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on Λ. (e.g. suppose that τ is the normalized 2-dimensional Lebesgue measure on $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda - 1| \leq r\}$ where $\frac{1}{2} < r < 1$.) Then we have the following.*

(1) *For each $z \in \Omega_g$, there exists a Borel subset $C_{g,\tau,z}$ of $\Lambda^{\mathbb{N}}$ with $\tilde{\tau}(C_{g,\tau,z}) = 1$ satisfying that for each $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots) \in C_{g,\tau,z}$, there exists an element $x = x(g, \tau, z, \gamma) \in Q_g$ such that*

$$N_{g,\gamma_n} \circ \cdots \circ N_{g,\gamma_1}(z) \to x \quad \text{as} \quad n \to \infty \text{ (exponentially fast)}.$$

(2) *For $\tilde{\tau}$-a.e. $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots) \in \Lambda^{\mathbb{N}}$, we have $\mathrm{Leb}_2(J_{g,\gamma}) = 0$. Here, Leb_2 denotes the 2-dimensional Lebesgue measure on $\hat{\mathbb{C}}$ and $J_{g,\gamma}$ denotes the Julia set of the sequence $\{N_{g,\gamma_n} \circ \cdots \circ N_{g,\gamma_1}\}_{n=1}^{\infty}$ (i.e., the set of points $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ such that for each neighborhood U of z_0, the sequence $\{N_{g,\gamma_n} \circ \cdots \circ N_{g,\gamma_1} : U \to \hat{\mathbb{C}}\}_{n=1}^{\infty}$ is not equicontinuous on U).*
Also, for $\tilde{\tau}$-a.e. $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots) \in \Lambda^{\mathbb{N}}$, setting $F_{g,\gamma} = \hat{\mathbb{C}} \setminus J_{g,\gamma}$, for each $z \in F_{g,\gamma}$, there exists an element $x = x(g, \tau, \gamma, z) \in Q_g$ such that

$$N_{g,\gamma_n} \circ \cdots \circ N_{g,\gamma_1}(z) \to x \quad \text{as} \quad n \to \infty \text{ (exponentially fast)}.$$

(3) *For each $x \in Q_g$ and for each $z \in \hat{\mathbb{C}}$, let $T_{x,\tau}(z)$ be the probability of tending to x regarding the random orbit starting with z, i.e.,*

$$T_{x,\tau}(z) := \tilde{\tau}(\{\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots) \in \Lambda^{\mathbb{N}} \mid N_{g,\gamma_n} \circ \cdots \circ N_{g,\gamma_1}(z) \to x \text{ as } n \to \infty\}).$$

Then, for each $x \in Q_g$, the function $T_{x,\tau} : \Omega_g \to [0,1]$ is continuous on Ω_g.

We say that a non-constant polynomial g is **normalized** if $\{z_0 \in \mathbb{C} \mid g(z_0) = 0\} \subset \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. For a given polynomial g, sometimes it is not difficult for us to find an element $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ such that $g(az)$ is a normalized polynomial of z. It is well-known that if $g \in \mathcal{P}$ is a normalized polynomial, then so is g'. Thus, we obtain the following corollary.

Corollary 4. *Let $g \in \mathcal{P}$ be a normalized polynomial. Suppose that we know the exact coefficients of g. Let $\tau \in \mathfrak{M}_{1,c}(\Lambda)$ such that $\operatorname{int}(\operatorname{supp}\tau) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda - 1| \leq \frac{1}{2}\}$. Suppose that τ is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on Λ. Let $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$. Then by the following algorhythm in which we consider d-random orbits of z_0 under d-different random iterations of $\{N_{g_1,\lambda}\}_\lambda, \ldots, \{N_{g_d,\lambda}\}_\lambda$ for some polynomials $g_1, \ldots, g_d$, we can find all roots of g almost surely with arbitrarily small errors.*

(1) *Let $g_1 = g$. By Theorem 3, for $\tilde{\tau}$-a.e. $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots) \in \Lambda^{\mathbb{N}}$, the orbit $\{N_{g_1,\gamma_n} \circ \cdots \circ N_{g_1,\gamma_1}(z_0)\}_{n=1}^{\infty}$ tends to a root $x = x(g_1, \tau, \gamma)$ of $g_1 = g$. Let x_1 be one of such $x(g, \tau, \gamma)$ (with aribitrarily small error).*

(2) *Let $g_2(z) = g_1(z)/(z - x_1)$. By using synthetic devision, we regard g_2 as a polynomial which devides g_1 (with arbitrarily small error). Note that g_2 is a normalized polynomial. By Theorem 3, for $\tilde{\tau}$-a.e.$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2 \ldots) \in \Lambda^{\mathbb{N}}$, the orbit $\{N_{g_2,\gamma_n} \circ \cdots \circ N_{g_2,\gamma_1}(z_0)\}_{n=1}^{\infty}$ tends to a root $x = x(g_2, \tau, \gamma)$ of g_2, which is also a root of g (with arbitrarily small error). Let x_2 be one of such $x(g_2, \tau, \gamma)$ (with arbitrarily small error).*

(3) *Let $g_3(z) = g_2(z)/(z - x_2)$ and as in the above, we find a root of x_3 of g_3, which is also a root of g (with arbitrarily small error). Continue this method.*

Remark 5. M. Hurley showed that for any $k \geq 2$, there exists a non-empty open subset A_k of $\mathcal{P}_k := \{g \in \mathcal{P} \mid \deg(g) = k\}$ such that for each $g \in A_k$, there exists a non-empty open subset U_g of $\hat{\mathbb{C}}$ such that for any $z \in U_g$, the orbit $\{N_{g,1}^n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ cannot converge to any root of g. **(II)** C. McMullen showed (Ann. of Math., 1987) that for any $k \in \mathbb{N}, k \geq 4$ and for any $l \in \mathbb{N}$, there exists **no** rational map $\tilde{N} : \mathcal{P}_k \to \mathrm{Rat}_l := \{f \in \mathrm{Rat} \mid \deg(f) = l\}$ such that for any g in an open dense subset of $\mathcal{P}_k$, for any z in an open dense subset of $\hat{\mathbb{C}}$, $\tilde{N}(g)^n(z)$ tends to a root of g as $n \to \infty$. **(III)** Thus Theorem 3 and Corollary 4 deal with **randomness-induced phenomena** (new phenomena in random dynamics which cannot hold in deterministic dynamics). In Theorem 3 and Corollary 4, **the size of the noise is big which enables the system to make the minimal set with period greater than 1 collapse**. However, since the size of the noise is big, we have to develop the theory of random holomorphic dynamical systems with noise or randomness of any size. Note also that we need to deal with the random systems whose **kernel Julia sets are not empty**.

Reference:

[1] H. Sumi, *Random complex dynamics and semigroups of holomorphic maps*, Proc. London Math. Soc. (2011) 102(1), pp 50–112.

[2] H. Sumi, *Cooperation principle, stability and bifurcation in random complex dynamics*, Adv. Math., 245 (2013) pp 137–181.

Stretching rays for cubic polynomials

中根　静男　(東京工芸大学)*

Stretching rays とは、Böttcher coordinate において、擬等角写像 $f_s(z) = z|z|^{s-1}, s > 0$ により擬等角変形を施して得られる parameter 空間の escape locus 上の rays である。f_s の形から、動径方向に伸縮させるが、偏角は保存することに注意する。Stretching rays は $s > 0$ で parametrize されるが、$s \to 0$ の時に 1 点 Q に収束するとき、Q に着地するという。Komori-Nakane [KN] は、実 3 次多項式写像族の stretching rays の parabolic locus への着地性について考察し、振動して着地しない rays が存在することを示した。ここでは、その結果を実でない 3 次多項式の場合に拡張する。本研究は Pascale Roesch との共同研究である。

Shift locus に属する 3 次多項式 P の critical points c_1, c_2 の各々に 2 本の external rays が達するとき、その angles の集合を各々 Θ_1, Θ_2 とする。$\Theta = \{\Theta_1, \Theta_2\}$ を P の critical portrait という。与えられた critical portrait Θ を持つような 3 次多項式の全体を S_Θ と書く。S_Θ は stretching deformation で不変である。

以下で考察するのは次の場合である。

$$\Theta_1 = \{0, \frac{1}{3}\}, \quad \Theta_2 = \{\theta + \frac{1}{3}, \theta + \frac{2}{3}\}, \quad 0 < \theta < \frac{1}{3}, \quad 3^k\theta \equiv 0, \quad k \geq 2.$$

ここで、θ は c_2 の co-critical point $\tilde{c}_2$ の angle である。従って、$P \in S_\Theta$ とすると、P の critical point c_1 と $P^k(c_2)$ はangle 0 の external ray $R_P(0)$ の上に乗る。

$g_P(z) = \lim_{n\to\infty} 3^{-n} \log_+ |P^n(z)|$ (P の escape rate function) とおく。Kiwi [K] は S_Θ が $(g_P(c_1), g_P(c_2))$ で parametrize される 2 次元実解析的多様体であることを示した。[KN] で定義した Böttcher vector :

$$\eta(P) = \frac{1}{\log 3} \left(\log g_P(c_2) - \log g_P(c_1)\right)$$

は stretching で保たれるので、S_Θ 上 η の level curves が stretching rays を与える。

S_Θ 上 stretching ray を $S(\eta) = \{P \in S_\Theta; \eta(P) = \eta\}$、その集積点集合を $Acc(S(\eta))$ とおくと次が従う。

$$\begin{aligned} Acc(S(\eta)) \subset Per_1(1) &:= \{Q; Q \text{ は固有値 } 1 \text{ の放物的不動点を持つ}\} \\ &= \{Q_b(z) = z^3 + bz^2 + z; b \in \mathbb{C}\}. \end{aligned}$$

$Q \in Per_1(1)$ の放物的不動点 0 の吸引鉢を $\mathcal{B}_Q$, その attracting Fatou coordinate を $\phi_{Q,-}$ とおく。$\tau(Q) = \phi_{Q,-}(c_2) - \phi_{Q,-}(c_1)$ を Fatou vector という。

補題 1. $Acc(S(\eta))$ が $Q_0(z) = z^3 + z$ を含まなければ、
$Acc(S(\eta)) \subset \mathcal{A} := \{Q \in Per_1(1); c_1, c_2 \in \mathcal{B}_Q\}$.

そこで $\mathcal{A}$ への着地性を考える。

$P \in S_\Theta$ が critical orbit relation $P^k(c_2) = P^j(c_1)$ を満たせば $\eta(P) = j - k \in \mathbb{Z}$ である。このとき $S(j-k)$ は $\mathcal{A}$ 上 $\tau(Q) = j - k$ を満たす Q に着地する。

本研究は科研費 (課題番号:16K05213) の助成を受けたものである。

* e-mail: nakane@gen.t-kougei.ac.jp

定理 1. *(1)* $\eta \in \mathbb{Z}$ ならば、$S(\eta)$ は $\mathcal{A}$ 上 $\tau(Q) = \eta$ を満たす点 Q に着地する。

(2) $\eta \notin \mathbb{Z}$ とすると、$Acc(S(\eta))$ は Q_0 を含まなければ、$\mathcal{A}$ の非自明な連結閉集合である。

注意 1. θ が

$$\exists m < k \text{ such that } 3^m\theta \in (\theta + 1/3, \theta + 2/3)$$

を満たせば $Acc(S(\eta)) \not\ni Q_0$ が示される。このとき $S(\eta)$ は *capture component* に集積する。

次は、S_Θ の境界を特徴付けるものである。

補題 2. $\eta \to +\infty$ のとき、$S(\eta)$ は $Per_1(1)$ の *connectedness locus* M の *parameter ray* $R_M(\theta)$ に近づく。

ここで、$\Phi(b) := \varphi_{Q_b}(\tilde{c}_2)$ は conformal isomorphism :

$$\Phi : \mathbb{C} \setminus M \to \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{3/\sqrt[3]{4}}$$

を与えるので、parameter ray $R_M(\theta) := \Phi^{-1}(\{r^{2\pi i\theta}; r > 3/\sqrt[3]{4}\})$ が定義される。

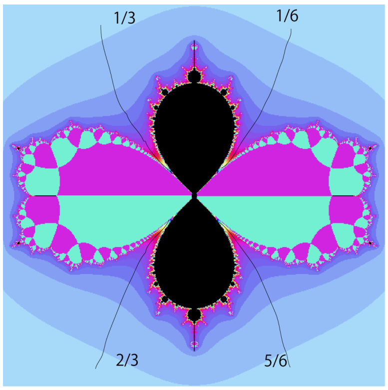

図 1: $Per_1(1)$ の connectedness locus M

参考文献

[K] J. Kiwi: Combinatorial continuity in complex polynomial dynamics. Proc. London Math. Soc. 91 (2005), pp. 215–248.

[KN] Y. Komori and S. Nakane: Landing property of stretching rays for real cubic polynomials. Conformal Geometry and Dynamics 8 (2004), pp. 87–114.

[W] P. Willumsen: On accumulation of stretching rays. PhD thesis, Technical University of Denmark, 1997.

新座標を用いたタイヒミュラー距離の評価

天野 政紀　(東京工業大学)*

タイヒミュラー空間に，リーマン面の平坦構造を利用した大域的座標を入れることが出来る ([Ama16])．この座標を用いてタイヒミュラー距離の評価を行う．

1. 定義

$\Sigma = \Sigma_{g,n}$ を種数 g，n 点穴あきの解析的有限型リーマン面で，かつ $3g-3+n>0$ を満たすものとする．$\mathcal{T}=\mathcal{T}(\Sigma)$ をその Teichmüller 空間とし，$[S^*, f^*] \in \mathcal{T}$ を一点固定する．$\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$ を Σ 上の単純閉曲線で，互いに交わらず，ホモトピックでもなく，それぞれが一点や Σ の穴ともホモトピックでないものとする．S_+^{k-1} を $(k-1)$ 次元球で，全成分が正の部分集合とする．$\mathfrak{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in S_+^{k-1}$ を一つ固定すると，ある $\alpha^* > 0$ が存在し，Jenkins-Strebel 測地線 r で，$[S^*, f^*]$ を始点とし，向きは $f^*(\Gamma)$ に対応するシリンダーのモジュラスが $\alpha^*\mathfrak{m} = (\alpha^* m_1, \ldots, \alpha^* m_k)$ で表せる Jenkins-Strebel 微分で与えられるものが存在する ([Str84])．r の終点は S^* 上の閉曲線 $f^*(\Gamma)$ を一点につぶしたノード付きリーマン面 S_c に対応する．$\partial_\Gamma \mathcal{T} = \{[X,g] |\ g : S_c \to X$ は擬等角写像$\}$ と定め，これを Σ の拡大タイヒミュラー空間 $\hat{\mathcal{T}}$ の境界 $\hat{\mathcal{T}} - \mathcal{T}$ の部分集合とみなす．

次に集合 $\partial_\Gamma \mathcal{T} \times S_+^{k-1} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$ からタイヒミュラー空間 $\mathcal{T}$ への同相写像を構成する．まず $[X,g] \in \partial_\Gamma \mathcal{T}$ のノード付きリーマン面 X は k 個のノードを持つ．$\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in S_+^{k-1}$ に対し，各ノードで $1/z^2$ の係数が a_j^2 となるような，ノードで 2 位の極を持つ 2 次微分 φ を作る ([Str84])．φ から定まる critical graph によって，X を各ノードを中心とした円板に分解できる．この円板の中から同じ中心で半径を短くした小円板を切り抜き，貼り合わせることで普通のリーマン面が作れる．このリーマン面は，$[X,g]$ に収束する Jenkins-Strebel 測地線上の点に対応する．各ノードでの貼り合わせの際のねじりの角度を $\mathfrak{t} = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k$ とし，最後の $s \in \mathbb{R}$ は小円板の半径，つまり J-S 測地線の時間パラメーターに対応させる．この定理は [MM75] の結果からヒントを得たものである．

定理 1. 次の条件を満たす同相写像 $\Phi_\mathfrak{m} : \partial_\Gamma \mathcal{T} \times S_+^{k-1} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \to \mathcal{T}$ が存在する；

1. $\Phi_\mathfrak{m}([X,g], a_1, \ldots, a_k, t_1, \ldots, t_k, s) = [R,h]$ とすると，任意の $j = 1, \ldots, k$ に対し次の等式が成立する．

$$\Phi_\mathfrak{m}([X,g], a_1, \ldots, a_k, t_1, \ldots, t_j + 2\pi, \ldots, t_k, s) = \tau_j([R,h]),$$

ここで，τ_j は γ_j での位数 1 の *Dehn twist* である (向きはリーマン面から定まる自然なものを使用している)．

2. $[X,g] \in \partial_\Gamma \mathcal{T}$ を一つ固定する．任意の $\mathfrak{a} \in S_+^{k-1}$ と $\mathfrak{t} \in \mathbb{R}^k$ に対し，集合

$$r_{\mathfrak{a},\mathfrak{t}} = \{\Phi_\mathfrak{m}([X,g], \mathfrak{a}, \mathfrak{t}, s) |\ s \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{T}$$

は一つの Jenkins-Strebel 測地線で，Γ から定まる曲線族に対応するシリンダー分解のモジュラスはそれぞれ $\mathfrak{m}$ の正の実数倍となり，$s \to +\infty$ とすることで $[X,g]$ に収束する．さらに，$\{r_{\mathfrak{a},\mathfrak{t}}\}_{\mathfrak{a},\mathfrak{t}}$ は互いに漸近的となる ([Ama14])．

* 〒152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1 東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻
e-mail: amano.m.ab@m.titech.ac.jp

$\Phi_{\mathfrak{m}}$ はモジュラスの比である $\mathfrak{m}$ を決めると定まる写像である．$\mathfrak{m}$ の代わりにシリンダーの周長 (あるいは 2 次微分の係数) の情報である $\mathfrak{a}$ を固定すると，逆に $\mathfrak{m}$ が動く $\mathcal{T}$ 上の大域的座標が定まる．

$$\Phi_{\mathfrak{a}} : S_{+}^{k-1} \times \partial_{\Gamma}\mathcal{T} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \to \mathcal{T}$$
$$(\mathfrak{m}, [X,g], \mathfrak{t}, s) \mapsto \Phi_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{m}, [X,g], \mathfrak{t}, s) := \Phi_{\mathfrak{m}}([X,g], \mathfrak{a}, \mathfrak{t}, s)$$

系 **2.** 任意の $\mathfrak{a} \in S_{+}^{k-1}$ に対して，$\Phi_{\mathfrak{a}}$ は同相写像.

また，$\Phi_{\mathfrak{m}}$ の場合と同様に，任意の $\mathfrak{m} \in S_{+}^{k-1}, [X,g] \in \partial_{\Gamma}\mathcal{T}, \mathfrak{t} \in \mathbb{R}^k$ を固定するたびに，集合 $\{\Phi_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{m}, [X,g], \mathfrak{t}, s) | \ s \in \mathbb{R}\}$ は $s \to +\infty$ で $[X,g]$ に収束する Jenkins-Strebel 測地線となる．この測地線を，$\Phi_{\mathfrak{a}}$-測地線と呼ぶことにする．また，この測地線から作られる Teichmüller 円板を，$\Phi_{\mathfrak{a}}$-円板と呼ぶことにする．

2. 主結果

Γ の曲線の数が最大の場合，つまり $k = 3g - 3 + n$ の場合，これらは Σ のパンツ分解を与える曲線族となり，$\partial_{\Gamma}\mathcal{T}$ は一点集合となる．$\mathfrak{a} \in S_{+}^{k-1}$ を一つ固定すると，同相写像 $\Phi_{\mathfrak{a}} : S_{+}^{k-1} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \to \mathcal{T}$ ができる．これはリーマン面の双曲構造に依存する Fenchel-Nielsen 座標に対する，平坦構造に依存する新座標とも言える．これを利用すると，$\mathcal{T}$ 上の二点 $p = \Phi_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{m}, \mathfrak{t}, s)$, $p' = \Phi_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{m}', \mathfrak{t}', s')$ に対し，次の不等式が成り立つ．

定理 **3.**

$$\begin{aligned}
(0 \leq) \quad & \frac{1}{2}\log\max\left\{\frac{\sum_{j=1}^{k} a_j^2 m_j' e^{2s'}}{\sum_{j=1}^{k} a_j^2 m_j e^{2s}}, \frac{\sum_{j=1}^{k} a_j^2 m_j e^{2s}}{\sum_{j=1}^{k} a_j^2 m_j' e^{2s'}}\right\} \\
\underset{(1)}{\leq} \quad & d_{\mathcal{T}}(p, p') \\
\underset{(2)}{\leq} \quad & \max_{j=1,\ldots,k} d_{\mathbb{H}}\left(\frac{t_j}{2\pi} + i m_j e^{2s}, \frac{t_j'}{2\pi} + i m_j' e^{2s'}\right).
\end{aligned}$$

ここで，$d_{\mathbb{H}}$ は上半平面 $\mathbb{H} = \{\mathrm{Im}z > 0\}$ 上の Poincaré 計量 $\rho_{\mathbb{H}} = |dz|/(2\mathrm{Im}z)$ に対する双曲距離である．p, p' が一つの $\Phi_{\mathfrak{a}}$-測地線上にあることが，(1) の不等式の等号が成立するための必要十分条件である．p, p' が一つの $\Phi_{\mathfrak{a}}$-円板上にあるとき，(2) の不等式の等号が成立する．

参考文献

[Ama14] Masanori Amano. On behavior of pairs of Teichmüller geodesic rays. *Conform. Geom. Dyn.*, 18:8–30, 2014.

[Ama16] Masanori Amano. A global coordinate of the Teichmüller space related to asymptotic Jenkins-Strebel rays. in preparation, 2016.

[MM75] Albert Marden and Howard Masur. A foliation of Teichmüller space by twist invariant disks. *Math. Scand.*, 36(2):211–228, 1975.

