日本数学会

2015年度秋季総合分科会

函数論分科会
講演アブストラクト

2015年9月

於　京都産業大学

函　数　論

9月13日(日)　　第IX会場

9:30〜12:00			(分)	頁
1	西 本 勝 之 (デカルト出版)*	The solutions to the Laplace's non-homogeneous ordinary differential equations by means of the N-fractional calculus	(15)	1
2	尾 和 重 義 (大和大教育)*	Notes on some conditions for univalency	(10)	3
3	黒 木 和 雄 (大阪体育大)	Some starlikeness conditions concerned with the second coefficient	(15)	5
4	早 味 俊 夫 (摂南大理工)	Notes on the convex combinations of harmonic univalent functions	(15)	7
5	大野林太郎 (東北大情報)	Conditions and properties of concave functions	(15)	9
6	坪 井 成 文 (東工大理工)*	The defects of power series in the unit disk with Hadamard gaps	(15)	11
7	大 野 貴 雄 (大分大教育福祉)* 下 村 哲 (広島大教育)	Trudinger's inequality for Riesz potentials of functions in Musielak–Orlicz spaces on metric measure spaces	(15)	13
8	西 尾 昌 治 (阪市大理)♭	Reproducing kernel for iterated parabolic operators on the upper half space	(15)	15
9	田 中 清 喜 (阪市大数学研)	多重調和ベルグマン空間とその再生核	(10)	17

14:15〜16:15				
10	木 坂 正 史 (京大人間環境) 川 平 友 規 (東工大理工)	A mechanism of appearing small copies of the Mandelbrot set	(15)	19
11	李 正 勲 (名大多元数理)	J-stability of immediately expanding rational maps in non-Archimedean dynamics	(10)	21
12	奥 山 裕 介 (京都工繊大工芸)	Equidistribution of rational functions having a superattracting periodic point	(15)	23
13	角 大 輝 (阪大理)	Complex analogues of the Takagi function in random complex dynamics	(15)	25
14	イェーリッシュヨハネス (島根大総合理工) 角 大 輝 (阪大理)	Hölder regularity of the complex analogues of the Takagi function	(15)	27
15	中 根 静 男 (東京工芸大)	Stretching rays for complex cubic polynomials	(15)	29
16	梶 野 直 孝 (神戸大理)	Apollonian gasket 上の Laplacian とその Weyl 型固有値漸近挙動	(15)	31

16:30〜17:30　特別講演				
	鈴 木 紀 明 (名城大理工)*	多項式近似とポテンシャル論		33

9月14日(月)　第IX会場

9:30〜12:00

13:15〜14:15　特別講演

9月15日(火)　第IX会場

9:15〜12:00

The Solutions to The Laplace's Non-Homogeneous Ordinary Differential Equations by Means of The N- Fractional Calculus

Katsuyuki Nishimoto

Abstract

In this article, the solutions to the non-homogeneous ordinary differential equations with linear coefficients,

$$\varphi_2 \cdot (az + b) + \varphi_1 \cdot (gz + h) + \varphi \cdot (pz + q) = f,$$

$$\left(\begin{array}{c} \varphi_\nu = d^\nu \varphi / dz^\nu \text{ for } \nu > 0, \quad \varphi_0 = \varphi = \varphi(z), \\ a, b, g, h, p, q \ : \textit{constants}, \quad agp \neq 0, \ f = f(z) \neq 0 \end{array} \right)$$

which are called as " the Laplace's ordinary differential equations ", are discussed by means of the N (Nishimotto's) - fractional calculus (NFC-Method) (The calculus in the 21th Century).

One of the solution to the equations above is shown as follows, for example,

$$\varphi = e^{\sigma z}\left(G(z) \cdot H(z) \right)_{-(1+\delta)} + M e^{\sigma z} \equiv \overset{*}{\varphi}_{[1]}$$

in the fractional differintegrated form.

Where $\quad \rho = (-g \pm \sqrt{g^2 - 4ap})/2a \equiv \begin{cases} \sigma & \textit{with } + \textit{ for } \pm \\ \varepsilon & \textit{with } - \textit{ for } \pm \end{cases} \quad (a \neq 0)$

$$G(z) = \left(\frac{(f \cdot e^{-\sigma z})_\delta}{az + b} \cdot e^{w_{-1}} \right)_{-1} + L, \qquad H(z) = e^{-w}, \qquad az + b \neq 0,$$

$$\delta = -(\sigma^2 b + \sigma h + q)/(2\sigma a + g), \quad 2\sigma a + g \neq 0,$$

$$w = w(z) = (Az + B)/(az + b), \quad az + b \neq 0,$$

$$A = 2\sigma a + g \qquad \text{and} \qquad B = a\delta + 2\sigma b + h,$$

respectively, and L and M are the additional *arbitrary constants for the* integrations.

Notes on some conditions for univalency

Shigeyoshi Owa (Yamato University)

Let $\mathcal{A}$ be the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. The subclass of $\mathcal{A}$ consisting of functions $f(z)$ which are univalent in $\mathbb{U}$ is denoted by $\mathcal{S}$. Also, let $\mathcal{S}^*(\alpha)$ denote the subclass of $\mathcal{S}$ consisting of functions $f(z)$ which are starlike of order $\alpha\,(0 \leqq \alpha < 1)$ in $\mathbb{U}$. We write that $\mathcal{S}^*(0) \equiv \mathcal{S}^*$.

In 1972, S. Ozaki and M. Nunokawa (Proc. Amer. Math. Soc. 33(1972)) have given

Theorem A *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$\mathrm{Re}\left(\frac{f(z)^2}{z^2 f'(z)}\right) > \frac{1}{2} \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

then $f(z) \in \mathcal{S}$.

Further, M. Nunokawa, M. Obradović and S. Owa (Proc. Amer. Math. Soc. 106(1989)) have shown

Theorem B *Let $f(z) \in \mathcal{A}$ and $f(z)/z \neq 0\,(0 < |z| < 1)$. If $f(z)$ satisfies*

$$\left|\left(\frac{z}{f(z)}\right)''\right| \leqq 1 \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

then $f(z) \in \mathcal{S}$.

Definition 1 Let $f(z) \in \mathcal{A}$ and $f(z)/z \neq 0\,(0 < |z| < 1)$. If $f(z)$ satisfies

$$\left|\frac{z^2 f'(z)}{f(z)^2} - \lambda z^2 \left(\frac{z}{f(z)}\right)'' - 1\right| < \mu \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some complex number λ with $\mathrm{Re}(\lambda) \geqq 0$ and some real number $\mu > 0$, then we say that $f(z) \in \mathcal{H}(\lambda, \mu)$.

Theorem 1 $\mathcal{H}(\lambda, \mu) \subset \mathcal{S}$ *for* $\mathrm{Re}(\lambda) \geqq 0$ *and* $0 < \mu \leqq |1 + 2\mu|$.

Corollary 1 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ with $f(z)/z \neq 0\,(0 < |z| < 1)$ satisfies*

$$\left| \left(\frac{z}{f(z)} \right)'' \right| \leqq 2 \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

then $f(z) \in \mathcal{S}$.

In 1976, S. S. Miller and E. Zlotkiewicz (Proc. Amer. Math. Soc. 56(1976)) have proved

Theorem C *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$\operatorname{Re}\left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \right\} > 0 \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

then $f(z) \in \mathcal{S}^*$.

Furthermore, C. Ramesha, S. Kumar and K. S. Padmanabhan (Chinese J. Math. 23(1995)) have considered

Theorem D *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$\operatorname{Re}\left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \left(1 + \alpha \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \right\} > -\frac{\alpha}{2} \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some real $\alpha \geqq 0$, then $f(z) \in \mathcal{S}^*$.

Theorem 2 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$\operatorname{Re}\left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \left(1 + \alpha \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \right\} > -\frac{\alpha^2}{4}(1-\alpha) \quad (z \in \mathbb{U})$$

for some real $\alpha\,(0 \leqq \alpha < 2)$, then $f(z) \in \mathcal{S}^*(\frac{\alpha}{2})$.

Finally, M. Obradović (Current Topics in Analytic Function Theory, 1992) has considered

Theorem E *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right) \right| < \frac{1}{6} \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

then $f(z) \in \mathcal{S}^*$.

Theorem 3 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right) \right| < \frac{3}{2} \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

then $f(z) \in \mathcal{S}^*$.

Some starlikeness conditions concerned with the second coefficient

Kazuo Kuroki (Osaka University of Health and Sport Sciences)

Let $\mathcal{H}$ denote the class of functions $f(z)$ which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. For a positive integer n, let $\mathcal{A}_n$ be the class of functions $f(z) \in \mathcal{H}$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k$$

with $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$. The subclass of $\mathcal{A}$ consisting of all univalent functions $f(z)$ in $\mathbb{U}$ is denoted by $\mathcal{S}$. In 1972, Ozaki and Nunokawa [2] proved a univalence criterion for $f(z) \in \mathcal{A}$.

Lemma 1 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$\left| \frac{z^2 f'(z)}{\big(f(z)\big)^2} - 1 \right| < 1 \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

then $f(z) \in \mathcal{S}$.

Moreover, let $\mathcal{T}_n(\mu)$ denote the class of functions $f(z) \in \mathcal{A}_n$ which satisfy the inequality

$$\left| \frac{z^2 f'(z)}{\big(f(z)\big)^2} - 1 \right| < \mu \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some real number μ with $0 < \mu \leqq 1$ and $\mathcal{T}_n(1) = \mathcal{T}_n$. The assertion in Lemma 1 gives us that $\mathcal{T}_n(\mu) \subset \mathcal{T}_n \subset \mathcal{S}$.

A function $f(z) \in \mathcal{A}$ is said to be starlike of order α in $\mathbb{U}$ if it satisfies

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z f'(z)}{f(z)} \right) > \alpha \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some real number α with $0 \leqq \alpha < 1$. This class is denoted by $\mathcal{S}^*(\alpha)$ and $\mathcal{S}^*(0) = \mathcal{S}^*$. It is well-known that $\mathcal{S}^*(\alpha) \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$.

Singh [3] discussed starlikeness for $f(z) \in \mathcal{T}_2(\mu)$ as follows.

Lemma 2 *If $f(z) = z + \sum_{k=3}^{\infty} a_k z^k \in \mathcal{A}_2$ satisfies*

$$\left| \frac{z^2 f'(z)}{\big(f(z)\big)^2} - 1 \right| < \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

then $f(z) \in \mathcal{S}^*$. *This means that* $\mathcal{T}_2(\mu)$ *is a subclass of* $\mathcal{S}^*$ *for* $0 < \mu \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Furthermore, Kuroki, Hayami, Uyanik and Owa [1] deduced some sufficient condition for $f(z) \in \mathcal{A}_n$ to be starlike of order α in $\mathbb{U}$.

Lemma 3 *If* $f(z) \in \mathcal{A}_n$ *with* $n \neq 1$ *satisfies*

$$\left| \frac{z^2 f'(z)}{\big(f(z)\big)^2} - 1 \right| < \frac{(n-1)(1-\alpha)}{\sqrt{(n-1+\alpha)^2 + (1-\alpha)^2}} \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some real number α *with* $0 \leqq \alpha < 1$, *then* $f(z) \in \mathcal{S}^*(\alpha)$.

In view of Lemma 2, Singh [3] discussed some starlikeness condition for $f(z) \in \mathcal{A}$ missing the second coefficient a_2. In the present talk, by considering starlikeness of order α for $f(z) \in \mathcal{A}$ with $a_2 \neq 0$, we discuss some starlikeness conditions concerned with the second coefficient a_2.

Theorem 1 *If* $f(z) = z + \sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k z^k \in \mathcal{A}$ *satisfies*

$$\left| \frac{z^2 f'(z)}{\big(f(z)\big)^2} - 1 \right| < \frac{(1-\alpha)\sqrt{2(1+\alpha^2) - |a_2|^2} - (1-\alpha+2\alpha^2)|a_2|}{2(1+\alpha^2)} \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some real number α *with* $0 \leqq \alpha < 1$, *then* $f(z) \in \mathcal{S}^*(\alpha)$.

Remark 1 If we take $a_2 = 0$ in Theorem 1, then we obtain Lemma 3 with $n = 2$.

References

[1] K. Kuroki, T. Hayami, N. Uyanik and S. Owa, *Some properties for a certain class concerned with univalent functions*, Comp. Math. Appl. **63** (2012), 1425–1432.

[2] S. Ozaki and M. Nunokawa, *The Schwarzian derivative and univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **33** (1972), 392–394.

[3] V. Singh, *On a class of univalent functions*, Internat. J. Math. Math. Sci. **23** (12) (2000), 855–857.

Notes on the convex combinations of harmonic univalent functions

Toshio Hayami (Setsunan University)

A twice continuously differentiable real-valued function $\varphi(x,y)$ is real harmonic in $D \subset \mathbb{R}^2$ if and only if it satisfies Laplace's equation

$$\Delta\varphi = \varphi_{xx}(x,y) + \varphi_{yy}(x,y) = 0 \qquad ((x,y) \in D)$$

where the subscripts indicate partial derivatives.

Let $\mathbb{D}$ be a simply connected domain on the complex plane $\mathbb{C}$. A continuous complex-valued function $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ $(z = x+iy \in \mathbb{D})$ is harmonic in $\mathbb{D}$ if both $u(x,y)$ and $v(x,y)$ are real harmonic in $\mathbb{D}$. They are not necessarily harmonic conjugates.

Theorem A (*cf.* [2, pp.7]) *A complex-valued function $f(z)$ is harmonic in $\mathbb{D}$ if and only if $f(z)$ has the canonical decomposition*

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$$

where $h(z)$ and $g(z)$ are analytic in $\mathbb{D}$. This representation is unique except for an additive constant.

We call $h(z)$ the analytic part and $\overline{g(z)}$ the co-analytic part of $f(z)$. Let $\mathcal{H}$ be the class of all functions $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ which are harmonic and sense-preserving in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z : z \in \mathbb{C} \text{ and } |z| < 1\}$ and normalized by $f(0) = h'(0) - 1 = 0$. Since $h(z)$ and $g(z)$ are analytic in $\mathbb{U}$ and the representation of harmonic functions is unique, $f(z) \in \mathcal{H}$ has the following power series expansion

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n} \qquad (|b_1| < 1).$$

Let $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ denote the subclass of $\mathcal{H}$ consisting of all univalent functions in $\mathbb{U}$. This class is preserved under some elementary transformations. Here is a partial list.

(i) Conjugation *If $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$, then the function*

$$F(z) = \overline{f(\overline{z})} = \overline{h(\overline{z})} + \overline{\overline{g(\overline{z})}} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}.$$

(ii) Dilatation and rotation *If $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$, then the function*

$$F(z) = \alpha^{-1} f(\alpha z) = \alpha^{-1} h(\alpha z) + \overline{\overline{\alpha^{-1}} g(\alpha z)} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$$

for any complex number α $(0 < |\alpha| \leqq 1)$.

(iii) Disk automorphism *If $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$, then the function*

$$F(z) = \frac{f\left(\dfrac{z+\xi}{1+\overline{\xi}z}\right) - f(\xi)}{(1-|\xi|^2)\,h'(\xi)} = \frac{h\left(\dfrac{z+\xi}{1+\overline{\xi}z}\right) - h(\xi)}{(1-|\xi|^2)\,h'(\xi)} + \overline{\left\{\frac{g\left(\dfrac{z+\xi}{1+\overline{\xi}z}\right) - g(\xi)}{(1-|\xi|^2)\,\overline{h'(\xi)}}\right\}} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$$

for any $\xi \in \mathbb{U}$.

(iv) Affine transformation *If $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$, then the function*

$$F(z) = \varphi_{\varepsilon} \circ f(z) \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$$

for an affine mapping $\varphi_{\varepsilon}(z) = (1-\varepsilon b_1)z + \varepsilon\overline{z}$, where ε satisfies

$$\left|\varepsilon + \frac{\overline{b_1}}{1-|b_1|^2}\right| < \frac{1}{1-|b_1|^2}.$$

We now note that even if $f_1(z)$ and $f_2(z)$ are univalent in $\mathbb{U}$, the convex combination of $f_1(z)$ and $f_2(z)$ is not necessarily univalent in $\mathbb{U}$. For example, although

$$f_1(z) = \frac{2z-z^2}{2(1-z)^2} + \overline{\frac{z^2}{2(1-z)^2}} \quad \text{and} \quad f_2(z) = -if_1(iz) = \frac{2z-iz^2}{2(1-iz)^2} + \overline{\frac{-iz^2}{2(1-iz)^2}}$$

are in the class $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$, the convex combination $f_3(z)$ of these functions defined as

$$f_3(z) = tf_1(z) + (1-t)f_2(z) \qquad (0 < t < 1)$$

is ***not*** a member of $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$.

In the present talk, we discuss some conditions for $f_3(z)$ to belong to $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$.

References

[1] J. Clunie and T. Sheil-Small, *Harmonic univalent functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I **9**(1984), 3–25.

[2] P. L. Duren, *Harmonic Mappings in the Plane*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[3] T. Hayami, *Coefficient conditions for harmonic close-to-convex functions*, Abstr. Appl. Anal. Vol.2012, Article ID 413965, 1–12.

[4] T. Hayami, *A sufficient condition for p-valently harmonic functions*, Complex Var. Elliptic Equ. **59**(2014), 1214–1222.

[5] H. Lewy, *On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **42**(1936), 689–692.

Conditions and properties of concave functions

Rintaro Ohno (Tohoku University)*

1. Introduction

Similar to starlike or convex functions, concave functions define a special class in the geometric function theory. Let $\widehat{\mathbb{C}}$ be the Riemann sphere and $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ the open unit disk in the complex plane $\mathbb{C}$. A meromorphic function f is said to be *concave*, if it maps $\mathbb{D}$ conformally onto a concave domain, i.e. $\widehat{\mathbb{C}} \backslash f(\mathbb{D})$ is convex. Further, let $q \in \mathbb{D}$. A meromorphic function f_q is said to be in the class $\mathcal{C}o_q$, if it is concave and has a simple pole at q.

In particular, it is commonly known that a function f_0 belongs to $\mathcal{C}o_0$ if and only if

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf_0''(z)}{f_0'(z)}\right) < 0$$

for all $z \in \mathbb{D}$ (see [2] for details). For the class $\mathcal{C}o_q$ with general q the inequality

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf_q''(z)}{f_q'(z)} + \frac{z+q}{z-q} - \frac{1+\bar{q}z}{1-\bar{q}z}\right) < 0 \tag{1}$$

is a necessary and sufficient condition, provided by Pfaltzgraff and Pinchuk in [3].

Concave functions of class $\mathcal{C}o_q$ can be expanded as

$$f_q(z) = \frac{\operatorname{Res}_q f_q}{z-q} + c_0(f_q) + c_1(f_q)\,(z-q) + \cdots . \tag{2}$$

2. Main Theorem and Applications

In the talk we will show the following:

Theorem 1. [1] *Let $p, q \in (-1, 1)$. A meromorphic function f_q with simple pole at q belongs to the class $\mathcal{C}o_q$ if and only if for all $z \in \mathbb{D}$*

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\Bigg(1 - q^2 + &\frac{2p(1-q^2)}{1+p^2} \cdot \frac{1-qz}{z-q} \\ &- \left(\frac{z-q}{1-qz} + p\right)\left(1 + p\frac{z-q}{1-qz}\right)\left(\frac{2q}{1+p^2} + \frac{1-qz}{1+p^2}\frac{f_q''(z)}{f_q'(z)}\right)\Bigg) < 0.\end{aligned} \tag{3}$$

As an application of this we obtain

$$\left|1 + (1-q^2)^2 \frac{c_1(f_q)}{c_{-1}(f_q)}\right| \leq 2 \tag{4}$$

for $\{c_{-1}(f_q), c_1(f_q)\}$ and

$$\left|\frac{1+p^2}{3p} - q + (1-q^2)^3 \frac{c_2(f_q)}{c_{-1}(f_q)}\right| \leq \frac{1+p^2}{3p^2}(1 + |p| - pq + p^2). \tag{5}$$

This work was supported by Grant-in-Aid for JSPS Fellows No $(26 \cdot 2855)$.
2000 Mathematics Subject Classification: 30C45.
Keywords: univalent functions, concave functions.
* e-mail: `rohno@ims.is.tohoku.ac.jp`
web: `http://www.math.is.tohoku.ac.jp/~sugawa/rohno/`

for $\{c_{-1}(f_q), c_2(f_q)\}$ with arbitrary $p \in (-1, 1)$.

This leads to

$$\left|1 + \frac{c_1(f_0)}{c_{-1}(f_0)}\right| \leq 2,$$

and

$$-\frac{4}{3} \leq \mathrm{Re}\frac{c_2(f_0)}{c_{-1}(f_0)} \leq \frac{4}{3}$$

for the coefficients of functions in the class $\mathcal{C}o_0$.

References

[1] Rintaro Ohno, *An extension of necessary and sufficient conditions for concave functions*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 91 (2015), no. 1, 1-4.

[2] Rintaro Ohno, *Characterizations for concave functions and integral representations*, Topics in Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis, Tohoku University Press, Sendai (2013), 203-216.

[3] J. Pfaltzgraff and B. Pinchuk, *A variational method for classes of meromorphic functions*, J. Analyse Math. **24** (1971), 101-150.

The defects of power series in the unit disk with Hadamard gaps

Narufumi Tsuboi

はじめに Nevanlinna 理論のための記号の準備をする. 複素関数 $f(z)$ は $D(R)=\{z\in\mathbf{C};\ |z|<R\}$, $(0<R\le\infty)$ で有理型かつ $f(0)\ne 0,\infty$ とする.

$$\log^+ x=\max\{\log x,0\}$$

とおき、

$$m(r,f)=m(r,f,\infty)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta$$

と表す. これを関数 $f(z)$ の **接近関数** と呼ぶ. また, $n(t,f)=n(t,f,\infty)$ を $f(z)$ の $D(t)$ における極の個数とし,

$$N(r,f)=\int_0^r\frac{n(t,f)}{t}dt$$

と表す. これを関数 $f(z)$ の **個数関数** と呼ぶ. **Nevanlinna の第一主要定理** は 任意の $a\in\mathbf{C}$ に対して,

$$m\Big(r,\frac{1}{f-a}\Big)+N\Big(r,\frac{1}{f-a}\Big)=m(r,f)+N(r,f)+O(1)$$

が成立することを主張する. ここに, $O(1)$ は $f(z)$ と a には依存しても, r には依存しない有界な項を表す. $T(r,f)=m(r,f)+N(r,f)$ とおけば, 第一主要定理は

$$T\Big(r,\frac{1}{f-a}\Big)=T(r,f)+O(1)$$

と書くこともできる. $T(r,f)$ を $f(z)$ の **特性関数** または **位数関数** と呼ぶ. $\lim_{r\to R}T(r,f)=\infty$ のとき, $\delta(a,f)$ $\big(a\in\mathbf{C}\cup\{\infty\}\big)$ を

$$\delta(a,f)=\begin{cases}\underline{\lim}\ m(r,a)/T(r,f)=1-\overline{\lim}\ N(r,a)/T(r,f) & \text{if } a\in\mathbf{C}\\ \underline{\lim}\ m(r,f)/T(r,f)=1-\overline{\lim}\ N(r,f)/T(r,f) & \text{if } a=\infty\end{cases}$$

で定義する．ここに

$$m(r,a)=m\Bigl(r,\frac{1}{f-a}\Bigr),\ N(r,a)=N\Bigl(r,\frac{1}{f-a}\Bigr)$$

であり，定義から $0\le\delta(a,f)\le 1$ である．この $\delta(a,f)$ を a の **除外指数** という．除外指数 $\delta(a,f)$ は，$f(z)$ の a 点の，ある意味での少なさの度合いを示すと考えられる．

以下では $R=1$ かつ $f(z)$ が解析関数の場合を考える．いま，単位円板 $D=D(1)$ 上で解析的な関数 $f(z)$ を $z=0$ を中心として冪級数展開したとき，ある正定数 $q>1$ が存在して，

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{n_k},\ n_0=0,\ n_{k+1}/n_k\ge q\ (k\ge 1)$$

と表されたとする．条件 $n_{k+1}/n_k\ge q$ を **Hadamard の間隙条件** という．Hadamard 間隙条件のように，数列 $n_1,n_2,\cdots$ が k と比べて速く発散するとき，それをスペクトル集合に持つ冪級数や三角級数は特異な現象を引き起こすことがある．Hadamard 間隙をもつ冪級数の値分布に関して，次の定理が知られている ([1])．

定理 1. $\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2=\infty$ のとき (かつそのときに限り) $\lim_{r\to 1}T(r,f)=\infty$
定理 2. $\limsup_{k\to\infty}|c_k|>0$ ならば，任意の $a\in\mathbf{C}$ に対し $\liminf_{r\to 1}m(r,a)<\infty$

これらより，$\limsup_{k\to\infty}|c_k|>0$ のとき，任意の $a\in\mathbf{C}$ に対して $\delta(a,f)=0$ となることがわかる．特に，$f(z)$ の a 点は無数に存在することがわかる．

ところで，定理 1 より，$\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2=\infty$ であれば $f(z)$ の特性関数は発散し，よって除外指数を論じることが可能なのであるから，自然に次の問題が生じる．

問題. $\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2=\infty$ かつ $\lim_{k\to\infty}c_k=0$ のとき，任意の $a\in\mathbf{C}$ に対して $\delta(a,f)=0$ となるか．

本講演ではこの問題を取り扱う．

参考文献

[1] T. Murai, *Sur la distribution des valeurs des séries lacunaires*, J. London Math. Soc. (2), 21 (1980), 93-110.