[Str84] Kurt Strebel. *Quadratic differentials*, volume 5 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

Extremal length and the period matrices of branched covering spaces for associated quadratic differentials

宮地 秀樹 (大阪大学大学院理学研究科)*

1. 動機

(g, m) 型の解析的有限なリーマン面のタイヒミュラー空間を $\mathcal{T}_{g,m}$ と書く．タイヒミュラー距離を d_T は，

$$d_T(x, y) = \frac{1}{2} \log \sup_{F \in \mathcal{MF} - \{0\}} \frac{\mathrm{Ext}_x(F)}{\mathrm{Ext}_y(F)}$$

のようにタイヒミュラー距離が極値的長さにより表示される（Kerckhoff）．一方で，タイヒミュラー距離はタイヒミュラー空間上の自然な複素構造の下で小林距離と一致する（Royden, Gardiner）．これらのことから，タイヒミュラー空間上の複素解析を展開する上で極値的長さの複素解析的性質を研究することは重要である．一方で，極値的長さを用いることにより，交点数関数を通して理想境界の情報を得ることができることから，極値的長さの複素解析的性質を調べることにより，理想境界の周りの複素解析を展開されることが期待される．

2. 座標

$x_0 = (X_0, f_0) \in \mathcal{T}_{g,m}$ として $q_{x_0} = q_{F,x_0}$ を測度付き葉層構造 F に関する x_0 上の Hubbard-Masur 微分とする（つまり q_{x_0} の垂直葉層構造が F である）．ここで q_{x_0} が generic，つまり，q_0 の各零点は 1 位であり，各 puncture では 1 位の極を持つとする．このとき x_0 の近傍 U_0 内の点 $x = (X, f) \in U_0$ において $q_x = q_{F,x}$ は generic である．$\pi \colon \tilde{X} \to X$ を $\sqrt{q_x}$ に関する被覆とする．ω_x を $\sqrt{q_x}$ のリフトにより定義される $\tilde{X}$ 上の Abel 微分とする．$\tilde{X}$ の種数は $\tilde{g} + g$ である．ただし $\tilde{g} = 3g - 3 + m$ である．

$H_1(\tilde{X}_0)^-$ を被覆 $\pi \colon \tilde{X}_0 \to X_0$ の被覆変換 σ_0 の $H_1(\tilde{X}_0, \mathbb{R})$ への作用における固有値 -1 の固有空間とする．$H_1(\tilde{X}_0)^-$ の階数は $2\tilde{g}$ である．$H_1(\tilde{X}_0)^-$ のシンプレクテック基底 $\{A_k, B_k\}_{k=1}^{\tilde{g}}$ をとる．このとき

$$\Phi \colon U_0 \ni x \mapsto \left(\mathrm{Im} \int_{A_1} \omega_x, \cdots, \mathrm{Im} \int_{A_{\tilde{g}}} \omega_x, \mathrm{Im} \int_{B_1} \omega_x, \cdots, \mathrm{Im} \int_{B_{\tilde{g}}} \omega_x \right) \in \mathbb{R}^{\tilde{g}} \times \mathbb{R}^{\tilde{g}} \tag{1}$$

は像 V_0 への実解析同相写像であり，

$$(\mathbf{a}_F^A, \mathbf{a}_F^B) = \left(\mathrm{Re} \int_{A_1} \omega_x, \cdots, \mathrm{Re} \int_{A_{\tilde{g}}} \omega_x, \mathrm{Re} \int_{B_1} \omega_x, \cdots, \mathrm{Re} \int_{B_{\tilde{g}}} \omega_x \right)$$

は U_0 上定値である（Hubbard-Masur）．

本研究は科研費 (課題番号:16K05202) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 32G15, 30F45, 31C10
キーワード：タイヒミュラー空間，タイヒミュラー距離，極値的長さ, 正則 2 次微分
*〒560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1 - 1 大阪大学大学院理学研究科 数学専攻
e-mail: miyachi@math.sci.osaka-u.ac.jp
web: http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~miyachi/

3. 接枠と余接枠，そして主定理

$y \in V_0$ と $1 \leq j,k \leq \tilde{g}$ に対して，$x = \Phi^{-1}(y)$ を表現する Riemann 面上の Abel 微分 φ_y^j と $\pi_{jk}(y)$ を $\int_{A_k} \varphi_y^j = \delta_{jk}$ 及び $\int_{B_k} \varphi_y^j = \pi_{jk}(y)$ により定める．さらに周期行列を

$$\Pi = \Pi(y) = (\pi_{jk}(y)) = (\boldsymbol{\pi}_1, \cdots, \boldsymbol{\pi}_{\tilde{g}})$$

と定義する．

(∂^A, ∂^B) を写像 (1) 像領域の座標 $(\mathbf{y}^A, \mathbf{y}^B)$ に関する接空間の標準基底とする．このとき V_0 上の接束の枠を

$$(V_1, \cdots, V_{\tilde{g}}, V_1, \cdots, V_{\tilde{g}}) = (\partial^A, \partial^B) \begin{pmatrix} I_{\tilde{g}} & 0 \\ \mathrm{Re}\Pi & \mathrm{Im}\Pi \end{pmatrix}$$

とする．そして，V_0 上の概複素構造 $\mathcal{J}$ を

$$\mathcal{J}(V_j) = V_{\tilde{g}+j}, \quad \mathcal{J}(V_{\tilde{g}+j}) = -V_j \quad (j = 1, \cdots, \tilde{g})$$

とする．このとき次が成立する．

定理 1 ($\mathcal{J}$ is integrable) 写像 $\Phi \colon U_0 \to (V_0, \mathcal{J})$ は双正則写像である．

ここで $(1,0)$，$(0,1)$ 接ベクトルを

$$Z_j = \frac{1}{2}(V_j - \sqrt{-1}V_{\tilde{g}+j}), \quad \overline{Z}_j = \frac{1}{2}(V_j + \sqrt{-1}V_{\tilde{g}+j})$$

とし，それぞれの双対となる余接ベクトルを Ω_j と $\overline{\Omega}_j$ とする．このとき次が成立する．

定理 2 (Derivatives of extremal length functions) 次が成立する．

$$\partial \mathrm{Ext.}(F) = -\frac{\sqrt{-1}}{8}\sum_{k=1}^{\tilde{g}} (\mathbf{a}_F^A + \sqrt{-1}\mathbf{y}^A) \cdot \mathrm{Im}(\boldsymbol{\pi}_k)\, \Omega^k \tag{2}$$

$$\overline{\partial} \mathrm{Ext.}(F) = \frac{\sqrt{-1}}{8}\sum_{k=1}^{\tilde{g}} (\mathbf{a}_F^A - \sqrt{-1}\mathbf{y}^A) \cdot \mathrm{Im}(\boldsymbol{\pi}_k)\, \overline{\Omega}^k \tag{3}$$

$$\partial\overline{\partial} \mathrm{Ext.}(F) = \frac{1}{8}\sum_{k,l=1}^{\tilde{g}} \mathrm{Im}(\pi_{kl})\, \Omega^k \wedge \overline{\Omega}^l$$

このことから極値的長さが Teichmüller 空間上で多重劣調和関数であることがわかる ([1], [2])．

参考文献

[1] L. Liu and W. Su, Variation of extremal length functions on Teichmüller space, Preprint `http://arxiv.org/abs/1210.0743`.

[2] H. Miyachi, Extremal length functions are log-plurisubharmonic, To appear in Contemporary math.

2乗可積分タイヒミュラー空間上の Weil-Petersson 計量の曲率について

柳下　剛広　(山口大学創成科学研究科)*

リーマン面 R の2乗可積分タイヒミュラー空間 $T^2(R)$ とは, R のタイヒミュラー空間 $T(R)$ のある部分距離空間で, R の双曲計量に関して2乗可積分な擬等角写像を含むタイヒミュラー同値類からなるもののことである.

まず, R が種数 $g>1$ のコンパクトリーマン面の場合には, タイヒミュラー空間 $T(R)$ には複素 $3g-3$ 次元の複素ヒルベルト構造が入る. Ahlfors [1] は各座標近傍に標準的に導入されるエルミート内積から $T(R)$ 上に Weil-Pertersson 計量というエルミート計量が定義でき, その計量がケーラーであること, および各種曲率がすべて負となることを示した. 一般のリーマン面 R に対しては $T(R)$ には標準的な複素バナッハ構造が入り, 無限次元複素多様体となる. ところが, その構造からでは一般に Weil-Petersson 計量が定まらないという問題が生じる.

Cui [2] は, 普遍タイヒミュラー空間 T の2乗可積分タイヒミュラー空間 T^2 において複素ヒルベルト構造を導入し, Weil-Petersson 計量が同様に定義できること, およびその計量から誘導される距離が完備であることを示した. 一方, Takhtajan, Teo [3] らは T 上に非加算個の連結成分からなる複素ヒルベルト構造を導入し, Ahlfors の結果が T 上でも成り立つことを示した. ここで, T の基点を含む連結成分は T^2 と一致する. これらの結果に基づき, 講演者 [4] は R が Lehner 条件（R 上のすべての単純閉測地線の長さの下限が正値）をみたすとき, $T^2(R)$ 上に複素ヒルベルト構造が導入できることを示した. Lehner 条件はコンパクトリーマン面や上半平面を含む概念であること, および R が解析的有限（有限個の種数, punctureのみをもつ）のとき, $T^2(R)=T(R)$ となることから, 本研究は Ahlfors, Cui の研究の解析的無限型リーマン面への拡張に相当する.

本講演では Lehner 条件をみたすリーマン面 R の2乗可積分タイヒミュラー空間 $T^2(R)$ 上に Weil-Petersson 計量を定義し, その計量の正則断面曲率およびリッチ曲率が負となることの証明を, Ahlfors の証明法に基づいて論じる.

参考文献

[1] L. V. Ahlfors, Curvature properties of Teichmüller's space, J. Analyse Math. **9** (1961/1962), 161–176.

[2] G. Cui, Integrably asymptotic affine homeomorphisms of the circle and Teichmüller spaces, Sci. China Ser. A **43** (2000), 267–279.

[3] L. A. Takhtajan and L.-P. Teo, Weil-Petersson Metric on the Universal Teichmüller Space, Memoirs of the Amer. Math. Soc. **861**, Amer. Math. Soc., 2006.

[4] M. Yanagishita, Introduction of a complex structure on the p-integrable Teichmüller space, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., to appear.

* 山口県宇部市常盤台 2-16-1
e-mail: myngsht@yamaguchi-u.ac.jp
web: http://ds0n.cc.yamaguchi-u.ac.jp/~myngsht/index.html

Quasisymmetric embedding of the integer set and its quasiconformal extension

藤野 弘基　(名古屋大学, 日本学術振興会特別研究員DC)*

1.　擬対称写像

部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ 上で定義された単射写像 $f : A \to \mathbb{R}^n$ が擬対称であるとは, ある同相写像 $\eta : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ が存在して, 任意の三点 $x, y, z \in A$ $(x \neq y)$ に対して

$$\left|\frac{f(x)-f(z)}{f(x)-f(y)}\right| \leq \eta\left(\left|\frac{x-z}{x-y}\right|\right)$$

が成り立つことを言う. 特に同相写像 η が与えられている場合には, $\eta-$ 擬対称であると言う. 大域的な向きを保つ同相写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に対しては擬対称性と擬等角性が同値となることが知られている.

2.　擬対称写像の擬等角拡張

擬対称性は1956年にBeurling–Ahlforsによって, 上半平面の自己擬等角写像の境界値対応を特徴づける概念として導入された. その後擬対称性は第1節の形に高次元化され, 同様に上半空間の自己擬等角写像の境界値対応を特徴づけている (擬対称性は, より一般に距離空間の間の概念に拡張されている).

擬対称性と擬等角性の関係について, J. VäisäläはF. W. Gehringの記念研究集会において次の問題を挙げている [2].

Problem　(Väisäläの第8問題) $\eta-$ 擬対称埋め込み $f : A \to \mathbb{R}^n$ は, η と n にのみ依存する定数 $K \geq 1$ に対して, $K-$ 擬等角写像 $F : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ に拡張できるか？

例えば, $f : A \to \mathbb{R}^n$ が中への $M-$ 双リプシッツ写像であるときは常に $\sqrt{7}M-$ 双リプシッツ拡張 $F : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ を持つことが知られている. 一方で擬対称写像の場合には, Trotsenko–Väisäläの定理により擬等角拡張を持たないような擬対称写像 $f : A \to \mathbb{R}^n$ の存在が示されている. つまり, Väisäläの第8問題は一般の部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して肯定的に解くことができないのである.

3.　主結果

Väisäläの第8問題に対しては, 定義域 A が連結集合である場合が主に研究されてきた. 本研究 [1] では, 離散集合である整数点集合 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ に対し, Väisäläの第8問題が $n = 1$ の時に肯定的に解けるということを明らかにした.

Theorem A $\eta-$ 擬対称埋め込み $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ は, $K-$ 擬等角拡張 $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を持つ. ここで $K \geq 1$ は η にのみ依存する定数である.

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 51M04, Secondary 51M05
キーワード：quasisymmetric mapping, quasiconformal mapping
*〒464-8602 愛知県名古屋市千種区不老町　名古屋大学大学院多元数理科学研究科
e-mail: m12040w@math.nagoya-u.ac.jp

大域的な擬等角写像は擬対称であるから (第 1 節参照), 定理 A の逆も正しい (すなわち, 擬等角拡張を持てば f は擬対称である). 本研究では定理 A を証明する過程で, いくつかのより詳しい観察を得ている.

Theorem B 全単射写像 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ に対して, 以下の条件は量的に同値である:

1. f は $\eta-$ 擬対称である.
2. ある定数 $\lambda \geq 1$ が存在して, 任意の三点 $n, m, k \in \mathbb{Z}$ $(n < m < k)$ に対して以下が成り立つ;
$$\left| \frac{f(n) - f(m)}{f(n) - f(k)} \right| \leq \lambda.$$
3. f は $K-$ 擬等角拡張 $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を持つ.

ここで "量的に同値" であるとは, 各条件が持つそれぞれのデータ (この場合 η や λ, K) が他の条件のデータにのみ依存して決まるという意味である. 擬対称性はその定義から, 与えられた写像が擬対称であるかどうか確かめることが難しい. そこで, 擬対称性をより簡単な条件によって特徴づけることは古くからの重要な問題の一つとなっている. 定理 B は全単射 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ に対して, 擬対称性をより簡単な幾何学的条件 (2) によって特徴づけている.

さらに次の定理は, 擬対称埋め込み $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ の像を幾何学的条件によって特徴づける. 定理 B と定理 C から定理 A が直ちに従う.

Theorem C 部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して, 以下の条件は量的に同値である:

1. 上への $\eta-$ 擬対称写像 $f : \mathbb{Z} \to A$ が存在する.
2. A は狭義単調増加列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ で $a_n \to \pm\infty$ $(n \to \pm\infty)$ となるもので表され, ある定数 $M \geq 1$ が存在して任意の $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$ に対して以下が成り立つ;
$$\frac{1}{M} \leq \left| \frac{a_{n+k} - a_n}{a_n - a_{n-k}} \right| \leq M.$$
3. $K-$ 擬等角写像 $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ で $F(\mathbb{Z}) = A$ となるものが存在する.

参考文献

[1] H. Fujino, *Quasisymmetric embedding of the integer set and its quasiconformal extension*, 2016. arXiv:1605.08855 [math.MG].

[2] J. Väisälä, *Questions on quasiconformal maps in space*, Quasiconformal mappings and analysis (Ann Arbor, MI, 1995). MR1488460

局所コホモロジーを用いた μ^* 列の計算法について

鍋島克輔　(徳島大学)[*1]
田島慎一　(筑波大学)[*2]

超曲面の孤立特異点の複素解析的不変量の 1 つである μ^* 列を, パラメータ付き代数的局所コホモロジーを用いて計算する方法について報告する．μ^* は Whitney equisingularity と係わる重要な量であるが，公式が使えるよう特別な場合を除くと、一般の場合の計算方法は今まで知られていなかった.

1. 基本概念

原点に孤立特異点を持つ正則関数 $f(x)$ が与えられたとする．$\mathbb{C}^n$ の i 次元線形部分空間 L に対し，f の L への制限を $f|_L$ で表し, $\mu^{(i)}(f) = \min_L(\mu^{(i)}(f|_L)$ とおく．このとき, f の μ^* 列は

$$\mu^*(f) = (\mu^{(n)}(f), \mu^{(n-1)}(f), \ldots, \mu^{(1)}(f), \mu^{(0)}(f))$$

により定義される．ただし，$\mu^{(n)}(f)$ および $\mu^{(i)}(f|_L)$ はそれぞれ, f および $f|_L$ の原点でのミルナー数を表す．また, $\mu^{(0)}(f) = 1$ と定めてある.

ゼロでないベクトル $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{C}^n$ に対し, p に対応する射影空間 $\mathbb{P}^{n-1}$ の点を $[p]$ で表し, 原点を通る超平面 $H_p = \{x \in \mathbb{C}^n \,|p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = 0\}$ と同一視する．(ただし, $x = (x_1, \ldots, x_n)$).

このとき，$\mu^{(n-1)}(f)$ は $\mu^{(n-1)}(f) = \min_{[p]\in\mathbb{P}^{n-1}} \mu^{n-1)}(f|_{H_p})$ と表せる

原点に孤立特異点を持つ正則関数 $f(x)$ に対し, U を次で定める.

$$U = \{[p] \in \mathbb{P}^{n-1} \,|\mu^{(n-1)}(f|_{H_p}) = \mu^{(n-1)}(f)\}$$

定理 1 ([2]). U は $\mathbb{P}^{n-1}$ の *open dense subset* である.

μ^* 列について次のことが知られている.

定理 2 ([2]). $H \in U$ に対し，$\mu^*(f) = (\mu^{(n)}(f), \mu^*(f|_H))$．すなわち，

$$\mu^*(f) = (\mu^*(f), \mu^{(n-1)}(f|_H), \mu^{(n-2)}(f|_H), \ldots, \mu^{(1)}(f|_H), \mu^{(0)}(f|_H))$$

が成り立つ.

2. 計算概要と例

$f \in \mathbb{C}[x]$ は原点に孤立特異点を持つとする．$\mu^*(f)$ を求めるには，$f|_H$ のミルナー数が最小になるような超平面 H を求め, 超曲面を H でカットする必要がある．そのためには, $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ をパラメータとし，次の形の超平面

$$x_n = t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_{n-1}x_{n-1}$$

本研究は科学研究補助金 課題番号 15K17513 と課題番号 15K04891 の助成を受けております.
2010 Mathematics Subject Classification: 32S05
キーワード：Tessier μ^*, 局所コホモロジー
[*1] 〒770-8506　徳島市南常三島町 2-1 徳島大学大学院理工学研究部
e-mail: nabeshima@tokushima-u.ac.jp
[*2] 〒305-8571　つくば市天王台 1-1-1 筑波大学大学院数理物質系数学域
e-mail: tajima@math.tsukuba.ac.jp

の族でカットしたときのミルナー数を計算すればよい．

論文[1]において，パラメータ付き代数的局所コホモロジーの計算アルゴリズムを与えた．(アルゴリズムは計算機に実装済)．また，[1, 3]において代数的局所コホモロジーを使ったミルナー数の計算法を与えてある．これらの結果に基づくことで, パラメータを含む問題に対してもミルナー数を求めることが可能である．このミルナー数の計算で得られる open dense な stratum に属するような超平面 H によるカットは求めるミルナー数 $\mu^{(n-1)}(f)$ を与える．このような超平面を 1 つ選び，同じ操作を繰り返すことで μ^* 列を得ることができる．

$f(x,y,z) = x^4 + y^5 + z^6 + xyz \in \mathbb{C}[x,y,z]$ の $\mu^*(f)$ を求める．原点でのミルナー数は $\mu^{(3)}(f) = 14$ である．

1. $z = ax + by$ を $f(x,y,z)$ に代入する．ただし，a, b はパラメータである．$h(x,y) = f(x,y,ax+by)$ とし，$\langle \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \rangle$ に付随するパラメータ付き代数的局所コホモロジーを計算しミルナー数を求めることで次を得る．

stratum	ミルナー数
$a = b = 0$	12
$a = 0,\ b \neq 0$	5
$b = 0,\ a \neq 0$	6
$ab \neq 0$	4

ここで，stratum $ab \neq 0$ は open dense なので，$\mu^{(2)}(f) = 4$ を得る．$(a,b) = (1,1)$ のとき，ミルナー数が 4 となる超平面カットなので，$f_2(x,y) = f(x,y,x+y)$ とし，定理 2 より f_2 の μ^* 列を求める．

2. $y = ax$ を $f_2(x,y)$ に代入する．ただし，a はパラメータである．$h(x) = f_2(x,ax)$ とし，$\langle \frac{\partial h}{\partial x} \rangle$ に付随するパラメータ付き代数的局所コホモロジーを計算しミルナー数を求めることで次を得る．

stratum	ミルナー数
$a + 1 = 0$	3
$a = 0$	3
$a^2 + a \neq 0$	2

ここで，$a^2 + a \neq 0$ は open dense なので，ミルナー数 2 のときが最小となる．したがって，$\mu^{(1)}(f) = 2$ を得る．

以上の計算により，$\mu^*(f) = (14, 4, 2, 1)$ を得る．パラメータ付き代数的局所コホモロジーを利用することで $\mu^*(f)$ 列を求めるアルゴリズムを構成できる．

参考文献

[1] K. Nabeshima and S. Tajima, *Algebraic local cohomology with parameters and parametric standard bases for zero-dimensional ideals*, arXiv:1508.06724v1, (2015)

[2] B. Teissier, *Variété polaire I*, Inventiones math. **40**, pp. 267–292, (1977)

[3] S. Tajima, Y. Nakamura and K. Nabeshima, *Standard bases and algebraic local cohomology for zero-dimensional ideals*, Advanced Studies in Pure Mathematics, Vol. 6, pp. 341–361, (2009)

パラメータ付きホロノミーD加群とb-関数

– μ-cosntant deformationの場合 –

鍋島克輔　(徳島大学)[*1]
田島慎一　(筑波大学)[*2]

1. 序

多項式 $F(u,x)$ は, 原点を孤立特異点として持つ weighted homogeneous な多項式 $f_0(x)$ に（係数を変形パラメータ u とする）upper monomials を加えることで得られる semi-quasihomogeneous polynomial とする．原点 $x=0$ に於ける $f_u(x)=F(u,x)$ のミルナー数は, $f_0(x)$ のそれと等しいことから, $F(u,x)$ は, μ-constant deformation と見做せる．いま $f_0(x)$ の reduced b-function を $\tilde{b}_{f_0}(\lambda)$, $f_u(x)$ の原点における reduced b-function を $\tilde{b}_{f_u}(\lambda)$ で表す．このとき, 一般に $\tilde{b}_{f_u}(\lambda)$ は変形パラメータ u に依存し $\tilde{b}_{f_0}(\lambda)$ とは異なることが知られている.

本講演では, 孤立特異点の μ-constant deformation に付随する b-関数および変形パラメータ付きホロノミーD-加群の計算法について報告する.

2. 変形パラメータ付きD-加群

$X=\mathbb{C}^n, U=\mathbb{C}^m, K=\mathbb{Q}$ とおく．$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ を変数とし, パラメータ $u=(u_1,u_2,\ldots,u_m)\in\mathbb{C}^m$ をもつ Weyl代数 $K[u]\langle x,\frac{\partial}{\partial x}\rangle$ にさらに, $s,\frac{\partial}{\partial t}$ を $\frac{\partial}{\partial t}s-s\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}$ を満たすとして添加した代数(変形パラメータ付き Poincaré-Birkhoff-Witt 代数)を $K[u]\langle s,\frac{\partial}{\partial t},x,\frac{\partial}{\partial x}\rangle$ で表す．この偏微分作用素環において,

$$T=\left\{F\frac{\partial}{\partial t}+s,\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$$

とおき, 変数 $\frac{\partial}{\partial t}$ を消去するような項順序に対して イデアル $\langle T\rangle$ のパラメータ付き包括的グレブナ基底 G を求める. このG から変数 $\frac{\partial}{\partial t}$ をもつ式を除いて得られる集合を A とおく．A は, パラメータ付き偏微分作用素環 $K[u]\langle s,x,\frac{\partial}{\partial x}\rangle$ における $f_u(x)^s$ の annihilator の生成系である.

次に, パラメータ付き偏微分作用素環 $K[u]\langle s,x,\frac{\partial}{\partial x}\rangle$ において集合 A および $\frac{\partial F}{\partial x_1},\frac{\partial F}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial F}{\partial x_n},F$ により生成されるイデアルを考え, 包括的グレブナ基底計算を行う．この方法により, $f_u(x)$ の b-関数, b-関数の各根に対する, パラメータ付きホロノミーD-加群を構成することができる.

これらの計算法については, 論文 [5], [4], [7] を参照されたい.

本研究は科学研究補助金 課題番号 15K17513 と課題番号 15K04891 の助成を受けております.
2010 Mathematics Subject Classification: 32S05
キーワード：b-関数，ホロノミーD 加群，グレブナー基底
[*1] 〒770-8506　徳島市南常三島町 2-1 徳島大学大学院理工学研究部
e-mail: nabeshima@tokushima-u.ac.jp
[*2] 〒305-8571　つくば市天王台 1-1-1 筑波大学大学院数理物質系数学域
e-mail: tajima@math.tsukuba.ac.jp

3. Levantovskyy-Martín の手法

Semi-quasihomogeneous な孤立特異点の b-関数に関する Guimarães-Hefez([1]) らの結果を用いることで, b-関数の根の候補を決定することができる. b-関数はデリケートな複素解析的不変量であるが, 支配方程式ともいえるパラメータ付き偏微分作用素環 $K[u]\langle s, x, \frac{\partial}{\partial x}\rangle$ における $f_u(x)^s$ の annihilator の生成系 A に対し, Levantovskyy-Martín の手法と包括的ホロノミー D-加群の計算を組み合わせることで, $f_u(x)$ の b-関数を効率的に求める計算法を導出できる.

参考文献

[1] A. Guimarães and A. Hefez, Bernstein-Sato polynomials and spectral numbers, *Ann. Inst. Fourier, Genoble*, **57**, pages 2031–2040, 2007.

[2] M. Kato, The b-function of μ-constant deformation of x^7+y^5, Bull. College of Science, Univ. of the the Ryukyus Vol. **32**, pages 5-10, 1981.

[3] V. Levandovskyy and J. Martín-Morales, Algorithms for checking rational roots of b-functions and their applications. *J. Algebra*, **352**, pages 408–429. 2012.

[4] 鍋島克輔，田島慎一, 偏微分作用素環での包括的グレブナー基底系とホロノミー D-加群, b-関数, 数理解析研究所講究録「数式処理研究の新たな発展」, (2015 年度内) 掲載予定

[5] K. Nabeshima, K. Ohara and S. Tajima, Comprehensive Gröbner systems in rings of differential operators, holonomic D-modules and b-functions. *Proc. ISSAC2016*, ACM, 2016. in press.
`http://www-math.ias.tokushima-u.ac.jp/~nabesima/NOTISSAC2016.pdf`

[6] T. Oaku, Algorithms for the b-function and D-modules associated with a polynomial. *J. Pure Appl. Algebra*, **117** and **118**, pages 495–518. 1997.

[7] 小原功任, 田島慎一, Poincaré-Birkhoff-Witt 代数上のグレブナ基底計算と Risa/Asir への実装, 数理解析研究所講究録「数式処理とその周辺分野の研究」, 掲載予定

[8] M. Saito, Period mapping via Brieskorn modules, *Bull. Soc. math. France*, **119**, pages 141–171, 1999.

[9] S. Tajima, Y. Nakamura and K. Nabeshima, *Standard bases and algebraic local cohomology for zero-dimensional ideals*, Advanced Studies in Pure Mathematics, Vol. 6, pp. 341–361, (2009)

多変数留数の計算アルゴリズム (シェイプ基底をもつ場合)

小原功任　(金沢大学)
田島慎一　(筑波大学)

本稿では，ある条件のもとで多変数留数を exact に計算するアルゴリズムを与える．領域 $U \subset \mathbf{C}^n$ 上の正則関数の組 $F = \{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ が完全交叉であり，また，U における $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ の共通零点は一点 $\beta \in U$ だけであるとする．このとき U 上で正則な関数 $\varphi(x)$ に対し，積分

$$\mathrm{Res}_\beta\left(\frac{\varphi}{f_1 \cdots f_n}dx\right) = \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^n \int_{\Gamma(\beta)} \frac{\varphi(x)}{f_1(x)\cdots f_n(x)}dx$$

を多変数留数 (Grothendieck local residue) という ([1])．ここで $\Gamma(\beta) = \{x \in U \mid \|f_1(x)\| = \varepsilon, \ldots, \|f_n(x)\| = \varepsilon\}$ は，十分小さな $\varepsilon > 0$ で定まる実 n 次元サイクルである．多変数留数 Res_β は，F から定まる偏微分作用素 $T_F = \sum_\alpha c_\alpha(x)\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$ により，$\mathrm{Res}_\beta\left(\frac{\varphi}{f_1\cdots f_n}dx\right) = (T_F\varphi)|_{x=\beta}$ と表すことができることが知られている．したがって，ネーター作用素 T_F を求めることは多変数留数を求めることに等しい．

われわれの目標は，計算機に実装可能な，多変数留数の exact な計算アルゴリズムを与えることである．本稿では，次の条件のもとで，exact に T_F を構成するアルゴリズムについて考える．

仮定 $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ は $x = (x_1, \ldots, x_n)$ の多項式で与えられているとし，$\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ の生成する $\mathbf{C}[x]$-イデアル I が，0次元イデアルであって，その準素イデアル分解

$$I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_N, \quad (\text{各 } \sqrt{Q_k} \text{ は素イデアル})$$

の各成分 Q_k がシェイプ基底をもつと仮定する．つまり，準素イデアル Q_k は，適当に変数の番号を変えることで $\{g_{k1}(x_1)^{m_k}, x_2 - g_{k2}(x_1), \ldots, x_n - g_{kn}(x_1)\}$ で生成される．

以下，具体的なアルゴリズムを述べる．最初に，$V_{\mathbf{C}}(I)$ に台をもつ代数的局所コホモロジー類$\sigma = \left[\frac{1}{f_1\cdots f_n}\right]$ のみたす微分方程式系，つまり零化イデアル $\mathrm{Ann}_{D_n}(\sigma)$ (の部分左イデアル) を求めたい．ワイル代数 $D_n = \mathbf{C}\langle x, \partial\rangle$ におけるグレブナー基底を用いて計算することもできるが，計算量の観点から，われわれは D_n におけるグレブナー基底計算を回避し，多項式環 $\mathbf{C}[x]$ における問題へと帰着させる．まず $D_nI \subset \mathrm{Ann}_{D_n}(\sigma)$ が分かる．次に一階作用素 $\ell = \sum_{i=1}^n a_i(x)\partial_i + c(x) \in D_n$ を考えると，$\ell \in \mathrm{Ann}_{D_n}(\sigma)$ の必要十分条件は，“任意の f_k について $\sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \in I$” である．この連立方程式を $\mathbf{C}[x]$-加群のシチジーの問題とみなして解くことにより，すべての $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ が得られる．これら一階作用素と I で生成される，$\mathrm{Ann}_{D_n}(\sigma)$ の部分左イデアルを $\mathcal{A}$ とする．

零点集合 $V_{\mathbf{C}}(I)$ の既約成分 $Z_k = V_{\mathbf{C}}(Q_k)$ に台をもつデルタ関数 δ_{Z_k} を考える．このとき σ は Z_k に台をもつコホモロジー類 σ_k の和に分解され，しかもヤコビ行列式 $J = \det\left(\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\right)$ について，$J\sigma_k = m_k\delta_{Z_k}$ をみたす (m_k は Q_k の重複度)．また，$\sigma_k = T_k\delta_{Z_k}$ となる $T_k \in D_n$ が存在し，これが既約成分ごとに定まるネーター作用素で

ある．よって準素イデアル分解を求めた後に，準素イデアル Q_k ごとに，以下に述べる手順でネーター作用素 T_k を求めることになる．

仮定より，根基 $\sqrt{Q_k}$ は $\{g_{k1}(x_1), x_2 - g_{k2}(x_1), \ldots, x_n - g_{kn}(x_1)\}$ で生成される．したがって変数変換 $(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (x_1, x_2 - g_{k2}(x_1), \ldots, x_n - g_{kn}(x_n))$ を用いて，重複方向を表す微分作用素

$$R_k = -\frac{\partial}{\partial u_1} = -\partial_1 - \sum_{i=2}^{n} \partial_i \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_1} \in D_n$$

が定まる．$\mathrm{Ann}_{D_n}(\sigma) \cdot T_k \delta_{Z_k} = 0$ であったから，まずは $\mathrm{Ann}_{D_n}(\sigma) \cdot S_k \delta_{Z_k} = 0$ をみたす微分作用素で，次の形となるものを決定したい (最高次の係数が 1)：

$$S_k = R_k^{m_k - 1} + R_k^{m_k - 2} s_{m_k - 2}(x) + \cdots + R_k s_1(x) + s_0(x) \in D_n, \qquad (s_i(x) \in \mathbf{C}[x])$$

デルタ関数の零化イデアルが $\mathrm{Ann}_{D_n}(\delta_{Z_k}) = D_n \sqrt{Q_k}$ であることに注意すると，$\mathcal{A} S_k \subset D_n \sqrt{Q_k}$ となるので，係数 $s_0(x), \ldots, s_{m_k-2}(x)$ は $\mathbf{C}[x]/\sqrt{Q_k}$ の元としてよい．仮定より，剰余環 $\mathbf{C}[x]/\sqrt{Q_k}$ はベクトル空間として有限次元であるから，未定係数を用いて各 $s_i(x)$ を表すと，条件 $\mathcal{A} S_k \subset D_n \sqrt{Q_k}$ は，多項式イデアル $\sqrt{Q_k}$ に対するイデアルメンバーシップ問題に他ならない．シェイプ基底はグレブナー基底の一種であるので，イデアルメンバーシップ問題は除算を用いて容易に解くことができる．したがって，多項式 $s_0(x), \ldots, s_{m_k-2}(x)$ が求まり，S_k も決まる．

次に最高次の係数，すなわち $T_k = S_k h_k(x)$ となる多項式 $h_k(x)$ を求めたい．このとき，$J\sigma_k = m_k \delta_{Z_k}$ および $\sigma_k = T_k \delta_{Z_k}$ に注意すると，$J S_k h_k(x) \delta_{Z_k} = m_k \delta_{Z_k}$ であるから，

$$J S_k h_k(x) - m_k \in \mathrm{Ann}_{D_n}(\delta_{Z_k}) = D_n \sqrt{Q_k}$$

でなければならない．やはり $h_k(x) \in \mathbf{C}[x]/\sqrt{Q_k}$ とみなしてもよいので，同様に未定係数法を用いて $h_k(x)$ を決定できる．よって，Z_k におけるネーター作用素 $T_k = S_k h_k(x)$ が定まる．

すべての既約成分に対して，この手順を繰り返すことで，既約成分ごとに分解されたネーター作用素の組 $\{T_1, \ldots, T_N\}$ が得られる．

以上より，$\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ の生成するイデアルがシェイプ基底をもつ準素イデアルで表される場合に適用可能な，多変数留数の計算アルゴリズムが与えられた．われわれはまた，この計算アルゴリズムを計算機代数システム Risa/Asir に実装した．

参考文献

[1] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley Interscience, 1978.

特別講演

完備極小曲面のガウス写像の
値分布論的性質の幾何学的解釈について

川上　裕　(Yu KAWAKAMI，金沢大学理工研究域数物科学系)*

1. 序

複素解析学は極小曲面論の研究の発展に大きく寄与している．顕著な結果として，1863年にA. EnneperとK. Weierstrassにより発見された，Euclid空間内の極小曲面を複素解析的データによって構成する‘Enneper-Weierstrassの表現公式’が挙げられる．また，21世紀になった今なお，複素解析的視点からの極小曲面の性質が調べられている．例えば，A. Alarcón氏, F. Forstnerič氏, F. J. Lopez氏の最近の研究[3]，[4]は非常に興味深い．極小曲面論と複素解析学との関係によって得られた有名な研究として，‘Euclid空間内の完備極小曲面のGauss写像の像の大きさの決定問題’がある．これは，3次元Euclid空間$\mathbf{R}^3$内の平面でない完備極小曲面に対しては，Gauss写像の除外値数の上限を問うもので，1988年に藤本坦孝氏の論文[8]により，上限は‘4’であり，この結果は最良のものであることが証明された．また，藤本氏は論文[8]で，4次元Euclid空間$\mathbf{R}^4$内の完備極小曲面のGauss写像の除外値数の評価に関しても最良の結果を与えている．しかし，藤本氏のこれらの結果の幾何学的解釈はあまり深く知られていなかった．

そこで本稿では，藤本氏の結果の幾何学的解釈を明らかにするため，Euclid空間からの誘導計量を一般化した等角計量を考え，その計量に現れる有理型関数，または正則写像の像の大きさに関する評価を与え，先に述べた極小曲面のGauss写像の除外値数の上限には，微分幾何学的な量である計量のオーダーが現れることを解説する．第2章では，論文[16]で示した，開Riemann面Σが等角計量$ds^2=(1+|g|^2)^m|\omega|^2$（ただし，$g$は$\Sigma$上の有理型関数，$\omega$は$\Sigma$上の正則1次微分形式，$m$は正の整数）をもつとき，その計量に関するGauss曲率の評価（定理2.2）を与える．この結果から，$\mathbf{R}^3$内の平面でない完備極小曲面のGauss写像の除外値数の上限‘4’の幾何学的解釈は，‘2（$=\mathbf{R}^3$の誘導計量に現れるオーダー）$+\,2$（$=$Gauss写像の値域であるRiemann球面のEuler標数）’であることがわかる．なお，本結果の極小曲面以外の他のクラスの曲面への応用やその他のGauss写像の値分布論的性質については[17]，[18]を参照せよ．第3章では，講演者が相山玲子氏，芥川和雄氏，今川悟氏との共同研究[2]で得ることができた，$\mathbf{R}^4$内の完備極小曲面のGauss写像の除外値数の結果に関する幾何学的解釈（定理3.2）を与える．第4章では，完備極小曲面のGauss写像の値分布論の研究の課題と展望について述べる．

2. 3次元Euclid空間内の完備極小曲面のGauss写像

まず，3次元Euclid空間$\mathbf{R}^3$内の極小曲面の基本的事実を復習する．詳細は[10]，[15]，[21]などを参照せよ．$X=(x^1,x^2,x^3)\colon\Sigma\to\mathbf{R}^3$を向き付けられた極小曲面とする．この曲面で等温座標系(u,v)をとることにより，Σを$\mathbf{R}^3$からの誘導計量を等角計量とす

本研究は科研費(課題番号:15K04840)の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: Primary 53A10; Secondary 30D35, 53C42
キーワード：極小曲面，ガウス写像，除外値，曲率評価，等角計量
* 〒920-1197 石川県金沢市角間町　金沢大学 数物科学系
e-mail: y-kwkami@se.kanazawa-u.ac.jp

るRiemann面とみなすことができる．このとき，

$$\triangle_{ds^2} X = 0, \tag{2.1}$$

が成り立つ．つまり，極小曲面の各成分関数 x^i が Σ 上の調和関数となる．複素座標 $z = u + \sqrt{-1}v$ を用いると，(2.1）から

$$\bar{\partial}\partial X = 0 \tag{2.2}$$

となる．ここで，$\partial = (\partial/\partial u - \sqrt{-1}\partial/\partial v)/2$，$\bar{\partial} = (\partial/\partial u + \sqrt{-1}\partial/\partial v)/2$ とする．よって，各 $\phi_i := (\partial x^i/\partial z)dz$ $(i = 1, 2, 3)$ は Σ 上の正則1次微分形式をなる．そこで，

$$g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - \sqrt{-1}\phi_2}, \qquad \omega = \phi_1 - \sqrt{-1}\phi_2 \tag{2.3}$$

とおくと，g は Σ 上の有理型関数，ω は Σ 上の正則1次微分形式となる．この有理型関数と正則1次微分形式の対 (g, ω) を極小曲面 $X(\Sigma)$ のWeierstrassデータと呼ぶ．さらに，$g\colon \Sigma \to \overline{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \cup \{\infty\} \simeq S^2$ はこの曲面のGauss写像となり，$\mathbf{R}^3$ からの誘導計量 ds^2 は

$$ds^2 = (1 + |g|^2)^2 |\omega|^2 \tag{2.4}$$

と表せる．$\mathbf{R}^3$ 内の極小曲面 $X(\Sigma)$ が完備であるとは，曲面上のすべての発散路が計量 ds^2 に関して無限大の長さをもつときをいう．

$\mathbf{R}^3$ 内の完備極小曲面のGauss写像の除外値数の上限に関しては藤本坦孝氏により次の結果が得られている．

定理 2.1 ([8]). $X\colon \Sigma \to \mathbf{R}^3$ を向き付けられた極小曲面とする．Gauss写像 $g\colon \Sigma \to \overline{\mathbf{C}}$ が少なくと相異なる5つ以上の除外値 $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ $(q \geq 5)$ をもつとき，除外値 $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ にはよるが，曲面とは無関係な正の定数 C が存在し，Σ の各点 p に対して，

$$|K_{ds^2}(p)|^{1/2} \leq \frac{C}{d(p)} \tag{2.5}$$

が成り立つ．ここで，$K_{ds^2}(p)$ は点 p における計量 ds^2 に関するGauss曲率，$d(p)$ を点 p から Σ の境界までの測地的距離とする．特に，$\mathbf{R}^3$ 内の平面でない完備極小曲面のGauss写像の除外値数は高々4である．

我々はこの結果の幾何学的解釈を与えるため，$\mathbf{R}^3$ の誘導計量 (2.4) を一般化した等角計量を考え，その中に現れる有理型関数について考え，次の結果を得た．

定理 2.2 ([16]). Σ を等角計量

$$ds^2 = (1 + |g|^2)^m |\omega|^2 \tag{2.6}$$

をもつ開Riemann面とする．ただし，g を Σ 上の有理型関数，ω を Σ 上の正則1次微分形式，m を正の整数とする．有理型関数 g が相異なる $q \geq m + 3$ 個の除外値をもつとする．このとき，m と除外値集合にはよるが，曲面 Σ とは無関係な正の定数 C が存在し，Σ の各点 p について曲率評価 (2.5) が成り立つ．特に，計量 ds^2 が完備で g が非定数ならば，g の除外値数は高々 $m + 2$ である．

計量ds^2が完備なとき，定理2.2にあるgの除外値数の上限は最良である．実際に次の例が存在する．

命題 2.3 ([16])**.** 開 Riemann 面Σとして，複素平面$\mathbf{C}$から$q-1$個の相異なる点$\alpha_1,\ldots,\alpha_{q-1}(\in\mathbf{C})$を除いたもの，または，その普遍被覆面を考える．$\Sigma$上の有理型関数$g$，正則1次微分形式$\omega$をそれぞれ

$$g=z, \qquad \omega=\frac{dz}{\prod_{i=1}^{q-1}(z-\alpha_i)} \tag{2.7}$$

とする．このとき，gの除外値数はqである．また，計量ds^2が完備であるためには$q\le m+2$が必要十分である．特に，ds^2が完備でgの除外値数が$m+2$の例が存在する．

証明. 仮定から，gがq個の相異なる値$\alpha_1,\ldots,\alpha_{q-1},\infty$を除外していることは容易にわかる．$\Sigma$上の発散路$\Gamma$は$\alpha_1,\ldots,\alpha_{q-1},\infty$のいずれかの点に向かう．このとき，無限遠点$\infty$に向かう$\Gamma$の計量$ds^2$に関する長さを考えると，

$$\int_\Gamma ds=\int_\Gamma (1+|g|^2)^{m/2}|\omega|=\int_\Gamma \frac{(1+|z|^2)^{m/2}}{\prod_{i=1}^{q-1}|z-\alpha_i|}|dz|=\infty$$

であるためには$q\le m+2$が必要十分である． $\square$

注意 2.4. 定理2.2で述べた，計量ds^2が完備な場合のgの除外値数の上限‘$m+2$’の‘2’はRiemann球面のEuler標数を意味する．実際，$m=0$の場合を考えると，$ds^2=|\omega|^2$となり，これはΣ上の完備な平坦計量を与えることから，複素平面$\mathbf{C}$からΣへの普遍被覆写像πが存在する．そこで，gの代わりに$g\circ\pi$を考えることで，gを$\mathbf{C}$上の有理型関数と考えることができる．一方，Ahlfors [1] や Chern [5] の結果から，$\mathbf{C}$上の非定数有理型関数の除外値数の上限の‘2’はRiemann球面のEuler標数と一致することがわかる．

以上のことから，$\mathbf{R}^3$内の完備極小曲面のGauss写像の除外値数の上限‘4’の幾何学的解釈は，‘2（=$\mathbf{R}^3$からの誘導計量に現れるオーダー）+ 2（Gauss写像の値域であるRiemann球面のEuler標数）’であることがわかった．

定理2.2の証明を紹介する．立体射影$\pi\colon S^2\to\overline{\mathbf{C}}$によって$S^2$とRiemann球面$\overline{\mathbf{C}}$を同一視して，$\overline{\mathbf{C}}$上の点$\alpha$と$\beta$の弦距離の1/2を$|\alpha,\beta|$で表す．このとき，$\alpha,\beta\in\mathbf{C}$に対して，

$$|\alpha,\beta|=\frac{|\alpha-\beta|}{\sqrt{1+|\alpha|^2}\sqrt{1+|\beta|^2}}, \qquad |\alpha,\infty|=\frac{1}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}$$

となる．定理2.2の証明には，次の2つの補題を用いる．

補題 2.5. [11, 136ページの(8.12)] gをq個の相異なる除外値$\alpha_1,\ldots,\alpha_q$をもつ$\triangle_R:=\{z\in\mathbf{C}\,;\,|z|<R\}$ $(0<R\le+\infty)$ 上の非定数有理型関数とする．もし$q>2$ならば，$\eta<(q-2)/q$となる正の実数ηに対して，qと$L=\min_{i<j}|\alpha_i,\alpha_j|$にのみ依存する正の実数$C'$が存在して

$$\frac{|g'_z|}{(1+|g|^2)\prod_{j=1}^{q}|g,\alpha_j|^{1-\eta}}\le C'\frac{R}{R^2-|z|^2} \tag{2.8}$$

が成り立つ．

この補題は負曲率に関するAhlfors-Schwarzの補題から導くことができる．この補題の証明の一部は，藤本氏の和書の本[12]にもある．

補題 2.6. [10, Lemma 1.6.7] $d\sigma^2$を開Riemann面Σ上の平坦な等角計量とする．このとき，Σの任意の点pに対して，ある開円板$\triangle_R := \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z| < R\}$ $(0 < R \le +\infty)$からpの開近傍への微分同相写像Φが存在し，$\Phi(0) = p$が成り立ち，$\Phi^*(d\sigma^2)$が$\triangle_R$上のEuclid計量ds_E^2と等長的となり，$|a_0| = 1$をみたす任意の点a_0に対して，$L_{a_0} = \{w := a_0 s \,|\, 0 < s < R\}$の$\Phi$による像$\Gamma_{a_0}$が$\Sigma$上の発散路となる．

定理2.2の証明は以下の通りである．gが相異なるq個の除外値$\alpha_1, \ldots, \alpha_q$をもっていたとする．必要ならば適当なMöbius変換を施すことで，$\alpha_q = \infty$と仮定する．今，正の実数ηとして

$$\frac{q - 2(m+1)}{q} < \eta < \frac{q - (m+2)}{q}$$

をみたすものを取り，$\lambda := m/(q - 2 - q\eta)$とする．$q \ge m + 3$と仮定しているので，$1/2 < \lambda < 1$となる．そこで，$\Sigma' := \{p \in \Sigma;\, g'_z(p) \ne 0\}$（ただし，$g'_z = dg/dz$）上の計量として

$$d\sigma^2 = |\hat{\omega}_z|^{2/(1-\lambda)} \left(\frac{1}{|g'_z|} \prod_{j=1}^{q-1} \left(\frac{|g - \alpha_j|}{\sqrt{1 + |\alpha_j|^2}} \right)^{1-\eta} \right)^{2\lambda/(1-\lambda)} |dz|^2 \tag{2.9}$$

を考える．ただし，$\omega = \hat{\omega}_z dz$とする．$\Sigma'$の任意の点$p$を取る．この計量$d\sigma^2$は平坦なので，補題2.6より，ある開円板$\Delta_R = \{z \in \mathbf{C}; |z| < R\}$ $(0 < R \le +\infty)$からpの開近傍への微分同相写像Φが存在し，$\Phi(0) = p$で，$\Phi^*(d\sigma^2)$がΔ_R上のEuclid計量ds_E^2と等長的となり，$|a_0| = 1$をみたす任意の点a_0に対して$L_{a_0} = \{w := a_0 s\,;\, 0 < s < R\}$の$\Phi$による像$\Gamma_{a_0}$が$\Sigma'$上の発散路となる．記号を簡潔にするため，$\Delta_R$上の$g \circ \Phi$を$g$と表すこととする．補題2.5より，

$$R \le C' \frac{1 + |g(0)|^2}{|g'_z(0)|} \prod_{j=1}^{q} |g(0), \alpha_j|^{1-\eta} < +\infty \tag{2.10}$$

が成り立つので，Rは有限である．よって，計量$d\sigma^2$に関するΓ_{a_0}の長さを$L_{d\sigma}(\Gamma_{a_0})$とすると

$$L_{d\sigma}(\Gamma_{a_0}) = \int_{\Gamma_{a_0}} d\sigma = R < +\infty$$

が成り立つ．このとき，Γ_{a_0}はΣ上の発散路となる．実際もしそうでないとすると，Γ_{a_0}は$g'(p_0) = 0$となる点p_0に向かうことになる．そこで，$\zeta(p_0) = 0$をみたす点p_0の近傍における局所複素座標ζを適当に取ることで，計量$d\sigma^2$を，ある正の値を取るなめらかな関数wを用いて

$$d\sigma^2 = |\zeta|^{-2\lambda/(1-\lambda)} w |d\zeta|^2$$

と表すことができる．$\lambda/(1-\lambda) > 1$より

$$R = \int_{\Gamma_{a_0}} d\sigma \ge \widetilde{C} \int_{\Gamma_{a_0}} \frac{|d\zeta|}{|\zeta|^{\lambda/(1-\lambda)}} = +\infty$$

となり，式(2.10)に矛盾する．

$\Phi^*(d\sigma^2) = |dz|^2$ となるので，式 (2.9) より

$$|\hat{\omega}_z| = \left(|g'_z| \prod_{j=1}^{q-1} \left(\frac{\sqrt{1+|\alpha_j|^2}}{|g-\alpha_j|} \right)^{1-\eta} \right)^{\lambda} \tag{2.11}$$