Trudinger's inequality for Riesz potentials of functions in Musielak-Orlicz spaces on metric measure spaces

大野 貴雄　(大分大学・教育福祉科学部)
下村　哲　(広島大学・教育学部)

本講演では，距離測度空間上の Musielak-Orlicz 空間に属する関数のリースポテンシャル $I_\alpha f$ の Trudinger の不等式について紹介する．

d は集合 X 上の距離関数とし，$d_X = \sup\{d(x,y) : x,y \in X\}$ とする．μ は X 上非負で完備な Borel 正則外測度とし，$\mu(X) < \infty$ かつ 2 倍条件を満たすとする：ここに，μ が X 上 2 倍条件を満たすとは，ある定数 $c_0 > 0$ が存在して，

$$\mu(B(x,2r)) \le c_0 \mu(B(x,r)) \quad (x \in X, 0 < r < d_X).$$

上記で定義された距離測度空間 (X,d,μ) を X と表すことにする．

$$0 < Q^- := \inf_{x\in X} Q(x) \le \sup_{x \in X} Q(x) =: Q^+ < \infty$$

を満たす X 上の可測関数 $Q(x)$ に対して，μ が X 上 lower Ahlfors $Q(x)$-regular を満たすとは，ある定数 $c_1 > 0$ が存在して，

$$\mu(B(x,r)) \ge c_1 r^{Q(x)} \quad (x \in X, 0 < r < d_X).$$

関数 $\Phi(x,t) = t\phi(x,t) : X \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ は次を満たすものを考える：

(Φ1) $\phi(\,\cdot\,,t)$ は X 上可測関数で $\phi(x,\,\cdot\,)$ は $[0,\infty)$ 上連続関数である;

(Φ2) 定数 $A_1 \ge 1$ が存在して，$A_1^{-1} \le \phi(x,1) \le A_1 \quad (x \in X)$;

(Φ3) 定数 $\varepsilon_0 > 0, A_2 \ge 1$ が存在して，$t^{-\varepsilon_0}\phi(x,t) \le A_2 s^{-\varepsilon_0}\phi(x,s) \quad (x \in X,\ 0 \le t < s)$;

(Φ4) 定数 $A_3 \ge 1$ が存在して，$\phi(x,2t) \le A_3\phi(x,t) \quad (x \in X,\ t > 0)$;

(Φ5) $^\forall\gamma_1, \gamma_2 > 0$ に対して，定数 $B_{\gamma_1,\gamma_2} \ge 1$ が存在して，

$$\phi(x,t) \le B_{\gamma_1,\gamma_2}\phi(y,t) \quad (d(x,y) \le \gamma_1 t^{-1/\gamma_2},\ t \ge 1).$$

$\bar\phi(x,t) = \sup_{0\le s\le t}\phi(x,s)$ とし，

$$\overline{\Phi}(x,t) = \int_0^t \bar\phi(x,r)\,dr \quad (x \in X,\ t > 0)$$

とする．このとき，

$$\|f\|_{L^\Phi(X)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_X \overline{\Phi}(y, |f(y)|/\lambda)\,d\mu(y) \le 1\right\} < \infty$$

を満たす X 上の可測関数 f からなる関数空間を $L^\Phi(X)$ とする ([1])．α $(\alpha > 0)$ 次のリースポテンシャル

$$I_\alpha f(x) = \int_X \frac{d(x,y)^\alpha}{\mu(B(x,d(x,y)))} f(y)\,d\mu(y)$$

を考える．また，$\gamma(x,t) : X \times (0,d_X) \to [0,\infty)$ は次を満たすものを考える：

(γ1) $\gamma(\,\cdot\,,t)$ は X 上可測関数で $\gamma(x,\,\cdot\,)$ は $(0,d_X)$ 上連続関数である;

(γ2) 定数 $\gamma_0>0, B_0\ge 1$ が存在して，$B_0^{-1}\le\gamma(x,t)\le B_0t^{-\gamma_0}\quad(x\in X,\ 0<t<d_X)$;

(γ3) 定数 $B_1\ge 1$ が存在して，

$$B_1^{-1}\gamma(x,s)\le\gamma(x,t)\le B_1\gamma(x,s)\quad(x\in X,\ 1\le t/s\le 2).$$

さらに，$\Gamma(x,t):X\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ は次を満たすものを考える：

(Γ1) $\Gamma(\,\cdot\,,t)$ は X 上可測関数で $\Gamma(x,\,\cdot\,)$ は $[0,\infty)$ 上連続関数である;

(Γ2) 定数 $B_2\ge 1$ が存在して，$\Gamma(x,t)\le B_2\Gamma(x,s)\quad(x\in X,\ 0\le t<s)$;

(Γ3) 定数 $\alpha_0>0, B_3\ge 1, B_4\ge 1$ が存在して，

$$t^{\alpha-Q(x)}\phi(x,\gamma(x,t))^{-1}\le B_3\Gamma_\alpha(x,1/t)\quad(x\in X,\ \alpha\ge\alpha_0,\ 0<t<d_X)$$

$$\int_t^{d_X}\rho^\alpha\gamma(x,\rho)\,\frac{d\rho}{\rho}\le B_4\Gamma_\alpha(x,1/t)\qquad(x\in X,\ \alpha\ge\alpha_0,\ 0<t\le d_X/2);$$

($\Gamma_{\log}$) 定数 $c_\Gamma>0$ が存在して，$c_\Gamma^{-1}\Gamma(x,t)\le\Gamma_\alpha(x,t^2)\le c_\Gamma\Gamma_\alpha(x,t)\quad(x\in X,\ t>0)$.

定理 ([3]). μ は lower Ahlfors $Q(x)$-regular を満たすとし，$\Psi(x,t):X\times[0,\infty)\to[0,\infty]$ は次を満たすものを考える：

(Ψ1) $\Psi(\,\cdot\,,t)$ は X 上可測関数で $\Psi(x,\,\cdot\,)$ は $[0,\infty)$ 上連続関数である;

(Ψ2) 定数 $B_5\ge 1$ が存在して，$\Psi(x,t)\le\Psi(x,B_5s)\quad(x\in X,\ 0<t<s)$;

(Ψ3) 定数 $B_6\ge 1, B_7\ge 1, t_0>0$ が存在して，

$$\Psi(x,\Gamma(x,t)/B_6)\le B_7t\quad(x\in X,\ t\ge t_0).$$

X 上の非負可測関数 f は $\|f\|_{L^\Phi(X)}\le 1$ を満たすとする．このとき，ある定数 $C_1,C_2>0$ が存在して，

$$\int_X\Psi\left(x,C_1I_\alpha f(x)\right)\,d\mu(x)\le C_2\quad(\alpha\ge\alpha_0).$$

参考文献

[1] F-Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Boundedness of maximal operators and Sobolev's inequality on Musielak-Orlicz-Morrey spaces, Bull. Sci. Math. **137** (2013), 76–96.

[2] T. Ohno and T. Shimomura, Trudinger's inequality for Riesz potentialsof functions in Musielak-Orlicz spaces, Bull. Sci. Math. **138** (2014), 225–235.

[3] T. Ohno and T. Shimomura, Trudinger's inequality and continuity for Riesz potentials of functions in Musielak-Orlicz-Morrey spaces on metric measure spaces, Nonlinear Anal. **106** (2014), 1–17.

Reproducing kernel for iterated parabolic operators on the upper half space

Masaharu NISHIO (Osaka City University)

Let H be the upper half space of the $(n+1)$-dimensional Euclidean space. We denote by $X=(x,t)=(x_1,\cdots,x_n,t)$ a point in $H=\boldsymbol{R}^n\times(0,\infty)$. We consider parabolic operators

$$L^{(\alpha)}:=\frac{\partial}{\partial t}+(-\Delta_x)^\alpha$$

for $0<\alpha\le 1$, where

$$\Delta_x:=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

is the Laplacian in the x-space.

In [6], parabolic Bergman spaces

$$\boldsymbol{b}_\alpha^p:=\{u\in C(H)|L^{(\alpha)}u=0,\|u\|_{L^p(H)}<\infty\}$$

are introduced and discussed for $1\le p\le\infty$. In this talkk, as a generalization, we consider the m-times iterates of $L^{(\alpha)}$ and discuss the corresponding Hilbert space $\boldsymbol{b}_\alpha^{m,2}$ with reproducing kernel K_α^m, by using the fundamental solution $W^{(\alpha)}$ of $L^{(\alpha)}$, defined by

$$W^{(\alpha)}(x,t)=\begin{cases}(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}\exp(-t|\xi|^{2\alpha}+\sqrt{-1}\,x\cdot\xi)\,d\xi & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$$

on $\boldsymbol{R}^{n+1}$ for $0<\alpha\le 1$. When $\alpha=1$ or $\alpha=1/2$, we know the explicite form. In fact, for $t>0$,

$$W^{(1)}(x,t)=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\exp\Big(-\frac{|x|^2}{4t}\Big)\quad\text{and}\quad W^{(1/2)}(x,t)=\frac{\Gamma\big(\frac{n+1}{2}\big)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\frac{t}{\big(t^2+|x|^2\big)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

For an integer $m\ge 1$ and $1\le p\le\infty$, we put

$$\boldsymbol{b}_\alpha^{m,p}:=\{u\in C^\infty(H)|\big(L^{(\alpha)}\big)^m u=0,\delta_H^k\cdot\big(L^{(\alpha)}\big)^k u\in L^p(H)\text{ for }0\le k\le m-1\},$$

where $\delta_H(X):=t$ is the distance from $X=(x,t)\in H$ to the boundary ∂H of H.

This work is supported in part by JSPS KAKENHI Grant Number K15K04934.
Department of Mathematics, Osaka City University, Sugimoto, Sumiyoshi, Osaka 558-8585.
E-mail: nishio@sci.osaka-cu.ac.jp
2010 Mathematics Subject Classification: 31B30, 35K25, 46E22.
Keywords and phrases: mean value property, parabolic operators of fractional order, reproducing kernels, Laguerre polynomials, Bergman spaces, polytemperatures, polyharmonic functions

Theorem 1. *Let $m \geq 1$ be an integer and $0 < \alpha \leq 1$. Then $\boldsymbol{b}_\alpha^{m,p}$ is a Banach space. Moreover, the following estimates hold:*

$$(i) \qquad \left|\partial_x^\beta \partial_t^k u(x,t)\right| \leq C t^{-(\frac{n}{2\alpha}+1)\frac{1}{p}-(\frac{|\beta|}{2\alpha}+k)} \|u\|_{L^p(H)}$$

$$(ii) \qquad \left|\left(L^{(\alpha)}\right)^k u(x,t)\right| \leq C t^{-(\frac{n}{2\alpha}+1)\frac{1}{p}-k} \|u\|_{L^p(H)}$$

$$(iii) \qquad \|\delta_H^{\frac{|\beta|}{2\alpha}+k} \partial_x^\beta \partial_t^k u\|_{L^p(H)} \leq C\|u\|_{L^p(H)}$$

$$(iv) \qquad \|\delta_H^k \cdot \left(L^{(\alpha)}\right)^k u\|_{L^p(H)} \leq C\|u\|_{L^p(H)}$$

with some constant C for $u \in \boldsymbol{b}_\alpha^{m,p}$ and $(x,t) \in H$. Here $(\beta, k) = (\beta_1, \ldots, \beta_n, k)$ is a multi-index of nonnegative integers.

Corollary 1. *$\boldsymbol{b}_\alpha^{m,2}$ is a Hilbert space with reproducing kernel.*

Theorem 2. *For $X_1 = (x_1, t_1), Y_1 = (y_1, s_1) \in H$, we put*

$$K_\alpha^m(X_1, Y_1) := \sum_{k=0}^{m-1} (-2\partial_t) p_k(-2t_1\partial_t) p_k(-2s_1\partial_s) W^{(\alpha)}(x-y, t+s)\Big|_{X=X_1, Y=Y_1}.$$

Then, the kernel K_α^m gives the orthogonal projection, as an integral operator, on $L^2(H)$ to $\boldsymbol{b}_\alpha^{m,2}$. Here $p_k (k = 0, 1, 2, \ldots)$ are orthogonal polynomials with $\deg p_k = k$ with respect to $e^{-t}dt$ as a weight on the half line $(0, \infty)$.

References

[1] N. Aronszain, T. M. Creese, and L. J. Lipkin, Polyharmonic functions, Clarendon Press, Oxford, 1983.

[2] M. Nicolescue, Equiaţia iterată a căldurii (L'équation itérée de la chaleur (French summary)), Stud. Cerc. Mat., 5 (1954), No. 3–4, 243–332.

[3] M. Nishio, K. Shimomura, and N. Suzuki, A mean value property of poly-temperatures on a strip domain, in Proceedings od the seventh international colloquium on differential equations, 269–276, D. Bainov, ed., VSP, Utrecht, 1997.

[4] M. Nishio, K. Shimomura, and N. Suzuki, A general form of a mean value property for poly-temperatures on a strip domain, J. London Math. Soc., (2) **58** (1998) 381–393.

[5] M. Nishio, K. Shimomura, and N. Suzuki, Note on poly-supertemperatures on a strip domain, Osaka J. Math., 36 (1999), 539–556.

[6] M. Nishio, K. Shimomura, and N. Suzuki, α-parabolic Bergman spaces, Osaka J. Math., **42** (2005), 133–162.

多重調和ベルグマン空間とその再生核

田中　清喜　(阪市大・数学研究所)*

$\mathbb{B}^N$ を N 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ 上の単位球とし、$H^m(\mathbb{B})$ を $\mathbb{B}$ 上の m-th polyharmonic 関数全体の成す空間とする (すなわち $\Delta^m f = 0$ を満たす関数全体を考える)。本講演では、polyharmonic Bergman space

$$b^{m,2}_\alpha(\mathbb{B}) := H^m(\mathbb{B}) \cap L^2(\mathbb{B}, (1-|x|^2)^\alpha dx)$$

について主に重み $\alpha = 0$ のものを考え、$b^{m,2}(\mathbb{B}) := b^{m,2}_0(\mathbb{B})$ とする。特に、$m = 1$ のときは harmonic Bergman space と呼ばれさまざまな先行研究がある (例えば、[3],[4])。

polyharmonic Bergman space についても Pavlović[5] により再生核を持つヒルベルト空間であることが知られている。更に Pavlović[5] は、次の定理を与えている。

補題 1. $f \in H^m(\mathbb{B})$ とし、$f_j \in H^1(\mathbb{B})$ を *Almansi* 分解

$$f(x) = f_0 + (1-|x|^2)f_1 + \cdots + (1-|x|^2)^{m-1} f_{m-1}$$

によって得られる関数族とする。そのとき、$f \in b^{m,2}_\alpha(\mathbb{B})$ となる必要十分条件は $f_j \in b^{1,2}_{2j+\alpha}(\mathbb{B})$ である。

本講演では、この定理を参考に $b^{m,2}(\mathbb{B})$ の再生核 $K_m(x,y)$ を表示する方法を紹介し、特に $K_2(x,y)$ に対する表示、評価を与える。

定理 1. $x, y \in \mathbb{B}$ に対して

$$\begin{aligned} K_2(x,y) &= \frac{2}{\omega_{N-1}}(1-|x|^2)(1-|y|^2)\sum_{k=0}^{\infty}(k+\frac{N}{2}+2)(k+\frac{N}{2}+1)^2 Z_k(x,y) \\ &\quad - \frac{2}{\omega_{N-1}}\{(1-|x|^2)+(1-|y|^2)\}\sum_{k=0}^{\infty}(k+\frac{N}{2}+2)(k+\frac{N}{2}+1) Z_k(x,y) \\ &\quad + \frac{2}{\omega_{N-1}}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+N+2) Z_k(x,y) \end{aligned}$$

となる。ここで ω_{N-1} は $\partial\mathbb{B}$ の球面積であり、$Z_k(x,y)$ は *zonal harmonic* である。さらに

$$|K_2(x,y)| \leq C \frac{1}{(1-2x\cdot y+|x|^2|y|^2)^{\frac{N}{2}}}$$

と評価される。

参考文献

[1] N. Aronszajn, T. M. Creese and L. J. Lipkin, Polyharmonic functions, Clarendon press, Oxford, 1983.

2010 Mathematics Subject Classification: 31B05, 47B38
キーワード : polyharmonic, harmonic Bergman kernel
* 〒558-8585 大阪市住吉区杉本 3 丁目 3 番 138 号 大阪市立大学数学研究所
e-mail: ktanaka@sci.osaka-cu.ac.jp

[2] S. Axler, P. Bourdon and W. Ramey, Harmonic function theory, Springer-Verlag, New York, 1992.

[3] R. Coifman and R. Rochberg, *representation theorems for holomorphic and harmonic functions in L^p*, Astérisque **77** (1980), 1–66.

[4] M. Jevtić and M. Pavlović, *Harmonic Bergman functions on the unit ball in $\mathbb{R}^n$*, Acta Math. **85** (1999), 81–96.

[5] M. Pavlović, *Decompositions of L^p and Hardy spaces of polyharmonic functions*, J. Math. Anal. Appl. **216** (1997), 499–509.

A mechanism of appearing small copies of the Mandelbrot set

木坂 正史　(京都大学 大学院 人間・環境学研究科)*1
川平 友規　(東京工業大学 大学院 理工学研究科)*2

$Q_c(z) := z^2 + c$ とする．Q_c の**充填 Julia 集合** $\boldsymbol{K_c}$，**Julia 集合** $\boldsymbol{J_c}$ は次で定義される：

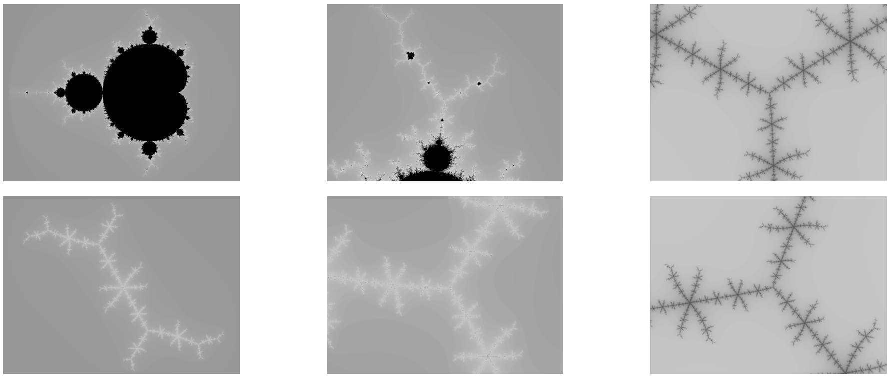
$$K_c := \{z \in \mathbb{C} \mid Q_c^n(z) \not\to \infty\}, \qquad J_c := \partial K_c$$

またパラメーター空間の部分集合として，次の **Mandelbrot 集合**が定義される：

$$M := \{c \mid J_c \ :\ \text{連結}\} = \{c \mid \{Q_c^n(0)\}_{n=0}^{\infty} \ :\ \text{有界}\}$$

Mandelbrot 集合のある部分を拡大していくと，ある Julia 集合と一見すると非常によく似た構造を目にすることがある．この現象に関する次の Tan Lei の結果は有名である：

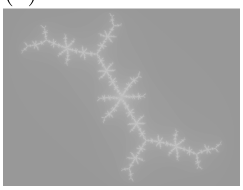
Theorem 2 (Tan Lei, 1990)： c を Misiurewicz パラメーター (即ち，ある $k,\ l \in \mathbb{N}$ が存在し $Q_c^l(Q_c^k(0)) = Q_c^k(0)$ となるような c) とすると，Mandelbrot 集合の c の近傍と，対応する Julia 集合 J_c の $c(\in J_c)$ の近傍は拡大すればするほど似ている．



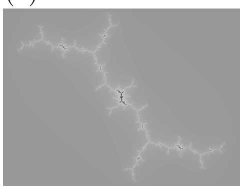
一方，講演者は約 2 年前にたまたま次のような現象を発見した：

Example 3：

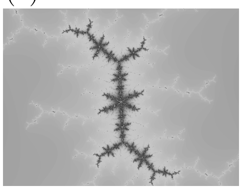
(1)



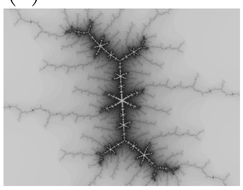
(2)



(3)

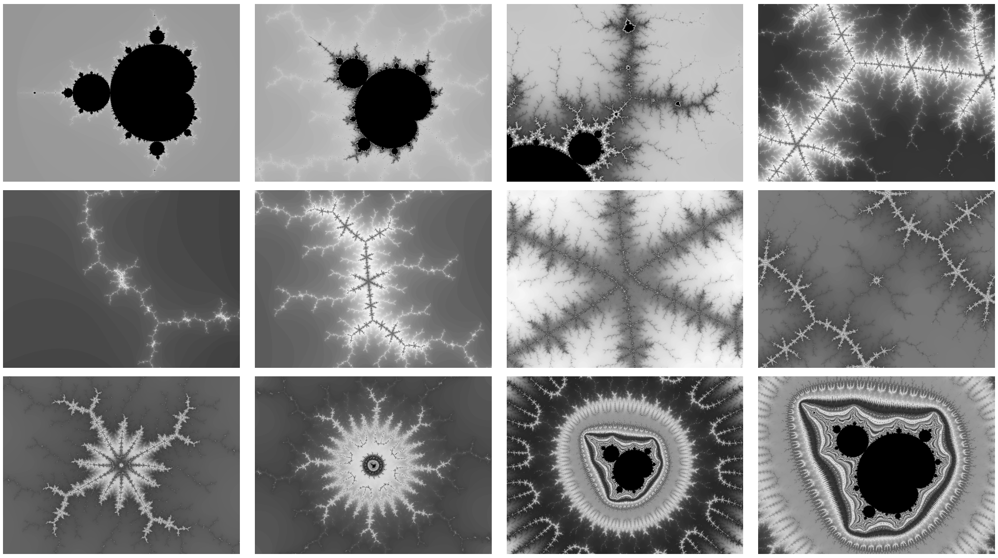


(4)