となる．よって，補題2.5より

$$\begin{aligned}
\Phi^* ds &= |\hat{\omega}_z|(1+|g|^2)^{m/2}|dz| \\
&= \left(|g'_z|(1+|g|^2)^{m/2\lambda} \prod_{j=1}^{q-1} \left(\frac{\sqrt{1+|\alpha_j|^2}}{|g-\alpha_j|} \right)^{1-\eta} \right)^{\lambda} |dz| \\
&= \left(\frac{|g'_z|}{(1+|g|^2) \prod_{j=1}^{q} |g, \alpha_j|^{1-\eta}} \right)^{\lambda} |dz| \\
&\leq (C')^{\lambda} \left(\frac{R}{R^2 - |z|^2} \right)^{\lambda} |dz|
\end{aligned}$$

となる．$1/2 < \lambda < 1$ より

$$d(p) \leq \int_{\Gamma_{a_0}} ds = \int_{L_{a_0}} \Phi^* ds \leq (C')^{\lambda} \int_{L_{a_0}} \left(\frac{R}{R^2 - |z|^2} \right)^{\lambda} |dz| \leq (C')^{\lambda} \frac{R^{1-\lambda}}{1-\lambda} \, (< +\infty)$$

を得る．さらに，式 (2.10) より

$$d(p) \leq \frac{C'}{1-\lambda} \left(\frac{1+|g(0)|^2}{|g'_z(0)|} \prod_{j=1}^{q} |g(0), \alpha_j|^{1-\eta} \right)^{1-\lambda}$$

を得る．一方，等角計量 $ds^2 = (1+|g|^2)^m |dz|^2$ に関する Gauss 曲率は

$$K_{ds^2} = -\frac{2m|g'_z|^2}{(1+|g|^2)^{m+2}|\hat{\omega}_z|^2}$$

となる．ゆえに，式 (2.11) より

$$|K_{ds^2}|^{1/2} = \sqrt{2m} \left(\frac{|g'_z|}{1+|g|^2} \right)^{1-\lambda} \left(\prod_{j=1}^{q} |g, \alpha_j|^{(1-\eta)} \right)^{\lambda}$$

も得る．各 j に対して $|g, \alpha_j| \leq 1$ より

$$|K_{ds^2}(p)|^{1/2} d(p) \leq \frac{\sqrt{2m}C'}{1-\lambda} =: C$$

を得る．C' と λ の定義より，C は正の実数で，m，q と $L := \min_{i<j}|\alpha_i, \alpha_j|$ に依存する．

3. 4次元Euclid空間内の完備極小曲面のGauss写像

4 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^4$ 内の極小曲面の基本的事実を復習する．$\mathbf{R}^4$ 内の極小曲面論の詳細は，前章で挙げた文献以外にも，例えば [6]，[14] などを参照するとよい．$X = (x^1, x^2, x^3, x^4) \colon \Sigma \to \mathbf{R}^4$ を $\mathbf{R}^4$ 内の正則な共形極小はめ込みとする．ここで，Σ は向き付けられた2次元 C^∞ 級多様体とする．この曲面に対して等温座標系 $z = u + \sqrt{-1}v$ を取

ることで，Σ を Riemann 面と見なす．このとき，X の極小性から，Σ は必ず開 Riemann 面となる．よく知られているように，$\mathbf{R}^4$ 内の向き付けられた 2 次元線形部分空間全体の集合（Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}(2,\mathbf{R}^4)$ のこと）は，3 次元複素射影空間 $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ 内の 2 次超曲面

$$\mathbf{Q}^2(\mathbf{C}) := \{(w^1 : w^2 : w^3 : w^4) \in \mathbf{P}^3(\mathbf{C}) \,|\, (w^1)^2 + (w^2)^2 + (w^3)^2 + (w^4)^2 = 0\}$$

と同一視することができる．よって，この曲面 $X(\Sigma)$ の Gauss 写像 G は，Σ の各点 p から $X(p)$ での向き付けられた接平面への対応と考えることで，Σ から $\mathbf{Q}^2(\mathbf{C})$ への写像 $G\colon \Sigma \to \mathbf{Q}^2(\mathbf{C})$ と考えることができる．さらに，極小曲面の場合，G は正則写像となる．一方，2 次超曲面 $\mathbf{Q}^2(\mathbf{C})$ は $\overline{\mathbf{C}} \times \overline{\mathbf{C}}$ と双正則同値なので，G は Σ 上の有理型関数の対 (g_1, g_2) と見なすことができる．各 i $(1 \leq i \leq 4)$ に対して，$\phi_i = (\partial x^i/\partial z)dz$ とする．このとき，次のことが成り立つ：

(C) 共形条件： $\Sigma\,\phi_i^2 = 0$,

(R) 正則条件： $\Sigma\,|\phi_i|^2 > 0$,

(P) 周期条件： 各 i と各サイクル $\gamma \in H_1(\Sigma, \mathbf{Z})$ に対して，$\mathrm{Re}\displaystyle\int_\gamma \phi_i = 0.$

いま

$$\omega = \hat{\omega}_z dz := \phi_1 - \sqrt{-1}\phi_2, \qquad g_1 := \frac{\phi_3 + \sqrt{-1}\phi_4}{\phi_1 - \sqrt{-1}\phi_2}, \qquad g_2 := \frac{-\phi_3 + \sqrt{-1}\phi_4}{\phi_1 - \sqrt{-1}\phi_2}$$

とすると，ω は Σ 上の正則 1 次微分形式，g_1，g_2 はともに Σ 上の有理型関数となる．さらに，$G = (g_1, g_2)\colon \Sigma \to \overline{\mathbf{C}} \times \overline{\mathbf{C}}$ は先に述べた曲面 $X(\Sigma)$ の Gauss 写像と一致する．また各 ϕ_i を

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 + g_1g_2)\omega,\ \phi_2 = \frac{\sqrt{-1}}{2}(1 - g_1g_2)\omega,\ \phi_3 = \frac{1}{2}(g_1 - g_2)\omega,\ \phi_4 = -\frac{\sqrt{-1}}{2}(g_1 + g_2)\omega \tag{3.1}$$

とおくと，

$$X(z) = \mathrm{Re}\int_{z_0}^{z} 2(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) \tag{3.2}$$

となる．これを $\mathbf{R}^4$ 内の極小曲面に対する Enneper-Weierstrass の表現公式という．逆に，開 Riemann 面 Σ 上の正則 1 次微分形式 ω と 2 つの有理型関数 g_1 と g_2 に対して，各 ϕ_i を (3.1) で定める．このとき定め方から，条件 (C) は自動的に成り立ち，条件 (R) は「ω の k 位の零点でのみ，g_1，g_2 はそれぞれ k 位の極をもつ」と翻訳できる．実際，$X(\Sigma)$ の $\mathbf{R}^4$ からの誘導計量 ds^2 は

$$ds^2 = (1 + |g_1|^2)(1 + |g_2|^2)|\omega|^2 \tag{3.3}$$

と表せる．またこの計量に関する Gauss 曲率 K_{ds^2} は

$$K_{ds^2} = -\frac{2}{|\hat{\omega}_z|^2(1 + |g_1|^2)(1 + |g_2|^2)}\left(\frac{|g_1'|^2}{(1 + |g_1|^2)^2} + \frac{|g_2'|^2}{(1 + |g_2|^2)^2}\right)$$

となる．

$\mathbf{R}^4$ 内の完備極小曲面の Gauss 写像の除外値数の上限について，藤本坦孝氏により次の結果が得られている．

定理 3.1. [8, Theorem II] $X\colon\Sigma\to\mathbf{R}^4$ を完備極小曲面とし，$G=(g_1,g_2)\colon\Sigma\to\overline{\mathbf{C}}\times\overline{\mathbf{C}}$ をその Gauss 写像とする．このとき，次のことが成り立つ：

(1) g_1，g_2 がともに非定値写像で，g_1 の除外値数を q_1，g_2 の除外値数を q_2 とすると，$q_1\leq 2$ か $q_2\leq 2$，または次の式のいずれかが成り立つ：

$$\frac{1}{q_1-2}+\frac{1}{q_2-2}\geq 1. \tag{3.4}$$

(2) g_1，g_2 のいずれかが定値写像のとき（説明を簡単にするため，ここでは g_1 を定値写像とする），g_2 の除外値数は高々3である．

この結果は最良である．実際，この結果の最良性を示す例が [25, Examples 4.4, 4.5] で示されている．

我々はこの結果の幾何学的解釈を与えるため，計量 (3.3) を一般化した完備等角計量で考察を行い，次の結果を得た．

定理 3.2 ([2]). Σ を等角計量

$$ds^2=\prod_{i=1}^{n}(1+|g_i|^2)^{m_i}|\omega|^2 \tag{3.5}$$

をもつ開 Riemann 面とする．ただし，$G=(g_1,\ldots,g_n)$ は Σ から $(\overline{\mathbf{C}})^n:=\underbrace{\overline{\mathbf{C}}\times\cdots\times\overline{\mathbf{C}}}_{n}$ への正則写像，ω を Σ 上の正則1次微分形式，各 m_i（$i=1,\cdots,n$）を正の整数とする．G の成分関数 $g_{i_1},\ldots,g_{i_k}$ $(1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n)$ が非定数で，その他が定数であるとする．もし計量 ds^2 が完備で，各 g_{i_l} $(l=1,\cdots,k)$ が相異なる $q_{i_l}>2$ 個以上の除外値をもつとすると，

$$\sum_{l=1}^{k}\frac{m_{i_l}}{q_{i_l}-2}\geq 1 \tag{3.6}$$

が成り立つ．

定理3.2は，$m_1,\ldots,m_n$ の少なくとも1つが正で，他が0の場合でも成り立つ．例えば，$g:=g_{i_1}$ は非定数関数で他が定数関数であったとする．もし $m:=m_{i_1}$ が正の整数で，他がすべて0であったとすると，式 (3.6) は

$$\frac{m}{q-2}\geq 1 \iff q\leq m+2$$

となる．ただし，$q:=q_{i_1}$ とする．これは前章の定理2.3の結果に対応する．また，すべての m_i が0のときは，$ds^2=|\omega|^2$ となり Σ 上の完備平坦計量となるので，G の各成分関数は $\mathbf{C}$ 上の有理型関数としてもよい．

式 (3.6) は最良である．実際，命題2.3と同様の議論で，次の例が存在することが示せる．

命題 3.3 ([2]). 開 Riemann 面 Σ として，複素平面 $\mathbf{C}$ から $p-1$ 個の相異なる点 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1}(\in\mathbf{C})$ を除いたもの，または，その普遍被覆面を考える．Σ 上の正則1次微分形式 ω をそれぞれ

$$\omega=\frac{dz}{\prod_{i=1}^{p-1}(z-\alpha_i)}$$

とし，Σ 上の正則写像 $G=(g_1,\ldots,g_n)$ を

$$g_{i_1}=\cdots=g_{i_k}=z \quad (1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n)$$

とし，他の成分関数は定数であるとする．このとき，すべての g_{i_l} $(l=1,\cdots,k)$ は p 個の相異なる除外値 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},\infty$ をもち，計量 (3.5) が完備であるためには，

$$p\leq 2+\sum_{l=1}^{k} m_{i_l}$$

が必要十分である．特に，式 (3.6) の等号をみたす例が存在する．

定理 3.2 の証明は以下の通りである．今，g_{i_l} $(l=1,\cdots,k)$ が相異なる q_{i_l} 個の除外値 $\alpha_1^l,\ldots,\alpha_{q_{i_l}}^l$ をもっていたとする．必要ならば各 g_{i_l} に適当な Möbius 変換を施すことで，$\alpha_{q_{i_1}}^1=\cdots=\alpha_{q_{i_k}}^k=\infty$ と仮定する．背理法で示すので，$q_{i_l}>2$ $(l=1,\cdots,k)$ で，かつ

$$\sum_{l=1}^{k}\frac{m_{i_l}}{q_{i_l}-2}<1 \tag{3.7}$$

が成り立つとする．式 (3.7) から，各 i_l $(l=1,\cdots,k)$ に対して，$q_{i_l}>m_{i_l}+2$ が成り立っていることがわかる．今，正の実数 η として，各 i_l $(l=1,\cdots,k)$ に対して，

$$0<\eta<\frac{q_{i_l}-2-m_{i_l}}{q_{i_l}} \tag{3.8}$$

が成り立つものを取り，

$$\lambda_{i_l}:=\frac{m_{i_l}}{q_{i_l}-2-q_{i_l}\eta} \quad (l=1,\cdots,k)$$

とする．このとき，十分小さい正の実数 η に対して，

$$\Lambda:=\sum_{l=1}^{k}\lambda_{i_l}=\sum_{l=1}^{k}\frac{m_{i_l}}{q_{i_l}-2-q_{i_l}\eta}<1 \tag{3.9}$$

となり，さらに

$$\frac{\lambda_{i_l}}{1-\Lambda}>1 \quad (l=1,\cdots,k) \tag{3.10}$$

が成り立つ．そこで，$\Sigma':=\{p\in\Sigma\,;\,g'_{i_l}(p)\neq 0\,(l=1,\cdots,k)\}$（ただし，$g'_{i_l}=dg_{i_l}/dz$）上の計量として

$$d\sigma^2=|\hat{\omega}_z|^{\frac{2}{1-\Lambda}}\prod_{l=1}^{k}\left(\frac{1}{|g'_{i_l}|}\prod_{j=1}^{q_{i_l}-1}\left(\frac{|g_{i_l}-\alpha_j^l|}{\sqrt{1+|\alpha_j^l|^2}}\right)^{1-\eta}\right)^{\frac{2\lambda_{i_l}}{1-\Lambda}}|dz|^2 \tag{3.11}$$

を考える．Σ' の任意の点 p を取る．この計量 $d\sigma^2$ は平坦なので，補題 2.6 より，ある開円板 $\Delta_R=\{z\in\mathbf{C}\,;\,|z|<R\}$ $(0<R\leq+\infty)$ から p の開近傍への微分同相写像 Φ が存在し，$\Phi(0)=p$ で，$\Phi^*(d\sigma^2)$ が Δ_R 上の Euclid 計量 ds_E^2 と等長的となり，$|a_0|=1$ をみたす任意の点 a_0 に対して $L_{a_0}=\{w:=a_0s\,;\,0<s<R\}$ の Φ による像 Γ_{a_0} が Σ' 上の発

散路となる．記号を簡潔にするため，本章でも Δ_R 上の $g_{i_l}\circ\Phi$ を g_{i_l} と表すこととする．補題2.5より，各 i_l に対して，

$$R \leq C'_{i_l}\frac{1+|g_{i_l}(0)|^2}{|g'_{i_l}(0)|}\prod_{j=1}^{q_{i_l}}|g_{i_l}(0),\alpha_j^l|^{1-\eta} < +\infty \tag{3.12}$$

が成り立つので，R は有限である．よって，計量 $d\sigma^2$ に関する Γ_{a_0} の長さを $L_{d\sigma}(\Gamma_{a_0})$ とすると

$$L_{d\sigma}(\Gamma_{a_0}) = \int_{\Gamma_{a_0}} d\sigma = R < +\infty$$

が成り立つ．このとき，定理2.2の証明と同様に，Γ_{a_0} は Σ 上の発散路となる．$\Phi^*(d\sigma^2) = |dz|^2$ となるので，式(3.11)より

$$|\hat{\omega}_z| = \prod_{l=1}^{k}\left(|g'_{i_l}|\prod_{j=1}^{q_{i_l}-1}\left(\frac{\sqrt{1+|\alpha_j^l|^2}}{|g_{i_l}-\alpha_j^l|}\right)^{1-\eta}\right)^{\lambda_{i_l}}$$

となる．よって，補題2.5より

$$\begin{aligned}
\Phi^* ds &= |\hat{\omega}_z|\prod_{i=1}^{n}(1+|g_i|^2)^{m_i/2}|dz| \\
&\leq C_1\left(\prod_{l=1}^{k}|g'_{i_l}|(1+|g_{i_l}|^2)^{m_{i_l}/2\lambda_{i_l}}\prod_{j=1}^{q_{i_l}-1}\left(\frac{\sqrt{1+|\alpha_j^l|^2}}{|g_{i_l}-\alpha_j^l|}\right)^{1-\eta}\right)^{\lambda_{i_l}}|dz| \\
&= C_1\prod_{l=1}^{k}\left(\frac{|g'_{i_l}|}{(1+|g_{i_l}|^2)\prod_{j=1}^{q_{i_l}}|g_{i_l},\alpha_j^l|^{1-\eta}}\right)^{\lambda_{i_l}}|dz| \leq C_2\left(\frac{R}{R^2-|z|^2}\right)^{\Lambda}|dz|
\end{aligned}$$

となる．よって，$d(p)$ を $p\in\Sigma$ から Σ の境界までの計量 ds^2 に関する測地的距離とすると，$0<\Lambda<1$ より

$$d(p) \leq \int_{\Gamma_{a_0}} ds = \int_{L_{a_0}}\Phi^* ds \leq C_2\int_{L_{a_0}}\left(\frac{R}{R^2-|z|^2}\right)^{\Lambda}|dz| \leq C_2\frac{R^{1-\Lambda}}{1-\Lambda} < +\infty$$

となるが，これは計量 ds^2 の完備性に矛盾する．

4. 今後の展望

本稿で取り上げた，完備極小曲面のGauss写像の値分布論的性質の幾何学的解釈に関する今後の課題として，一般次元Euclid空間 $\mathbf{R}^m$ 内の完備極小曲面のGauss写像（この場合は，$\mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{C})$ への正則写像として考える）の除外超平面の上限の幾何学的解釈がある．除外超平面の上限は，藤本氏[9]やRu氏[28]によりわかっているが，本稿のような視点での研究はまだ存在しない．また，$\mathbf{R}^m$ 内の完備極小曲面のGauss写像の研究は近年，分岐定理（[7]，[13]，[29]を参照）や正則写像の正規族に関するZalcmanの原理との対応（[22], [26], [27]を参照）から盛んに研究されているので，その結果との対応を比較しながら研究を進めていきたい．$\mathbf{R}^3$ 内の完備極小曲面のGauss写像の除外値問題については，Ossermanにより提出された有限全曲率完備極小曲面のGauss写像

の除外値数の上限の決定問題（[19]，[20]，[21]）は未だに解決されていない（様々な方面から「解けた」という宣言はあるが…）．また，向き付け不可能な有限全曲率完備極小曲面の Gauss 写像の除外値数の上限の決定問題（[23], [24] 参照）といった問題も残されている．さらに，これまでに知られていない値分布論的性質がまだ存在する可能性もある．本研究によりこれらの問題について見通しがよくなったと考えられるので，今後も根気強く取り組んでいきたい．

参考文献

[1] L. V. Ahlfors, Zur Theorie der Überlagerungsflächen, Acta Math., **65** (1935) , 157–194, and Collected Papers Vol. I, pp. 163–173.

[2] R. Aiyama, K. Akutagawa, S. Imagawa and Y. Kawakami, Remarks on the Gauss images of complete minimal surfaces in Euclidean four-space, submitted, arXiv: 1606.02376.

[3] A. Alarcón, F. Forstnerič and F. J. Lopez, New complex analytic methods in the study of non-orientable minimal surfaces in $\mathbb{R}^n$, preprint, arXiv:1603.01691.

[4] A. Alarcón, F. Forstnerič and F. J. Lopez, Every meromorphic function is the Gauss map of a conformal minimal surface, preprint, arXiv:1604.00514.

[5] S. S. Chern, Complex analytic mappings of Riemann surfaces. I, Amer. J. Math., **82** (1960), 323–337.

[6] C. C. Chen, On the image of generalized Gauss map of a complete minimal surfaces in $\mathbf{R}^4$, Pacific J. Math., **102** (1982), 9–14.

[7] G. Dethloff, P. H. Ha and P. D. Thoan, Ramification of the Gauss map of complete minimal surfaces in $\mathbb{R}^m$ on annular ends, Colloq. Math., **142** (2016), 149–167.

[8] H. Fujimoto, On the number of exceptional values of the Gauss map of minimal surfaces, J. Math. Soc. Japan, **40** (1988), 237–249.

[9] H. Fujimoto, Modified defect relations for the Gauss map of minimal surfaces, Ⅱ, J. Differential Geometry, **31** (1990), 365–385.

[10] H. Fujimoto, Value distribution theory of the Gauss map of minimal surfaces in $\mathbf{R}^m$, Aspects of Mathematics, E21. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1993.

[11] H. Fujimoto, Nevanlinna theory and minimal surfaces, Geometry V, 95–151, 267–272, Encyclopaedia Math. Sci., **90**, Springer, Berlin, 1997.

[12] 藤本 坦孝，複素解析，岩波書店，2006 年．

[13] P. H. Ha, An estimate for the Gaussian curvature of minimal surfaces in $\mathbb{R}^m$ whose Gauss map is ramified over a set of hyperplanes, Differential Geom. Appl., **32** (2014), 130–138.

[14] D. A. Hoffman and R. Osserman, The geometry of the generalized Gauss map, Mem. Amer. Math. Soc., **28** (1980), no. 236.

[15] H. B. Lawson Jr., Lectures on minimal submanifolds, Vol. I, Mathematics Lecture Series 9, Publish or Perish, Inc., 1980.

[16] Y. Kawakami, On the maximal number of exceptional values of Gauss maps for various classes of surfaces, Math. Z., **274** (2013), 1249–1260.

[17] Y. Kawakami, Function-theoretic properties for the Gauss maps of various classes of surfaces, Canad. J. Math., **67** (2015), 1411–1434.

[18] 川上 裕，曲面の Gauss 写像の値分布,『数学』掲載予定．

[19] Y. Kawakami, R. Kobayashi and R. Miyaoka, The Gauss map of pseudo-algebraic minimal surfaces, Forum Math., **20** (2008), 1055–1069.

[20] R. Osserman, Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n, Ann. of Math., **80** (1964), 340–364.

[21] R. Osserman, A survey of minimal surfaces, 2nd edition, Dover Publication Inc., New York, 1986.

[22] R. Osserman and M. Ru, An estimate for the Gauss curvature on minimal surfaces in $\mathbb{R}^m$ whose Gauss map omits a set of hyperplanes, J. Differ. Geom., **46** (1997), 578–593.

[23] F. J. López and F. Martín, A note on the Gauss map of complete nonorientable minimal surfaces, Pacific J. Math., **194** (2000), 129–136.

[24] F. Martín, Complete minimal surafecs in $\mathbf{R}^3$, Global theory of minimal surfaces, 371–380, Clay Math. Proc. **2**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[25] X. Mo and R. Osserman, On the Gauss map and total curvature of complete minimal surfaces and an extension of Fujimoto's theorem, J. Differential Geom., **31** (1990), 343–355.

[26] X. Liu and X. C. Pang, Normal family theory and Gauss curvature estimate of minimal surfaces in $\mathbb{R}^m$ J. Differential Geom., **103** (2016), 297–318.

[27] A. Ros, The Gauss map of minimal surfaces, in: Differential Geometry, Valencia, 2001, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002, pp. 235–252.

[28] M. Ru, On the Gauss map of minimal surfaces immersed in $\mathbf{R}^n$, J. Differential Geom., **34** (1991), 411–423.

[29] M. Ru, Gauss map of minimal surfaces with ramification, Trans. Amer. Math. Soc., **339** (1993) 751–764.

[30] M. Umehara and K. Yamada, Applications of a completeness lemma in minimal surface theory to various classes of surfaces, Bull. London Math. Soc. **43** (2011), 191–199, Corrigendum, Bull. London Math. Soc. **44** (2012), 617–618.