(1) はある Misiurewicz パラメーター c_0 の Julia 集合 J_{c_0}，(2) は (1) とは別の Julia 集合，(3) は (2) の中央部の拡大．一方，(4) は Mandelbrot 集合のある部分の拡大．(4) の図は小さい Mandelbrot 集合 M_b を任意に 1 つとり，M_b 内の，$c_0 \in M$ に対応するパラメーター $\tilde{c}_0$ の近傍を拡大することによって得られる．また更に (4) の中央部を繰り返し拡大していくと以下のような図が現れる：

*1 e-mail: `kisaka@math.h.kyoto-u.ac.jp`
*2 e-mail: `kawahira@math.titech.ac.jp`



即ち，J_{c_0} のように見えていたものはもう少し正確には，$\varepsilon \in \mathbb{C}$ を $|\varepsilon| << 1$ で $c_0+\varepsilon \notin M$ なるものとして $J_{c_0+\varepsilon}$ のようなものである．更にこの図形の z^2 による逆像，更にその逆像 $\cdots$，という入れ子構造の果てに更に小さい Mandelbrot 集合が現れる．このような現象は Misiurewicz パラメーターだけではなく，任意の放物型パラメーター（即ち，Q_c が放物型周期点を持つようなパラメーター c）をとっても現れることが確認できる．

以上のことを数学的に定式化して述べると次のようになる：

Definition 5 (モデル)： c_0 を Misiurewicz または放物型パラメーターとし，$\varepsilon \in \mathbb{C}$ を $|\varepsilon| << 1$ かつ $c_0+\varepsilon \notin M$ なるものとする．

(1) $R = R(\varepsilon) > 1$ で $J_{c_0+\varepsilon} \subset A_{\frac{1}{\sqrt{R}},\sqrt{R}} := \left\{ z \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{R}} < |z| < \sqrt{R} \right\}$ なるものをとる．

(2) $\Gamma_0(\varepsilon) := J_{c_0+\varepsilon} \times R^{\frac{3}{2}} \subset A_{R,R^2}$，$\Gamma_m(\varepsilon) := z^{2^m}$ による $\Gamma_0(\varepsilon)$ の逆像
（注:$\Gamma_m(\varepsilon)$ は互いに交わらない($\because$ $\Gamma_0(\varepsilon) \subset A_{R,R^2}$, $\Gamma_1(\varepsilon) \subset A_{\sqrt{R},R}$, $\Gamma_2(\varepsilon) \subset A_{\sqrt[4]{R},\sqrt{R}}$, $\cdots$)）

(3) $\varphi_M : \mathbb{C} \setminus M \to \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$: Riemann 写像として $\Xi(\varepsilon) := M \cup \varphi_M^{-1}(\cup_{m=0}^{\infty} \Gamma_m(\varepsilon))$ とする．

Definition 6： $X,\ Y \subset \mathbb{C}$ をコンパクト集合とする．このとき $\boldsymbol{X}$ **が** $\boldsymbol{Y}$ **内に擬等角に現れる**（X appears quasi-conformally in Y）とは，擬等角写像 $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ で $\varphi(X) \subset Y,\ \varphi(\partial X) \subset \partial Y$ なるものが存在することをいう．

Theorem： $c_0 \in M$ を Misiurewicz または放物型パラメーター，M_b を小さい Mandelbrot 集合 (primitive copy of M)，$\widetilde{c_0} \in M_b$ を Misiurewicz または放物型パラメーターで $c_0 \in M$ に対応するものとする．このとき $\Xi(\varepsilon)$ が Mandelbrot 集合 M 内に擬等角に現れる．また現れる場所は $\widetilde{c_0}$ の任意の小さな近傍である．

参考文献

[D-BDS] A. Douady, X. Buff, R. Devaney and P. Sentenac, Baby Mandelbrot sets are born in cauliflowers, In *The Mandelbrot set, theme and variations*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **274**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2000), 19–36.

[DH] A. Douady and J. Hubbard, On the dynamics of polynomial-like mappings,*Ann. Sci. École Norm. Sup.***18**, (1985), 287–343.

[T] L. Tan, Similarity between the Mandelbrot set and Julia sets, *Comm. Math. Phys.* **134**(1990), no. 3, 587–617.

J-Stability of immediately expanding rational maps in non-Archimedean dynamics

李正勲　(名古屋大学)*

2015年9月

概　要

複素力学系理論での R. Mañé, P. Sad, D. Sullivan の J-stability 定理の類似として, 非アルキメデス的力学系理論での強拡大的有理式写像に関する J-stability 定理を紹介する.

1. 非アルキメデス的力学系理論

K を完備かつ非アルキメデス的な代数的閉体, $\mathbb{P}^1_K$ を K 上の射影直線, $f:\mathbb{P}^1_K \to \mathbb{P}^1_K$ を定数ではない K 上の有理式写像とする. 非アルキメデス的力学系理論では勝手に与えられた点 $z_0 \in \mathbb{P}^1_K$ の f による軌道

$$z_0 \overset{f}{\mapsto} z_1 \overset{f}{\mapsto} z_2 \overset{f}{\mapsto} \cdots \overset{f}{\mapsto} z_k := f^k(z_0) := \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ times}}(z_0) \overset{f}{\mapsto} \cdots$$

の振る舞いの理解を最終目標とする. 非アルキメデス的力学系理論では与えられた有理式写像に対して, 軌道の振る舞いが安定な部分と不安定な部分が存在し, それぞれを Fatou 集合及び Julia 集合とよぶ. より詳しくは, K 上の射影直線 $\mathbb{P}^1_K$ 上に球面距離

$$\rho(z,w) := \begin{cases} \dfrac{|z-w|}{\max\{1,|z|\}\cdot\max\{1,|z|\}} & (z,w \in K), \\[2ex] \dfrac{1}{\max\{1,|z|\}} & (z \in K, w=\infty). \end{cases}$$

を定義し, 有理式写像 f の反復合成からなる写像の族 $\{f^k\}_{k=0}^{\infty}$ が同程度連続性を満たす最大の集合を**Fatou 集合** $\mathcal{F}_f$ と, その補集合を **Julia 集合** $\mathcal{J}_f$ として定義する. f の Fatou 集合と Julia 集合は f によって完全不変であるため, f による射影直線上の力学系は f による Fatou 集合上の力学系と Julia 集合上の力学系に分割される.

有理式写像による Fatou 集合上の力学系は L-C. Hsia, R. Benedetto, J. Rivera-Letelier によって研究された. 特に, L-C. Hsia は [Hs00] で非アルキメデス的 Montel の定理を示し, Fatou 集合の判別方法を与え, R. Benedetto は [Ben01] で特殊なクラスに関する D. Sullivan の遊走領域定理の類似を示し, J. Rivera-Letelier は [Riv03] で Fatou 集合の分類定理を示した. 一方, J-P. Bézivin, J. Kiwi, J-Y. Briend, L-C. Hsia は多項式写像による Julia 集合上の力学系を研究した.

2010 Mathematics Subject Classification: 37P40 11S82
キーワード：Non-Archimedean, Structural Stability, Julia set, Dynamical Systems
* 〒464-8602 愛知県名古屋市千種区不老町 名古屋大学 大学院多元数理科学研究科
e-mail: m12003v@math.nagoya-u.ac.jp

2. 強拡大的有理式写像による J-stabilty

この発表では有理式写像 f が強拡大的であるときの Julia 集合上の力学系の安定性に関する結果を述べる. 有理式写像 f が強拡大的であるとは, f の Julia 集合が空集合ではなく, ある正の定数 $\lambda > 1$ が存在し, 任意の Julia 集合の元 z に対して,

$$|f'(z)| \geq \lambda.$$

が成り立つことである.

この強拡大的有理式写像に関して, 以下の J-stability が得られる:

定理 2.1. *$f : \mathbb{P}^1_K \to \mathbb{P}^1_K$ を次数 2 以上の拡大的有理式写像とする. 射影直線の無限遠点 ∞ が f の Fatou 集合 $\mathcal{F}_f$ に入ることを仮定すると f は J-stable である. すなわち, ある f の近傍 U が存在し, 任意の U の元 g に対して, ある同相写像 $h : \mathcal{J}_f \to \mathcal{J}_g$ が存在し,*

$$h \circ f = g \circ h$$

を満たす.

この結果は複素力学系理論での R. Mañé, P. Sad, D. Sullivan の Julia 集合上の力学系の安定性定理の類似の一つである.

参考文献

[Ben01] R. Benedetto, *Hyperbolic maps in p-adic dynamics*, Ergodic Theory Dynam. Systems **21** (2001), 1 – 11.

[Bez04] J-P. Bézivin, *Sur la compacité des ensembles de Julia des polynômes p-adiques*, Mathematische Zeitschrift **246** (2004), 273–289.

[BH12] Jean-Yves Briend and L-C. Hsia, *Weak Néron models for cubic polynomial maps over a non-Archimedean*, Acta Arith. **153** (2012), 415–428.

[Hs00] L-C. Hsia, *Closure of periodic points over a non-Archimedean field*, J. London Math. Soc. (3) **62** (2000), pp. 685–700.

[Kiw06] J. Kiwi, *Puiseux series polynomial dynamics and iteration of complex cubic polynomials*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) (5) **56** (2006).

[Riv03] J. Rivera-Letelier, *Dynamique des fonctions rationnelles sur des corps locaux*, Astérisque **287** (2003), 147–230.

Equidistribution of rational functions having a superattracting periodic point

Yûsuke Okuyama (Kyoto Institute of Technology, okuyama@kit.ac.jp)

We will talk about an approximation of the activity current T_c in the parameter space Λ (a connected complex manifold) of a holomorphic family $f : \Lambda \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ of rational functions $f_\lambda = f(\lambda, \cdot)$ of degree $d > 1$ having a marked critical point $c : \Lambda \to \mathbb{P}^1$ by parameters λ for which $c(\lambda)$ is periodic under f_λ, i.e., is a superattracting periodic point [4, Theorem 1].

This gives an affirmative answer, in the superattracting case, to a question on the removability of a seemingly technical assumption on the parameter space Λ in Dujardin–Favre [3, Theorem 4.2] for rational functions having preperiodic critical points, and refines Bassanelli–Berteloot [1, Theorem 3.1 (1)] on a similar approximation of the bifurcation current T_f of the holomorphic family f, simplifying the original proofs of those results; our proof is based on a dynamical counterpart of the approximation (*plowing in the dynamical space and reaping in the parameter space*; see, e.g., [2, §1.1]).

References

[1] Bassanelli, G. and Berteloot, F. Lyapunov exponents, bifurcation currents and laminations in bifurcation loci, *Mathematische Annalen*, **345**, 1 (2009), 1–23.

[2] Branner, B. and Hubbard, J. H. The iteration of cubic polynomials Part II: Patterns and parapatterns, *Acta mathematica*, **169**, 1 (1992), 229–325.

[3] Dujardin, R. and Favre, C. Distribution of rational maps with a preperiodic critical point, *American journal of mathematics*, **130**, 4 (2008), 979–1032.

[4] Okuyama, Y. Equidistribution of rational functions having a superattracting periodic point towards the activity current and the bifurcation current, *Conform. Geom. Dyn.*, **18**, 12 (2014), 217–228.

Complex Analogues of the Takagi Function in Random Complex Dynamics

角 大輝 (Sumi, Hiroki) 大阪大学大学院理学研究科数学専攻
E-mail: sumi@math.sci.osaka-u.ac.jp
http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~sumi/

Introduction. We consider i. i. d. random dynamical system on $\hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ such that at every step we choose $f_1(x) = 2x$ with probability p and we choose $f_2(x) = 2x - 1$ with probability $1 - p$, where $p \in (0, 1)$ is a fixed parameter. For each $x \in \mathbb{R}$, let $A_p(x)$ be the probability of tending to $+\infty$ regarding the random orbits starting with the initial value x.

Proposition 1. ([4]). *On* $[0, 1]$, *the function* $A_p(x)$ *is equal to* **Lebesgue's singular function** *with respect to the parameter* p *provided that* $0 < p < 1, p \neq 1/2$.

Note that $A_p|_{[0,1]}$ is continuous and singular. Also, A_p on $\mathbb{R}$ is the **unique continuous solution of the functional equation** $\varphi(x) = p\varphi(f_1(x)) + (1 - p)\varphi(f_2(x)), \varphi|_{(\infty,0)} = 0, \varphi|_{(0,\infty)} = 1$.

Theorem 2. ([3,1]). *For each* $x \in \mathbb{R}$, $p \in (0, 1) \mapsto A_p(x) \in \mathbb{R}$ *is real-analytic on* $(0, 1)$ *and* $\frac{\partial A_p(x)}{\partial p}|_{p=1/2} = 2B(x)$ *for each* $x \in [0, 1]$, *where* $B(x)$ *is the* **Takagi function**.

Note that $B(x)$ is continuous and nowhere differentiable on $[0, 1]$. Also, $\psi(x) = \frac{\partial A_p(x)}{\partial p}|_{p=1/2}$ is the **unique continuous solution of the functional equation** $\psi(x) = p\psi(f_1(x)) + (1-p)\psi(f_2(x)) + A_p(f_1(x)) - A_p(f_2(x)), \psi|_{(-\infty,0)\cup(0,\infty)} = 0$. **We want to consider complex analogues of the above story and want to obtain a unified point of view.**

Definition 3.
- Let $\hat{\mathbb{C}}$ be the Riemann sphere endowed with the spherical distance d.
- Let $\mathcal{P} := \{f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \mid f \text{ is a polynomial}, \deg(f) \geq 2\}$ endowed with the distance η defined by $\eta(f, g) = \sup_{z\in\hat{\mathbb{C}}} d(f(z), g(z))$.
- For each metric space X, let $\mathrm{Cpt}(X)$ be the space of all non-empty compact subsets of X endowed with Hausdorff metric d_H.

Definition 4. We say that an element $\Gamma \in \mathrm{Cpt}(\mathcal{P})$ is **mean stable** if there exist two open subsets A, B of $\hat{\mathbb{C}}$ with $\overline{B} \subset A$, $\sharp(\hat{\mathbb{C}} \setminus A) \geq 3$, and a positive integer n such that
- for each $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \Gamma^n$, $\gamma_n \circ \cdots \circ \gamma_1(A) \subset B$, and
- for each $z \in \hat{\mathbb{C}}$, there exists an element $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \Gamma^m$ for some $m \in \mathbb{N}$ such that $\alpha_m \circ \cdots \circ \alpha_1(z) \in A$.

Theorem 5. ([5]). *Let* $\mathcal{MS} := \{\Gamma \in \mathrm{Cpt}(\mathcal{P}) \mid \Gamma$ *is mean stable*$\}$. *Then* $\mathcal{MS}$ *is open and dense in* $(\mathrm{Cpt}(\mathcal{P}), d_H)$. *Moreover,* $\{\Gamma \in \mathcal{MS} \mid \sharp\Gamma < \infty\}$ *is dense in* $(\mathrm{Cpt}(\mathcal{P}), d_H)$.

For a $\Gamma = \{f_1 \ldots, f_{s+1}\} \subset \mathcal{P}$ $(s \in \mathbb{N})$ and a $(p_1, \ldots p_{s+1}) \in (0, 1)^{s+1}$ with $\sum_{i=1}^{s+1} p_i = 1$, we consider i. i. d. random dynamical system on $\hat{\mathbb{C}}$ such that at every step we choose f_i with probability p_i.

Theorem 6. ([5]). *Let $\Gamma = \{f_1, \dots, f_{s+1}\} \subset \mathcal{P}$ be a mean stable finite set ($s \in \mathbb{N}$). Then we have the following* (1)(2)(3).

(1) *Let $G = \{f_{i_1} \circ \cdots \circ f_{i_n} \mid n \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, s+1\}\}$. Let $\mathrm{Min}(G)$ be the set of all* **minimal sets** *of G, where we say that an $L \in \mathrm{Cpt}(\hat{\mathbb{C}})$ is a minimal set of G if $L = \overline{\cup_{h \in G}\{h(z)\}}$ for each $z \in L$. Then, $1 \le \sharp \mathrm{Min}(G) < \infty$.*

(2) (i) *Let $W = \{\vec{p} = (p_1, \dots, p_s) \in (0,1)^s \mid \sum_{i=1}^{s} p_i < 1\}$. For each $\vec{p} = (p_1, \dots, p_s) \in W$, let $p_{s+1} = 1 - \sum_{i=1}^{s} p_i$.*

(ii) *For each $\alpha \in (0,1)$, let $C^\alpha(\hat{\mathbb{C}})$ be the space of all α-Hölder continuous functions on $\hat{\mathbb{C}}$, endowed with α-Hölder norm $\|\cdot\|_\alpha$.*

(iii) *For each $\vec{p} = (p_1, \dots, p_s) \in W$, let $M_{\vec{p}} : C^\alpha(\hat{\mathbb{C}}) \to C^\alpha(\hat{\mathbb{C}})$ be the operator defined by $M_{\vec{p}}(\varphi)(z) = \sum_{i=1}^{s+1} p_i \varphi(f_i(z))$, $\varphi \in C^\alpha(\hat{\mathbb{C}}), z \in \hat{\mathbb{C}}$, where $p_{s+1} = 1 - \sum_{i=1}^{s} p_i$.*

Then for each $\vec{p} \in W$, there exist an $\alpha \in (0,1)$, a subspace $U_{\vec{p}}$ of $C^\alpha(\hat{\mathbb{C}})$ with $1 \le \dim U_{\vec{p}} < \infty$ and $M_{\vec{p}}(U_{\vec{p}}) \subset U_{\vec{p}}$, a constant $C > 0$, a constant $\lambda \in (0,1)$, and a continuous operator $\pi_{\vec{p}} : C^\alpha(\hat{\mathbb{C}}) \to U_{\vec{p}} \subset C^\alpha(\hat{\mathbb{C}})$ such that the following (a) *and* (b) *hold.*

(a) *For each $\varphi \in C^\alpha(\hat{\mathbb{C}})$ and for each $n \in \mathbb{N}$, $\|M_{\vec{p}}^n(\varphi - \pi_{\vec{p}}(\varphi))\|_\alpha \le C\lambda^n$.*

(b) *For each $L \in \mathrm{Min}(G)$ and for each $z \in \hat{\mathbb{C}}$, let $T_{L,\vec{p}}(z) := (\otimes_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{s+1} p_i \delta_{f_i})(\{\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots) \in \mathcal{P}^{\mathbb{N}} \mid d(\gamma_m \cdots \gamma_1(z), L) \to 0$ as $m \to \infty\}$. (This is the probability of tending to L regarding the random orbits starting with z.) Then $M_{\vec{p}}(T_{L,\vec{p}}) = T_{L,\vec{p}}, T_{L,\vec{p}} \in U_{\vec{p}}$, and $T_{L,\vec{p}}$ is locally constant on $F(G) := \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid G$ is equicontinuous on a nbd of $z\}$.* ($T_{L,\vec{p}}$ *is a* **complex analogue of the Lebesgue's singular functions**.)

(3) *For each $\vec{p} \in W$ there exist an open neighborhood V of $\vec{p}$ in W and an element $\alpha \in (0,1)$ such that the following* (I)(II) *hold.*

(I) *For each $L \in \mathrm{Min}(G)$ and for each $\vec{a} \in V$ we have $T_{L,\vec{a}} \in C^\alpha(\hat{\mathbb{C}})$. Moreover, the map $\vec{a} \mapsto T_{L,\vec{a}} \in (C^\alpha(\hat{\mathbb{C}}), \|\cdot\|_\alpha)$ is real-analytic in V.*

(II) *For each $i = 1, \dots, s$ and for each $z \in \hat{\mathbb{C}}$, let $\psi_{i,\vec{p}}(z) := \frac{\partial T_{L,\vec{a}}(z)}{\partial a_i}|_{\vec{a}=\vec{p}}$ and $\zeta_{i,\vec{p}}(z) := T_{L,\vec{p}}(f_i(z)) - T_{L,\vec{p}}(f_{s+1}(z))$. Then, $\psi_{i,\vec{p}} \in C^\alpha(\hat{\mathbb{C}}) \subset C(\hat{\mathbb{C}}) := \{\varphi : \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C} \mid \varphi$ is continuous $\}$ is the* **unique solution of the functional equation** *$(Id - M_{\vec{p}})(\psi) = \zeta_{i,\vec{p}}, \psi|_{\cup_{L \in Min(G)} L} = 0, \psi \in C(\hat{\mathbb{C}})$. Moreover, $\psi_{i,\vec{p}} = \sum_{n=0}^{\infty} M_{\vec{p}}^n(\zeta_{i,\vec{p}})$ in $(C^\alpha(\hat{\mathbb{C}}), \|\cdot\|_\alpha)$. (The function $\psi_{i,\vec{p}}$ is the* **complex analogue of the Takagi function**.)

Note: Let $\Gamma = \{f_1, \dots, f_{s+1}\} \subset \mathcal{P}$, $G := \{f_{i_1} \circ \cdots \circ f_{i_n} \mid n \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, s+1\}\}$, and $J(G) := \hat{\mathbb{C}} \setminus (F(G))$. If $\{f_i^{-1}(J(G))\}_{i=1}^{s+1}$ are mutually disjoint and $\overline{\cup_{h \in G}\{\text{critical values of } h : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}\}} \subset F(G)$, then Γ is mean stable, and we can study the detail of $T_{L,\vec{p}}$ and $\psi_{i,\vec{p}}$. ([4,5,2]).

References:

[1] M. Hata and M. Yamaguti, Takagi function and its generalization, Japan J. Appl. Math., 1, 183-199, 1984.

[2] J. Jaerisch and H. Sumi, *Multifractal formalism for expanding rational semigroups and random complex dynamical systems*, to appear in Nonlinearity, 2015, http://arxiv.org/abs/1311.6241.

[3] T. Sekiguchi and Y. Shiota, A generalization of Hata-Yamaguti's results on the Takagi function, Japan J. Appl. Math. 8, 203-219, 1991.

[4] H. Sumi, *Random complex dynamics and semigroups of holomorphic maps*, Proc. London Math. Soc. (2011) 102(1), 50–112.

[5] H. Sumi, *Cooperation principle, stability and bifurcation in random complex dynamics*, Adv. Math., 245 (2013) 137–181.

Hölder regularity of the complex analogues of the Takagi function

Johannes Jaerisch*
Department of Mathematics, Faculty of Science and Engineering, Shimane University
E-mail: jaerisch@riko.shimane-u.ac.jp
Web: http://www.math.shimane-u.ac.jp/~jaerisch/

Hiroki Sumi
Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University
E-mail: sumi@math.sci.osaka-u.ac.jp
Web: http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~sumi/

Introduction. Recently, the second author ([Sum13], see also [Sum11]) introduced complex analogues of the Takagi function in the context of the random iteration of rational maps on the Riemann sphere $\hat{\mathbb{C}}$. Let us briefly review the definition. Let $s \geq 1$ and let $f_1, f_2, \ldots, f_{s+1} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ be rational maps of degree at least two. Denote by

$$G := \{f_{i_1} \circ \cdots \circ f_{i_n} \mid n \in \mathbb{N},\ i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, s+1\}\}$$

the rational semigroup generated by $f_1, \ldots, f_{s+1}$. The set of *minimal sets* is given by

$$\mathrm{Min}(G) := \Big\{\emptyset \neq L \subset \hat{\mathbb{C}} \mid L \text{ compact},\ L = \overline{\bigcup_{g\in G} \{g(z)\}} \text{ for every } z \in L\Big\}.$$

The *Fatou set* and the *Julia set* of G are respectively given by

$$F(G) := \Big\{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \exists U \text{ open s.t. } z \in U \text{ and } \{g_{|U}\}_{g\in G} \text{ is equicontinuous}\Big\} \quad \text{and} \quad J(G) = \hat{\mathbb{C}} \backslash F(G).$$

Let $L \in \mathrm{Min}(G)$ and let $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_s) \in (0,1)^s$ with $\sum_{i=1}^s p_i < 1$. Put $p_{s+1} := 1 - \sum_{i=1}^s p_i$. Denote by $T_{\vec{p}}(z)$ the probability of tending to L of the Markov process on $\hat{\mathbb{C}}$ which starts in $z \in \hat{\mathbb{C}}$ and which is given by drawing independently with probability p_i the map f_i.

Our *standing assumptions* are as follows:

1. The sets $\{f_i^{-1}(J(G))\}_{1\leq i\leq s+1}$ are mutually disjoint.
2. $\overline{\bigcup_{g\in G} \{\text{critical values of } g\}} \subset F(G)$.
3. $\mathrm{card}(\mathrm{Min}(G)) \geq 2$.

It was shown by the second author in [Sum13] that, for each $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_s)$ there exists $a \in (0,1)$ such that $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_s) \mapsto T_{(x_1,\ldots,x_s,1-\sum_{i=1}^s x_i)} \in C^a(\hat{\mathbb{C}})$ is real-analytic in a neighbourhood of $\vec{p}$, where $C^a(\hat{\mathbb{C}})$ denotes the $\mathbb{C}$-vector space of a-Hölder continuous maps. For $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_s) \in \mathbb{N}_0^s$

we denote by $C_{\vec{n}} \in C^{a}(\hat{\mathbb{C}})$ the higher order partial derivative of $T_{\vec{p}}$ of order $|\vec{n}| := \sum_{i=1}^{s} n_i$ with respect to the probability parameter given by

$$C_{\vec{n}}(z) := \frac{\partial^{|\vec{n}|} T_{(x_1,\dots,x_s,1-\sum_{i=1}^{s} x_i)}(z)}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \dots \partial x_s^{n_s}} \Big|_{\vec{x}=\vec{p}}, \quad z \in \hat{\mathbb{C}}.$$

We introduce the $\mathbb{C}$-vector space

$$\mathcal{C} := \operatorname{span}\{C_{\vec{n}} \mid \vec{n} \in \mathbb{N}_0^s\} \subset C^{a}(\hat{\mathbb{C}}),$$

which consists of all the finite linear combinations of elements from $\{C_{\vec{n}} \mid \vec{n} \in \mathbb{N}_0^s\}$. The first order derivatives are called *complex analogues of the Takagi function* [Sum13]. We say that $C \in \mathcal{C}$ is *non-trivial* if there exists $(\beta_{\vec{n}}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0^s} \setminus \{\vec{0}\}$ such that $C = \sum \beta_{\vec{n}} C_{\vec{n}}$.

Our first main result shows that every non-trivial $C \in \mathcal{C}$ can detect the Fatou set of G.

Theorem 1 ([JS15a]). *Let $C \in \mathcal{C}$ be non-trivial. Then*

$$\left\{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \exists U \text{ open s.t. } z \in U \text{ and } C_{|U} \text{ is constant}\right\} = F(G).$$

In particular, $\mathcal{C} = \bigoplus_{\vec{n} \in \mathbb{N}_0^s} \mathbb{C} C_{\vec{n}}$ is a direct sum of $\mathbb{C}$-vector spaces.

To state our second main result, the *pointwise Hölder exponent* $\text{Höl}(C, z)$ is for $z \in \hat{\mathbb{C}}$ given by

$$\text{Höl}(C, z) := \sup\left\{\beta \in [0, \infty) : \limsup_{y \to z, y \neq z} \frac{|C(y) - C(z)|}{d(y, z)^{\beta}} < \infty\right\} \in [0, \infty],$$

where d denotes the spherical distance on $\hat{\mathbb{C}}$. We denote by $\dim_H$ the Hausdorff dimension with respect to the spherical distance on $\hat{\mathbb{C}}$.

Theorem 2 ([JS15b, JS15a]). *Let $C \in \mathcal{C}$ be non-trivial. Then the map*

$$\alpha \mapsto \dim_H \left\{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \text{Höl}(C, z) = \alpha\right\}$$

defines a positive, strictly concave and real-analytic function on a bounded open interval (α_-, α_+), unless $z \mapsto \text{Höl}(C, z)$ is constant on $J(G)$.

Under certain assumptions, for a non-trivial $C \in \mathcal{C}$, we have that $\text{Höl}(C, z) < 1$ for μ-almost every $z \in J(G)$ with respect to a certain measure μ with topological support equal to the Julia set $J(G)$. Hence, every non-trivial $C \in \mathcal{C}$ is μ-almost everywhere non-differentiable.

References

[JS15a] J. Jaerisch and H. Sumi, *Hölder regularity of the complex analogues of the Takagi function*, in preparation (2015).

[JS15b] ———, *Multifractal formalism for expanding rational semigroups and random complex dynamical systems*, Nonlinearity, to appear (2015).

[Sum11] H. Sumi, *Random complex dynamics and semigroups of holomorphic maps*, Proc. London Math. Soc. (1) (2011), no. 102, 50–112.

[Sum13] ———, *Cooperation principle, stability and bifurcation in random complex dynamics*, Adv. Math. **245** (2013), 137–181.

Stretching rays for complex cubic polynomials

中根　静男　(東京工芸大学)*

Stretching rays とは、Böttcher coordinate において、擬等角写像 $f_s(z) = z|z|^{s-1}, s > 0$ により擬等角変形を施して得られる parameter 空間の escape locus 上の rays である。f_s の形から、動径方向に伸縮させるが、偏角は保存することに注意する。Stretching rays は $s > 0$ で parametrize されるが、$s \to 0$ の時に 1 点 Q に収束するとき、Q に着地するという。Komori-Nakane [KN] は、実 3 次多項式写像族の stretching rays の parabolic locus への着地性について考察し、図 1 のように、振動するために着地しない rays が存在することを示した。ここでは、その結果を実でない 3 次多項式の場合に拡張する。本講演は Pascale Roesch との共同研究に基づいている。

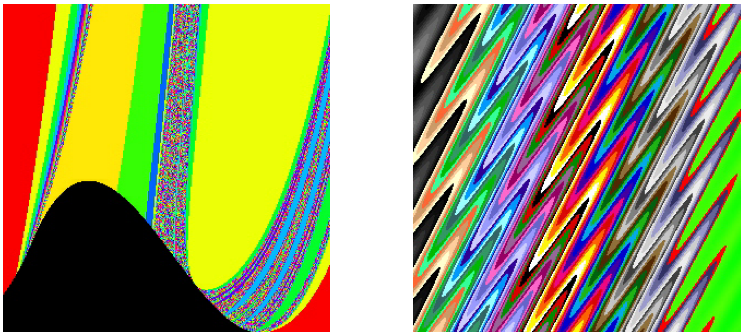


図 1: Stretching rays for real cubic polynomials

Shift locus に属する 3 次多項式 P の critical points c_1, c_2 に external rays が達するとき、その angles の集合を各々 Θ_1, Θ_2 とする。$\Theta = \{\Theta_1, \Theta_2\}$ を P の critical portrait という。

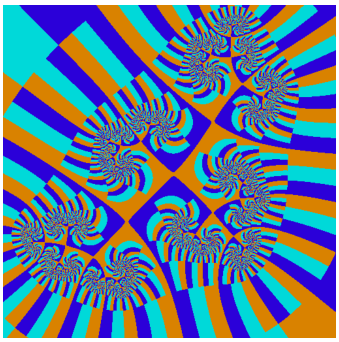


図 2: A cubic polynomial with critical portrait $\Theta = \{\{0, 1/3\}, \{4/9, 7/9\}\}$

与えられた critical portrait Θ を持つような 3 次多項式の全体を S_Θ と書く。S_Θ は stretching deformation で不変である。$g_P(z) = \lim_{n\to\infty} 3^{-n} \log_+ |P^n(z)|$ を P の escape rate function とする。

*e-mail: nakane@gen.t-kougei.ac.jp

Kiwi [K] は S_Θ が $(g_P(c_1), g_P(c_2))$ で parametrize されること、S_Θ が2次元実解析的多様体であることを示した。[KN] で定義した Böttcher vector :

$$\eta(P) = \frac{1}{\log 3}\left(\log g_P(c_2) - \log g_P(c_1)\right)$$

は stretching で保たれるので、S_Θ 上 η の level curves が stretching rays を与える。

ここで考察するのは次の場合である。

$$\Theta_1 = \{0, \frac{1}{3}\}, \quad \Theta_2 = \{\frac{1+3\ell}{3^{k+1}} + \frac{1}{3}, \frac{1+3\ell}{3^{k+1}} + \frac{2}{3}\}, \quad 0 \le \ell \le \frac{3^{k-1}-1}{2}, \quad k \ge 1.$$

ここで、$\theta := \dfrac{1+3\ell}{3^{k+1}}$ は c_2 の co-critical point $\tilde{c}_2$ の angle で、それは $0 < \theta < 1/6$ を満たし、角の3倍写像を $m_3 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ とすると、次を満たすように仮定している。

$$m_3^k(\Theta_2) = \{1/3\} \subset \Theta_1, \quad m_3^{k+1}(\Theta_2) = \{0\} \subset \Theta_1$$

従って、$P \in S_\Theta$ とすると、P の critical point c_1 と $P^{k+1}(c_2)$ は angle 0 の external ray の上に乗る。これから、P を通る stretching ray を $S(P)$、その集積点集合を $Acc(S(P))$ とおくと次が従う。

$$Acc(S(P)) \subset Per_1(1) := \{Q; Q \text{ は固有値 } 1 \text{ の放物的不動点を持つ}\}$$

$Q \in Per_1(1)$ の放物的不動点の吸引鉢を $\mathcal{B}_Q$, その attracting Fatou coordinate を $\phi_{Q,-}$ とおく。$\tau(Q) = \phi_{Q,-}(c_2) - \phi_{Q,-}(c_1)$ を Fatou vector という。

補題 1. $Acc(S(P)) \subset \mathcal{AC} := \{Q \in Per_1(1); c_1, c_2 \in \mathcal{B}_Q\}$.

そこで $\mathcal{AC}$ への着地性を考える。

$P \in S_\Theta$ が $\eta(P) = j - k - 1 \in \mathbb{Z}$ を満たせば P は critical orbit relation $P^{k+1}(c_2) = P^j(c_1)$ を満たす。すると $S(P)$ は $\mathcal{AC}$ 上 $\tau(Q) = j - k - 1$ を満たす Q に着地する。

定理 1. *(1)* $\eta(P) \in \mathbb{Z}$ ならば、$S(P)$ は $\mathcal{AC}$ 上 $\tau(Q) = \eta(P)$ を満たす点 Q に着地する。

(2) $\eta(P) \notin \mathbb{Z}$ ならば、$S(P)$ は $\mathcal{AC}$ の点には着地しない。つまり、その集積点集合 $Acc(S(P))$ は $\mathcal{AC}$ の非自明な連結閉集合である。

参考文献

[K] J. Kiwi: Combinatorial continuity in complex polynomial dynamics. Proc. London Math. Soc. 91 (2005), pp. 215–248.

[KN] Y. Komori and S. Nakane: Landing property of stretching rays for real cubic polynomials. Conformal Geometry and Dynamics 8 (2004), pp. 87–114.

[W] P. Willumsen: On accumulation of stretching rays. PhD thesis, Technical University of Denmark, 1997.

Apollonian gasket 上の Laplacian と その Weyl 型固有値漸近挙動[1]

梶野　直孝　(神戸大学)

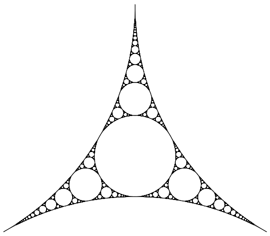


図 1. Apollonian gasket

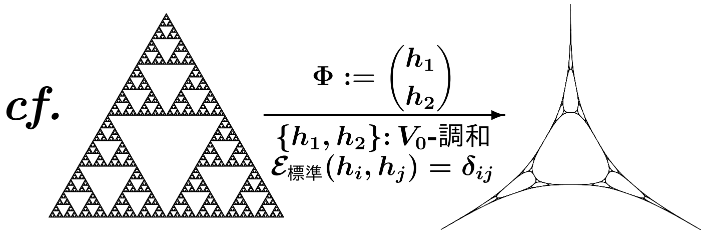


図 2. Sierpiński gasket と調和 Sierpiński gasket

1. Introduction: Apollonian gasket

どの 2 つも互いに接しているような 3 円で囲まれた $\mathbb{R}^2$ 内の閉領域（理想 3 角形）を考えると，最初の 3 円全てに接する円でこの閉領域内に含まれるものが唯 1 つ存在することが古代ギリシアの Apollonius of Perga 以来よく知られている．図 1 に示した **Apollonian gasket** は，この内接円の内部を最初の理想 3 角形から取り除き，残った理想 3 角形に対しても同様にその内接円の内部を取り除く操作を無限に繰り返したときに最後に残る点全体の集合である[2]．Apollonian gasket はその構成から容易に分かるように，いわゆる（普通の）Sierpiński gasket（図 2 左）と同相なフラクタル集合であり，フラクタル幾何学，双曲力学系，Klein 群論等の多様な観点からよく研究されている．

本講演では，Teplyaev [7] により導入された Apollonian gasket 上の標準的な "Laplacian" について，対応するエネルギー形式の「計算可能な具体形」を求めることができ，さらに Weyl 型固有値漸近挙動が成り立つ，という講演者の最近の結果を紹介する．

2. 「標準的な "Laplacian"」の構成のアイデア

「標準的な "Laplacian"」の構成の基本的なアイデアは，Sierpiński gasket における「調和埋込により与えられる測度論的 Riemann 構造」の研究に由来する．Sierpiński gasket K においては，その上の標準的な拡散過程に対応するものとして自己相似な標準 Dirichlet 形式（エネルギー形式）$(\mathcal{E}_{標準}, \mathcal{F}_{標準})$ が定まることが知られている．木上 [3, 4] はこの Dirichlet 形式に関する調和関数[3] の組 (h_1, h_2) で線型独立なものを取り，幾何学的には K の $\Phi := (h_1, h_2) : K \to \mathbb{R}^2$ による埋込（図 2），解析的には Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}_{標準}, \mathcal{F}_{標準})$ 及び「Riemann 体積測度」$\mu := \mu_{\langle h_1 \rangle} + \mu_{\langle h_2 \rangle}$ を[4] 考えることで，K 上で Riemann 多様体の場合に類似の挙動を示す熱核が得られることを示した．これについてはその後，より詳細な解析的・幾何的性質の研究が [1, 5, 2] でなされている．

Teplyaev [7] は [3] による調和埋込 Φ の導入からの類推として

本研究は JSPS 科研費 25887038, 15K17554 の助成を受けたものである．
キーワード：Apollonian gasket, Laplacian, Weyl 型固有値漸近挙動，Klein 群上のエルゴード理論

[1] 双曲幾何や Klein 群論との関連を期待して敢えて函数論分科会での講演申込とさせていただいた．講演内容自体が（少なくとも現状では）函数論的側面に乏しいことについては平にご容赦いただきたい．

[2] 双曲幾何や Klein 群論の立場からは最初の 3 円の 1 つが他の 2 円を内側に含む場合や最初の 3 円の 1 つもしくは 2 つが直線である場合も同時に考える方が自然であるが，それらの場合は本講演の主結果がそのままの形では成り立たなくなるためここでは考えないことにする．

[3] K の最外の 3 頂点 $\{q_1, q_2, q_3\} =: V_0$ で適当な境界値の与えられた，$K \setminus V_0$ 上で $\mathcal{E}_{標準}$-調和な関数．

[4] $\mu_{\langle u \rangle}$ は $u \in \mathcal{F}_{標準}$ の $\mathcal{E}_{標準}$-エネルギー測度（関数 u のエネルギーを K 上の Borel 測度と見なしたもの）．

「**Apollonian gasket はあるエネルギー形式に関する調和埋込として実現できるか**」という問題を考え，それが可能であることを示した．すると，[3, 4, 1, 5, 2] と同様に（調和）座標関数のエネルギー測度を「Riemann 体積測度」として用いることにより，Riemann 多様体の場合に類似の性質を示す Apollonian gasket 上の Laplacian・熱核が得られるものと期待できる．[7] ではこのエネルギー形式の詳しい解析は全くなされておらず，その具体的な形の計算や L^2 空間上の非負定値対称双線型形式としての閉性（“Laplacian”の自己共役性）等のごく基本的な結果すら知られていなかったが，筆者は最近，これらの基本的な点を整理し，さらに Laplacian の Weyl 型固有値漸近挙動を証明した．これが本講演の主結果であり，その具体的な内容を次節で簡単に説明する．

3. 主結果：エネルギー形式の具体形と Laplacian の固有値漸近挙動

$\alpha,\beta,\gamma\in(0,\infty)$ とし，どの 2 つも互いに接するような半径 $\alpha^{-1},\beta^{-1},\gamma^{-1}$ の 3 円の成す理想 3 角形を考える．その外接円半径の逆数及び内接円半径の逆数をそれぞれ σ,r とし，またこの理想 3 角形から得られる Apollonian gasket を $K_{\alpha,\beta,\gamma}$ で表すとする．このとき $\sigma=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^{1/2}$, $r=\alpha+\beta+\gamma+2\sigma$ であることはよく知られており，証明も難しくない．そしてこの理想 3 角形に，3 つの「辺」上に抵抗値 $\frac{2\alpha\sigma}{\alpha^2+\sigma^2},\frac{2\beta\sigma}{\beta^2+\sigma^2},\frac{2\gamma\sigma}{\gamma^2+\sigma^2}$ の抵抗を持つ電気回路構造を導入する．$K_{\alpha,\beta,\gamma}$ をさらに小さな理想 3 角形の集まりで近似していく際にも，各近似段階毎に各理想 3 角形に上と同様に円の半径に応じた抵抗値を配し，より多数の頂点をもつ電気回路とみなす．こうして得られる電気回路構造の列は Apollonian gasket の近似の精度を無限大にする極限で収束することが証明でき，それにより $K_{\alpha,\beta,\gamma}$ 上のエネルギー形式（Dirichlet 形式）$(\mathcal{E}^{\alpha,\beta,\gamma},\mathcal{F})$ を得る [5]．$K_{\alpha,\beta,\gamma}$ の座標関数が $\mathcal{E}^{\alpha,\beta,\gamma}$-調和であることは $(\mathcal{E}^{\alpha,\beta,\gamma},\mathcal{F})$ の構成から容易に従い，さらに座標関数のエネルギー測度から「Riemann 体積測度」$\mu_{\alpha,\beta,\gamma}$ を定めると $(\mathcal{E}^{\alpha,\beta,\gamma},\mathcal{F})$ が $L^2(K_{\alpha,\beta,\gamma},\mu_{\alpha,\beta,\gamma})$ 上の強局所的対称正則 Dirichlet 形式を定めることが証明できる．

d を Euclid 距離に関する $K_{\alpha,\beta,\gamma}$ の Hausdorff 次元，$\mathcal{H}^d$ を Euclid 距離に関する $\mathbb{R}^2$ 上の d 次元 Hausdorff 測度とする．d が α,β,γ に依存しないことは容易に分かり，また $d\in(1,2)$, $\mathcal{H}^d(K_{\alpha,\beta,\gamma})\in(0,\infty)$ であることが知られている（例えば [6] 参照）．

定理 1 (K., 準備中). $(K_{\alpha,\beta,\gamma},\mu_{\alpha,\beta,\gamma},\mathcal{E}^{\alpha,\beta,\gamma},\mathcal{F})$ に対応する $L^2(K_{\alpha,\beta,\gamma},\mu_{\alpha,\beta,\gamma})$ 上の非負自己共役作用素のスペクトルは離散的であり，その固有値の全体を $\{\lambda_n^{\alpha,\beta,\gamma}\}_{n\in\mathbb{N}}$（各固有値は重複度分繰り返す）とするとき，$\alpha,\beta,\gamma$ に無関係な定数 $c\in(0,\infty)$ が存在して

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{-d/2}\#\{n\in\mathbb{N}\mid\lambda_n^{\alpha,\beta,\gamma}\le\lambda\}=c\mathcal{H}^d(K_{\alpha,\beta,\gamma}).$$

参考文献

[1] N. Kajino, *Potential Anal.* **36** (2012), 67–115.

[2] N. Kajino, in: Contemp. Math., vol. 600, 2013, pp. 91–133.

[3] J. Kigami, in: Pitman Research Notes in Math., vol. 283, 1993, pp. 201–218.

[4] J. Kigami, *Math. Ann.* **340** (2008), 781–804.

[5] P. Koskela and Y. Zhou, *Adv. Math.* **231** (2012), 2755–2801.

[6] R. D. Mauldin and M. Urbański, *Adv. Math.* **136** (1998), 26–38.

[7] A. Teplyaev, in: Proc. Sympos. Pure Math., vol. 72, Part 1, 2004, pp. 131–154.

[5] $(\mathcal{E}^{\alpha,\beta,\gamma},\mathcal{F})$ を得る極限操作を具体的に書いてみると，$K_{\alpha,\beta,\gamma}$ を位相空間として Sierpiński gasket K と同一視するとき，エネルギー形式 $\mathcal{E}^{\alpha,\beta,\gamma}$ の定義域 $\mathcal{F}$ が α,β,γ に依存しないことが容易に分かる．

特別講演

多項式近似とポテンシャル論

鈴木　紀明　(名城大学)*

1. 序

有界区間での Wierstrass の多項式近似定理が，実軸全体でどうなるかを最初に考えたのは Bernstein らしい ([1]).

$$\lim_{|x|\to\infty} x^n w(x) = 0 \ (\forall n \in \mathbf{N})$$

を満たす連続で非負値な $\mathbf{R}$ 上の重み w について，$fw \in C_0(\mathbf{R})$ ならば，

$$\lim_{n\to\infty} \|(f-P_n)w\|_{L^\infty(\mathbf{R})} = 0$$

となる多項式列 $\{P_n\}$ が存在するか？「どのような w についてこれが肯定的か」は Bernstein の近似問題と呼ばれ，1950 年代までに多くの研究がなされた ([5], [8] など参照). 1970 年に入って，Freud は "Freud weights" と呼ばれる $w_\alpha(x) = \exp(-|x|^\alpha)$ について体系的な研究を始めた ([13] を参照). $\alpha \geq 1$ なら Bernstein の近似問題は肯定的であり，w_α に関する直交多項式による近似や Christoffel 関数の利用など，現在の多項式近似理論で使われる多くの手法を開発した．中でも，"infinite-finite range inequality" は重要である．$x^n w_\alpha(x)$ の最大値を与える点 $q_n = (n/\alpha)^{1/\alpha}$ は "Freud number" と呼ばれる．$\alpha > 1$ のとき，n 次の任意の多項式 P_n について

$$\|P_n w_\alpha\|_{L^p(\mathbf{R})} \leq C_1 \|P_n w_\alpha\|_{L^p(J_n)} \tag{1.1}$$

が成り立つ．ここで $J_n := [-C_2 q_n, C_2 q_n]$ である． C_1, C_2 は $n \in \mathbf{N}$ や $1 \leq p \leq \infty$ によらない定数である．

以後，重み w は程よいクラス $\mathcal{F}(C^2+)$ (定義は次節) に属するものを考える．1984 年にポテンシャル論が多項式近似理論の進展にひとつの突破口を与えた [1]．Rakhmanov ([14]) と Mhaskar-Saff ([10], [11]) は独立にポテンシャル論を用いて上記不等式 (1.1) を精密化することに成功する．$w \in \mathcal{F}(C^2+)$ について，$Q(x) := \log(1/w(x))$ とすると

$$w(x) = \exp(-Q(x))$$

である [2]．この Q を使って，各 $n \in \mathbf{N}$ について，方程式

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{a_n t Q'(a_n t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = n \tag{1.2}$$

本研究は科研費 (課題番号:15K04939) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 41A10, 41A17, 30E10, 42C05, 31A15
キーワード：polynomial approximation, Freud type weights, Erdös type weights, Favard inequality, Markov-Bernstein inequaliy, de la Vallée Poussin mean

* 〒468-8502 名古屋市天白区塩釜口 1-501 名城大学　理工学部
e-mail: suzukin@meijo-u.ac.jp
web: http://ccmath.meijo-u.ac.jp/~suzukin/

[1] もうひとつの breakthrough は randam matrix の利用らしい．例えば P. Deift, T. Kriecherbauer and K.T-R. MacLaughlin, New results on the equilibrium measure for logarithmic potentials in the presence of an external field, J. Approx. Theory, 95 (1998), 388-475 などを参照.