開リーマン面の閉リーマン面への等角的埋め込み

周期行列の値域

柴　雅和　(広島大学)*1
山口　博史　(滋賀大学)*2

1. Closings

1つのリーマン面Rを部分領域として含むもう1つのリーマン面Sをもとのリーマン面Rの接続と呼ぶのはすでに古典的な語法である（Bochner, 1927）が，現代的な表現としては，RからSへの単射正則写像を併せ用いるのが適切である．Rの種数gが有限であって，Sが同じ種数gの閉リーマン面である場合が特に興味深い；単に比較的簡単な場合であるという理由からだけではなく，リーマンに始まる平面の等角写像論からみても非常に自然な問題であるとの認識に因る．古典的等角写像論 あるいは単葉関数論の自然な延長線上に新しい結果を加えるだけでなく，同時に（非単葉型の）リーマン面に固有の新しい問題を提供するところが興味深いのである．

以下では$g = 0$であっても定義に窮することはないが，本質的ではないので最初から$g > 0$と仮定する．有限種数$g\,(\geq 1)$の開リーマン面R とその "理想境界を法とする" 標準ホモロジー基底$\chi_R := \{A_j^R, B_j^R\}_{j=1}^g$ が与えられているとき，対(R, χ_R)のclosingとは，Rと同じ種数gの閉リーマン面Sとその（通常の意味での）標準ホモロジー基底$\chi_S := \{A_j^S, B_j^S\}_{j=1}^g$と，さらに$R$から$S$の中への等角写像$\iota$ からなるtriplet (S, χ^S, ι)であって，各$j = 1, 2, \ldots, g$について条件

$$\iota(A_j^R) \sim A_j^S, \quad \iota(B_j^R) \sim B_j^S \qquad (\sim:\ \text{be homologous to})$$

を満たすものをいう．ただし，2つのtriplets $(S_k, \chi_{S_k}, \iota_k)$, $k = 1, 2$ について，S_1からS_2への等角写像hがあって$h \circ \iota_1 = \iota_2$が成り立つときには，これらを同一視する．

(R, χ_R)のclosingsの全体を$C(R, \chi_R)$と記す．この集合を調べることが私たちの主たる関心事である．

2. これまでの結果

さまざまな理由により，特に種数が1の開リーマン面— 簡単にopen torusと呼ぶのが便利である — について聊か詳しい結果が得られている．それらの一部は$g = 0$の場合における古典的等角写像論の成果に対応するものであるが，他方では，一部修正を加えさえすれば$g > 1$の場合にもそのまま通用した．ここではそれらのうち，次節で必要な部分についてのみ説明する．

Open torus (R, χ_R)のclosing (S, χ_S, ι)は，ホモロジー基底の付与された普通のtorusとその中への等角写像の対を先に述べた条件に従って分類したものである．(S, χ_S)の正規正則微分ψを用いて得られる複素数

$$\tau = \tau(S, \chi_S) := \int_{B^S} \psi$$

この研究は科研費 (課題番号: 15K04930) の助成を受けたものである．
2010 Mathematics Subject Classification: 30Fxx, 30Cxx, 32G15
キーワード：リーマン面の接続, リーマン周期行列
*1 e-mail: masaka_zu_hause@muc.biglobe.ne.jp
*2 e-mail: h.yamaguchi@s2.dion.ne.jp

により写像

$$C(R,\chi_R) \ni (S,\chi_S,\iota) \mapsto \tau = \tau(S,\chi_S) \in \mathbb{C}$$

が定まる．像集合

$$\mathfrak{M}(R,\chi_R) := \{\tau \in \mathbb{C} \mid \tau = \tau(S,\chi_S,\iota) \text{ for some } (S,\chi_S,\iota) \in C(R,\chi_R)\}$$

を open torus (R,χ_R) の moduli set と呼ぶ.

定理 0． $\mathfrak{M}(R,\chi_R)$ は複素上半平面 $\mathbb{H}$ 内の閉円板である.

3. 今回の報告：$g>1$ の場合

種数が 2 以上の開リーマン面 (R,χ_R) の closing (S,χ_S,ι) に対し，(S,χ_S) の正規正則微分を $\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_g$ とする：$\int_{A_k^S}\psi_j = \delta_{jk}\,(j,k=1,2,\ldots,g)$. このとき g^2 個の複素数

$$\tau_{jk} := \int_{B_k^S}\psi_j \qquad j,k=1,2,\ldots,g$$

によって作られる行列（リーマンの周期行列）

$$T = T(\ S,\chi_S,\iota) := \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \cdots\cdots & \tau_{1g} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \cdots\cdots & \tau_{2g} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tau_{g1} & \tau_{g2} & \cdots\cdots & \tau_{gg} \end{pmatrix}$$

に関する既知の結果 "各対角要素 τ_{jj} はある閉円板に<u>含まれる</u>" を，R がコンパクト縁付きリーマン面の内部であるときに，詳しくして

定理 1． 各 $j\,(1\le j\le g)$ について

$$\mathfrak{M}_j := \{\tau \in \mathbb{C} \mid \tau = \tau_{jj}(S,\chi_S,\iota) \text{ for some } (S,\chi_S,\iota)\}$$

は上半平面 $\mathbb{H}$ 内の閉円板<u>である</u>.

証明は構成的である．(R,χ_R) 上の任意の流体力学的正規正則微分は (R,χ_R) のある closing を生み出し，これらはすべて $\mathfrak{M}_{jj}(R,\chi_R)$ の周上の点に対応する．円板 $\mathfrak{M}_{jj}(R,\chi_R)$ 内の任意の点 τ_{jj} を与えるとき，R 上の 1 対の流体力学的正規正則微分を適切に選べば，それらの凸結合として得られる正則微分 $\psi = d\Psi$ は周期 τ_{jj} をもつ．これら 1 対の流体力学的正規正則微分が R の各 contour C 上でもつ零点の数は同じであることも知っている．これを利用して Ψ による C の像曲線 Γ を位相的に追跡し，その微分可能性や局所凸性などを知ることができる．最後に．Γ を境界とする平面上に分岐した領域を作り，これを引き戻して R に付加すれば求める closing（の 1 つ）が得られる.

非対角要素をも含めて扱うためには，$\boldsymbol{a} := (a_1,a_2,\ldots,a_g) \in \mathbb{R}^g \setminus \mathbf{0}$ に対して，closing (S,χ_S,ι) の $\boldsymbol{a}$-modulus

$$\tau_{\boldsymbol{a}} := \tau_{\boldsymbol{a}}(S,\chi_S,\iota) = \boldsymbol{a}\,T\,\boldsymbol{a}' \qquad (\boldsymbol{a}':\ \text{行列}\,\boldsymbol{a}\,\text{の転置})$$

を考える．このとき，$\mathbb{H}$ 内に現れる集合（ (R,χ_R) の $\boldsymbol{a}$-moduli set ）

$$\mathfrak{M}_{\boldsymbol{a}}(R,\chi_R) := \{\tau \in \mathbb{C} \mid \tau = \tau_{\boldsymbol{a}}(S,\chi_S,\iota) \text{ for some } (S,\chi_S,\iota) \in C(R,\chi_R)\}$$

について

定理 2． 任意の実 g ベクトル $\boldsymbol{a} \ne \mathbf{0}$ に対して $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{a}}(R,\chi_R)$ は閉円板である.

有限種数の開リーマン面が誘導するモジュライ円板と擬凸領域

柴　雅和　(広島大学)*1
山口　博史　(滋賀大学)*2
濱野　佐知子　(大阪市立大学)*3

1. 序: リーマン面の接続

有限種数 g (≥ 1) の開リーマン面 R を与え, R の境界を法とする標準ホモロジー基底 $\chi := \{A_k, B_k\}_{k=1}^g$ を 1 つ固定する. 閉リーマン面 $\widetilde{R}$ とその標準ホモロジー基底 $\widetilde{\chi} := \{\widetilde{A}_k, \widetilde{B}_k\}_{k=1}^g$ があり, 2つの対 (R,χ), $(\widetilde{R},\widetilde{\chi})$ の間に等角的埋め込み

$$\iota : R \hookrightarrow \widetilde{R}, \quad \iota(A_k) \sim \widetilde{A}_k,\ \iota(B_k) \sim \widetilde{B}_k\ (1 \leq k \leq g)$$

があるとき, $(\widetilde{R},\widetilde{\chi},\iota)$ に同値関係を入れて得られる各同値類を (R,χ) の **closing** と呼ぶ. $(\widetilde{R},\widetilde{\chi})$ の正則な正規微分を $\widetilde{\omega}_j$ $(1 \leq j \leq g)$ とする. すなわち,

$$\int_{\widetilde{A}_k} \widetilde{\omega}_j = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & (j = k), \\ 0 & (j \neq k), \end{cases} \qquad (1 \leq j, k \leq g).$$

このとき, g^2 個の複素数

$$\widetilde{\tau}_{jk} := \int_{\widetilde{B}_k} \widetilde{\omega}_j \qquad (1 \leq j, k \leq g)$$

によって作られる行列, 所謂リーマンの周期行列が定まる:

$$(\widetilde{R},\widetilde{\chi},\iota) \quad \mapsto \quad \widetilde{T} := (\widetilde{\tau}_{jk})_{1 \leq j,k \leq g}.$$

任意に固定した実 g ベクトル $\mathbf{a} := (a_1, \ldots, a_g) \neq \mathbf{0}$ に対し, 複素数

$$\tau_{\mathbf{a}} = \tau_{\mathbf{a}}(\widetilde{R},\widetilde{\chi},\iota) := \mathbf{a}\widetilde{T}\,{}^t\mathbf{a} \qquad ({}^t\mathbf{a}\ \text{は}\ \mathbf{a}\ \text{の転置})$$

を (R,χ) の closing $(\widetilde{R},\widetilde{\chi},\iota)$ の **a モジュラス** と呼び, (R,χ) の closings の全体を考え, その **a** モジュラスの全体を $\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}(R,\chi)$ とおく ([1]). このとき次の定理が成り立つ:

定理 1 ([2])**.** ある複素数 $\tau^* = \tau^*_{\mathbf{a}}$ $(\operatorname{Im}\tau^* > 0)$, および, ある非負数 $\rho = \rho_{\mathbf{a}}$ があって,

$$\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}(R,\chi) = \{\tau \in \mathbb{H} \mid |\tau - \tau^*| \leq \rho\}.$$

すなわち, $\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}(R,\chi)$ は上半平面 $\mathbb{H}$ の閉円板または一点である.

この考察において, closings の中で特に際立った性質をもつ流体力学的接続が非常に重要な働きをしている.

本研究は科研費 基盤研究 (C)15K04914 および 基盤研究 (C)15K04930 の助成を受けたものです.

*1 e-mail: masaka_zu_hause@muc.biglobe.ne.jp
*2 e-mail: h.yamaguchi@s2.dion.ne.jp
*3 〒 558-8585　大阪市住吉区杉本 3-3-138 大阪市立大学大学院理学研究科
e-mail: hamano@sci.osaka-cu.ac.jp

2. 今回の結果: $\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}(R(t),\chi(t))$ の複素多変数的性質

$(\widetilde{\mathcal{R}},\pi,\Delta)$ は次のような正則族とする: $\widetilde{\mathcal{R}}$ は2次元複素多様体, $\Delta=\{t\in\mathbb{C}\mid |t|<r\}$, $\pi:\widetilde{\mathcal{R}}\to\Delta$ は正則射影である. 各ファイバー $\widetilde{R}(t)=\pi^{-1}(t)$, $t\in\Delta$ は既約かつ $\widetilde{\mathcal{R}}$ で非特異と仮定すると, $\widetilde{R}(t)$ は開リーマン面である. $(\mathcal{R},\pi|_{\mathcal{R}},\Delta)$ を $(\widetilde{\mathcal{R}},\pi,\Delta)$ の部分正則族であり, $\mathcal{R}\subset\widetilde{\mathcal{R}}$, $\partial\mathcal{R}$ は $\widetilde{\mathcal{R}}$ で C^ω 級滑らかであり, $R(t)=(\pi|_{\mathcal{R}})^{-1}(t)$ は $\widetilde{R}(t)$ で C^ω 級滑らかな境界 $\partial R(t)=\sum_{j=1}^{\nu}C_j(t)$ をもつ有限種数 $g\,(\geq 1)$ の開リーマン面とする. 各 $t\in\Delta$ に対し, $R(t)$ の境界を法とする標準ホモロジー基底 $\chi(t)=\{A_k(t),B_k(t)\}_{k=1}^g$ は $\mathcal{R}$ で連続に動くと仮定する.

任意の実 g ベクトル $\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_g)\neq\mathbf{0}$ に対し, $(R(t),\chi(t))$, $t\in\Delta$ の closings 全体が誘導する $\mathbf{a}$ モジュラス全体

$$\mathfrak{M}(t):=\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}(R(t),\chi(t))$$

は, 定理1より, 上半平面 $\mathbb{H}$ の閉円板の族であり, 次が成り立つ:

定理 2. $(\mathcal{R},\pi,\Delta)$ は2次元擬凸領域と仮定する. このとき

1. $\mathfrak{M}(t)$ のユークリッド直径 $2\rho(t)>0$ は Δ 上の劣調和関数である.
2. もし $\mathfrak{M}(t)$ のユークリッド直径 $2\rho(t)$ が Δ 上の調和関数ならば, $\rho(t)$ は t によらず一定で, $\mathfrak{M}(t)$ は $t\in\Delta$ と共に $\mathbb{H}$ 内を正則に動く.

証明の鍵は, $\mathfrak{M}(t)$ の最上点 $\tau^1_{\mathbf{a}}(t)$ および 最下点 $\tau^0_{\mathbf{a}}(t)$ が各 $R(t)$ の流体力学的微分 (L_s-半完全微分) $\phi^s_{\mathbf{a}}(t,z)$ $(s=1,0)$ で表現できることである. すなわち, 各 $R(t)$, $t\in\Delta$ 上の L_s-半完全微分 $\phi^s_{\mathbf{a}}(t,z)$ $(s=1,0)$ で

$$\int_{A_k(t)}\phi^s_{\mathbf{a}}(t,z)=a_k\qquad(1\leq k\leq g)$$

を満たすものが一意に存在する. これは $(R(t),\chi(t))$ の1つの closing を定め, その $\mathbf{a}$ モジュラス $\tau^s_{\mathbf{a}}(t)$ $(s=1,0)$ を誘導する. このとき, 次の2階変分公式が成立する (これは種数 $g=1$ の場合の変分公式 ([3]) の拡張である).

補題 3. $\overline{R(t)}$ の局所座標を $\phi^s_{\mathbf{a}}(t,z)=f^s_{\mathbf{a}}(t,z)dz$ $(s=1,0)$ とすると,

$$\frac{\partial^2\operatorname{Im}\tau^1_{\mathbf{a}}(t)}{\partial t\partial\bar{t}}=\frac{1}{2}\int_{\partial R(t)}k_2(t,z)|f^1_{\mathbf{a}}(t,z)|^2|dz|+\left\|\frac{\partial\phi^1_{\mathbf{a}}(t,z)}{\partial\bar{t}}\right\|^2_{R(t)},$$

$$\frac{\partial^2\operatorname{Im}\tau^0_{\mathbf{a}}(t)}{\partial t\partial\bar{t}}=-\left(\frac{1}{2}\int_{\partial R(t)}k_2(t,z)|f^0_{\mathbf{a}}(t,z)|^2|dz|+\left\|\frac{\partial\phi^0_{\mathbf{a}}(t,z)}{\partial\bar{t}}\right\|^2_{R(t)}\right).$$

ここで, $k_2(t,z)$ は $\widetilde{\mathcal{R}}$ 内の $\partial\mathcal{R}$ の C^2 級定義関数 $\varphi(t,z)$ に対し

$$k_2(t,z)=\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial\bar{t}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|^2-2\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{t}\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\right\}+\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\bar{z}}\right)\left|\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|^{-3}\quad \textit{on}\ \partial\mathcal{R}.$$

参考文献

[1] 柴雅和-山口博史, 開リーマン面の閉リーマン面への等角的埋め込み 周期行列の極値的性質, 2014年度秋季総合分科会.

[2] 柴雅和-山口博史, 開リーマン面の閉リーマン面への等角的埋め込み 周期行列の値域, 2016年度秋季総合分科会.

[3] S. Hamano, M. Shiba, and H. Yamaguchi, *Hyperbolic span and pseudoconvexity* (to appear in Kyoto Journal of Mathematics).

Jacobi inversion formulae for a trigonal curve $y^3 = x^2 k(x)$

松谷茂樹 (佐世保工業高等専門学校)[*1]
米田二良 (神奈川工科大学)[*2]
Emma Previato (Boston 大学)[*3]

1. 特異曲線と正規化

$\mathbb{C}$ 上定義された代数曲線のアーベル関数を物理現象，幾何学現象に適用することを考える．例えば，このとき非特異な平面曲線 $y^p = x(x-b_0)(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_\ell)$ においてもパラメータの取り方により $b_0 \to 0$ となる場合があり，曲線は特異となる．本報告では，$p=3$ として，その際のヤコビの逆公式について報告する [4, 1, 2].

以下では最も簡単で非自明な Weierstrass normal form で $y^3 = f(x)$, $f(x) = x^2(x-b_1)(x-b_2)$ となる曲線を考える．これらは $(3,p,q)$ の場合に一般化できており，報告では一般の場合にも触れる．

ここで対応する可換環 $R = \mathbb{C}[x,y]/(y^3 - f(x))$ を正規化することにより，$\hat{R} = \mathbb{C}[x,y,w]/(y^2 - xw, wy - x(x-b_1)(x-b_2), w^2 - (x-b_1)(x-b_2)y)$ が得られる．つまり

$$X = \{(x,y,w) \mid y^2 = xw, wy = x(x-b_1)(x-b_2), w^2 = (x-b_1)(x-b_2)y\} \cup \{\infty\}$$

を満たす空間曲線を考察することとなる．各分岐点を B_0, B_1, B_2 とする．

曲線の無限遠点での Weierstrass 列は次のような ϕ_i によって得られ，$\mathbb{C}$ ベクトル空間としての分解 $\hat{R} = \oplus_{i=0}\mathbb{C}\phi_i$ を与える．表の数字は無限遠点での局所パラメータによる

wt	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
ϕ_i	1	-	-	x	y	w	x^2	xy	xw	yw	x^2y	x^2w	x^4	x^3y	x^3w
$\hat{\phi}_i$	-	-	-	-	y	w	-	xy	xw	yw	x^2y	x^2w	y^3	x^3y	x^3w

極の位数による重み wt を示す．

X の種数は $g=2$ であるが $2g-1=3$ が gap に相当しないことで，本曲線は非対称な数値半群を持つ曲線であることが判る．非対称な数値半群を持つ代数曲線の Riemann 定数は半周期とならないため，ヤコビの逆公式を複雑にすることがこと知られている．そこで，それらをシフトすることで明示的なヤコビの逆公式を得ることを目指す．

2. Shift された Riemann 定数と shift された Abel 写像

この系を特徴付けるものとして $\mathbb{C}$ ベクトル空間として $\hat{R}^B := \{h \in R \mid \exists\ell, \text{ such that } (h) - (B_0+B_1+B_2) + \ell\infty > 0\}$ を導入する．これは $\hat{R}^B = \oplus_{i=0}\mathbb{C}\hat{\phi}_i$ とする分解を持つ．$\hat{\phi}_i$

This work was supported by KAKENHI (15K04830，16K05187).
2000 Mathematics Subject Classification: 14H55, 14H50, 14K25, 14H40
キーワード：Jacobi inversion formula, space curve, Weierstrass normal form
[*1] e-mail: smatsu@sasebo.ac.jp
web: http://www.sasebo.ac.jp/~smatsu/
[*2] e-mail: komeda@gen.kanagawa-it.ac.jp
[*3] e-mail: ep@bu.edu

は表に提示した．このとき，正則一形式は$\nu_i = \hat{\phi}_{i-1}dx/(3yw)$ $(i=1,2)$とでき，第二種微分も$\hat{R}^B$で定まる．

また，Abel写像を$v(P)=\int_\infty^P \nu$とし，$v(P_1,\dots,P_k)=\sum_{i=1}^k v(P_i)$とする．$X$のホモロジー基底$\alpha_i,\beta_i$による周期積分（第一種完全積分）を$\omega',\omega''$とし，それによる格子を$\Gamma$とする．これより，ヤコビ多様体$\kappa:\mathbb{C}^g \to \mathcal{J} := \mathbb{C}^g/\Gamma$を得る．また第二種完全積分を$\eta',\eta''$とする．

Theorem 2.1 [2] Riemann定数ξに対して，shiftされたRiemann定数ξ_s及びshiftされたAbel写像v_sを，$P_1,\dots,P_k \in X$に対して

$$\xi_s = \xi - {\omega'}^{-1}v(B_0), \quad v_s(P_1,\dots,P_k) = v(P_1,\dots,P_k)+v(B_0)$$

と定義すると，

$$2\omega'\xi_s \in \Gamma, \quad \Theta = {\omega'}^{-1}v_s(S^{g-1}X)+\xi_s$$

ここで，Θはθ因子である．つまり，$\theta({\omega'}^{-1}v_s(P_1,\dots,P_{g-1})+\xi_s)=0$ となる．

このξ_sの対応する半格子点を$\begin{bmatrix}\delta'' \\ \delta'\end{bmatrix} \in (\mathbb{Z}/2)^{2g}$と記すと$\mathbb{C}^g$上の整関数である$\sigma$関数を

$$\sigma(u) = c\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ {}^t u \eta' {\omega'}^{-1}\ u} \sum_{n\in\mathbb{Z}^2} \mathrm{e}^{\left[\pi\sqrt{-1}\left\{\ {}^t(n+\delta''){\omega'}^{-1}\omega''(n+\delta'')+\ {}^t(n+\delta'')({\omega'}^{-1}u+\delta')\right\}\right]}$$

と定義できる．cは適当な非零の定数である．$P_i=(x_i,y_i,w_i)\in X$ $(i=1,\dots,n)$に対して$\hat{\phi}_i \in \hat{R}^B$により，

$$\psi_n(P_1,P_2,\dots,P_n) := \begin{vmatrix} \hat{\phi}_0(P_1) & \hat{\phi}_1(P_1) & \cdots & \hat{\phi}_{n-1}(P_1) \\ \hat{\phi}_0(P_2) & \hat{\phi}_1(P_2) & \cdots & \hat{\phi}_{n-1}(P_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\phi}_0(P_n) & \hat{\phi}_1(P_n) & \cdots & \hat{\phi}_{n-1}(P_n) \end{vmatrix}$$

と，$\mu_n(P;P_1,\dots,P_n)=\psi_{n+1}(P_1,\dots,P_n,P)/\psi_n(P_1,\dots,P_n)$ を導入，定義すると，以下のヤコビの逆公式を得る．(これらの公式は$(3,p,q)$の場合に拡張できる[3]．)

Theorem 2.2 (ヤコビの逆公式) $\wp_{ij}(u) := -\dfrac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j}\log\sigma(u)$に対して，

$$\mu_g(P;P_1,\dots,P_g) = \hat{\phi}_g(P) + \sum_{i=1}^g (-1)^{g-i+1}\wp_{gi}(v_s(P_1,\dots,P_g))\hat{\phi}_{i-1}(P).$$

参考文献

[1] J. Komeda, S. Matsutani and E. Previato, *The sigma function for Weierstrass semigroup* $\langle 3,7,8\rangle$ *and* $\langle 6,13,14,15,16\rangle$, Int. J. Math., **24** (2013) 1350085.

[2] J. Komeda, S. Matsutani and E. Previato, *The Riemann constant for a non-symmetric Weierstrass semigroup*, arXiv1604.02627v1.

[3] J. Komeda, S. Matsutani and E. Previato, *Relating algebraic and Abelian functions of pointed curves*, 準備中

[4] S. Matsutani and J. Komeda, *Sigma functions for a space curve of type (3, 4, 5)*, J. Geom. Symm. Phys., **30** (2013) 75-91.

数論的トロイダル群の二つの例

梅野 高司 (九州産業大学工学部)*

1. トロイダル群

Definition 1.1 トロイダル群 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ が quasi-Abelian variety とは次の条件を満たす Hermitian form H on $\mathbb{C}^n$ が存在することである.

(1) $H\,|\,\mathbb{C}_\Gamma \times \mathbb{C}_\Gamma > 0$ かつ

(2) $E := \mathrm{Im}\,H\,|\,\Gamma\times\Gamma$ は $\mathbb{Z}$-valued skew-symmetric form である.

H を ample Riemann form と呼ぶ.

Theorem 1.2 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ を周期行列を $P = [\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+q}] = [I_n, V]$ とする type q のトロイダル群とする.

(1) $\mathbb{C}^n/\Gamma$ を ample Riemann form H によって定義された quasi-Abelian variety とすると $E := \mathrm{Im}\,H|\Gamma\times\Gamma$ は次を満たす $\mathbb{Z}$-valued skew-symmetric form である.

(PI) : $\quad {}^tVE_1V + {}^tE_2V - {}^tVE_2 + E_3 = 0 \quad$ かつ

(PII) : $\quad \dfrac{\sqrt{-1}}{2}({}^t\overline{V}E_1V + {}^tE_2V - {}^t\overline{V}E_2 + E_3) > 0,$

ここに $E = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ -{}^tE_2 & E_3 \end{bmatrix}$, $E_1 \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, and $\quad E_3 \in \mathbb{Z}^{q\times q}$.

(2) 逆に (PI) と (PII) を満たす $\mathbb{Z}$-valued skew-symmetric matrix $E = [E_{ij}; 1 \le i, j \le n+q] \in \mathbb{Z}^{(n+q)\times(n+q)}$ があれば $\mathbb{C}^n/\Gamma$ は $\mathrm{Im}\,H|\Gamma\times\Gamma = E$ を満たす ample Riemann form H をもつ quasi-Abelian variety である.