[2] Q は external field(外部場) と呼ばれる．$\log|z-u|^{-1}$ の代わりに $\log(|z-u|w(z)w(u))^{-1}$ を考察するのが "weighted potential theory" である．Q を主体に考えて "potential theory with external field" ともいわれる.

により定まる a_n は w に関する Mhaskar-Rakhanov-Saff number (MRS number) と呼ばれる．数列 $\{a_n\}$ は ∞ に発散し，任意の n 次多項式 P_n について

$$\|P_n w\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \le \|P_n w\|_{L^\infty(|x|\le a_n)} \tag{1.3}$$

および $1 \le p < \infty$ については

$$\|P_n w\|_{L^p(\mathbf{R})} \le 2\|P_n w\|_{L^p(|x|\le a_n)} \tag{1.4}$$

が成り立つ．ちなみに Freud weight w_α の MRS number は

$$a_n = \left(2^{\alpha-2}\frac{\Gamma(\alpha/2)^2}{\Gamma(\alpha)}\right)^{1/\alpha} n^{1/\alpha}$$

である．$\mathcal{F}(C^2+)$ に属する重み $w(x) = \exp(-Q(x))$ は

$$T(x) := \frac{xQ'(x)}{Q(x)} \tag{1.5}$$

が有界であるか否かによって，Freud型と Erdös型に分類される．Freud weight w_α $(\alpha > 1)$ はFreud型である．Erdös 型の例は $w(x) = \exp(-|x|^\alpha(e^{|x|} - 1))$ などである．

今後は次の記号を用いる．$\mathcal{P}_n$ で n 次以下の実係数の多項式の全体とする．さらに $1 \le p \le \infty$ と $fw \in L^p(\mathbf{R})$ に対して

$$E_{p,n}(f, w) := \inf_{P\in\mathcal{P}_n} \|(f - P)w\|_{L^p(\mathbf{R})} \tag{1.6}$$

とする．これまでに，Freud 型の重みに関する研究は多くなされている．例えば

$$E_{p,n}(f, w) \le C\frac{a_n}{n}E_{p,n-1}(f', w) \quad \text{(Jackson-Favard 不等式)} \tag{1.7}$$

$$\|P'w\|_{L^p(\mathbf{R})} \le C\frac{n}{a_n}\|Pw\|_{L^p(|x|\le a_n)} \quad (\forall P \in \mathcal{P}_n) \quad \text{(Markov-Bernstein 不等式)} \tag{1.8}$$

$$\|(f - v_n(f))w\|_{L^p(\mathbf{R})} \le CE_{p,n}(f, w) \quad (v_n(f) \text{ は de la Vallée Poussin 平均}) \tag{1.9}$$

などの成立が知られている ([9] など)．本講演の目的は，Erdös型の重みに対してこれらの不等式を示すことである．結果として，多くの場面で T のべきが現れる．すなわち，w が Erdös 型のとき，(1.7) は同じ形で成り立つが，(1.8) と (1.9) は以下のようになる：

$$\left\|P'\frac{w}{T^{1/2}}\right\|_{L^p(\mathbf{R})} \le C\frac{n}{a_n}\|Pw\|_{L^p(|x|\le a_n)}, \quad \left\|(f - v_n(f))\frac{w}{T^{1/4}}\right\|_{L^p(\mathbf{R})} \le CE_{p,n}(f, w).$$

以後，特に断らない限り C や C_0 は 1 以上の定数とする．二つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について，$C^{-1}a_n \le b_n \le Ca_n$ のとき $a_n \sim b_n$ と書く．同様に，二つの関数について $f \sim g$ は $\mathbf{R}$ 上で $C^{-1}f(x) \le g(x) \le Cf(x)$ の意味とする．

本講演の内容は名城大学の酒井良二氏と伊藤健太郎氏との共同研究に基づいている．

2. 定義と基本的性質

$\mathbf{R}$ 上の重み $w(x) = \exp(-Q(x))$ は Q が以下の条件を満たすとき $w \in \mathcal{F}(C^2+)$ と書く．

(0) Q は偶関数で $Q(0) = 0$ を満たす．

(1) Q' は連続である．

(2) $Q''(x)$ が存在して $x \neq 0$ で正値である．

(3) $\lim_{x\to\infty} Q(x) = \infty$.

(4) $T(x) := xQ'(x)/Q(x)$ $(x \neq 0)$ は $(0,\infty)$ で quasi-increasing であり [3]，かつ，$T(x) \geq \Lambda$ となる定数 $\Lambda > 1$ が存在する．

(5) 定数 $C_1 \geq 1$ が存在して $\dfrac{Q''(x)}{|Q'(x)|} \leq C_1 \dfrac{|Q'(x)|}{Q(x)}$, *a.e.* $x \in \mathbf{R}$ が成り立つ．

(6) 定数 $C_2 > 0$ と原点を含む有界区間 J が存在して $\dfrac{Q''(x)}{|Q'(x)|} \geq C_2 \dfrac{|Q'(x)|}{Q(x)}$, *a.e.* $x \in \mathbf{R} \setminus J$ が成り立つ．

さらに，$\lambda > 0$ として，$w \in \mathcal{F}(C^2+)$ が，$Q \in C^3(\mathbf{R})$ かつ K が存在して，$|x| \geq K$ のとき

$$\left|\frac{Q'''(x)}{Q''(x)}\right| \leq C \left|\frac{Q''(x)}{Q'(x)}\right|, \qquad \frac{|Q'(x)|}{Q(x)^\lambda} \leq C \tag{2.1}$$

が成り立つとき $w \in \mathcal{F}_\lambda(C^3+)$ と書く．

w に関する直交多項式系を $\{p_n\}$ とする [4]．すなわち，$p_n \in \mathcal{P}_n$ で，

$$\int_{\mathbf{R}} p_n(x)p_m(x)w^2(x)dx = \delta_{nm}$$

である．$fw \in L^p(\mathbf{R})$ について，Fourier 部分和を

$$s_m(f)(x) = \int_{\mathbf{R}} K_m(x,t)f(t)w^2(t)dt \quad \left(\text{ただし } K_m(x,t) := \sum_{k=0}^{m-1} p_k(x)p_k(t)\right)$$

として，f の de la Vallée Poussin 平均 $v_n(f)$ は次で定義される $2n-1$ 次多項式である：

$$v_n(f)(x) := \frac{1}{n}\sum_{m=n+1}^{2n} s_m(f)(x).$$

核 K_n は Christoffel-Darboux formura より次の表示を得る：

$$K_n(x,t) = \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n}\left(\frac{p_n(x)p_{n-1}(t) - p_n(t)p_{n-1}(x)}{x-t}\right). \tag{2.2}$$

ここで γ_n は p_n の n 次の係数，すなわち，$p_n(x) = \gamma_n x^n + \cdots$ である．また $1/K(x,x)$ は Christoffel 関数と呼ばれ

$$\frac{1}{K_n(x,x)} = \inf_{P\in\mathcal{P}_n} \frac{1}{|P(x)|^2}\int_{\mathbf{R}} |P(t)w(t)|^2 dt \tag{2.3}$$

[3] $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ は，ある定数 $c > 0$ が存在して，$0 < x < y$ ならばいつも $f(x) \leq cf(y)$ が成り立つとき quasi-increasing という．

[4] Freud weight $w_2(x) = \exp(-|x|^2)$ に関する直交多項式が Hermite 多項式である．

が成り立つ．w の MRS number a_n との関係は $a_n \sim \gamma_{n-1}/\gamma_n$ および

$$K_n(x,x) \le C\frac{n}{a_n}\frac{T^{1/2}(x)}{w^2(x)} \tag{2.4}$$

である．さらに

$$a_{2n} \sim a_n, \quad T(a_{2n}) \sim T(a_n), \quad a_{2n} - a_n \sim \frac{a_n}{T(a_n)} \tag{2.5}$$

などが成り立つ．一般に

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0 \tag{2.6}$$

であるが，より正確には $a_n = O(n^{1/\Lambda})$ であり， 特に，w が Erdös 型なら，すべての $\eta > 0$ について $a_n = O(n^\eta)$ である．

3. 重み付きポテンシャル論

ポテンシャル論がどのように使われているのかを説明するために (1.3) の証明の概略を紹介する ([7], [9], [17] など参照)．**C** 上の測度 μ の対数ポテンシャルを

$$U\mu(z) := \int \log \frac{1}{|z-t|} d\mu(t)$$

と書き，重み $w = \exp(-Q) \in \mathcal{F}(C^2+)$ に関するエネルギー積分 $I_w(\mu)$ を

$$\begin{aligned} I_w(\mu) &:= \iint \log \frac{1}{|z-t|w(t)w(t)} d\mu(z)d\mu(t) \\ &= \iint \log \frac{1}{|z-t|} d\mu(z)d\mu(t) + 2\int Q(z)d\mu(z) \end{aligned}$$

で定める． **R** 上の確率測度全体を $M(\mathbf{R})$ として

$$V_w := \inf\{I_w(\mu); \mu \in M(\mathbf{R})\} \tag{3.1}$$

とする．$Q(x) - \log|x| \to \infty$ $(|x| \to \infty)$ である事実から $V_w = I_w(\mu_w) < \infty$ となる $\mu_w \in M(\mathbf{R})$ が一意に存在する．さらに，$\mathrm{supp}(\mu_w)$ はコンパクトであり，w の連続性から $U\mu_w$ も **R** 上で連続になり，$c_w := V_w - \int Q d\mu_w$ として，

$$\begin{cases} U\mu_w(x) + Q(x) \ge c_w & (\forall x \in \mathbf{R}) \\ U\mu_w(x) + Q(x) = c_w & (\forall x \in \mathrm{supp}(\mu_w)) \end{cases} \tag{3.2}$$

が成り立つ．μ_w を w に付随した平衡分布，c_w を w に関する Robin 定数という[5]．このとき $I := \mathrm{supp}(\mu_w)$ は閉区間になる[6]．実際，$U\mu_w$ の連続性から I は孤立点を含まない．もし区間でないならば $(a,b) \in \mathbf{R} \setminus I$ $(a, b \in I)$ が存在する．$(U\mu_w(x))'' = \int(x-$

[5] 古典的な場合 ($w \equiv 1$) には **R** 全体の平衡分布は存在しないが，上記主張の証明は古典的な場合のコンパクト集合に対する Frostman の定理と同様である．

[6] 古典的な場合のコンパクト集合 K に対する平衡分布の台は常に K の outer boundary と一致するが，重み付きの場合には一般に複雑である．ところが， **R** についての平衡分布の台は有界閉区間になることの発見が **R** 上の多項式近似論への多大な寄与になっていると思う．

$t)^{-2}d\mu_w(t) > 0$ より $U\mu_w$ は I で狭義凸で Q も凸なので (a,b) 上で $U\mu_w(x)+Q(x) < U\mu_w(a)+Q(a) = c_w$ となって (3.2) に反する．Q の対称性から $I=[-a,a]$ である．Mhaskar-Saff は $x>0$ のとき

$$F(x) := \log\frac{x}{2} - \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{Q(t)}{\sqrt{x^2-t^2}}dt$$

が $x=a$ のとき最大値をとることを示した[7]．これから $F'(a)=0$ が導びかれ，これを整理すると a は

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{atQ'(at)}{\sqrt{1-t^2}}dt = 1 \tag{3.3}$$

を満たすことがわかる．さて，(1.4) の証明に移る．

$$\omega_n(x) := \exp(-\frac{Q(x)}{n})$$

とする．ω_n に付随した $\mathbf{R}$ 上の平衡分布 μ_{ω_n} が存在する．このとき (1.2) と (3.3) より $\mathrm{supp}(\mu_{\omega_n}) = [-a_n, a_n]$ である．任意の $P\in\mathcal{P}_n$ をとる．P は monic，すなわち，$P(z)=z^n+\cdots$ の形としてよい．この P について，

$$|w(x)P(x)| = |\omega_n^n(x)P(x)| \le M, \quad \forall x\in[-a_n,a_n] \tag{3.4}$$

が成り立てば，

$$|P(z)| \le M\exp(n(-U\mu_{\omega_n}(z)+c_{\omega_n})) \tag{3.5}$$

が $\mathbf{C}$ 上で成り立つ．実際，$\log(1/|P(z)|) = nU\nu(z)$ と表せば ν は確率測度である[8]．(3.4) と μ_{ω_n} についての (3.2) の後半式より

$$U\mu_{\omega_n}(x) - c_{\omega_n} = -\frac{Q(x)}{n} \le U\nu(x) + \frac{\log M}{n}$$

が $\mathrm{supp}(\mu_{\omega_n})$ 上で成り立つので，優越原理[9]から (3.5) を得る．(3.2) の前半式から $\mathbf{R}$ 上で $Q(x)/n \ge -U\mu_{\omega_n}(x)+c_{\omega_n}$ となるので，(3.5) と併せて $|w(x)P(x)|\le M$ $(\forall x\in\mathbf{R})$ となり $M=\|Pw\|_{L^\infty(|x|\le a_n)}$ とすれば (1.3) を得る．

古典的なポテンシャル論において，容量，超越直径，Fekete 多項式，Chebyshev 定数は密接な関係を持つ (例えば [15])．重み付きの場合も同様な結果が成り立つのでそれに触れておく．E を $\mathbf{R}$ の閉集合とする (一般に E は $\mathbf{C}$ の閉部分集合でよいが，そのときは重み $w=\exp(-Q)$ が E 上で定義されている必要がある)．$\mu_{E,w}$ を w に付随した E の平衡分布として，以下を定義する：

$$\mathrm{cap}(E,w) := e^{-V_w(E)}, \quad \text{ここで } V_w(E) = I_w(\mu_{E,w})$$
$$\delta_n(E,w) := \max_{z_1,\cdots,z_n\in E}\left(\prod_{1\le i<j\le n}|z_i-z_j|w(z_i)w(z_j)\right)^{2/n(n-1)}$$
$$t_n(E,w) := \min_{p\in\mathcal{P}_{n-1}}\|w^n(z)(z^n-p(z))\|_{L^\infty(E)}$$

[7] $K=[-x,x]$ とすると，$F(x)=\log\mathrm{cap}(K)-\int Q(t)d\nu_K(t)$ である．ここで，$\mathrm{cap}(K)$ と ν_K は古典的な $(w\equiv 1)$ のときの K の容量と平衡分布である．$\mathbf{R}$ 上で $U\mu_w(t)\ge -Q(t)+c_w$ であるから ν_K で両辺を積分 (し順序交換) すると，$U\nu_K(t)\le\log(1/\mathrm{cap}(K))$ より $F(x)\le -c_w = F(a)$ を得る．

[8] $P(z)=(z-z_1)\cdots(z-z_n)$ ならば $n\nu=\delta_{z_1}+\cdots+\delta_{z_n}$ である (Dirac 測度の和)．$\log(1/|P(z)|)$ が対数ポテンシャルの形で書ける事実が多項式近似論とポテンシャル論を結びつけている．

[9] μ,ν がコンパクトな台をもち $\int d\nu\le\int d\mu$ かつ μ のエネルギーが有限なら $U\mu\le U\nu+c$ (c は定数) が $\mathrm{supp}(\mu)$ の上で成り立てば，同じ不等式が $\mathbf{C}$ 全体で成り立つ．

$\mathrm{cap}(E,w)$ を重み w の付いた容量という．また，

$$\delta(E,w)=\lim_{n\to\infty}\delta_n(E,w),\quad t(E,w):=\lim_{n\to\infty}t_n(E,w)$$

をそれぞれ，重み付きの超越直径および重み付きの Chebyshev 定数という．このとき

$$\mathrm{cap}(E,w)=\delta(E,w)=t(E,w)\exp\left(-\int_{\mathbf{R}}Q(x)d\mu_{E,w}(x)\right) \tag{3.6}$$

が成り立つ ([16], [10])．さらに，最大値 $\delta_n(E,w)$ を与える点 $\{z_1^{(n)},\cdots,z_n^{(n)}\}$ を重み付きの Fekete 点列という．これらを解にもつ monic 多項式が Fekete 多項式である．$n\to\infty$ のとき

$$\frac{\delta_{z_1^{(n)}}+\cdots+\delta_{z_n^{(n)}}}{n}\ \to\ \mu_{E,w}\ \ (\text{漠収束})$$

である．これからも平衡分布の重要性が感じられる．

4. 定理

以下，$w\in\mathcal{F}(C^2+)$, $1\le p\le\infty$ とする．

定理 1. ([18]) 定数 $C\ge 1$ が存在して，f が絶対連続で $f'w\in L^p(\mathbf{R})$ ならば

$$E_{p,n}(w,f)\le C\frac{a_n}{n}E_{p,n-1}(w,f')\quad(\forall n\in\mathbf{N}) \tag{4.1}$$

が成り立つ (Jackson-Favard 不等式)．

Freud 型の証明は Mhasker [9] に書かれている．我々の結果は同じ形であるが Erdös 型の場合を含む証明を与えた．また Lubinsky は [7] の中で，$E_{p,n}(w,f)\le\eta_nE_{p,n-1}(w,f')$, $\lim_{n\to\infty}\eta_n=0$ となる数列 $\{\eta_n\}$ が存在するような重み w を考察している．(4.1) は $w\in\mathcal{F}(C^2+)$ ならば $\eta_n=Ca_n/n$ とできることを示している．

定理 2. ([19]) 定数 $C\ge 1$ が存在して，任意の $n\in\mathbf{N}$ と任意の $P\in\mathcal{P}_n$ に対して

$$\left\|P'\frac{w}{T^{1/2}}\right\|_{L^p(\mathbf{R})}\le C\frac{n}{a_n}\|Pw\|_{L^p(|x|\le a_n)} \tag{4.2}$$

が成り立つ (Markov-Bernstein 不等式)．さらに，$0<\lambda<3/2$ で $w\in\mathcal{F}_\lambda(C^3+)$ ならば，$C_0\ge 1$ が存在して

$$\|P'w\|_{L^p(\mathbf{R})}\le C\frac{n}{a_n}\|PT^{1/2}w\|_{L^p(|x|\le a_{C_0n})} \tag{4.3}$$

が成り立つ

w が Freud 型なら T は有界なので，(4.2) は (1.8) になる [10]．(4.3) は次の定理3を使って w^* を (4.2) に適用する．(4.3) に関連する結果として [6, p.294] に $\|P'w\|_{L^p(\mathbf{R})}\le CnT^{1/2}(a_n)/a_n\ \|Pw\|_{L^p(\mathbf{R})}$ が示されている．$0<x\le a_n$ で $T(x)\le CT(a_n)$ であるから (4.3) の方がよい評価であるだけでなく，$T^{1/2}$ をノルムの中に入れたので，定理3を繰り返し使うことができて，$w\in\mathcal{F}_\lambda(C^3+)$ ならば，高階の導関数についての評価 $\|P^{(k)}w\|_{L^p(\mathbf{R})}\le C(n/a_n)^k\|PT^{k/2}w\|_{L^p(\mathbf{R})}$ も得ることができる ([4, Lemma 2.5])．

[10] (4.3) で $C_0=1$ とできるか否かは不明である．また，$T^{1/2}w$ を重みと考えて (4.2) が適用できれば簡単であるが，一般には $T^{1/2}w$ は $\mathcal{F}(C^2+)$ に属するとは限らないのでそのままでは適用できない．

定理 3. ([19]) $0 < \lambda < 3/2$ かつ $w \in \mathcal{F}_\lambda(C^3+)$ とする．任意の $\alpha \in \mathbf{R}$ について，次を満たす重み $w^* \in \mathcal{F}(C^2)$ を構成できる：$w^* \sim T^\alpha w$ であり

$$T^* \sim T \quad \text{かつ} \quad a_{n/C_0} \le a_n^* \le a_{C_0 n}$$

が成り立つ．ここで T^* と a_n^* は w^* についての (1.2) と (1.5) で定まるものである．

定理 4. ([3]) $w \in \mathcal{F}(C^2+)$ が $T(a_n) \le C_0(n/a_n)^{2/3}$ を満たすとき，定数 $C \ge 1$ が存在して次が成り立つ：任意の $fw \in L^p(\mathbf{R})$ と任意の $n \in \mathbf{N}$ について

$$\left\|(f - v_n(f))\frac{w}{T^{1/4}}\right\|_{L^p(\mathbf{R})} \le CE_{p,n}(w, f). \tag{4.4}$$

任意の $fT^{1/4}w \in L^p(\mathbf{R})$ について

$$\|(f - v_n(f))w\|_{L^p(\mathbf{R})} \le CE_{p,n}(T^{1/4}w, f). \tag{4.5}$$

また，f が絶対連続で $f'w \in L^p(\mathbf{R})$ ならば

$$\left\|(f - v_n(f))\frac{w}{T^{1/4}}\right\|_{L^p(\mathbf{R})} \le C\frac{a_n}{n}\|f'w\|_{L^p(\mathbf{R})} \tag{4.6}$$

が成り立つ．

証明の本質部分は Christoffel 関数の評価 (2.3) や (2.4) などを使って，まず $p = \infty$ のときの $\|v_n(f)w/T^{1/4}\|_{L^p(\mathbf{R})} \le C\|fw\|_{L^p(\mathbf{R})}$ および $\|v_n(f)\|_{L^p(\mathbf{R})} \le C\|fT^{1/4}w\|_{L^p(\mathbf{R})}$ を示し，双対性を使うと，前者から $p = 1$ の後者が，後者から $p = 1$ の前者が得られる．Riesz-Torin 補間定理が，すべての $1 \le p \le \infty$ の成立を導く．これらの評価式と $v_n(P) = P$ $(\forall P \in \mathcal{P}_n)$ である事実[11] から (4.4) と (4.5) を得る．(4.6) は (4.1) と (4.4) の組み合わせである．なお，定理 2 と組み合わせれば $\|v_n'(f)w/T^{1/2}\|_{L^p(\mathbf{R})} \le Cn/a_n\|fT^{1/4}w\|_{L^p(\mathbf{R})}$ なども導かれる．

次の定理は十分に早く多項式で近似できる関数は整関数であること示すものである．

定理 5. ([20]) $0 < p \le \infty$ とする．実関数 $fw \in L^p(\mathbf{R})$ について

$$\rho_p(f) := \limsup_{n\to\infty} \frac{n \log n}{\log(1/E_{p,n}(f, w))} \tag{4.7}$$

とする．f が位数 λ の整関数に a.e. に一致する必要十分条件は $\rho_p(f) < \infty$ である．このとき $\rho_p(f) = 0 \iff \lambda = 0$ であり，$\rho_p(f) \ne 0$ ならば

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{A} \le \frac{1}{\rho_p(f)} \le \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{B} \tag{4.8}$$

が成り立つ．ここで $A := \liminf_{|x|\to\infty} T(x)$, $B = \limsup_{|x|\to\infty} T(x)$ である．

この定理の原型は有界区間における [2] と [21] の結果である．Mhaskar は Freud 型について同様の結果を出している．特に Freud weight $w_\alpha(x) = \exp(-|x|^\alpha)$ のときは $1/\lambda - 1/\alpha = 1/\rho_p(f)$ が成り立つ ([9, p.177])．Erdös 型のときは $A = B = \infty$ なので $\lambda = \rho_p(f)$ となることを我々の定理は示している．

[11] 通常の Cesaro 平均ではなく de la Vallée Poussin 平均を考える大きな理由である．

参考文献

[1] S. N. Bernstein, Le problem de la approximation des fonctions continus sur tout l'axe reel et l'une de ses applications, Bull. Math. Soc. France, 52 (1924), 399-410.