次の exact sequence がある.

$$\to H^1(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\iota} H^2(X,\mathcal{O}) \to$$

Definition 1.3 $\mathrm{NS}\,(X) := c_1H^1(X,\mathcal{O}^*)$ は Néron-Severi group と呼ばれている.

Theorem 1.4 $X = \mathbb{C}^n/\Gamma$ を周期行列 $P = [I_n, V]$ をもつ type q のトロイダル群とすると次が成立する.
$E \in H^2(X,\mathbb{Z})$ が $\mathrm{NS}(X)$ に属する $\Longleftrightarrow$ E は Theorm 1.2 の中の条件 (PI) を満たす $\mathbb{Z}$-valued skew-symmetric $(n+q, n+q)$ 行列である.

さらに次の定理 ([3]) を得る.

Theorem 1.5 $X = \mathbb{C}^n/\Gamma$ をトロイダル群とする.
Néron-Severi group $\mathrm{NS}\,(X) = 0$ ならば X 上に非定数有理形関数は存在しない.

2010 Mathematics Subject Classification: 32M05, 14K99
キーワード：Toroidal groups;Algebraic number fields
* 〒813-8503 福岡市東区松香台 2-3-1
e-mail: umeno@ip.kyusan-u.ac.jp

2. 数論的トロイダル群

K を $n+q$ 次の非総実代数体で $2q$ complex embeddings $\varphi_i,\ \overline{\varphi_i} : K \longrightarrow \mathbb{C}\ (i = 1, \ldots, q)$ と $n-q$ real embeddings $\psi_j : K \longrightarrow \mathbb{R}\ (j = 1, \ldots, n-q)$ をもつとする. $x \in K$ に対し $\Psi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_q(x), \psi_1(x), \ldots, \psi_{n-q}(x))$ とおくと数体の標準的埋め込み $\Psi : K \longrightarrow \mathbb{C}^q \times \mathbb{R}^{n-q} \subset \mathbb{C}^n$ を得る. $\mathbb{Z}_K$ を K の整数環とすると $\Gamma = \Psi(\mathbb{Z}_K)$ は $\mathbb{C}^n$ の $\mathrm{rank}\,\Gamma = n+q$ の discrete subgroup で $X = \mathbb{C}^n/\Gamma$ は複素Lie群である. Andreotti and Gherardelli [2], と Abe [1] は次の定理を示した.

Theorem 2.1 代数体 K で定義された複素Lie群はトロイダル群である.

この代数体で定義されたトロイダル群がquasi-Abelian varietyかどうかを検証したい. そのために $K = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ の場合と $K = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$ の場合を調べる.

2.1. $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ によって定義されたトロイダル群

$\alpha = \sqrt[5]{2}, K = \mathbb{Q}(\alpha)$ とすると $\mathbb{Z}_K$ は integral power basis $\mathbb{Z}\{1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4\}$ をもつ.

Proposition 2.2 $\mathbb{Q}(\alpha)$ によって定義されたトロイダル群 $X = \mathbb{C}^3/\Gamma$ 上には非定数有理形関数が存在しない.

Proof. Theorem 1.4 を使って $NS(X) = 0$ を示す.

2.2. $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$ によって定義されたトロイダル群

$\alpha = \sqrt[6]{2}, K = \mathbb{Q}(\alpha)$ とすると $\mathbb{Z}_K$ は integral power basis $\mathbb{Z}\{1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \alpha^5\}$ をもつ.

Proposition 2.3 $\mathbb{Q}(\alpha)$ によって定義されたトロイダル群 $X = \mathbb{C}^4/\Gamma$ は quasi-Abelian variety である.

Proof. Theorem 1.2 を使って X がquasi-Abelian varietyであることを示す.

参考文献

[1] Y. Abe , $\mathfrak{o}_{K0}$-quasi abelian varieties with complex multiplication, Forum Math. 25 (2013), 677–702

[2] A. Andreotti and F. Gherardelli, Seminario di Geometria, Anno 1972–73, II, Pubblicazioni del Centro di Analisi Globale, Firenze, 1973.

[3] H. Kazama and T. Umeno, Toroidal groups without nonconstant meromorphic functions, to appear in Kyushu J. Math.

[4] T. Umeno, Period matrices for quasi-Abelian varieties, Japan.J.Math. 29(2003), 117–133

[5] T. Umeno, On arithmetic toroidal groups, to appear in a special issue of Filomat.

Ueda theory for compact curves with nodes

小池 貴之　(京大理)*

X を滑らかな複素曲面, $C \subset X$ をコンパクトな部分曲線とする. 本講演では, 法線則 $N_{C/X} := j^*\mathcal{O}_X(C)$ が位相的に自明である場合に, C の近傍について議論する. ここで包含射 $C \hookrightarrow X$ を, 記号 j で表している. また以下では, C 上の位相的に自明な直線束全体の集合を $\mathcal{P}(C)$ で, また C 上の Hermitian flat な (つまり変換関数が $U(1)$ 値局所定数関数としてとれるような) 直線束全体の集合を $\mathcal{P}_0(C)$ で表す.

C が滑らかである場合には, 上田による結果がある [4]. この場合には $\mathcal{P}(C) = \mathcal{P}_0(C)$ である. このとき上田は, X 中での C の近傍と $N_{C/X}$ 中での 0 切断の近傍とを ν-jet で比較することで, 障害類 $u_\nu(C,X) \in H^1(C, \mathcal{O}_C(N_{C/X}^{-\nu}))$ を定義した. そして, 組 (C,X) を, ある $n \geq 1$ について $u_\nu(C,X) \neq 0$ なる場合 (有限型) と任意の n について $u_\nu(C,X) = 0$ なる場合 (無限型) の二つの場合に分類した. [3] では, C がノードを持つ場合にもこれらの定義を自然に拡張した上で, 有限型, 無限型のそれぞれの場合での上田の定理の (ある程度の技術的な仮定の下での) 類似として, 以下を示した (以下で C の双対グラフを $G(C)$ で表す):

定理 1 (C がノードを持つ場合の [4, Theorem 1, 2] の類似). *C が高々ノードを持つコンパクト曲線で, $G(C)$ が tree であり, かつ $N_{C/X}$ が正則に自明なものであとする. $u_n(C,X) \neq 0$ であり, さらに, C の各既約成分 C_ν に於いても $u_n(C,X)|_{C_\nu} \neq 0 \in H^1(C_\nu, \mathcal{O}_{C_\nu})$ なることを仮定する. このとき以下が成立する:*
(i) 各 $\lambda > 1$ について, ある C の近傍 V 上について強 psh 関数 $\Phi_\lambda \colon V \setminus C \to \mathbb{R}$ として, $\Phi_\lambda(p) \to \infty$ かつ $\Phi_\lambda(p) = O(d(p,C)^{-\lambda n})$ $(p \to C)$ なるものが存在する.
(ii) C の各近傍 V について, $V \setminus C$ 上の psh 関数 Ψ が, ある $0 < \lambda < 1$ について $\Psi(p) = O(d(p,C)^{-\lambda n})$ $(p \to C)$ であったとする. このとき, ある C 近傍 V_0 上では $\Psi|_{V_0 \setminus C}$ は定数関数である. □

定理 2 (C がノードを持つ場合の [4, Theorem 3] の類似). *C が高々ノードを持つコンパクト曲線で, $N_{C/X} \in \mathcal{E}_0(C) \cup \mathcal{E}_1(C)$ なるものを考える. 正規化 $i \colon \widetilde{C} \to C$ について $i^*N_{C/X} \in \mathcal{E}_0(\widetilde{C})$ の成立, 及び $H^1(C, \mathbb{C}(N_{C/X}^{-n})) = 0$ を仮定する $(n \in \mathbb{Z}_{>0})$. このとき, (C,X) が無限型であれば, ある C 近傍 V 上で $\mathcal{O}_V(C)$ は Hermitian flat である.* □

ここで, $\mathcal{E}_0(C)$ は $\mathcal{P}_0(C)$ の捻じれ元全体の集合であり, $\mathcal{E}_1(C)$ は, $L \in \mathcal{P}_0(C)$ として, ディオファントス条件 "$\log d(\mathcal{O}_C, L^n) = O(\log n)$ $(n \to \infty)$" を満たすもの全体の集合である (d は invariant distance, 詳細は [4, §4.1] 参照).

また, [5] では, C が node を一つ許す有理曲線であり, $N_{C/X} \in \mathcal{P}(C) \setminus \mathcal{P}_0(C)$ なる場合が考察されている. [3] では, この一般化として, 以下を示した:

定理 3 ([5, Theorem 1, 2] の一般化). *C が高々ノードを持つコンパクト曲線で, $G(C)$ が cycle graph であり, かつ $N_{C/X} \in \mathcal{P}(C) \setminus \mathcal{P}_0(C)$ なるものとする. ($N_{C/X}$ の平坦接続を適切に選ぶことで) $n = 1, 2, 3$ について $u_n(C,X) = 0$ を仮定する. このとき以下が成立する:*
(i) 各 $\lambda > 1$ について, ある C の近傍 V 上について強 psh 関数 $\Phi_\lambda \colon V \setminus C \to \mathbb{R}$ として, $\Phi_\lambda(p) \to \infty$ かつ $\Phi(p) = O((-\log d(p,C))^{2\lambda})$ なるものが存在する.

* e-mail: tkoike@math.kyoto-u.ac.jp

(ii) C の各近傍 V について, $V \setminus C$ 上の psh 関数 Ψ が, ある $0 < \lambda < 1$ について $\Psi(p) = O((-\log d(p,C))^{2\lambda})$ $(p \to C)$ であったとする. このとき, ある C 近傍 V_0 上では $\Psi|_{V_0 \setminus C}$ は定数関数である. □

以上の結果は, 例えば以下のように, ネフ (数値的半正) 直線束上の半正曲率を持つエルミート計量の存在問題に応用できる [3]:

定理 4. X を滑らかな複素曲面, $C \subset X$ を有理曲線の *cycle* であって, 位相的に自明な法線束を持つものとする. このとき以下が成立する:
(i) $N_{C/X} \in \mathcal{E}_1(C)$ であれば, $\mathcal{O}_X(C)$ は半正である. つまり, C が定める直線束には, C^∞ エルミート計量として半正曲率を持つものが存在する.
(ii) $N_{C/X} \notin \mathcal{P}_0(C)$ であれば, $\mathcal{O}_X(C)$ は半正でない. より詳しく, $\mathcal{O}_X(C)$ の標準切断 f に対し, $|f|_h \equiv 1$ で定まるような特異計量 h が, 半正曲率を持つ特異エルミート計量の中で最も小さい特異性を持つものである.

Theorem 4 は, 射影平面の 9 点爆発 X の反標準束 K_X^{-1} に応用できる. $C_0 \subset \mathbb{P}^2$ を degree 3 の曲線であって, 9 点を含むものとする. C を C_0 の強変換とする. C_0 が滑らかな場合に知られている K_X^{-1} が半正なるための十分条件に関する結果 ([1], [2], [4, Theorem 3]) を, Theorem 4 (i) を用いることで, C_0 が一般の場合に拡張できる. また, Theorem 4 (ii) からは, 以下が分かる:

Corollary 5. 9 点の配置 $\{p_j\}_{j=1}^9 \subset \mathbb{P}^2$ として, 上記の K_X^{-1} が半正でないようなものが存在する. □

参考文献

[1] V. I. Arnol'd, Bifurcations of invariant manifolds of differential equations and normal forms in neighborhoods of elliptic curves, Funkcional Anal. i Prilozen., 10-4 (1976), 1–12 (English translation : Functional Anal. Appl., 10-4 (1977), 249–257).

[2] M. Brunella, On Kähler surfaces with semipositive Ricci curvature, Riv. Mat. Univ. Parma, **1**, 441–450 (2010).

[3] T. Koike, Ueda theory for compact curves with nodes, arXiv:1507.00109.

[4] T. Ueda, On the neighborhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle, J. Math. Kyoto Univ., **22** (1983), 583–607.

[5] T. Ueda, Neighborhood of a rational curve with a node, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **27** (1991), 681–693.

default function と Liouville型定理

厚地 淳　(慶応義塾大学)*

default function とは、確率論で局所マルチンゲールと真のマルチンゲールとの差異を考えるときに現れるものである。特に、default function が消えるとき、局所マルチンゲールは真のンマルチンゲールになる。リーマン多様体 M 上のブラウン運動 X_t と M 上の劣調和関数 u に対して $u(X_t)$ を考え、これに default function が消える条件を考えると、あるクラスの u に対しては、自然に 以下のような Liouville 型定理が得られることを報告する。

以下では、M はリーマン多様体、$dv(x)$ は体積要素から決まる測度、$r(x)$ を M 上のある参照点から x への距離、$B(r) := \{x \in M | r(x) < r\}$, $R_-(x)$ を M のリッチ曲率の x における下限 $R(x)$ の負の部分とする。

I. L^1-Liouvlle 定理. 以下では、u は M 上の滑らかな劣調和関数である。

Theorem 1. ある $C > 0$ に対し、$R_-(x) \geq -Cr(x)^2 - C$ とする。
i)

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r^{2(1-p)}} \log vol(B(r)) < \infty \quad (0 \leq p < 1)$$

とする.

$$\int_M \frac{u(x)}{(1+r(x))^{2p}} dv(x) < \infty,$$

ならば、u は定数。
ii)

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{1}{(\log r)^2} \log vol(B(r)) < \infty$$

とする.

$$\int_M \frac{u(x)}{1+r(x)^2} dv(x) < \infty,$$

ならば、u は定数。
注. 上の i) で $p = 0$ の時、P.Li による L^1-Liouville 定理になる。
次のようにすると、R_- の条件を外すことができる。

Theorem 2. M 上に正のグリーン関数が存在するとする。
i)

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r^{2(1-p)}} \log\{vol(B(r)) \int_{B(r)} u(x)^2 dv(x)\} < \infty \quad (0 \leq p < 1)$$

とする.

$$\int_M \frac{u(x)}{(1+r(x))^{2p}} dv(x) < \infty,$$

* 〒 223-8522 神奈川県横浜市港北区日吉 3-14-1　慶応義塾大学
e-mail: `atsuji@keio.jp`

ならば、$u=0$.

ii)
$$\liminf_{r\to\infty}\frac{1}{(\log r)^2}\log\{vol(B(r))\int_{B(r)}u(x)^2dv(x)\}<\infty$$
とする.
$$\int_M\frac{u(x)}{1+r(x)^2}dv(x)<\infty,$$
ならば、$u=0$.

II. 正則写像の Liouville 型定理.

同様な議論を正則写像のエネルギー密度に適用することにより、以下のような正則写像の Liouvlle 型定理が得られる.

M をケーラー多様体、N を エルミート多様体とし、$f:M\to N$ を正則写像とする. $R_-(x)$ を 前と同様に M のリッチ曲率の下限 $R(x)$ の負の部分、$B(r):=\{x\in M|r(x)<r\}$, $K(y)$ を N の正則双断面曲率とする.

Theorem 3. M 上に正のグリーン関数が存在するとする. ある $c_0>0$ に対し、$K(f(x))\le -c_0$ であり、$\int_M R_-(x)dv(x)<\infty$ かつ
$$\liminf_{r\to\infty}\frac{1}{r^2}\log\{vol(B(r))\int_{B(r)}R_-(x)^2dv(x)\}<\infty$$
ならば、f は定数である.

注. $R_-(x)\ge -Cr(x)^2-C$ ならば、最後の曲率と体積の増大度に関する条件は満たされる.

M が正のグリーン関数を持たないときは、曲率の条件を課すと次が得られる.

Theorem 4. ある $C>0$ に対し、$R_-(x)\ge -Cr(x)^2-C$ とし、M は正のグリーン関数を持たないとする. ある $c_0>0$ に対し、$K(f(x))\le -c_0$ であり、
$$\int_M|R(x)|dv(x)<\infty,\ \text{かつ}\ \int_M R(x)dv(x)\ge 0$$
ならば、f は定数である.

トーリック多重劣調和関数の間の測地線に沿う収束について

細野　元気　(東京大学)*

1. 背景

この節では用語の定義は省略し、主定理を述べるために必要な定義は次の節で説明する。

[M] において、コンパクト複素多様体の Kähler ポテンシャルの空間に計量が定義されて以来、その計量に関する測地線の研究が行われてきた。[Don]、[S] により、測地線は複素 Monge-Ampère 方程式の解として記述されることが知られている。測地線の研究を行うために、一種の弱解として、特定の条件を満たす関数の上限である弱測地線が定義された (Kähler ポテンシャルの空間の測地線に関しては、[Dar] の解説を参照)。

一方、[R] では、擬凸領域上の多重劣調和関数の空間における弱測地線が考察された。弱測地線の定義は多重ポテンシャル理論と相性が良いため、擬凸領域上で弱測地線を考察することは自然である。以下、弱測地線のことを単に測地線と呼ぶ。[R] においては、主に次の二点が示されている：

- 有限エネルギーをもつ多重劣調和関数のクラス $\mathcal{F}_1$ 上では、測地線に沿って関数が (capacity に関して) 収束する。
- Lelong 数が正の極をもつ多重劣調和関数を端点とする場合、測地線に沿って関数が収束しない場合がある。

$\mathcal{F}_1$ に属する多重劣調和関数に対しては、Lelong 数が 0 になることが知られている。そこで、Lelong 数は常に 0 だが、エネルギーは発散するような多重劣調和関数に対して、測地線に沿う収束を考察することが興味の対象である。今回、トーリック多重劣調和関数と呼ばれる関数に対して、一方の端点で測地線に沿って関数が (Capacity に関して) 収束するための条件を、Lelon 数 (Kiselman 数) を用いて与えた。この結果により、エネルギーの発散にかかわらず収束性を判定できることになる。

2. 主定理

Ω を擬凸領域、u_0,u_1 を Ω 上の多重劣調和関数とする。$S = \{1 < |z| < e\} \subset \mathbb{C}$ とおく。$\Omega \times S$ 上の多重劣調和関数 $\hat{u}$ を、以下の式で定める：

$$\hat{u} := \sup \left\{ \hat{v} \in PSH(\Omega \times S) : \hat{v} \leq 0, \limsup_{\log|\zeta| \to j} \right\}$$

これを用いて、$u_t := \hat{u}(\cdot, e^t)$ とおく。$\{u_t\}$ を、u_0 と u_1 を結ぶ**測地線**と呼ぶことにする。

定理 1　B を $\mathbb{C}^n$ 内の単位球、u_0, u_1 を B 上の多重劣調和関数とする。u_0, u_1 はトーリック、すなわち $|z_1|, \ldots, |z_n|$ のみに依存するような関数であるとする。∂B 上で $u_0 = u_1 = 0$

本研究は科研費 (15J08115) と、文部科学省リーディング大学院プログラムの助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 32U05, 32U25
キーワード：弱測地線, トーリック多重劣調和関数
* 〒 153-8914　東京都目黒区駒場 3-8-1　東京大学大学院数理科学研究科
e-mail: genkih@ms.u-tokyo.ac.jp
web: http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~genkih/

であり、u_0, u_1 の極は原点だけとする。このとき、次の (1) と (2) は同値である：
(1) capacity に関して、$u_t \to u_0$ $(t \to 0)$。
(2) 任意の複素曲線 $\phi : \zeta \mapsto (a_1\zeta^{b_1}, \dots, a_n\zeta^{b_n})$, $a_i \in \mathbb{C}^*$, $b_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して、$\nu(u_0 \circ \phi, 0) \geq \nu(u_1 \circ \phi, 0)$ が成り立つ。

ここで、擬凸領域 Ω 上の関数列 u_n に対し、capacity に関して $u_n \to u$ であるとは、任意の $\epsilon > 0$ に対し、$\mathrm{Cap}(\{|u_n - u| > \epsilon\}) \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立つことをいう。ただし、Borel 集合 E に対し、

$$\mathrm{Cap}(E) := \sup\left\{\int_E (dd^c u)^n : u \in PSH(\Omega), -1 \leq u \leq 0\right\}$$

と定める。

3. 主定理の証明について

まず、「多重劣調和包」による収束性の特徴づけ ([Dar]) を紹介する。[Dar] ではコンパクト Kähler 多様体について証明していたが、同じ証明を擬凸領域にも適用できる。

定理 2 ([Dar, Theorem 5.2]) u_0, u_1 を Ω 上の多重劣調和関数とする。$u_0, u_1 \not\equiv -\infty$ であるとする。さらに、$\partial\Omega$ において $u_0, u_1 = 0$ であると仮定する。$\{u_t\}_t$ を、u_0 と u_1 の間の測地線とする。このとき、capacity に関して $\lim_{t\to 0} u_t = u_0$ であることと、$P_{[u_1]}(u_0) = u_0$ は同値である。ただし、$P_{[u_1]}(u_0) := (\lim_{c\to+\infty} P(u_0, u_1 + c))^*$ であり、$P(u, v)$ は $w \leq \min(u, v)$ を満たす最大の劣調和関数 w を表す。

この定理を用いると、結局、定理 1 の条件 (1) を調べるには、$P(u_0, u_1 + c)$ という関数の挙動を調べればよいことになる。一方、トーリック多重劣調和関数 u に対しては、次のように $\mathbb{R}^n$ 内の領域上の凸関数 f を対応させることができる ([G])：

$$f(t_1, \dots, t_n) := u(e_1^t, \dots, e_n^t)$$

この対応を用いると、定理 1 の条件 (2) は、2 つの凸関数について、$\mathbb{R}^n$ 内の任意の半直線に沿う傾きを比べる形に書き直すことができる。そこで、凸共役 (Legendre 変換) を用いて解析を行うと、主定理を証明することができる。

参考文献

[C] U. Cegrell. Pluricomplex energy. *Acta Math.*, 180(2):187–217, 1998.

[Dar] T. Darvas. The mabuchi completion of the space of kahler potentials. arXiv:1401.7318.

[Don] S. K. Donaldson. Symmetric spaces, Kähler geometry and Hamiltonian dynamics. In *Northern California Symplectic Geometry Seminar*, volume 196 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 13–33. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[G] H. Guenancia. Toric plurisubharmonic functions and analytic adjoint ideal sheaves. *Math. Z.*, 271(3-4):1011–1035, 2012.

[M] T. Mabuchi. Some symplectic geometry on compact Kähler manifolds. I. *Osaka J. Math.*, 24(2):227–252, 1987.

[R] A. Rashkovskii. Local geodesics for plurisubharmonic functions. arXiv:1604.04504.

[S] Stephen Semmes. Complex Monge-Ampère and symplectic manifolds. *Amer. J. Math.*, 114(3):495–550, 1992.

擬凸ケーラー多様体上のルンゲの定理

大沢健夫（名古屋大学　多元数理）

平成 28 年 6 月 22 日

(X,φ) を n 次元の擬凸多様体とする。すなわち X は n 次元複素多様体で、皆既的な C^∞ 級多重劣調和関数 φ を持つものとする。ただし φ が皆既的であるとは、ここでは任意の $c<\sup\varphi$ に対し $X_c := \{x\in X;\varphi(x)<c\}$ が相対コンパクトであることをいう。(E,h) を X 上の正則なエルミートベクトル束とする。また、$H^{p,q}(X,E)$ で X の E 係数の (p,q) 型ドルボーコホモロジー群 ($=\overline{\partial}$ コホモロジー群) を表す。Θ_h で h の曲率形式を表す。中野茂男と頼東昇 [N-R] は次を示した。

定理 1. Θ_h が $X\setminus X_c$ 上で (中野の意味で) 正ならば
(1)　$\forall q\geq 1$ に対し、$\dim H^{n,q}(X,E)<\infty$；
(2)　$\forall q\geq 1$ に対し、制限準同型 $H^{n,q}(X,E)\to H^{n,q}(X_c,E)$ は同型；
(3)　制限写像 $H^{n,0}(X,E)\to H^{n,0}(X_c,E)$ の像は稠密.

(3) はルンゲの近似定理の多変数版である岡・ヴェイユの近似定理の一般化になっている。そこで定理 1 の一般化を (3) に限って考察し、次を得た。

定理 2. X がケーラー計量を持ち Θ_h が (X 上で) 半正ならば、$\forall c$ に対し制限写像 $H^{n,0}(X,E)\to H^{n,0}(X_c,E)$ の像は稠密.

参考文献

[N-R] Nakano, S. and Rhai, T.-S., *Vector bundle version of Ohsawa's finiteness theorems,* Math. Japon. **24** (1979/80), no. 6, 657-664.

特別講演

超越的な手法を用いた小平型のコホモロジー消滅定理の一般化について

松村 慎一　(東北大理)*

Abstract

超越的な手法を用いた Kodaira の消滅定理の一般化について概説する．具体的には, 乗数イデアル層付きの単射性定理を中心に, 対数的標準特異点への一般化や関連する話題や応用について複素幾何の視点から説明する．証明では, 適切な意味で "semi-positive" な直線束や特異計量を調和積分論, $\overline{\partial}$-方程式, L^2-理論で調べる技術が鍵となる．

1. はじめに

代数幾何や複素幾何においてコホモロジーの消滅定理は重要な役割を果たす．それ故に, 状況や目的に応じて, 様々な消滅定理やその一般化が研究されてきた．本稿では, Kodaira の消滅定理の超越的な手法を用いた一般化, 特に "semi-positive" な直線束や特異計量への一般化, についての著者の最近の研究成果について概説する．近年, [BCHM10] により標準束が適切な意味で "positive" の場合に極小モデル理論が完成し, "semi-positive" 性の研究は重要性を増してきていると思われる．本稿では,

- 第 3 節で, 特異計量や乗数イデアル層を用いた Kollár の単射性定理の擬正な (pseudo-effective) 直線束への一般化 ([Mat13])
- 第 4 節で, Nadel 型の消滅定理や高次順像への応用 ([FM16], [Mat15a], [Mat16a])
- 第 5 節で, 単射性定理の対数的標準特異点へのさらなる一般化 ([Mat16b])

を紹介する．正確な議論についてはそれぞれの論文を読んで頂きたい．

本稿における主な考察対象は, 複素多様体上の (正則) 直線束や連接層の高次コホモロジーである．複素多様体 X 上の直線束 L の 0 次コホモロジー $H^0(X, L)$ は L の正則切断の空間であり, X の幾何学の研究に重要な役割を果たす．正則切断は正則関数の一般化なので, 0 次コホモロジー $H^0(X, L)$ の意味は比較的捉えやすい．その一方で, 高次コホモロジー $H^q(X, L)(q > 0)$ の意味は捉えにくいが, ひとつの見方として局所的な現象を大域化する際の "障害" であると解釈できる．以下の正則切断の拡張問題を通して, 高次コホモロジーの意味と消滅定理の意義を説明する．

問題 1 (正則切断の拡張問題)**.** X の複素部分多様体 S 上の $L|_S$ の正則切断を X 上の正則切断に拡張できるか．ここで, $L|_S$ は直線束 L の S への制限である．

この問題は素朴な意味で興味深いだけでなく, 様々な局面で出現し幾何学への応用をもたらす奥の深い問題である．層の短完全列

$$0 \to \mathcal{O}_X(L) \otimes \mathcal{I}_S \to \mathcal{O}_X(L) \to \mathcal{O}_S(L|_S) \to 0$$

から誘導されるコホモロジー間の完全列

$$\begin{aligned} 0 \to & H^0(X, \mathcal{O}_X(L) \otimes \mathcal{I}_S) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(L)) \xrightarrow{r} H^0(S, \mathcal{O}_S(L|_S)) \to \\ & H^1(X, \mathcal{O}_X(L) \otimes \mathcal{I}_S) \xrightarrow{j} H^1(X, \mathcal{O}_X(L)) \to H^1(S, \mathcal{O}_S(L|_S)) \to \cdots \end{aligned}$$

This work was supported by the Grant-in-Aid for Young Scientists (B) #25800051 from JSPS.
2000 Mathematics Subject Classification: 32J25, 32L20, 14E30.
Keywords: 消滅定理, 単射性定理, 正則切断の拡張定理, L^2-理論, $\overline{\partial}$-方程式, 調和積分論, 特異計量, 乗数イデアル層, 対数的標準特異点.

*e-mail: mshinichi@m.tohoku.ac.jp, mshinichi0@gmail.com

を考えよう．ここで, $\mathcal{O}_X(L)$ は L から定まる可逆層, $\mathcal{I}_S$ は部分多様体 S を定義するイデアル層である．上の写像 r は X 上の正則切断を S に制限する制限写像なので, 上記の問題は r の全射性を問題にしてることがわかる．もし $H^1(X, \mathcal{O}_X(L) \otimes \mathcal{I}_S)$ が消滅する (即ち, 零ベクトル空間になる) ならば, r は全射となり, 任意の S 上の正則切断が拡張できる．この考察から, 1 次コホモロジー $H^1(X, \mathcal{O}_X(L) \otimes \mathcal{I}_S)$ は上記の拡張問題の障害と見なせる．次に, 上の写像 j が単射であるという条件を考えよう．この消滅よりも弱い条件からも, r の全射性が従い, 任意の S 上の正則切断が拡張できることがわかる．以上の考察から, 高次コホモロジーの消滅や適当な射の単射性に関する定理の大切さが窺い知れるだろう．以下で, この種の定理とその証明の概略を紹介していく．

以後, 本稿を通して, X で n 次元のコンパクトケーラー多様体, F で X 上の (正則) 直線束を表す．また, 可逆層と直線束は同一視し, $\mathcal{O}_X(F)$ などは単に F と書く．

2. Kodaira の消滅定理

この節では, Kodaira の消滅定理に対する 2 通りの証明 (調和積分論を用いた証明と $\overline{\partial}$-方程式の L^2-理論を用いた証明) について復習する．調和積分論と L^2-理論のそれぞれの長所を組み合わせることで, 第 3 節, 第 4 節, 第 5 節で紹介される結果が得られていくことになる．まずは Kodaira の消滅定理の主張から復習しよう．

定理 2 (Kodaira の消滅定理)**.** 直線束 F が positive(即ち, チャーン曲率が positive になるエルミート計量を許す) ならば, 以下が成立する：

$$\text{整数 } q > 0 \text{ に対して, } H^q(X, K_X \otimes F) = 0.$$

ここで, K_X は X の標準束 (即ち, 正則 n-形式のなす直線束) である．

Kodaira の埋め込み定理によれば直線束の ample 性と positive 性は同値なので, X を非特異射影多様体とし “positive”を “ample”と読み替えれば, これは純粋な代数幾何の主張とみなせる．この視点からは Deligne-Illusie-Raynaud による正標数還元を用いた証明が知られている (例えば [EV92] を参照)．ホッジ理論的な視点からの証明は [KM98], [Fn08] でも学べる．

さて, Kodaira の消滅定理の超越的な手法を用いた証明について復習しよう．

調和積分論を用いた証明

Dolbeault の定理を用いると, コホモロジー $H^q(X, K_X \otimes F)$ は以下のように $\overline{\partial}$-コホモロジーを用いて記述できる：

$$H^q(X, K_X \otimes F) \cong \frac{\operatorname{Ker} \overline{\partial} : C^{n,q}_\infty(X, F) \to C^{n,q+1}_\infty(X, F)}{\operatorname{Im} \overline{\partial} : C^{n,q-1}_\infty(X, F) \to C^{n,q}_\infty(X, F)}.$$

ここで, $C^{n,\bullet}_\infty(X, F)$ は C^∞-級の F に値をとる $(n, \bullet)$-形式の集合で, $\overline{\partial}$ は外微分作用素 $d = \partial + \overline{\partial}$ の $(0, 1)$-部分である．簡単のために, しばしば F に値をとる $(n, \bullet)$-形式を単に微分形式と呼ぶ．この同型により, コホモロジー類 $A \in H^q(X, K_X \otimes F)$ を $\overline{\partial}$-閉な微分形式 u で代表できる．もちろん, その代表元の取り方は $\overline{\partial}$-完全な微分形式 $\overline{\partial}v$ 分の任意性がある．では, 与えられたコホモロジー類の最も “自然”な代表元は何であろうか．ひとつの答えは, 最小の L^2-ノルム $\|u\|_{h,\omega}$ を持つ代表元である．ここで, L^2-ノルム $\|u\|_{h,\omega}$ は, F の (そのチャーン曲率が positive になる) エルミート計量 h と X 上のケーラー形式 ω を用いて

$$\|u\|^2_{h,\omega} := \int_X |u|^2_{h,\omega} \frac{\omega^n}{n!}$$

で定義される．最小の L^2-ノルムを持つ代表元 u は微分方程式 $\Delta_{\overline{\partial}} u = 0$ を満たし, 楕円型微分作用素の解に対する正則性の議論 (Sobolev, Rellich, Gårding の定理) より C^∞-

級であることがわかる. ここで, $\Delta_{\overline{\partial}}$ は $\overline{\partial}$ の随伴作用素 $\overline{\partial}^*$ を用いて $\Delta_{\overline{\partial}} := \overline{\partial}\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial}$ で定義される $\overline{\partial}$-ラプラシアンである. u が調和形式であること (即ち, $\Delta_{\overline{\partial}} u = 0$ を満たすこと) は $\overline{\partial}u = 0$ かつ $\overline{\partial}^* u = 0$ と同値であることに注意する. この調和形式 u に対して, Bochner-Kodaira-Nakano の等式を用いると

$$0 = \|\overline{\partial}u\|^2_{h,\omega} + \|\overline{\partial}^*u\|^2_{h,\omega} = \|D'^*_h u\|^2_{h,\omega} + \langle\!\langle \sqrt{-1}\Theta_h(F)\Lambda_\omega u, u\rangle\!\rangle_{h,\omega}$$

がわかる. ここで, D'_h はチャーン接続 $D_h = D'_h + \overline{\partial}$ の $(1,0)$-部分で, Λ_ω はウェッジ積 $\omega \wedge \bullet$ の随伴作用素である. 一方で, 曲率が positive であることから $\langle\!\langle \sqrt{-1}\Theta_h(F)\Lambda_\omega u, u\rangle\!\rangle_{h,\omega} \geq c\|u\|^2_{h,\omega}$ がわかる. 以上の議論から, u が恒等的に零になることがわかり, そのコホモロジー類 $A = \{u\}$ が零であることが従う. □

$\overline{\partial}$-方程式に対する L^2-理論を用いた証明

局所的には $\overline{\partial}$-方程式が L^2-ノルム付きで解けることを用いると, コホモロジー $H^q(X, K_X \otimes F)$ を L^2-空間の $\overline{\partial}$-コホモロジーで記述できる:

$$H^q(X, K_X \otimes F) \cong \frac{\operatorname{Ker}\overline{\partial} : L^{n,q}_{(2)}(X,F)_{h,\omega} \to L^{n,q+1}_{(2)}(X,F)_{h,\omega}}{\operatorname{Im}\overline{\partial} : L^{n,q-1}_{(2)}(X,F)_{h,\omega} \to L^{n,q}_{(2)}(X,F)_{h,\omega}}.$$

ここで, $L^{n,\bullet}_{(2)}(X,F)_{h,\omega}$ は L^2-可積分な F に値をとる $(n,\bullet)$-形式の集合である. ここでは $\overline{\partial}$ を閉作用素と見ていることに注意する. この同型により, 高次コホモロジーが消えるかという問題は, 任意の $\overline{\partial}$-閉な微分形式 u が $\overline{\partial}$-完全である (即ち, 偏微分方程式 $\overline{\partial}v = u$ が解 v を持つ) かという問題に置き換わる.

曲率が positive の場合は, 関数解析的な手法を用いることで, $\overline{\partial}$-方程式 $\overline{\partial}v = u$ を解くことができる. 実際に, Bochner-Kodaira-Nakano の等式を用いると,

$$|\langle\!\langle \alpha, u\rangle\!\rangle_{h,\omega}|^2 \leq C\|u\|^2_{h,\omega}(\|\overline{\partial}\alpha\|^2_{h,\omega} + \|\overline{\partial}^*\alpha\|^2_{h,\omega})$$

がわかり, これをうまく用いると $g(\overline{\partial}^*\alpha) := \langle\!\langle \alpha, u\rangle\!\rangle_{h,\omega}$ で定義される線形写像 $g : \operatorname{Im}\overline{\partial}^* \to \mathbb{C}$ が (well-defined な) 有界作用素になることがわかる. このとき, Hahn-Banach の定理と Riesz の表現定理から, $\overline{\partial}v = u$ と L^2-評価 $\|v\|^2_{h,\omega} \leq C\|u\|^2_{h,\omega}$ を満たす v の存在がわかる. □

この議論の利点は解の存在だけでなく, その L^2-ノルムまで評価できる点にある. このような量的な評価が出来るのは解析の利点のひとつであり, 様々な応用を与えてくれる. もちろん, 調和積分論が劣っている訳ではなく一長一短である. 後述するように, 単射性定理の証明では調和積分論が有効に働く. また, 乗数イデアル層を用いた単射性定理の一般化を考える際には, 調和積分論と $\overline{\partial}$-方程式の L^2-理論を組み合わせる技術が重要となる.

3. 乗数イデアル層付きの単射性定理

この節では, 消滅定理の “semi-positive” な直線束への一般化 (単射性定理) について説明する. まずは, Tankeev の先駆的な結果 ([Tan71]) の後に得られた Kollár の単射性定理と Enoki の単射性定理を復習しよう. 単射性定理と Serre の消滅定理から Kodaira の消滅定理が直ちに導かれることに注意する.

定理 3 (Kollár の単射性定理 (Enoki の単射性定理), [Kol86a], [Eno90]). X を非特異射影多様体 (コンパクトケーラー多様体), F を semi-ample(semi-positive) な直線束とする. このとき, F^m の正則切断 $s(\neq 0)$ から誘導される以下の写像は単射である.

$$\Phi_s : H^q(X, K_X \otimes F) \xrightarrow{\otimes s} H^q(X, K_X \otimes F^{m+1}).$$

直線束の semi-ample 性と semi-positive 性は以下で定義される．semi-ample は代数幾何的な半正値性の条件, semi-positive は微分幾何的な半正値性の条件である．

定義 4.
(1) テンソル冪 F^m が共通零点のない切断を許すとき, F は semi-ample であるという．
(2) F が曲率が semi-positive になる C^∞-級計量を許すとき, semi-positive であるという．
(3) F が, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\sqrt{-1}\Theta_{h_\varepsilon}(F) \geq -\varepsilon\omega$ を満たす C^∞-級計量 h_ε を許すとき, 数値的に半正 (numerically effective, 単にネフと書く) であるという．

semi-ample ならば semi-positive で, semi-positive ならばネフであるが, 逆はいずれも成り立たない．Enoki の結果は Kollár の結果の一般化であることに注意する．その証明は Kollár のホッジ理論に基づいた証明と異なり, 調和積分論に基づいている．調和積分論を用いた研究は [Ohs04], [Fn12], [Mat14] でも行われている．

上述のネフという概念はある種の数値的な半正値性の条件である．X が射影多様体のとき, ネフの定義は任意の曲線 C との交点数 $(F \cdot C)$ が非負であることと同値になる．(代数幾何ではこの条件がネフの定義となる.) 従って, ネフ直線束に対して単射性定理を期待するのは自然であるが, これに対しては反例が存在する．

適切に $\varepsilon \to 0$ での極限を取ることで, ネフ直線束 F は曲率が semi-positive な "特異" 計量を持つことがわかる．つまり, ネフ直線束は擬正な直線束 (定義は以下を参照) であることがわかる．

定義 5 (直線束の擬正性, 巨大性)**.**
(1) F が曲率が semi-positive な特異計量を許すとき, 擬正 (pseudo-effective) という．
(2) F が曲率が positive な特異計量を許すとき, 巨大 (big) であるという．

では, より一般に, 擬正な直線束に対して単射性定理はどのように定式化されるのだろうか．[Fn12] ではザリスキー開集合上で C^∞-級の特異計量に対する単射性定理が与えられている．定理 7 はこの問いに対する答えのひとつであり, [Fn12] の任意の特異計量への一般化である．定理 7 と今までの定理との関係を図で表すと以下のようになる．

$$\begin{tikzcd}
F\text{ の仮定}\begin{array}{c}\text{Kodaira の消滅定理}\\ \left\{\begin{array}{c}\text{複素幾何: } C^\infty\text{-級計量で曲率が正}\\ \text{代数幾何: 豊富 (ample)}\end{array}\right.\end{array} \arrow[r, "\text{単射性定理}", "\text{への一般化}"'] \arrow[d, "\text{特異計量への}"', "\text{一般化}"] & \begin{array}{c}\text{Kollár, Enoki の単射性定理}\\ \left\{\begin{array}{c}\text{複素幾何: } C^\infty\text{-級計量で曲率が半正}\\ \text{代数幾何: 半豊富 (semi-ample)}\end{array}\right.\end{array} \arrow[d, "\text{特異計量への}"', "\text{一般化}"] \\
\begin{array}{c}\text{Nadel, Kawamata-Viehweg の消滅定理}\\ \left\{\begin{array}{c}\text{複素幾何: 特異計量で曲率が正}\\ \text{代数幾何: 巨大 (big)}\end{array}\right.\end{array} \arrow[r, "\text{単射性定理}", "\text{への一般化}"'] & \begin{array}{c}\text{定理 7 の単射性定理}\\ \left\{\begin{array}{c}\text{複素幾何: 特異計量で曲率が半正}\\ \text{代数幾何: 擬正 (pseudo-effective)}\end{array}\right.\end{array}
\end{tikzcd}$$

定理 7 を述べる前に, 特異計量, その曲率, 乗数イデアル層の定義を復習する．簡単のため, 直線束 F の C^∞-級エルミート計量 g を固定する．ここで, C^∞-級エルミート計量とは, $x \in X$ でのファイバー F_x のエルミート内積 g_x の族 $\{g_x\}_{x \in X}$ であり, $x \in X$ について C^∞-級になるものである．雑に言えば, 特異計量とはこの C^∞-級という条件を弱めたエルミート計量のことである．X 上の L^1_{loc}-関数 φ に対して

$$h := g e^{-2\varphi}$$

の形のエルミート計量 h を特異計量といい, φ を (g に関する)h のウェイトという．特異計量 h の曲率はウェイト φ を用いて $\sqrt{-1}\Theta_h(F) := \sqrt{-1}\Theta_g(F) + 2\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi$ で定義される．関数 φ が C^∞-級のとき, h は (通常の)C^∞-級エルミート計量であり, そのチャーン曲率は上式で与えられるので, 上式は特異計量への自然な一般化になっている．微分 $\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi$ は Schwartz の超関数の意味での微分なので, 特異計量の曲率は C^∞-級の $(1,1)$-

形式でなく, 一般には $(1,1)$-カレントとなる. (ここでの微分を定義するために関数 φ に L^1_{loc}-性を要請している.) 特異計量の曲率は, $(1,1)$-カレントの意味で $\sqrt{-1}\Theta_h(F) \geq 0$ を満たすとき, semi-positive であるという. この条件は (局所的に) $\sqrt{-1}\Theta_h(F) = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi$ を満たす関数 ψ が多重劣調和であることと同値である. また, この ψ が強多重劣調和であるとき, その曲率は positive であるという.

乗数イデアル層 $\mathcal{I}(h)$ は開集合 $U \subset X$ に対して

$$\mathcal{I}(h)(U) := \mathcal{I}(\varphi)(U) := \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid |f|e^{-\varphi} \in L^2_{\mathrm{loc}}(U)\}$$

とおくことで定義される. 特異計量 h があある C^∞-級の $(1,1)$-形式 γ に対して $\sqrt{-1}\Theta_h(F) \geq \gamma$ を満たすとき, φ は局所的に C^∞-級関数と多重劣調和関数の和の形でかける. このとき h の乗数イデアル層は連接層になることが知られている.

特異計量の具体例を見てみよう.

例 6. テンソル冪 F^m の正則切断の族 $\{s_i\}_{i=1}^N$ に対して

$$\varphi := \frac{1}{2m}\log\left(\sum_{i=1}^{N}|s_i|^2_{g^m}\right)$$

とおくと, $h := ge^{-2\varphi}$ は (g の取り方によらない) 特異計量になる. その曲率は $\sqrt{-1}\Theta_h(F) = (1/m)\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\sum_{i=1}^N |s_i|^2$ となり, semi-positive であることもわかる. ($|s_i|$ は s_i を局所的に正則関数と見なしたときの絶対値である.) この h の "特異性" は多重劣調和関数 $(1/m)\log\sum_{i=1}^N |s_i|^2$ から定まっている. このような特異計量は代数的特異性 (algebraic singularities) を持つという. また, $\{s_i\}_{i=1}^N$ の定めるイデアル層が正規交差因子 D の定めるイデアル層 $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-D)$ になるような双有理写像 $\pi : \widetilde{X} \to X$ を取ると, 乗数イデアル層 $\mathcal{I}(h)$ は

$$\mathcal{I}(h) = \pi_*(K_{\widetilde{X}/X} - \lfloor\frac{1}{m}D\rfloor)$$

と記述できる. ここで, $\lfloor(1/m)D\rfloor$ は係数の切り捨てで出来る因子である. 右辺は代数幾何における乗数イデアル層の定義となる (例えば [Laz04] を参照).

擬正な直線束に対する単射性定理を紹介する.

定理 7 ([Mat13])**.** h を曲率が semi-positive な F の特異計量とする. このとき, $\sup_X |s|_{h^m} < \infty$ を満たす F^m の正則切断 $s (\neq 0)$ から誘導される以下の写像は単射である.

$$\Phi_s : H^q(X, K_X \otimes F \otimes \mathcal{I}(h)) \xrightarrow{\otimes s} H^q(X, K_X \otimes F^{m+1} \otimes \mathcal{I}(h^{m+1})).$$

注意 8. (1) 正則切断 s のノルムの関する条件は Φ_s を well-defined にするための仮定である. また, F の最小特異計量 $h_{\min}$ はこの条件を全ての正則切断に対して満たすので, F が擬正ならばいつでもこの定理を応用することができる. (最小特異計量 $h_{\min}$ については第 4 節を参照.)

(2) 定理の定式化のポイントは乗数イデアル層を用いる点にある. たとえ直線束がネフでも (ネフ直線束は常に擬正だが), 乗数イデアル層なしでは単射性定理は成立しない.

定理 7 の証明の概略

Enoki の単射性定理の証明と同様に調和積分論を使いたい. しかし, 特異計量 h はザリスキー開集合上でも C^∞-級とは限らない. そこで, ベルグマン核を用いた多重劣調和関数の近似定理 ([DPS01]) を用いて, 特異計量 h を以下を満たす特異計量の族 $\{h_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ で近似する.

- h_ε はザリスキー開集合 Y_ε 上で C^∞-級である.
- $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ に対して $h_{\varepsilon_2} \le h_{\varepsilon_1} \le h$ が成立する.
- $\mathcal{I}(h) = \mathcal{I}(h_\varepsilon)$ が成立する
- $\sqrt{-1}\Theta_{h_\varepsilon}(F) \ge -\varepsilon\omega$ が成立する.

条件 $\sup_X |s|_{h^m} < \infty$ から Y_ε は ε によらないとして良いことがわかる. h_ε は $Y = Y_\varepsilon$ 上 C^∞-級なので, この Y 上では調和積分論が応用できることになる. Y が非コンパクトである点に難しさが表れるが, 以下を満たす Y 上の完備ケーラー計量 $\widetilde{\omega}$ を取ることで解決できる (構成法は [Fn12] を参照).

- $\widetilde{\omega} \ge \omega$.
- 任意の $x \in X$ のある近傍上で $\widetilde{\omega} = \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\Phi$ を満たす有界関数 Φ が存在する.

有界ポテンシャルを持つという条件から, 以下の同型が得られる.

$$H^q(X, K_X \otimes F \otimes \mathcal{I}(h)) \cong \frac{\operatorname{Ker} \overline{\partial} : L^{n,q}_{(2)}(Y,F)_{h_\varepsilon,\widetilde{\omega}} \to L^{n,q+1}_{(2)}(Y,F)_{h_\varepsilon,\widetilde{\omega}}}{\operatorname{Im} \overline{\partial} : L^{n,q-1}_{(2)}(Y,F)_{h_\varepsilon,\widetilde{\omega}} \to L^{n,q}_{(2)}(Y,F)_{h_\varepsilon,\widetilde{\omega}}} \cong \mathcal{H}^{n,q}_{h_\varepsilon,\widetilde{\omega}}(F).$$

ここで, $\mathcal{H}^{n,q}_{h_\varepsilon,\widetilde{\omega}}(F)$ は h_ε と $\widetilde{\omega}$ に関する調和形式の集合である. この同型により, コホモロジー類 A を h_ε と $\widetilde{\omega}$ に関する調和形式 u_ε で代表できる.