[2] S. N. Bernstein, Leçon sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des function analytiques d'une variable réell, Gauthier-Villars, Paris, 1926.

[3] K. Itoh, R. Sakai and N. Suzuki, The de la Vallée Poussin mean and polynomial approximation for exponential weights, International J. of Analysis, 2015, ID 706930, 8p.

[4] K. Itoh, R. Sakai and N. Suzuki, An estimate for derivative of the de la Vallée Poussin mean, to appear.

[5] P. Koosis, The logarithmic integral I, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1988.

[6] A. L. Levin and D. S. Lubinsky, Orthogonal polynomials for exponential weights, Springer, New York, 2001.

[7] D. S. Lubinsky, Which weights on $\mathbf{R}$ admit Jackson theorem?, Israel J. of Math. 155 (2006), 253-280.

[8] D. S. Lubinsky, A survey of weights polynomial approximation with exponential weights, Surv. Approx. Theory, 3 (2007), 1-105.

[9] H. N. Mhaskar, Introduction to the theory of weighted polynomial approximation, World Scientific, Singapore, 1996.

[10] H. N. Mhaskar and E. B. Saff, Extremal problems for polynomials with exponential weights, Trans. Amer. Math. Soc., 285 (1984), 204-234.

[11] H. N. Mhaskar and E. B. Saff, Where does the sup norm of a weighted polynomial live?, Constr. Approx., 1 (1985), 71-91.

[12] H. N. Mhaskar and E. B. Saff, Where does the L^p norm of a weighted polynomial live?, Trans. Amer. Math. Soc., 303 (1987), 109-124.

[13] P. Navai, Geza Freud, orthgonal polynomials and Christoffel functions: a case study, J. Approx. Theory, 48 (1986), 3-167.

[14] E. A. Rakhmanov, On asymptotic properties of polynomials orthogonal on the real axis, Math. USSR. Sbornik, 47 (1984), 155-193.

[15] T. Ransford, Potential theory in the complex plane, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[16] E. B. Saff, Logarithmic potential theory with applications to approximation theory, Surv. Approx. Theory, 5 (2010), 165-200.

[17] E. B. Saff and V. Totik, Logarithmic potentials with external fields, Springer, New York, 1997.

[18] R. Sakai and N. Suzuki, Favard-type inequalities for exponential weights, Pioneer J. Math. and Math. Sci., 3 (2011), 1-16.

[19] R. Sakai and N. Suzuki, Mollification of exponential weights and its application to Markov-Bernstein inequality, Pioneer J. Math. and Math. Sci., 7 (2013), 83-101.

[20] R. Sakai and N. Suzuki, A characterization of real entire functions by polynomial approximation for exponential weights, 数理解析研究所講究録別冊, B43 (2013), 279-305.

[21] R. S. Varga, On an extension of a result of S.N.Bernstein, J. Approx. Theory, 1 (1968), 176-179.

3次元双曲理想コクセター多面体の増大度について

小森　洋平　(早大教育)*1
雪田　友成　(早大教育)*2

球に内接する多面体の組合せ構造を決定せよというスタイナーの問題などに関連して、3次元双曲理想多面体の様々な研究がこれまでに行われてきた [1, 3]。この講演では特にコクセター多面体を扱う。つまり3次元双曲理想多面体 P の面角がすべて π を自然数で割った値を取ると仮定する。この条件の下で、面に関する鏡映変換全体 S の生成する群 Γ は、P を基本領域とする離散群になる。(Γ, S) を P に付随するコクセター系と呼ぶ。このとき Γ の元 g の S に関する長さ $\ell_S(g)$ を、g の S の元による最短表示 $g = s_1 s_2 \cdots s_k$ の長さ k で定義する。$\ell_S(g) = k$ を満たす Γ の元 g の個数を a_k とするとき、(Γ, S) の増大度を $\tau := \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$ と定義すると、τ は1より真に大きい実代数的整数になることが分かる。今回は3次元双曲理想コクセター多面体の増大度の全体が実軸上どのように分布しているかを考察した。

定理 1. 3次元双曲理想コクセター多面体の増大度の全体は上に非有界である。

定理 2. 面の個数が f である3次元双曲理想コクセター多面体の増大度 τ は次の不等式を満たす。

$$f - 3 \leqq \tau \leqq f - 1$$

定理 3. 3次元双曲理想コクセター多面体の増大度の最小値は $0.492432^{-1} = 2.03074$ で、面角の組が $(\pi/2, \pi/2, \pi/3, \pi/3, \pi/6, \pi/6)$ の四面体のみがその最小値を実現する。

定理 4. 任意の3次元双曲理想コクセター多面体の増大度は *Perron* 数である。

定理3および4は野中純（早大学院）氏も独立に示している [2]。

参考文献

[1] F. Gueritaud, On an Elementary Proof of Rivin's Characterization of Convex Ideal Hyperbolic Polyhedra by their Dihedral Angles, Geometriae Dedicata 108 (2004), 111–124.

[2] J. Nonaka, The growth rates of ideal Coxeter polyhedra in hyperbolic 3-space, arXiv:1504.06718.

[3] I. Rivin, : A characterization of ideal polyhedra in hyperbolic 3-space, Ann. of Math. 143 (1996), 5–70.

*1 e-mail: `ykomori@waseda.jp`
*2 e-mail: `yshigetomo@suou.waseda.jp`

ヘルダー連続微分をもつ円周の微分同相写像の等角重心拡張の連続性

松崎　克彦　(早稲田大学)*

概　要

等角重心拡張は単位円周の擬対称同相写像を単位円板の擬等角同相写像に等角的自然性をもって拡張する．このような拡張をヘルダー連続微分をもつ円周の微分同相写像に対して考え，その対応が微分同相写像の空間とベルトラミ係数の空間の適切な位相に関して連続となることを示す．

The barycentric extension due to Douady and Earle [1] gives a natural extension of a self-homeomorphism of the unit circle $\mathbb{S}$ to a self-homeomorphism of the unit disk $\mathbb{D}$. It plays an important role applied to quasisymmetric homeomorphisms of $\mathbb{S}$ in the complex analytic theory of Teichmüller spaces. We apply the barycentric extension to diffeomorphisms of $\mathbb{S}$ with Hölder continuous derivatives and obtain an analogous result for the Teichmüller space of such circle diffeomorphisms with the universal Teichmüller space.

The universal Teichmüller space T can be defined as the space $\mathrm{QS}_*(\mathbb{S})$ of all normalized quasisymmetric homeomorphisms of $\mathbb{S}$. In this setting, the Teichmüller projection q is regarded as the boundary extension map on the space $\mathrm{QC}_*(\mathbb{D})$ of all normalized quasiconformal homeomorphisms of $\mathbb{D}$. By the measurable Riemann mapping theorem, we can identify the latter space with the space of Beltrami coefficients $\mathrm{Bel}(\mathbb{D}) = L^\infty(\mathbb{D})_1$, which is the open unit ball of measurable functions on $\mathbb{D}$ with the supremum norm. Then $q : \mathrm{Bel}(\mathbb{D}) \to T$ is continuous with respect to the topology on $\mathrm{QS}_*(\mathbb{S})$ induced by the quasisymmetry constant. The barycentric extension yields a continuous section $e : T \to \mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ for q.

The Teichmüller space T_0^α of circle diffeomorphisms with α-Hölder continuous derivatives for $\alpha \in (0, 1)$ is similarly defined as a subspace of T; the subgroup $\mathrm{Diff}_*^{1+\alpha}(\mathbb{S}) \subset \mathrm{QS}_*(\mathbb{S})$ of all such diffeomorphisms with normalization can be defined to be T_0^α. The topology on this group is induced by the $C^{1+\alpha}$-distance from the identity map. On the other hand, the corresponding subspace of Beltrami coefficients is $\mathrm{Bel}_0^\alpha(\mathbb{D}) \subset \mathrm{Bel}(\mathbb{D})$, which consists of all $\mu \in \mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ with finite weighted supremum norm

$$\|\mu\|_{\infty,\alpha} = \operatorname{ess.sup}_{\zeta \in \mathbb{D}} \left(\frac{2}{1 - |\zeta|^2} \right)^\alpha |\mu(\zeta)|.$$

Then we have proved that the restriction of the Teichmüller projection to $\mathrm{Bel}_0^\alpha(\mathbb{D})$ gives a continuous map $q : \mathrm{Bel}_0^\alpha(\mathbb{D}) \to T_0^\alpha$. In fact, the topology of T_0^α coincides with the

本研究は科研費 (課題番号:25287021) の助成を受けたものである．
2010 Mathematics Subject Classification: 30C62, 30F60, 37E30
キーワード：quasiconformal map, complex dilatation, Beltrami coefficients
* 〒169-8050 東京都新宿区西早稲田 1-6-1 早稲田大学教育学部数学科
e-mail: matsuzak@waseda.jp

quotient topology induced from $\mathrm{Bel}_0^\alpha(\mathbb{D})$ by q. Moreover, a complex Banach manifold structure has been provided for T_0^α through the Bers embedding.

The main theorem of this talk asserts the continuity of the section e restricted to T_0^α. One of the ingredients of its proof is to generalize the arguments in Earle [2] for the barycentric extension of circle diffeomorphisms.

Theorem 1 The barycentric extension of circle diffeomorphisms with α-Hölder continuous derivatives gives a continuous section

$$e : T_0^\alpha = \mathrm{Diff}_*^{1+\alpha}(\mathbb{S}) \to \mathrm{Bel}_0^\alpha(\mathbb{D})$$

for the Teichmüller projection q.

As a well-known consequence from the existence of a continuous section, we understand a topological structure of this space. Note that $T_0^\alpha = \mathrm{Diff}_*^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ is also a topological group.

Corollary 2 The Teichmüller space T_0^α is contractible.

参考文献

[1] A. Douady and C. J. Earle, *Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle*, Acta Math. **157** (1986), 23–48.

[2] C. J. Earle, *Angular derivatives of the barycentric extension*, Complex Variables **11** (1989), 189–195.

Teichmüller 曲線の個数について

東京工業大学大学院理工学研究科
志賀啓成

$M(g,n)$ を (g,n) 型 Riemann 面 $(2g-2+n>0)$ の moduli 空間とする. 有限型(双曲) Riemann 面 C 上定義された $M(g,n)$ への正則写像 $f: C \to M(g,n)$ が局所等距離写像であるとき, その組 (C,f) を Teichmüller 曲線という. ただし, C においては双曲距離を, $M(g,n)$ では Teichmüller 距離を考えるものとする.
(g,n) を固定しても, Teichmüller 曲線は一般に無限個存在するが, 正則写像 f の定義域である Riemann 面 C の位相型も固定すると, そのような Teichmüller 曲線の数は有限個であることが知られている.
本講演では, C が (p,k) 型 Riemann 面 $(2p-2+k>0)$ となり得るような Teichmüller 曲線 (C,f) 全体の個数を位相的なデータである g,n,p,k を用いて上から評価することについて報告する.

[1] C. McMullen, Prym varieties and Teichmüller curves, Duke Math. J. 133 (2006), 569-590.
[2] C. McMullen, Rigidity of Teichmüller curves, Math. Res. Lett 16 (2009), 647-649.
[3] H. Shiga, Holomorphic families of Riemann surfaces and monodromy, Handbook of Teichmüller Theory Volume IV, European Mathematical Society (2014), 1799-1810.

On families of asymptotic Jenkins-Strebel rays

天野 政紀 (東京工業大学)*

1. はじめに

タイヒミュラー空間上の任意の点は，ある Jenkins-Strebel 測地線上の点となっている．今回，Jenkins-Strebel 測地線を定めるリーマン面上の曲線族と，それによって生成されるシリンダー分解の各モジュラスの比を一つ固定し，Jenkins-Strebel 測地線族とタイヒミュラー空間全体を対応させる同相写像を作る．

2. 定義

$\Sigma = \Sigma_{g,n}$ を種数 g で，n 点穴あきのリーマン面かつ $3g-3+n > 0$ を満たすものとし，$\mathcal{T} = \mathcal{T}(\Sigma)$ をその Teichmüller 空間とする．$\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$ を Σ 上の単純閉曲線で，互いに交わらず，ホモトピックでもなく，それぞれが一点や Σ の穴ともホモトピックでないものとする．S_+^{k-1} を $(k-1)$ 次元球で，全成分が正の部分集合とする．$[S^*, f^*] \in \mathcal{T}$ と $(m_1, \ldots, m_k) \in S_+^{k-1}$ を固定すると，ある $\alpha^* > 0$ が存在し，Jenkins-Strebel 測地線 r で，$[S^*, f^*]$ を始点とし，向きは $f^*(\Gamma)$ に対応するシリンダーのモジュラスが $(\alpha^* m_1, \ldots, \alpha^* m_k)$ で表せる Jenkins-Strebel 微分で与えられるものが存在する ([Str84])．r の終点はノード付きリーマン面 S_c に対応する．この S_c 上に定まる，各ノードで 2 位の極を持つ二次微分の $1/z^2$ の係数を正規化して $(a_1^*, \ldots, a_k^*) \in S_+^{k-1}$ とする．$\partial_\Gamma \mathcal{T} = \{[X, g] |\ g : S_c \to X$ は擬等角写像$\}$ と定め，これを Σ の拡大タイヒミュラー空間 $\hat{\mathcal{T}}$ の境界 $\hat{\mathcal{T}} - \mathcal{T}$ の部分集合とみなす．

3. 主結果

定理 1. 次の条件を満たす同相写像 $\hat{\Phi} : \partial_\Gamma \mathcal{T} \times S_+^{k-1} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \to \mathcal{T}$ が存在する；

1. $\hat{\Phi}([S_c, id], a_1^*, \ldots, a_k^*, 0, \ldots, 0, (\log \alpha^*)/2) = [S^*, f^*]$.

2. $\hat{\Phi}([X, g], a_1, \ldots, a_k, t_1, \ldots, t_k, s) = [R, h]$ とすると，任意の $j = 1, \ldots, k$ に対し次の等式が成立する．

$$\hat{\Phi}([X, g], a_1, \ldots, a_k, t_1, \ldots, t_j + 2\pi, \ldots, t_k, s) = \tau_j([R, h]),$$

ここで，τ_j は γ_j での位数 1 の *Dehn twist* である (向きはリーマン面から定まる自然なものを使用している)．

3. $[X, g]$ を $\partial_\Gamma \mathcal{T}$ 上の点とする．任意の $\mathfrak{a} \in S_+^{k-1}$ と $\mathfrak{t} \in \mathbb{R}^k$ に対し，集合

$$r_{\mathfrak{a},\mathfrak{t}} = \{\hat{\Phi}([X, g], \mathfrak{a}, \mathfrak{t}, s) |\ s \geq 0\} \subset \mathcal{T}$$

は一つの Jenkins-Strebel 半測地線で，Γ から定まる曲線族に対応するシリンダー分解のモジュラスはそれぞれ $(m_1, \ldots, m_k)$ の正の実数倍となり，$s \to +\infty$ とすることで $[X, g]$ に収束する．さらに，$\{r_{\mathfrak{a},\mathfrak{t}}\}_{\mathfrak{a},\mathfrak{t}}$ は互いに漸近的となる ([Ama14a])．

* 〒152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1 東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻
e-mail: amano.m.ab@m.titech.ac.jp

この $\hat{\Phi}$ の定義域である各集合についての意味は次のようになる．$[X, g] \in \partial_{\Gamma}\mathcal{T}$ は生成される Jenkins-Strebel 半測地線の終点を表し，次の S_{+}^{k-1} は測地線を定めている二次微分の，X のノードを周る測地線の長さに対応し，$\mathbb{R}^k$ は X からシリンダーを作り測地線分の途中点を作る際のシリンダーの貼り合わせに関するねじりパラメーターを表す．最後の $\mathbb{R}$ は測地線の時間パラメーターに対応している．この定理は [MM75] の結果からヒントを得たものである．

参考文献

[Ama14a] Masanori Amano. On behavior of pairs of Teichmüller geodesic rays. Conform. Geom. Dyn., 18:8-30, 2014.

[MM75] Albert Marden and Howard Masur. A foliation of Teichmüller space by twist invariant disks. Math. Scand., 36(2):211-228, 1975.

[Str84] Kurt Strebel. Quadratic differentials, volume 5 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

Extremal length functions are log-plurisubharmonic

宮地 秀樹 (大阪大学)*

1. 主定理

(g,m) 型の解析的有限なリーマン面のタイヒミュラー空間を $\mathcal{T}_{g,m}$ と書く．このとき次が成立する．

定理 1 任意の測度付き葉層構造 F に対して，極値的長さの関数により定義される関数

$$\mathcal{T}_{g,m} \ni x \mapsto \log \mathrm{Ext}_x(F) \tag{1}$$

は多重劣調和関数である．さらに F の葉層構造の特異点が穴と異なるところでは 3 prong singularity であり，穴では 1 prong singularity を持つとき，関数 (1) は実解析的強多重劣調和関数である．

F が単純閉曲線の場合には，$\mathrm{Ext}_x(F)$ は（標識の意味で）F とホモトピックな長さをもつ閉曲線のなす族の極値的長さである．定理 1 から特に，極値的長さの関数が多重劣調和であるという，L.Liu と W.Su の定理が従う ([5])．

2. 系

2.1. 超凸性と正則凸性

ベアス埋め込みによりタイヒミュラー空間は複素ユークリッド空間内の有界領域と同一視される．ここで，次の意味で横断する 2 つの，特異点が穴と異なるところでは 3 prong singularity であり，穴では 1 prong singularity を持つような測度付き葉層構造 F と G を考える．ここで F と G が次の意味で横断的であるとする．

$$i(F,H)+i(G,H)>0 \quad (H\in\mathcal{MF})$$

ただし $\mathcal{MF}$ は測度付き葉層構造の空間である．このとき関数

$$\mathcal{T}_{g,m} \ni x \mapsto -\frac{1}{\mathrm{Ext}_x(F)+\mathrm{Ext}_x(G)+1}$$

は実解析的であり，下に有界な負値強多重劣調和な皆位関数であることも証明できる．したがって，次の Krushkal の定理（[2]) 別証明を得る．

系 1 (Krushkal) タイヒミュラー空間 $\mathcal{T}_{g,m}$ は超凸領域（hyperconvex）である．

これより，次の L.Bers と L. Ehrenpries の定理（[1]）が従う．

系 2 (Bers-Ehrenpries) タイヒミュラー空間 $\mathcal{T}_{g,m}$ は正則凸領域である．

2010 Mathematics Subject Classification: 32G15, 30F45, 31C10
キーワード：タイヒミュラー空間，タイヒミュラー距離，極値的長さ, 多重劣調和関数
* 〒560-0043　大阪府豊中市待兼山町 1 - 1 大阪大学大学院理学研究科　数学専攻
e-mail: miyachi@math.sci.osaka-u.ac.jp
web: http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~miyachi/

2.2. タイヒミュラー距離の多重劣調和性

Kerckhoff の公式によれば $x_0 \in \mathcal{T}_{g,m}$ を固定するとき，

$$d_T(x_0, x) = \frac{1}{2} \sup_{F \in \mathcal{MF}} (\log \mathrm{Ext}_x(F) - \log \mathrm{Ext}_{x_0}(F))$$

が成立する．したがって次の Krushkal の結果 ([3, Corollary 3]) の別証明を得る．

系 3 (タイヒミュラー距離は多重劣調和) 距離関数

$$\mathcal{T}_{g,m} \ni x \mapsto d_T(x_0, x)$$

は多重劣調和関数である．

2.3. ホロ球と距離球の円板凸性

複素多様体 N 内の集合 K が次の性質を満たすとき，円板凸 (disk-convex) であると呼ばれる：連続写像 $f\colon \overline{\mathbb{D}} \to N$ で $\mathbb{D}$ において正則な写像を考える．もし $f(\partial\mathbb{D}) \subset K$ であれば $f(\overline{\mathbb{D}}) \subset K$ が成立する．

このとき次が成立する．

系 4 (円板凸性) ホロ球 $\{x \in \mathcal{T}_{g,m} \mid \mathrm{Ext}_x(F) < \epsilon\}$ は円板凸集合である．また，タイヒミュラー距離に関する球は円板凸である．

A. Lenzhen と K.Rafi [4] によれば，タイヒミュラー距離に関する球は quasi-convex である．さらに，彼らは極値的長さの関数は，一般にはタイヒミュラー測地線に沿って凸ではないことを観測している．したがって，特に，タイヒミュラー空間内においてホロ球とタイヒミュラー円板の交わりは単連結ではあるが，一般には双曲計量に関して凸ではない可能性があることがわかる．

参考文献

[1] L. Bers and L. Ehrenpreis, Holomorphic convexity of Teichmüller spaces, Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964), 761–764.

[2] S. Krushkal, Strengthening pseudoconvexity of finite-dimensional Teichmüller spaces, Math. Ann. **290** (1991), 681–687.

[3] S. Krushkal, The Green function of Teichmüller spaces with applications, Bull Amer. Math. Soc. **27** (1992), 143–147.

[4] A. Lenzhen and K. Rafi, Length of a curve is quasi-convex along a Teichmüller geodesic, J. Diff. Geom. **88** (2011), 267–295.

[5] L. Liu and W. Su, Variation of extremal length functions on Teichmüller space, Preprint `http://arxiv.org/abs/1210.0743`.

[6] H. Miyachi, Extremal length functions are log-plurisubharmonic, Preprint `http://arxiv.org/abs/1505.06785`.

タイヒミュラー空間のトレース関数による座標系と写像類群

中西敏浩　(島根大学)[*1]
中村豪　(愛知工業大学)[*2]

1. タイヒミュラー空間と測地的長さ関数

$\bar{S}_{g,n}$ を n 個の境界曲線 $C_1,..., C_n$ をもつ種数 g の向きのついたコンパクト曲面とする。以下 $2g-2+n>0$ を仮定する。$L=(L_1,...,L_n)$ を非負実数の組とするとき，タイヒミュラー空間 $\mathcal{T}(g,n)(L_1,...,L_n)$ は，$\bar{S}_{g,n}$ の内部 $S_{g,n}$ 上の，C_j にホモトピックな閉測地線の長さが L_j である，マーキングつき完備双曲計量（の同値類）の空間である。ただし $L_j=0$ のときは，C_j はカスプに対応するとし，$n=0$ のときは L の部分は無視する。$G=G(g,n)$ を $S_{g,n}$ の基本群とするとき，$\gamma\in G$ に対して，$\mathcal{T}(g,n)(L)$ 上の測地的長さ関数

$$\ell_\gamma : \mathcal{T}(g,n)(L)\to\mathbb{R}_{>0}$$

は双曲計量 σ にホモトピー類 γ に含まれる σ に関する測地線の長さ $\ell_\gamma(\sigma)$ を対応させる。次のことが知られている。

定理 1 有限個の $\gamma_1,..., \gamma_N\in G$ が存在して

$$(\ell_{\gamma_1},...,\ell_{\gamma_N}) : \mathcal{T}(g,n)(L_1,...,L_n)\to\mathbb{R}^N_{>0}$$

は埋め込みである。

定理の主張をみたす $\gamma_1,..., \gamma_N$ が存在する N の最小数 $N(g,n)$ は

$$6g-5+2n = 1+\dim\mathcal{T}(g,n)(L)$$

である ([3], [2])（境界測地線の長さを固定していることに注意。）

2. トレース関数

ここでは，測地的長さ関数の替わりにトレース関数

$$\chi_\gamma(\sigma) = |\mathrm{trace}\rho_\sigma(\gamma)| = 2\cosh(\ell_\gamma(\sigma)/2)$$

を用いる。$\rho_\sigma : G\to\Gamma_\sigma$ は双曲計量 σ が誘導する G のフックス群 $\Gamma_\sigma\subset SL(2,\mathbb{R})$ への表現。定理 1 により，埋め込み

$$\chi = (\chi_{\gamma_1},...,\chi_{\gamma_N}) : \mathcal{T}(g,n)(L_1,...,L_n)\to\mathbb{R}^N_{>0}$$

を与える $\gamma_1,..., \gamma_N\in G$ が存在するが，ここでは写像類群 $\mathrm{Mod}(g,n)$ のタイヒミュラー空間上への作用を $\mathbb{R}^N$ の座標系 $(x_1,...,x_N)$ で表現するという問題を考える。次が主結果である。

本研究は科研費 (課題番号 22540191（中西）および 25400147（中村））の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 32G15, 30F35
キーワード：タイヒミュラー空間，双曲幾何，フックス群
[*1] 〒690-8504 松江市西川津町 1060　島根大学大学院総合理工学研究科
e-mail: tosihiro@riko.shimane-u.ac.jp
[*2] 〒470-0392 豊田市八草町八千草 1247　愛知工業大学基礎教育センター
e-mail: gou@aitech.ac.jp

定理 2 $N = 6g - 5 + 2n$ 個の $\gamma_1,..., \gamma_N \in G$ が存在して

$$\chi = (\chi_{\gamma_1}, ..., \chi_{\gamma_N}) : \mathcal{T}(g,n)(L_1, ..., L_n) \to \mathbb{R}^N_{>0}$$

は埋め込みである。さらに各写像類 $\varphi \in \mathrm{Mod}(g,n)$ は $\chi(\mathcal{T}(g,n)(L))$ 上に有理変換として作用する。ただし，ここで，有理関数とは $\mathbb{R}^N$ の座標 $x_1,..., x_N$ と $L_1,..., L_n$ を変数とする有理係数多項式の比で表される関数で，有理変換はそれらの組のことである。

補足

(1) $(g,n) = (1,1), (0,4)$ の場合の定理 2 は古典的である。これらの場合は写像類の作用を整数係数多項式による変換で表すことができ，不定方程式 $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ の整数解の問題に応用できる (A.A. Markoff). 種数 2 の閉曲面の場合は [1] に証明がある。

(2) 上の定理は，タイヒミュラー空間 (フックス群の変形空間）に制限することなく, G の $PSL(2,\mathbb{C})$ 表現のなんらかの空間（たとえば $n = 0$ または $L = (0,...,0)$ の場合の $S_{g,n}$ 上の複素射影構造の空間 (G の擬フックス群表現の空間)）に拡張できる。

参考文献

[1] Nakamura. G,. and Nakanishi, T., Parametrization of some Teichmüller space by trace functions, Conformal Geometry and Dynamics, **17** (2013), 47–57.

[2] Okumura, Y., Global real analytic length parameters for Teichmüller spaces, Hiroshima Math. J., **26** (1996), 165–179.

[3] Schmutz, P., Die Parametrisierung des Teichmüllerraumes durch geodätische Längenfunktionen, Comment. Math. Helvet., **68** (1993), 278–288.

The Schwarz lemma and the Schwarz-Pick lemma in several complex variables

Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University)*1
Gabriela KOHR (Babeş-Bolyai University)

This talk is an announcement of [7]. In this talk, we will consider about the Schwarz lemma and the Schwarz-Pick lemma. The following sharp inequality which is a harmonic version of the Schwarz lemma is due to Heinz [8] (cf. Duren [6, p.77]).

Theorem 1 *Let $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ be a harmonic mapping such that $f(0) = 0$ and $|f(z)| < 1$, $z \in \mathbb{U}$. Then $|f(z)| \leq \frac{4}{\pi}\text{arctan}|z|$, and this inequality is sharp for each point $z \in \mathbb{U}$.*

The following result is known as the harmonic Schwarz-Pick lemma (see [5]; cf. [2], [6]; compare [3]). Note that sharpness of (1) is a consequence of [5, Theorem 4].

Theorem 2 *Let $f = h + \overline{g} : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ be a complex-valued harmonic mapping such that $|f(z)| < 1$, $z \in \mathbb{U}$. Then*

$$\Lambda_f(z) \leq \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-|z|^2}, \quad z \in \mathbb{U}, \tag{1}$$

where $\Lambda_f(z) = |h'(z)| + |g'(z)|$ is the maximum dilation of f at $z \in \mathbb{U}$. This estimate is sharp.

Chen and Gauthier [2] generalized Theorems 1 and 2 to pluriharmonic mappings from the Euclidean unit ball $\mathbb{B}^n$ into $\mathbb{B}^m$. They also obtained a Schwarz-Pick lemma for holomorphic mappings [1] of $\mathbb{B}^n$ into $\mathbb{B}^m$. In this talk, we will generalize the harmonic Schwarz lemma to pluriharmonic mappings from the unit ball of a complex Banach space into the unit ball B^n of $\mathbb{C}^n$ with respect to an arbitrary norm $\|\cdot\|$. We will also generalize the harmonic Schwarz-Pick lemma to pluriharmonic mappings of the homogeneous unit ball of a complex Banach space into B^n. Further, we will generalize the Schwarz-Pick lemma to holomorphic mappings of the homogeneous unit ball of a complex Banach space into the unit ball B_Y of an arbitrary complex Banach space Y.

A C^2 mapping $f : B^n \to \mathbb{C}^m$ is said to be pluriharmonic if the restriction of each component f_j to every complex line is harmonic. Then it is easily seen that f is pluriharmonic if and only if

$$\frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} f(z) = 0, \quad \forall\, z \in B^n, \quad \forall\, j, k = 1, 2 \dots, n.$$

Note that every pluriharmonic mapping $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ can be written as $f = h + \overline{g}$, where $g, h \in H(B^n)$, and this representation is unique if $g(0) = 0$. In view of this result, we define the notion of pluriharmonic mappings in infinite dimensional spaces. Let B be the unit ball of a complex Banach space X. A continuous mapping $f : B \to \mathbb{C}^n$ is said to be pluriharmonic if there exist $h, g \in H(B, \mathbb{C}^n)$ such that $f = h + \overline{g}$.

A domain Ω is said to be homogeneous if for any $x, y \in \Omega$, there exists some mapping $f \in \text{Aut}(\Omega)$ such that $f(x) = y$.

Partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number 25400151
*1 e-mail: h.hamada@ip.kyusan-u.ac.jp
web: http://www.ip.kyusan-u.ac.jp/J/kougaku/tb/hamada/

Definition 3 *A complex Banach space X is called a JB*-triple if there exists a triple product $\{\cdot,\cdot,\cdot\} : X^3 \to X$ which is conjugate linear in the middle variable, but linear and symmetric in the other variables, and satisfies*

(i) $\{a, b, \{x, y, z\}\} = \{\{a, b, x\}, y, z\} - \{x, \{b, a, y\}, z\} + \{x, y, \{a, b, z\}\}$;

(ii) the map $a\square a : x \in X \mapsto \{a, a, x\} \in X$ *is hermitian with nonnegative spectrum;*

(iii) $\|\{a, a, a\}\|_X = \|a\|_X^3$;

for $a, b, x, y, z \in X$.

Remark 4 *It is known that every bounded symmetric domain in a complex Banach space is homogeneous. Conversely, the open unit ball B of a Banach space admits a symmetry $s(z) = -z$ at 0 and if B is homogeneous, then B is a symmetric domain. Banach spaces with a homogeneous open unit ball are precisely the JB*-triples (see [9]). We refer to [4, 10] for relevant details of JB*-triples and references.*

For every $a \in X$, let $Q_a : X \to X$ be the conjugate linear operator defined by $Q_a(z) = \{a, z, a\}$. This operator is called the quadratic representation and it satisfies

$$Q_{Q_a(b)} = Q_a Q_b Q_a \quad a, b \in X.$$

For each $z, w \in X$, the Bergman operator $B(z, w) \in L(X)$ is defined by

$$B(z, w) = I - 2z\square w + Q_z Q_w, \tag{2}$$

where $z\square w(x) = \{z, w, x\}$. Let B be the unit ball of a JB*-triple X. Then, for each $a \in B$, the Möbius transformation g_a defined by

$$g_a(z) = a + B(a, a)^{1/2}(I + z\square a)^{-1}z, \tag{3}$$

is a biholomorphic automorphism of B with $g_a(0) = a$, $g_a(-a) = 0$, $g_{-a} = g_a^{-1}$ and $Dg_a(0) = B(a, a)^{1/2}$.

References

[1] H. Chen, P. Gauthier, Bloch constants in several variables, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001) 1371–1386.

[2] H. Chen, P. Gauthier, The Landau theorem and Bloch theorem for planar harmonic and pluriharmonic mappings, Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011) 583–595.

[3] H. Chen, P. Gauthier, W. Hengartner, Bloch constants for planar harmonic mappings, Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000) 3231–3240.

[4] C.-H. Chu, Jordan Structures in Geometry and Analysis, in: Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 190 Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[5] F. Colonna, The Bloch constant of bounded harmonic mappings, Indiana Univ. Math. J. 38 (1989) 829–840.

[6] P. Duren, Harmonic Mappings in the Plane, Cambridge Univ. Press., 2004.

[7] H. Hamada, G. Kohr, Pluriharmonic mappings in $\mathbb{C}^n$ and complex Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. 426 (2015) 635–658.

[8] E. Heinz, On one-to-one harmonic mappings, Pacific J. Math. 9 (1959) 101–105.

[9] W. Kaup, A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces, Math. Z. 183 (1983) 503–529.

[10] H. Upmeier, Symmetric Banach manifolds and Jordan C*-algebras, North-Holland Mathematics Studies, 104, Amsterdam, 1985.

The Landau theorem in several complex variables

Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University)*1
Gabriela KOHR (Babeş-Bolyai University)

This talk is an announcement of [14]. In this talk, we will consider about the Landau theorem on homogeneous unit balls in $\mathbb{C}^n$.

Let f be a holomorphic function on the unit disk $\mathbb{U}$. The classical Landau's theorem is as follows:

Theorem 1 *Assume that $f(0) = 0$, $f'(0) = \alpha > 0$ and $|f(z)| < M$ for $z \in \mathbb{U}$. Then*

(i) f is univalent in the disk U_{r_0} of center 0 and radius r_0, where

$$r_0 = \frac{\alpha}{M + \sqrt{M^2 - \alpha^2}} > \frac{\alpha}{2M}.$$

(ii) $f(U_{r_0})$ contains the disc U_R, where

$$R = M \frac{r_0(\alpha - M r_0)}{M - \alpha r_0} \geq M r_0^2.$$

Let $\mathbb{B}^n$ be the Euclidean unit ball in $\mathbb{C}^n$. Chen and Gauthier proved the Landau theorem for holomorphic mappings [2] and for pluriharmonic mappings [3] on $\mathbb{B}^n$.

Now, let B be the homogeneous unit ball of $X = \mathbb{C}^n$, that is B is the unit ball of a finite dimensional JB*-triple X. We also assume that

$$B \supset \mathbb{B}^n. \tag{1}$$

This assumption is not so restrictive, because the unit polydisc satisfies this condition and for any homogeneous unit ball B in $\mathbb{C}^n$, there exists a constant $c > 0$ such that cB satisfies the condition (1). For $A \in L(X, \mathbb{C}^n)$, let

$$\|A\|_{X,e} = \sup \left\{ \|Az\|_e : \|z\|_X = 1 \right\},$$

where $\|\cdot\|_X$ denotes the norm on X and $\|\cdot\|_e$ denotes the Euclidean norm on $\mathbb{C}^n$. Under the assumption (1), we obtain the following lemma.

Lemma 2 *Let $A \in L(X, \mathbb{C}^n)$. Then we have*

$$\|A\|_{X,e} \geq |\det A|^{1/n}, \tag{2}$$

$$\|Aw\|_e \geq \frac{|\det A|}{\|A\|_{X,e}^{n-1}}, \quad w \in \partial B, \quad \textit{if } \|A\|_{X,e} > 0. \tag{3}$$

In this talk, as an application of the Schwarz and Schwarz-Pick lemmas and Lemma 2, we will generalize the Landau theorem by Chen and Gauthier [2] to mappings of finite dimensional homogeneous unit balls into the Euclidean space. By using similar arguments, we can also generalize the pluriharmonic Landau theorem by Chen and Gauthier [3] to mappings of finite dimensional homogeneous unit balls into the Euclidean space. For other results on pluriharmonic mappings on the unit ball in $\mathbb{C}^n$, see [1], [5], [6], [9], [13].

Partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number 25400151
*1 e-mail: `h.hamada@ip.kyusan-u.ac.jp`
web: `http://www.ip.kyusan-u.ac.jp/J/kougaku/tb/hamada/`

References

[1] S. Bochner, Bloch's theorem for real variables, Bull. Amer. Math. Soc. 52(1946) 715–719.

[2] H. Chen, P. Gauthier, Bloch constants in several variables, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001) 1371–1386.

[3] H. Chen, P. Gauthier, The Landau theorem and Bloch theorem for planar harmonic and pluriharmonic mappings, Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011) 583–595.

[4] H. Chen, P. Gauthier, W. Hengartner, Bloch constants for planar harmonic mappings, Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000) 3231–3240.

[5] Sh. Chen, S. Ponnusamy, X. Wang, Stable geometric properties of pluriharmonic and biholomorphic mappings, and Landau-Bloch's theorem, arXiv: 1402.1957v1 (2014).

[6] M. Chuaqui, H. Hamada, R. Hernández and G. Kohr, Pluriharmonic mappings and linearly connected domains in $\mathbb{C}^n$, Israel J. Math., 200 (2014), no. 1, 489–506.

[7] F. Colonna, The Bloch constant of bounded harmonic mappings, Indiana Univ. Math. J. 38 (1989) 829–840.

[8] P. Duren, Harmonic Mappings in the Plane, Cambridge Univ. Press., 2004.

[9] P. Duren, H. Hamada, G. Kohr, Two-point distortion theorems for harmonic and pluriharmonic mappings, Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011) 6197–6218.

[10] C.H. Fitzgerald, S. Gong, The Bloch theorem in several complex variables, J. Geom. Anal. 4 (1994) 35–58.

[11] I. Graham, D. Varolin, Bloch constants in one and several variables, Pacific J. Math. 174 (1996) 347–357.

[12] K.T. Hahn, Higher dimensional generalizations of the Bloch constant and their lower bounds, Trans. Amer. Math. Soc. 179 (1973) 263–274.

[13] H. Hamada, T. Honda, G. Kohr, Growth and distortion theorems for linearly invariant families on homogeneous unit balls in $\mathbb{C}^n$, J. Math. Anal. Appl. 407 (2013) 398–412.

[14] H. Hamada and G. Kohr, Pluriharmonic mappings in $\mathbb{C}^n$ and complex Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. 426 (2015) 635–658.

[15] L.A. Harris, On the size of balls covered by analytic transformations, Monatsh. Math. 83 (1977) 9–23.

[16] X.Y. Liu, Bloch constants of several complex variables, Pacific J. Math. 152 (1992) 347–363.

[17] K. Sakaguchi, On Bloch's theorem for several complex variables, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sect. A. 5(1956) 149–154.

[18] S. Takahashi, Univalent mappings in several complex variables, Ann. of Math. 53 (1951) 464–471.

[19] H. Wu, Normal families of holomorphic mappings, Acta Math. 119 (1967) 193–233.

Bonk's distortion theorem and the Bloch constant for Bloch mappings in $\mathbb{C}^n$

Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University)*

Liu [12] proved the following Bonk's distortion theorem for Bloch mappings on the Euclidean unit ball $\mathbb{B}^n$ of $\mathbb{C}^n$.

Theorem 1 *If* $f \in H(\mathbb{B}^n)$, $\|f\|_0 = 1$ *and* $\det Df(0) = 1$, *then*

$$|\det Df(z)| \geq \Re \det Df(z) \geq \frac{1 - \sqrt{n+2}\|z\|}{\left(1 - \sqrt{\frac{1}{n+2}}\|z\|\right)^{n+2}}$$

for $\|z\| \leq \frac{2\sqrt{n+2}}{n+3}$. *The above inequality is sharp.*

Wang and Liu [14] proved the following Bonk's distortion theorem for Bloch mappings on the unit polydisc U^n of $\mathbb{C}^n$.

Theorem 2 *If* $f \in H(U^n)$, $\|f\|_0 = 1$ *and* $\det Df(0) = 1$, *then*

$$|\det Df(z)| \geq \Re \det Df(z) \geq \frac{1 - \sqrt{2n+1}\|z\|}{\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2n+1}}\|z\|\right)^{2n+1}}$$

for $\|z\| \leq \frac{\sqrt{n+2}}{n+1}$. *The above inequality is sharp.*

We remark that, in the above theorems, the bounds depend on n.

The following natural questions arise.

Question 3 *Can we give an explanation for the reason why the distortion bounds in Theorems* 1 *and* 2 *are different?*

Question 4 *Can we give Bonk's distortion theorem on other bounded symmetric domains in* $\mathbb{C}^n$*?*

One of the objects of this talk is to generalize the above distortion theorems to homogeneous unit balls B in $\mathbb{C}^n$ and give affirmative answers to the above questions [5]. From the perspective of the Riemann Mapping Theorem, an appropriate generalization of the open unit disc in the complex plane $\mathbb{C}$ would be the open unit ball B of a complex Banach space such that B is homogeneous. Indeed, it has been shown in [11] that every bounded symmetric domain in a complex Banach space is biholomorphically equivalent to such a ball. A complex Banach space is a JB*-triple if, and only if, its open unit ball is homogeneous. Also, all four types of classical Cartan domains are the open unit balls of JB*-triples, and the same holds for any finite product of these domains ([9], see also [10]). Therefore, a natural extension of the finite dimensional distortion theorems should be the ones on the open unit ball B_X of a finite dimensional JB*-triple X. We give Bonk's distortion theorem on the unit ball B_X. The distortion bounds depend on the constant $c(B_X)$ which was defined in Hamada, Honda and Kohr [7] by using the Bergman metric at 0. Our result is a generalization of Theorems 1 and 2 to the unit

Partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number 25400151
*e-mail: h.hamada@ip.kyusan-u.ac.jp
web: http://www.ip.kyusan-u.ac.jp/J/kougaku/tb/hamada/

ball B_X of any finite dimensional JB*-triple X. As an application, we obtain a lower bound of the Bloch constant for Bloch mappings on B_X [5].

For various results on Bonk's distortion theorem for Bloch functions in one complex variable, see Bonk [1], Bonk, Minda and Yanagihara [2], Liu and Minda [13]. For various results on Bonk's distortion theorem for Bloch mappings in several complex variables, see also Fitzgerald and Gong [4], Liu [12], Wang and Liu [15], Yan and Gong [16]. The results obtained in this talk are generalizations of these results. For other distortion theorems for normalized locally biholomorphic mappings on the unit ball B_X of a finite dimensional JB*-triple X, see [3], [6], [7], [8].

References

[1] M. Bonk, On Bloch's constant, Proc. Amer. Math. Soc. 110 (1990) 889–894.

[2] M. Bonk, D. Minda and H. Yanagihara, Distortion theorem for Bloch functions, Pacific J. Math. 179 (1997) 241–262.

[3] C.-H. Chu, H. Hamada, T. Honda and G. Kohr, Distortion theorems for convex mappings on homogeneous balls, J. Math. Anal. Appl. 369 (2010) 437–442.

[4] C.H. FitzGerald and S. Gong, The Bloch theorem in several complex variables, J. Geom. Anal. 4 (1994) 35–58.

[5] H. Hamada, A distortion theorem and the Bloch constant for Bloch mappings in $\mathbb{C}^n$, submitted.

[6] H. Hamada, T. Honda and G. Kohr, Linear invariance of locally biholomorphic mappings in the unit ball of a JB*-triple, J. Math. Anal. Appl. 385 (2012) 326–339.

[7] H. Hamada, T. Honda and G. Kohr, Trace-order and a distortion theorem for linearly invariant families on the unit ball of a finite dimensional JB*-triple, J. Math. Anal. Appl. 396 (2012) 829–843.

[8] H. Hamada, T. Honda and G. Kohr, Growth and distortion theorems for linearly invariant families on homogeneous unit balls in $\mathbb{C}^n$, J. Math. Anal. Appl. 407 (2013) 398–412.

[9] L. A. Harris, Bounded symmetric homogeneous domains in infinite dimensional spaces, in: T.L. Hayden, T.J. Suffridge(Eds.), Proceedings on Infinite Dimensional Holomorphy, Internat. Conf., Univ. Kentucky, Lexington, KY, 1973, in: Lecture Notes in Mathematics, Vol. 364, Springer, Berlin, pp. 13–40, 1974.

[10] L. K. Hua, Harmonic analysis of functions of several complex variables in the classical domains, Translations of Mathematical Monographs, vol. 6, American Mathematical Society, Providence, RI, 1963.

[11] W. Kaup, A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces, Math. Z. 183 (1983) 503–529.

[12] X.Y. Liu, Bloch functions of several complex variables, Pacific J. Math. 152 (1992) 347–363.

[13] X.Y. Liu and D. Minda, Distortion theorems for Bloch functions, Trans. Amer. Math. Soc. 333 (1992) 325–338.

[14] J.F. Wang and T.S. Liu, Bloch constant of holomorphic mappings on the unit polydisk of $\mathbb{C}^n$, Sci. China Ser. A 51 (2008) 652–659.

[15] J.F. Wang and T.S. Liu, Distortion theorem for Bloch mappings on the unit ball $\mathcal{B}^n$, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 25 (2009) 1583–1590.

[16] Z.M. Yan and S. Gong, Bloch constant of holomorphic mappings on bounded symmetric domains, Sci. China Ser. A 36 (1993) 285–299.

L^2 EXTENSION THEOREMS AND SUITA CONJECTURE

TAKEO OHSAWA

ABSTRACT. Recent activity around extension of holomorphic functions or sections is reviewed. Highlighted materials are the solution of Suita's conjecture by Błocki, its generalization by Guan and Zhou including its application to Berndtsson's semipositivity theorem, Berndtsson-Lempert's striking proof of the sharp L^2 extension theorem, and a down-to-earth alternate proof by the author. Some remarks on the classical theories of Grauert and Hörmander will be given in a related context.

INTRODUCTION

In function theory of several complex variables, there are basically two types of extension problems. One of these is analytic continuation from the boundary. Hartogs [H] initiated this research in the study of the series

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z)w^k, \quad z \in D, \quad w \in \mathbb{C},$$

where D is a domain in $\mathbb{C}^n$ and $a_k(z)$ are holomorphic on D. The other is on the extension from analytic subsets. This question has a long history as an interpolation problem since Newton and Lagrange. Oka [O] and Cartan [C] studied it systematically and founded a basic theory of several complex variables.

From the viewpoint that holomorphic functions are nothing but the weak solutions of the Cauchy-Riemann equation, these two extension problems can be formulated in a context of partial differential equations (=PDEs), so that they become boundary value problems (=BVPs) for the $\bar{\partial}$-equation say $\bar{\partial}\alpha = v$. Here $\bar{\partial}$ denotes the complex exterior derivative of type (0,1).

The purpose of the present survey article is to outline the recent development of Oka-Cartan theory in this PDE-context. For that, let us first recall that a penetrating general method was established by

Date: June 10, 2015.
1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 32A36; Secondary 32T27.