Enoki の単射性定理の証明では, 曲率が semi-positive なので, su_ε が再び調和形式になる (即ち, $\overline{\partial}^* su_\varepsilon = 0$ が成立する). 我々の状況では, h_ε の曲率は semi-positive でないものの negativity が ε で抑えられている. 一方で, $K_X \otimes F$ ではなく乗数イデアル付きの連接層 $K_X \otimes F \otimes \mathcal{I}(h)$ を考えていることから, L^2-ノルム $\|u_\varepsilon\|_{h_\varepsilon,\widetilde{\omega}}$ が (ε に関して) 有界であることがわかる. これらの評価から, Enoki の証明を一般化して $\lim_{\varepsilon\to 0} \|\overline{\partial}^* su_\varepsilon\|_{h_\varepsilon^{m+1},\widetilde{\omega}} = 0$ を示すことができる. 即ち, su_ε は "漸近的には調和形式" だということがわかる.

我々の目的は単射を示すことなので, sA はコホモロジー類として零だと仮定してよい. この仮定から $\overline{\partial}$-方程式 $\overline{\partial} v_\varepsilon = su_\varepsilon$ が解 v_ε を持つことがわかる. この解 v_ε の L^2-ノルム $\|v_\varepsilon\|_{h_\varepsilon^{m+1},\widetilde{\omega}}$ が問題となる. 今の状況で $\|v_\varepsilon\|_{h_\varepsilon^{m+1},\widetilde{\omega}}$ が (ε に関して) 有界になるような v_ε を構成できれば証明は完成する. 実際,

$$\|su_\varepsilon\|^2_{h_\varepsilon^{m+1},\widetilde{\omega}} = \langle\!\langle su_\varepsilon, \overline{\partial} v_\varepsilon \rangle\!\rangle_{h_\varepsilon^{m+1},\widetilde{\omega}} \le \|\overline{\partial}^* su_\varepsilon\|_{h_\varepsilon^{m+1},\widetilde{\omega}} \|v_\varepsilon\|_{h_\varepsilon^{m+1},\widetilde{\omega}} \to 0$$

から u_ε が適切な意味で 0 に収束することが確認でき, そこから $A = 0$ が示される.

定理 7 の証明の鍵は, $\overline{\partial} v_\varepsilon = su_\varepsilon$ の解 v_ε をうまく構成し, L^2-ノルム $\|v_\varepsilon\|_{h_\varepsilon^{m+1},\widetilde{\omega}}$ を評価する点にある. もし考えている計量の曲率が positive ならば, 解 v_ε を $\|v_\varepsilon\|_{h_\varepsilon^{m+1},\widetilde{\omega}} \le C\|su_\varepsilon\|_{h_\varepsilon^{m+1},\widetilde{\omega}}$ を満たすように取れ, 右辺の有界性から問題は解決する. しかし, 今の状況では, h_ε の曲率は positive どころか semi-positive でもない. ここが証明の難しさのひとつである. 雰囲気として v_ε のノルムを su_ε のノルムで抑えたいので, $\overline{\partial}$-作用素が開写像になるというような主張をしたい. しかし, $\overline{\partial}$-作用素は閉作用素であるし, 考えている L^2-空間は ε に依存して変化するので, このままでは定式化もうまく出来ない. そこで, $\overline{\partial}$-方程式 $\overline{\partial} v_\varepsilon = su_\varepsilon$ をコバウンダリー作用素 δ を用いた方程式 $\delta W_\varepsilon = S_\varepsilon$ に変換することを考える. 実はコチェインの空間は ε に依らず, δ も開写像であることがわかる. この方程式 $\delta W_\varepsilon = S_\varepsilon$ を先に解いて良い解 W_ε を構成し, それから v_ε を得ることが出来る. v_ε の L^2-ノルムは, 極限 W_0 の取り方や単位の分割に依存し, 良い評価は出来ない. しかし, (ε に関して) 有界であるという我々の目的だけは達成できるという仕組みになっている. ここの議論はかなり技術的だが, 解の L^2-ノルムを評価するひとつの方法を与えてくれる. □

4. 消滅定理や高次順像への応用

この節では定理 7 に関連する結果や応用について紹介する. まずは, 定理 7 の議論の応用として得られる最小特異計量 $h_{\min}$ に対する Nadel 型の消滅定理を紹介する.

定理 9 ([Mat14], [Mat15a])**.** $h_{\min}$ を巨大な直線束 F の最小特異計量とする. このとき, 以下が成立する:

$$整数\ q > 0\ に対して,\ H^q(X, K_X \otimes F \otimes \mathcal{I}(h_{\min})) = 0.$$

最小特異計量 $h_{\min}$ とは, 曲率が semi-positive な計量の内で, 最も特異性がマイルドな計量である. h の曲率が positive のときには, $q > 0$ に対して $H^q(X, K_X \otimes F \otimes \mathcal{I}(h)) = 0$ が成立する. これが元々の Nadel, Kawamata-Viehweg の消滅定理であった ([Dem82], [Nad89], [Nad90], [Kaw82], [Vie82]). しかしながら, 最小特異計量 $h_{\min}$ の曲率は positive には成り得ない. また, 非代数的な特異性を持つ可能性がある. これらの困難を単射性定理のアイデアで解決する点が証明の鍵となる. 近年, Guan-Zhou により, 多重劣調和関数の乗数イデアル層に関する (strong) openness conjecture が解決された ([GZ15]). Hiệp や Lempert により別証明も与えられている ([Hie14], [Lem14]). この結果を用いると上の結果は既存の結果から従うことに注意する.

次に [FM16] の結果 (の一部) を紹介する. [FM16] 内では, より応用を見据えた乗数イデアル層付きの単射性定理を与えた. その証明では, 定理 7 の証明に現れるザリスキー開集合 Y_ε が ε に依存する場合を扱う必要は生じる. この場合には, Y_ε 上の完備ケーラー形式 $\omega_{\varepsilon,\delta} := \omega + \delta\widetilde{\omega}_\varepsilon$ を考え, これに関する調和形式 $u_{\varepsilon,\delta}$ の $\delta \to 0$, $\varepsilon \to 0$ での極限を注意深く調べていくことが必要となる. この定理と後述の定理 11 を組み合わせることで以下の応用を得る. 以下の応用は, それぞれ, Kollár の捻れ不在定理 (torsion free theorem), Kollár の消滅定理 ([Kol86a]), Höring の結果 ([Hör10]) の擬正な直線束への一般化である. なお, Kollár の消滅定理と Ohsawa の消滅定理 ([Ohs84]) の一般化が [Mat15b] で研究されている (関連する導来圏内での分解定理について [Fs15], [Kol86b], [Tke95] を参照).

定理 10 ([FM16])**.** $f : X \to Y$ をコンパクトケーラー多様体 X から射影多様体 Y への全射正則写像, h を F の曲率が semi-positive な特異計量とする.

(1) 高次順像 $R^q f_*(K_X \otimes F \otimes \mathcal{I}(h))$ には捻れがない (torsion free である).
(2) A を Y 上の ample な直線束とすると, 以下が成立する:

$$任意の\ p > 0\ と\ q\ に対して,\ H^p(Y, R^q f_*(K_X \otimes F \otimes \mathcal{I}(h)) \otimes A) = 0.$$

(3) さらに A が基点を持たないとすると, 任意の $q \geq 0$ と $m \geq \dim Y + 1$ に対して, $R^q f_*(K_X \otimes F \otimes \mathcal{I}(h)) \otimes A^{\otimes m}$ は大域切断で生成される.

以下の定理のお陰で, 乗数イデアルに関する命題 (例えば定理 10) を多様体の次元に関する数学的帰納法で証明することが可能になる. この定理はいくつかの論文では証明なしに使われているが, 繊細な問題を含んだ非自明な定理だと思われる. 実際, (少なくとも [FM16] の) 証明は非常に技術的であり繊細な側面がある. 例えば, $\Lambda \setminus \mathcal{G}$ が測度零になることなども期待されるが, (我々の証明では) そこまでは示せていない.

定理 11 ([FM16])**.** Λ を基点を持たない線形系 (ただし $\dim \Lambda \geq 1$), h を F の特異計量とする. このとき, 以下で定義される $\mathcal{G}$ は Λ 内で稠密である.

$$\mathcal{G} := \{H \in \Lambda \mid H\ は非特異で\ \mathcal{I}(h|_H) = \mathcal{I}(h)|_H が成立\}.$$

以下の結果は定理 7 のケーラー多様体の変形族への相対化である. ある種の非コンパクト多様体への一般化とも見なせる.

定理 12 ([Mat16a])**.** 写像 $\pi\colon \mathcal{X} \to Y$ を複素多様体 $\mathcal{X}$ から解析空間 Y への固有な全射ケーラー射とする．E を $\mathcal{X}$ 上の直線束で, h を曲率が semi-positive な E の特異計量とする．任意の相対コンパクトな $K \Subset X$ に対して $\sup_K |s|_{h^m} < \infty$ を満たす $E^m (m \geq 0)$ の正則切断 $s(\neq 0)$ を考える．このとき, s から誘導される以下の写像は (well-defined で) 単射である．

$$\Phi_s\colon R^q\pi_*(K_{\mathcal{X}} \otimes E \otimes \mathcal{I}(h)) \xrightarrow{\otimes s} R^q\pi_*(K_{\mathcal{X}} \otimes E^{m+1} \otimes \mathcal{I}(h^{m+1}))$$

この定理は, E が semi-ample のときは既に示されており, E が semi-positive のときは Takegoshi の結果 ([Tke95]) である．また, ザリスキー開集合上 C^∞-級の特異計量に対しては [Fn13] で既に示されている．定理 12 の証明は, [Tke95] の議論と [Mat13] の議論との組み合わせであり, かなり複雑となる．応用として, 以下の Nadel-Kawamata-Vieweg 型の消滅定理を得ることができる．これは [Cao14] の結果の射影多様体の変形族への相対化である．

定理 13. 写像 $\pi\colon \mathcal{X} \to Y$ を複素多様体 $\mathcal{X}$ から解析空間 Y への固有な全射射影射とする．E を $\mathcal{X}$ 上の直線束で, h を曲率が semi-positive な E の特異計量とする．このとき, 以下が成立する:

$$\text{任意の } q > f - \max_{t \text{ 上で}\pi\text{は滑らか}} \mathrm{nd}(F|_{X_t}, h|_{X_t}) \text{ に対して, } R^q\pi_*(K_X \otimes E \otimes \mathcal{I}(h)) = 0.$$

ここで f はファイバーの次元, $\mathrm{nd}(F|_{X_t}, h|_{X_t})$ は t に沿った数値的小平次元を意味する．

5. 対数的標準特異点への一般化

この節では, 単射性定理の対数的標準特異点 (log canonical singularities, LC 特異点と書く) への一般化を問う以下の予想を考える．この予想は, 代数的な状況 (即ち, X が非特異射影多様体で F が semi-ample の状況) で既に得られている結果 ([EV92], [Amb03], [Fn09] を参照) の複素幾何的な状況への一般化を問題にしている．

予想 14 ([Fn15, Conjecture 2.21], [Fn13, Problem 1.8])**.** D を X 上の単純正規交叉な因子, F を X 上の semi-positive な直線束とする．零点 $s^{-1}(0)$ が組 (X, D) の対数標準的階層 (LC strate) を含まない正則切断 $s \in H^0(X, F^m)$ を考える．このとき, 正則切断 s から誘導される以下の写像は単射であろう．

$$H^q(X, K_X \otimes D \otimes F) \xrightarrow{\otimes s} H^q(X, K_X \otimes D \otimes F^{m+1}).$$

以後, LC(log canonical), DLT(divisorial log terminal), PLT(purely log terminal), KLT(kawamata log terminal) などの専門用語が出てくるが, これら全て, 多様体 X と $\mathbb{Q}$-因子 D の組 (X, D) の特異点に関するクラスである (詳しくは [KM98] を参照)．LC, DLT, PLT, KLT の順に悪い特異点を持つことに注意する．

この予想の難しさ (面白さ) を説明しよう．組 (X, D) が KLT であることと (X, D) の (代数的に定義される) 乗数イデアル $\mathcal{J}(X, D)$ が自明になることは同値である．この意味で, 乗数イデアル層は非 KLT 的な情報を抽出するイデアルであり, 定理 7 は KLT 特異点に対する結果だと見なせる．その証明では, 乗数イデアル (=非 KLT イデアル) の L^2-可積分性を用いた解析的表示が有効に働いていた．一方で, 非 LC 的な情報を抽出するイデアル ([FST11] を参照) を解析的にどう扱うべきかはよくわかっていない．L^2-理論がうまく機能しない世界 (=LC の世界) で, どのように予想 14 を解析的に扱うかがこの問題の難しさ (面白さ) である．[Mat16a] では, (X, D) が PLT の場合にこの予想を解決した．

定理 15 ([Mat16a])**.** 予想 14 と同じ状況の下で, (X, D) が PLT(即ち, D の既約分解の $D = \sum D_i$ の既約因子 D_i が互いに交わらない) と仮定する．このとき, 予想 14 は正しい．

証明では (X,D) を KLT の組 $(X,(1-\varepsilon)D)$ で近似し, LC への収束の速度 (KLT からの離れ具合) を具体的に評価する点が鍵となる. その際には [Tke97] の技術と以下の強レフシェッツ定理 ([DPS01]) の精密化が使われる.

定理 16 ([Mat16a])**.** ω を X 上のケーラー形式, h を F の曲率が semi-positive な特異計量とする. h がザリスキー開集合上で C^{∞}-級であると仮定する. このとき, 任意の調和形式 $u \in \mathcal{H}^{n,q}_{h,\omega}(F)$ に対して以下が成立する.

$$*u \in H^0(X, \Omega_X^{n-q} \otimes F \otimes \mathcal{I}(h)).$$

ここで, Ω_X^{n-q} は正則 $(n-q)$-形式のなすベクトル束で, $*$ は ω に関するホッジ作用素である.

6. おわりに

定理 7 の証明は一般の特異計量を扱うためかなり技術的だが, 調和形式の漸近的な挙動を調べたり, $\overline{\partial}$-方程式の解の L^2-ノルムを評価したりなど, ここで確立された技術は, 他の局面でも役立つのではないかと期待している. また, 応用上は最小特異計量や極限で得られる特異計量を扱うことが多い. これらの計量の特異性を調べることは困難なので, 一般の特異計量に対して定式化しておく価値はあると思われる.

単射性定理は代数幾何的にはホッジ理論を用いて証明される. 本稿の議論はホッジ理論の複素幾何的な側面の研究とも見なせる. 今後, この研究を継続して,

- ホッジ理論の複素幾何・解析的な側面の研究
- 対数的標準特異点 (LC 特異点) に対する解析的な理論の構築

を目指したい. また, 第 1 節で述べた通り, 消滅定理や単射性定理の正則切断の拡張問題への応用を考えるのは自然である. この方向での今後の (とても) 大きな目標は, 多重種数の不変性に関連する正則切断の拡張問題 ([Siu98], [Siu02], [Tka97], [Pău07]) や DLT 対に対する正則切断の拡張予想 ([DHP13], [FG14]) への貢献である. 双有理幾何の最重要問題のひとつであるアバンダンス予想は, 非消滅予想 (non-vanishing conjecture) と DLT 拡張予想 (DLT extension conjecture) に分解できる. もちろん, どちらも極めて難しい予想である. 本稿では詳しく述べられなかったが, [FM16] の結果は [Dem15] の拡張定理 (の特別な場合) の一般化を与えている. また, [GM14] で DLT 拡張予想への応用が研究されている. [GM14] の結果により, 標準束に “良い”特異計量が存在すれば, DLT 拡張予想が解決されることがわかる. “良い”特異計量が存在すれば, $\chi(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$ なる X に対しては非消滅予想も解決される ([LP16]). 問題は “良い”特異計量の構成である. PLT の場合には [DHP13] で “良い”特異計量が構成され, PLT の仮定の下で DLT 拡張予想は解決されている. その構成には, Ohsawa-Takegoshi の L^2-拡張定理 ([OT87]) を用いて, 適切な正則切断の L^2-ノルムを制御する技術が重要な役割を果たしていた. 今後は “良い”特異計量を構成するために,

- Ohsawa-Takegoshi の L^2-拡張定理の研究

も行っていきたい.

References

[Amb03] F. Ambro, *Quasi-log varieties*, Tr. Mat. Inst. Steklova **240** (2003), Biratsion. Geom. Linein. Sist. Konechno Porozhdennye Algebry, 220–239.

[BCHM10] C. Birkar, P. Cascini, C. D. Hacon, and J. M^{c}Kernan, *Existence of minimal models for varieties of log general type*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), 405–468.

[Cao14] J. Cao, *Numerical dimension and a Kawamata-Viehweg-Nadel-type vanishing theorem on compact Kähler manifolds*, Compositio Math. **150** (2014), no. 11, 1869–1902.

[Dem82] J.-P. Demailly, *Estimations L^2 pour l'opérateur $\overline{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au-dessus d'une variété kählérienne complète*, Ann. Sci. École Norm. Sup(4). **15** (1982), no. 3, 457–511.

[Dem15] J.-P. Demailly, *Extension of holomorphic functions defined on non reduced analytic subvarieties*, Preprint, arXiv:1510.05230v1.

[DHP13] J.-P. Demailly, C. D. Hacon, and M. Păun, *Extension theorems, non-vanishing and the existence of good minimal models*, Acta Math. **210** (2013) 203–259.

[DPS01] J.-P. Demailly, T. Peternell, and M. Schneider, *Pseudo-effective line bundles on compact Kähler manifolds*, Internat. J. Math. **6** (2001), no. 6, 689–741.

[Eno90] I. Enoki, *Kawamata-Viehweg vanishing theorem for compact Kähler manifolds*, Einstein metrics and Yang-Mills connections (Sanda, 1990), 59–68.

[EV92] H. Esnault and E. Viehweg, *Lectures on vanishing theorems*, DMV Seminar, **20**. Birkhäuser Verlag, Basel, (1992).

[FG14] O. Fujino and Y. Gongyo, *Log pluricanonical representations and the abundance conjecture*, Compositio Math. **150** (2014), 593–620.

[Fn08] O. Fujino, *Kodaira vanishing theorem for log canonical varieties*, Hodge 理論, 退化, 特異点の代数幾何とトポロジー研究集会（第 4 回）報告集, (2008), on the web page of the author.

[Fn09] O. Fujino, *On injectivity, vanishing and torsion-free theorems for algebraic varieties*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **85** (2009), no. 8, 95–100.

[Fn12] O. Fujino, *A transcendental approach to Kollár's injectivity theorem*, Osaka J. Math. **49** (2012), no. 3, 833–852.

[Fn13] O. Fujino, *A transcendental approach to Kollár's injectivity theorem II*, J. Reine Angew. Math. **681** (2013), 149–174.

[Fn15] O. Fujino, *On semipositivity, injectivity, and vanishing theorems*, Preprint, a survey for Zucker 65, arXiv:1503.06503v3.

[FM16] O. Fujino and S. Matsumura, *Injectivity theorem for pseudo-effective line bundles and its applications*, Preprint, arXiv:1605.02284v1.

[FST11] O. Fujino, K. Schwede, and S. Takagi, *Supplements to non-lc ideal sheaves*, Higher dimensional algebraic geometry, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **24**, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, (2011), 1–46.

[Fs15] T. Fujisawa, *A remark on the decomposition theorem for direct images of canonical sheaves tensorized with semipositive vector bundles*, Preprint, arXiv:1512.03887v1.

[GM14] Y. Gongyo and S. Matsumura, *Versions of injectivity and extension theorems*, to appear in Ann. Sci. École Norm. Sup, arXiv:1406.6132v2.

[GZ15] Q. Guan and X. Zhou, *Strong openness conjecture for plurisubharmonic functions*, to appear in Invent. Math. (2015).

[Hie14] P. H. Hiệp, *The weighted log canonical threshold*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **352** (2014), no. 4, 283–288.

[Hör10] A. Höring, *Positivity of direct image sheaves –a geometric point of view*, Enseign. Math. (2) **56** (2010), no. 1-2, 87–142.

[Kaw82] Y. Kawamata, *A generalization of Kodaira-Ramanujam's vanishing theorem*, Math. Ann. **261** (1982), no. 1, 43–46.

[Kol86a] J. Kollár, *Higher direct images of dualizing sheaves I*, Ann. of Math. (2) **123** (1986), no. 1, 11–42.

[Kol86b] J. Kollár, *Higher direct images of dualizing sheaves II*, Ann. of Math. (2) **124** (1986), no. 1, 171–202.

[KM98] J. Kollár and S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Mathematics, **134**, Cambridge University Press, Cambridge, (1998).

[Laz04] R. Lazarsfeld, *Positivity in Algebraic Geometry I-II*, A Series of Modern Surveys in Mathematics, **48, 49**, Springer Verlag, Berlin, (2004).

[Lem14] L. Lempert, *Modules of square integrable holomorphic germs*, Preprint, arXiv:1404.0407v2.

[LP16] V. Lazić and T. Peternell, *Abundance for varieties with many differential forms*, Preprint, arXiv:1601.01602v1.

[Mat13] S. Matsumura, *An injectivity theorem with multiplier ideal sheaves of singular metrics with transcendental singularities*, to appear in J. Algebraic Geom, arXiv:1308.2033v4.

[Mat14] S. Matsumura, *A Nadel vanishing theorem via injectivity theorems*, Math. Ann. **359** (2014), no. 3–4, 785–802.

[Mat15a] S. Matsumura, *A Nadel vanishing theorem for metrics with minimal singularities on big line bundles*, Adv. Math. **280** (2015), 188–207.

[Mat15b] S. Matsumura, *A vanishing theorem of Kollár-Ohsawa type on compact Kähler manifolds*, to appear in Math. Ann, arXiv:1511.04222v2.

[Mat16a] S. Matsumura, *An injectivity theorem with multiplier ideal sheaves for higher direct images under Kähler morphisms*, Preprint, arXiv:1607.05554v1.

[Mat16b] S. Matsumura, *A transcendental approach to injectivity theorem for log canonical pairs*, Preprint, arXiv:1607.07213v1.

[Nad89] A. M. Nadel, *Multiplier ideal sheaves and existence of Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **86** (1989), no. 19, 7299–7300.

[Nad90] A. M. Nadel, *Multiplier ideal sheaves and Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature*, Ann. of Math. (2) **132** (1990), no. 3, 549–596.

[Ohs84] T. Ohsawa, *Vanishing theorems on complete Kähler manifolds*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **20** (1984), no. 1, 21–38.

[OT87] T. Ohsawa and K. Takegoshi, *On the extension of L^2 holomorphic functions,* Math. Z. **195** (1987), no. 2, 197–204.

[Ohs04] T. Ohsawa, *On a curvature condition that implies a cohomology injectivity theorem of Kollár-Skoda type*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **41** (2005), no. 3, 565–577.

[Pău07] M. Păun, *Siu's invariance of plurigenera: a one-tower proof*, J. Differential Geom. **76** (2007), no. 3, 485–493.

[Siu98] Y.-T. Siu, *Invariance of plurigenera*, Invent. Math. **134** (1998), no. 3, 661–673.

[Siu02] Y.-T. Siu, *Extension of twisted pluricanonical sections with plurisubharmonic weight and invariance of semipositively twisted plurigenera for manifolds not necessarily of general type*, Complex geometry (Göttingen, 2000), 223–277, Springer, Berlin, (2002).

[Sko78] H. Skoda, *Morphismes surjectifs de fibrés vectoriels semi-positifs*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **11** (1978), no. 4, 577–611.

[Tka97] S. Takayama, *On the invariance and the lower semi-continuity of plurigenera of algebraic varieties*, J. Algebraic Geom. **16** (2007), no. 1, 1–18.

[Tke95] K. Takegoshi, *Higher direct images of canonical sheaves tensorized with semi-positive vector bundles by proper Kähler morphisms*, Math. Ann. **303** (1995), no. 3, 389–416.

[Tke97] K. Takegoshi, *On cohomology groups of nef line bundles tensorized with multiplier ideal sheaves on compact Kähler manifolds*, Osaka J. Math. **34** (1997), no. 4, 783–802.

[Tan71] S. G. Tankeev, *On n-dimensional canonically polarized varieties and varieties of fundamental type*, Math. USSR-Izv. **5** (1971), no. 1, 29–43.

[Vie82] E. Viehweg, *Vanishing theorems*, J. Reine Angew. Math. **335** (1982), 1–8.