Andreotti and Vesentini [A-V-1,2] and by Hörmander [Hm], independently. An advantage of this so called L^2 method is that one can obtain quantitatively definite results on holomorphic functions by exploring the L^2 estimates for the $\bar{\partial}$-operator. Andreotti and Vesentini analyzed the $\bar{\partial}$-equation on complete Hermitian manifolds by extending the method of Kodaira [K] and Nakano [N]. The result was later applied to locally symmetric varieties (cf. [M-Z], [C-V] and [Oh-3]). On the other hand, Hörmander's analysis is more focused on smoothly bounded domains as a development of the method initiated by Garabedian and Spencer [G-S], Morrey [Mo] and Kohn [Kn]. By this L^2 method, Hörmander solved a question posed by Bergman on the boundary behavior of the Bergman kernel affirmatively. Namely, he proved that the Bergman kernel $K_D(z, w)$ of a pseudoconvex domain $D \subset \mathbb{C}^n$ behaves near a strictly pseudoconvex boundary point $x \in \partial D$ in such a way that

$$\lim_{z \to x} K_D(z, z) \mathrm{dist}(z, \partial D)^{n+1} = \frac{\pi^n}{n!},$$

where $\mathrm{dist}(z, \partial D) = \inf_{w \in \partial D} \|z - w\|$, if the $2n-1$ dimensional unit sphere touches ∂D at x to the order at least 3. The L^2 method was later applied to the extension problem from analytic sets to solve another question of Bergman whether or not

$$\liminf_{z \to x} K_D(z, z) \|z - x\|^2 > 0$$

holds if D is a bounded pseudoconvex domain and ∂D is C^2-smooth around x. An affirmative answer is included in [Oh-T] whose main result is the following.

Theorem 0.1. *There exists a constant $C > 0$ such that, for any pseudoconvex domain $D \subset \mathbb{C}^n$ satisfying $\sup_D |z_n| \leq 1$, for any plurisubharmonic function φ on D and for any holomorphic function f on $D' = D \cap \{z_n = 0\}$, one can find a holomorphic function $\tilde{f}$ on D extending f such that*

$$\int_D |\tilde{f}|^2 e^{-\varphi} \leq C \int_{D'} |f|^2 e^{-\varphi},$$

where the integrals are with respect to the Lebesgue measures.

Theorem 0.1 was recently improved by Błocki [Bl-1] so that one can take π as the above constant C, and further by Guan and Zhou [G-Z-1,2] so that one has a gain in the estimate of $\tilde{f}$.

For any complex manifold M, we shall denote by $\mathcal{O}(M)$ the set of holomorphic functions on M and by $PSH(M)$ the set of plurisubharmonic functions on M. A refined variant of Theorem 0.1 established in [G-Z-1,2] is then stated as follows.

Theorem 0.2 (See also [Oh-4]). *For any pseudoconvex domain $D \subset \mathbb{C}^n$, for any $\varphi, \psi \in PSH(D)$ satisfying $\sup_D (\psi + \log |z_n|^2) \leq 0$ and for any $f \in \mathcal{O}(D')$, one can find a holomorphic extension $\tilde{f}$ of f to D such that*

$$\int_D |\tilde{f}|^2 e^{-\varphi+\psi} \leq \pi \int_{D'} |f|^2 e^{-\varphi}. \tag{0.1}$$

We shall report on the recent activity around Theorem 0.1 and Theorem 0.2, starting from Błocki's groundbreaking work [Bl-1] which settled a long conjectured inequality on the Bergman kernel, the Suita conjecture, as well as from a generalized and refined solution by Guan and Zhou [G-Z-1,2] (a striking application of Theorem 0.2 is in [G-Z-2]). After recalling some prerequisites, i.e. a part of Andreotti-Vesentini-Hörmander's theory, we shall review the new L^2 estimate for $\bar{\partial}$ by Błocki (cf. Theorem 4.1). At this point, we shall not proceed to prove Theorem 0.2. Before that, we shall give a review on the relation between the L^2 extension and a variational property of the Bergman kernels following Berndtsson [B-2] and [G-Z-2]. We shall then state a variant of Theorem 0.2 also formulated in [G-Z-2] and outline its surprising proof by Berndtsson and Lempert [B-L].

The point of [G-Z-2] is that, for any pseudoconvex family $\{D_\zeta\}$ of domains parametrized by the unit disc $\mathbb{D} = \{\zeta \in \mathbb{C}; |\zeta| < 1\}$, the inequality (0.1) can be regarded as a sub-mean value property so that it implies in particular the plurisubharmonicity of $\log K_{D_\zeta}(z, z)$ in (ζ, z). (It was really surprising as well as [Bl-1], at least to the author.)

The point of [B-L] is that the L^2 extension can be deduced from a theorem of Berndtsson [B-2] on the semipositivity of the direct image of the relative canonical sheaf twisted (= multiplied) by any semipositive line bundle (see Theorem 5.1 and the remark after that). It was even more unexpected than [G-Z-2] because this semipositivity of the direct image is a generalization of the plurisubharmonicity of $\log K_{D_\zeta}(z, z)$. Nevertheless, it is also natural and regitimate, because although Berndtsson's argument is based on an L^2 estimate for $\bar{\partial}$, his proof does not rely on the L^2 extension theorem itself. We recall also that, for any proper holomorphic map with smooth fibers between Kähler manifolds, Berndtsson's result can be verified by a direct comuputation in the non-twisted case by using the expression of the fiber metric in question in terms of the primitive forms (cf. [F]). In the context of algebraic geometry, this was on the way of a natural development of the Hodge theory (cf. [Gri-1, 3]). The new analytic approach of Berndtsson was inspired by a pioneering work of Maitani and Yamaguchi [M-Y] which arose from a totally different background. This connection seems to suggest the width of the scope of several complex variables as was anticipated by Oka and Cartan.

After an overview of these remarkable achievements, a not so surprising but quite straightforward proof of Theorem 0.2 will also be presented after [Oh-5]. Finally, we would like to add a few remarks and questions related to the L^2 $\bar{\partial}$-cohomology into which this new attractive context might bring some new insight.

References

[A-V-1] Andreotti, A. and Vesentini, E., *Sopra un teorema di Kodaira*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **15** (1961), 283-309.

[A-V-2] —, *Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equation on complex manifolds*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **25** (1965), 81-130. Erratum:Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **27** (1965), 153-155.

[B-1] Berndtsson, B., *The extension theorem of Ohsawa-Takegoshi and the theorem of Donnelly-Fefferman*, Ann. Inst. Fourier **46** (1996), 1083-1094.

[B-2] —, *Curvature of vector bundles associated to holomorphic fibrations*, Ann. of Math. **169** (2009), 531-560.

[B-3] —, *Strict and nonstrict positivity of direct image bundles*, Math. Z. **269** (2011), 1201-1218.

[B-L] Berndtsson, B. and Lempert, L., *A proof of Ohsawa-Takegoshi theorem with sharp estimates*, to appear in Journal of Math. Soc. Japan.

[B-P] Bermdtsson, B. and Păun, M., emphBergman kernels and the pseudoeffectivity of relative canonical bundles, Duke Math. J. **145** (2008), 341-378.

[Bl-1] Błocki, Z., *Suita conjecture and the Ohsawa-Takegoshi extension theorem*, Invent. Math. **193** (2013), 149-158.

[Bl-2] —, *A lower bound for the Bergman kernel and the Bourgain-Milman inequality*, Geometric Aspects of Functional Analysis, Israel Seminar (GAFA) 2011-2013, eds. B. Klartag, E. Milman, Lecture Notes in Mathematics 2116, Springer, 2014, pp. 53-63,.

[Bl-3] —, *Bergman kernel and pluripotential theory*, to appear in Proceedings of the Conference in honor of Duong Phong, Contemporary Mathematics, American Mathematical Society.

[C-V] Calabi, E. and Vesentini, E., *On compact, locally symmetric Kähler manifolds*, Ann. of Math. **71** (1960), 472-507.

[Ca] Cao, J., *Ohsawa-Takegoshi extension theorem for compact Kähler manifolds and applications*, arXiv:1404.6937v1 [math.AG] 28 Apr 2014.

[Cl] Carleson, L., *Selected problems on exceptional sets*, Van Nostrand Mathematical Studies, No. 13 D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto, Ont.-London 1967.

[C] Cartan, H., *Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes*, Bull. Soc. Math. France **78** (1950), 28-64.

[Ch] Chen, B.-Y., *A simple proof of the Ohsawa-Takegoshi extension theorem*, arXiv:1105.2430v1 [math.CV] 12 May 2011.

[C-K] Chow, W.-L. and Kodaira, K., *On analytic surfaces with two independent meromorphic functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **38** (1952), 319-325.

[Dm] Demailly, J.-P., *Estimations L^2 pour l'opérateur $\bar{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au-dessus d'une variété kählérienne complète*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **15** (1982), 457-511.

[E-V] Esnault, H. and Viehweg, E., *Lectures on vanishing theorems*, DMV Seminar **20**, Birkhäuser (1992).

[F] Fujita, T., *On Kähler fiber spaces over curves*, L. Math. Soc. Japan **30** (1978), 779-794.

[G-S] Garabedian, P. R. and Spencer, D. C., *Complex boundary value problems*, Trans. Amer. Math. Soc. **73** (1952), 223-242.

[G] Grauert, H.,*On Levi's problem and the embedding of real-analytic manifolds*, Ann. Math. **68** (1958), 460-472.

[Gri-1] Griffiths, P.A., *Periods of integrals on algebraic manifolds. I and II*, Amer. J. Math. **90** (1968), 568-626 and 805-865.

[Gri-2] —, *Hermitian differential geometry, Chern classes, and positive vector bundles*, Global Analysis (Papers in Honor of K. Kodaira) Univ. Tokyo Press, Tokyo, 1969 pp. 185-251.

[Gri-3] —, *Periods of integrals on algebraic manifolds. III. Some global differential-geometric properties of the period mapping*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **38** (1970) 125180.

[G-Z-1] Guan, Q.-A. and Zhou, X.-Y., *Optimal constant problem in the L^2 extension theorem*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **350** (2012), 753-756.

[G-Z-2] —, *A solution of an L^2 extension problem with optimal estimate and applications*, Ann. of Math. **181** (2015), 1139-1208.

[G-Z-Z] Guan, Q., Zhou, X.-Y. and Zhu, L., *On the Ohsawa-Takegoshi L^2 extension theorem and the Bochner-Kodaira identity with non-smooth twist factor*, J. Math. Pures Appl. **97** (2012), 579-601.

[H] Hartogs, F., *Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten*, Math. Ann. **62** (1906), 1-88.

[Hm] Hörmander, L., *L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator*, Acta Math. **113** (1965), 89-152.

[K] Kodaira, K., *On a differential-geometric method in the theory of analytic stacks*, Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A. **39** (1953), 1268-1273.

[Kn] Kohn, J. J. *Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds. I*, Ann. of Math. **78** (1963), 112-148.

[L] Lazarsfeld, R., *Positivity in Algebraic Geometry, I, II*, Springer-Verlag (2004).

[L-Y] Liu, K.-F. and Yang, X.-K., *Curvatures of direct image sheaves of vector bundles and applications*, J. Diff. G. **98** (2014), 117-145.

[M-Y] Maitani, F. and Yamaguchi, H., *Variation of Bergman metrics on Riemann surfaces*, Math. Ann. **330** (2004), 477-489.

[M-Z] Mok, N. and Zhong, J.-Q., *Compactifying complete K̈hler-Einstein manifolds of finite topological type and bounded curvature*, Ann. of Math. **129** (1989), 427-470.

[Mo] Morrey, C. B., *The analytic embedding of abstract real-analytic manifolds*, Ann. of Math. **68** (1958), 159-201.

[M-T] Mourougane, C. and Takayama, S., *Hodge metrics and the curvature of higher direct images*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **41** (2008), 905-924.

[N] Nakano, S., *On complex analytic vector bundles*, J. Math. Soc. Japan **7** (1955), 1-12.

[N-R] Nakano, S. and Rhai, T. S., *Vector bundle version of Ohsawa's finiteness theorems*, Math. Jap., **24** (1980), 657-664.

[Ni] Nishino, T., *Sur une propriété des familles de fonctions analytiques de deux variables complexes*, J. Math. Kyoto Univ. **4** (1965), 255-282.

[Oh-0] Ohsawa, T., *Finiteness theorems on weakly 1-complete manifolds*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **15** (1979), 853-870.

[Oh-1] —, *On complete Kähler domains with C^1-boundary*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **16** (1980), 929-940.

[Oh-2] —, *Vanishing theorems on complete Kähler manifolds*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **20** (1984), 21-38.

[Oh-3] —, *On the rigidity of noncompact quotients of bounded symmetric domains*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **23** (1987), 881-894.

[Oh-4] —, *On the extension of L^2 holomorphic functions. III. Negligible weights*, Math. Z. **219** (1995), 215-225.

[Oh-5] —, *Application and simplified proof of a sharp L^2 extension theorem*, to appear in Nagoya Math. J.

[Oh-6] —, *A remark on Hörmander's isomorphism*, to appear in Complex Analysis and Geometry, Springer Proc. in Math. and Stat. edit. Kang-Tae Kim et al.

[Oh-T] Ohsawa, T. and Takegoshi, K., *On the extension of L^2 holomorphic functions*, Math. Z. **195** (1987), 197-204.

[O] Oka, K., *Sur quelques notions arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France **78** (1950), 1-27.

[S-O] Sario, L. and Oikawa, K., *Capacity functions*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band **149** Springer-Verlag New York Inc., New York 1969.

[S] Siciak, J., *On removable singularities of L^2 holomorphic functions of several variables,* Prace matematyczno-fizyczne, edited by Skwarczynski, M and Wasilewski, W., WSI Radom 1982, pp. 73-81.

[Su] Suita, N.,*Capacities and kernels on Riemann surfaces*, Arch. Rational Mech. Anal. **46** (1972), 212-217.

[T] Takegoshi, K., *Higer direct images of canonical sheaves tensorized with semi-positive vector bundles by proper Kähler morphisms*, Math Ann. **303** (1995), 389-416.

[Y] Yamaguchi, H., *Sur le mouvement des constantes de Robin*, J. Math. Kyoto Univ. **15** (1975), 53-71.

[Yi] Yi, L., *An Ohsawa-Takegoshi theorem on compact Kähler manifolds*, Science China Math. **57** (2014), 9-30.

Graduate School of Mathematics Nagoya University 464-8602 Chikusaku Furocho Nagoya Japan

E-mail address: `ohsawa@math.nagoya-u.ac.jp`

局所コホモロジーを用いた Bruce-Roberts ミルナー数の計算法について

田島　慎一　(筑波大学)[*1]
鍋島　克輔　(徳島大学)[*2]

Grothendieck local duality と対数的ベクトル場および局所コホモロジー計算により, Bruce-Roberts Milnor algebra の記述, Bruce-Roberts Milnor 数の計算が可能となることを報告する.

1. 基本概念

X は, $\mathbb{C}^n$ の原点 O の近傍, $\mathcal{O}_X$ は X 上の正則函数のなす層を表すとする．正則な函数 $\phi(x) = \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が定める超曲面を $S = \{x \in X | \phi(x) = 0\}$ とする．本稿では, 超曲面 S は原点に孤立特異点を持つとする．

正則ベクトル場

$$v = a_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + a_2(x)\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + a_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}, \quad a_i(x) \in \mathcal{O}_X, \quad i = 1, \ldots, n$$

は，$v(\phi) \in \langle \phi \rangle$ を満たすとき S に沿って**対数的**であるいう．ここで，$\langle \phi \rangle$ は ϕ によって生成される $\mathcal{O}_X$ のイデアルを表す．X 上で S に沿った対数的ベクトル場のなす層を $\mathcal{D}er_X(-\log S)$ で表す．正則函数の germ $f \in \mathcal{O}_{X,O}$ に対し, 局所環 $\mathcal{O}_{X,O}$ におけるイデアル $I_{BR(f,S)} = \langle v(f) \mid v \in \mathcal{D}er_{X,O}(-\log S) \rangle$ による局所環の剰余

$$\mathcal{O}_{X,O}/I_{BR(f,S)} = \mathcal{O}_{X,O}/\langle v(f) \mid v \in \mathcal{D}er_{X,O}(-\log S) \rangle$$

を Bruce-Roberts Milnor algebra と呼ぶことにする.

$$\mu_{BR}(f, S) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X,O}/I_{(BR(f,S))})$$

は Bruce-Roberts Milnor 数と呼ばれる.

注　Bruce-Roberts Milnor 数は, MacPherson の Euler obstruction とも関連する重要な量であるが, 対数的ベクトル場を用いて定義されるため, 具体的に解析できるのは weighted homogeneous な場合等, 特別な場合に限られていた.

2. アルゴリズムの概略

超曲面を定義する ϕ および函数 f はともに, 多項式であるとする (計算は理論的には収束冪級数とみなして行う)．超曲面と対数的ベクトル場の Gröbner 対応 (Hauser らの結果) が示すように, Bruce-Roberts Milnor 数の計算等も, 対数的ベクトル場の構造の解析が容易となる方法で, 種々の計算を行うことが求められる.

本研究は科研費 (課題番号: 15K04891, 15K17513) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 32S05
キーワード : アルゴリズム, 対数的ベクトル場
[*1] 〒305-8671 つくば市天王台 1-1-1 筑波大学数理物質系数学域
e-mail: tajima@math.tsukuba.ac.jp
[*2] 〒770-8502 徳島市南常三島町 1-1 徳島大学総合科学部
e-mail: nabeshima@tokushima-u.ac.jp

アルゴリズム

input : 超曲面の定義多項式 ϕ および 多項式 (正則関数) f

1. B. Teissier の条件を満たす generic な座標系を構成する.
(tangent cone と hyperplane の共通部分の次元計算による)

2. Polar variety と超曲面の交わり方を記述する局所コホモロジー類の計算を行い, 関連するイデアルのイデアル商のスタンダード基底計算を行う.

3. 局所環におけるシジジー計算により, 対数的ベクトル場の生成元を構成する

4. イデアル $I_{BR(f,S)} = \langle v(f) \mid v \in \mathcal{D}er_{X,O}(-\log S)\rangle$ により annihilate される局所コホモロジー類のなすベクトル空間

$$H_{BR(f,S)} = \{\psi \in \mathcal{H}^n_{\{O\}}(\mathcal{O}_X) \mid h\psi = 0, \forall h \in I_{BR(f,S)}\}$$

の基底局所コホモロジー類を求める. (イデアルの零点集合の次元判定も予め行う)

5. ベクトル空間 $H_{BR(f,S)}$ の次元を計算する. 指定された項順序に関するイデアル $I_{BR(f,S)} = \langle v(f) \mid v \in \mathcal{D}er_{X,O}(-\log S)\rangle$ の reduced standard 基底を計算する

output : $H_{BR(f,S)}$ の基底局所コホモロジー類, 次元およびイデアル $I_{BR(f,S)}$ の reduced standard 基底

定理 ベクトル空間 $H_{BR(f,S)}$ は, 剰余 $\mathcal{O}_{X,O}/\langle v(f) \mid v \in \mathcal{D}er_{X,O}(-\log S)\rangle$ の双対ベクトル空間である. (双対性は, 多変数留数で定義される)

従って, Grothendieck local duality により, イデアル $\langle v(f) \mid v \in \mathcal{D}er_{X,O}(-\log S)\rangle$ に対するイデアルメンバーシップ判定が可能となる. また,

$$\mu_{BR}(f,S) = \dim_{\mathbb{C}}(H_{BR(f,S)})$$

が成立する.

参考文献

[1] J. W. Bruce and R. M. Roberts, *Critical points of functions on an analytic varieties,* Topology **27** (1988), 57–90.

[2] N. de Góes Grulha Jr, *The Euler obstruction and Bruce-Roberts' Milnor number*, Quart. J. Math. **60** (2009), 291–302.

[3] K. Nabeshima and S. Tajima, *An algorithm for computing standard bases by change of ordering via algebraic local cohomology,* Lecture Notes in Computer Science **8592** (2014), 414–418.

[4] K. Nabeshima and S. Tajima , *Computing logarithmic vector fields associated with parametric semi-quasihomogeneous hypersurface isolated singularities,* International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation 2015, to appear.

[5] S. Tajima, *On polar varieties, logarithmic vector fields and holonomic D-modules,* RIMS Kokyuroku Bessatsu **40** (2013), 41–51.

[6] B. Teissier, *Variété polaires*, Inventiones math. **40** (1977), 267–292.

超曲面に付随したホロノミーD-加群の計算アルゴリズムについて I

–Weyl algebra における comprehensive GB の利用–

鍋島　克輔　(徳島大学)[*1]
田島　慎一　(筑波大学)[*2]

1. 特異点とホロノミーD-加群

$X = \mathbb{C}^n, K = \mathbb{Q}$ とおく. n 変数 $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ の多項式環を $K[x]$, 多項式係数の偏微分作用素環 (Weyl 代数) を $D_X = K[x, \frac{\partial}{\partial x}]$ で表し, $D_X[s] = D_X \otimes_K K[s]$ とおく.

多項式 $f \in K[x]$ に対し, f^s の $D_X[s]$ における annihilator イデアルを

$$\mathrm{Ann}_{D_X[s]}(f^s) = \{P \in D_X[s] \mid Pf^s = 0\}$$

で表す.

多項式 f の b-関数 $b_f(s)$ に対し, $b_f(s) = (s+1)\tilde{b}_f(s)$ をみたす $\tilde{b}_f(s)$ を f の reduced b-関数とよぶ. $D_X[s]$-加群 M_s を次で定める.

$$M_s = D_X[s]/(\mathrm{Ann}_{D_X[s]}f^s + D_X[s](f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}., , , , \frac{\partial f}{\partial x_n}))$$

さらに, reduced b-関数の根 β に対し

$$M_\beta = D_X[s]/(\mathrm{Ann}_{D_X[s]}f^s + D_X[s](f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}., , , , \frac{\partial f}{\partial x_n}) + D_X[s](s-\beta))$$

と定める. いま, 超曲面 $S = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ の特異点集合を Σ とおくと, M_β は $\mathrm{supp}(M_\beta) \subseteq \Sigma$ をみたすホロノミー D_X-加群であることが知られている.

注意 b-関数の理論では, $D_X[s]$-加群

$$D_X[s]/\mathrm{Ann}_{D_X[s]}f^s,\ D_X[s]/(\mathrm{Ann}_{D_X[s]}f^s + D_X[s]f)$$

が重要な役割を果たしている. これらの加群は, 超曲面 S に関する情報を含んでいる. それに対し, M_s は, 超曲面 S の特異点集合 Σ に関する情報を含んでいると解釈されている.

2. 主結果

パラメータ付きの Weyl 代数に対する comprehensive Gröbner bases の理論, 計算法を適用することで, イデアル

$$\mathrm{Ann}_{D_X[s]}f^s + D_X[s](f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}., , , , \frac{\partial f}{\partial x_n}) + D_X[s](s-\beta)$$

本研究は科研費 (課題番号:15K17513, 15K04891) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 32S05
キーワード : アルゴリズム, ホロノミーD-加群
[*1] 〒770-8502 徳島市南三常島町 1-1 徳島大学総合科学部
e-mail: nabeshima@tokushima-u.ac.jp
[*2] 〒305-8671 つくば市天王台 1-1-1 筑波大学数理物質系数学域
e-mail: tajima@math.tsukuba.ac.jp

のグレブナ基底を求めるアルゴリズムを構成することが出来る.

このアルゴリズムは基本的には, $\mathrm{Ann}_{D_X[s]}(f^s)$ の生成元と

$$f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}.,,,, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

を入力とする. 出力は, reduced b-関数の各根 β の値とその β に対するホロノミーD_X-加群 M_β の組からなる. 即ち, このアルゴリズムは, reduced b-関数の計算も同時に行う.

実際にはこのアルゴリズムに様々なデータを入力することができる.

1. Reduced b-関数のいくつかの因子を入力として加えれば, 入力した因子の根 β に対するホロノミーD_X-加群 M_β のみを出力する.

2. $f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}.,,,, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ が生成するイデアルの準素イデアル成分を入力として加えれば, その準素イデアルが定める零点集合に support が含まれるようなホロノミーD_X-加群 M_β を出力する.

3. 予め, local b-関数の計算により特異点集合 Σ の b-関数に関する stratification を求めてある場合, stratum の情報とその stratum 上の b-関数の根の条件を入力すれば, 入力で指定した stratum に support が含まれ β の値が入力で指定した値と等しいようなホロノミーD_X-加群 M_βを出力する.

4. Reduced b-関数の根の候補が与えられたとき, その候補の値 γ に対し, $s-\gamma$ を入力に加えれば, γ が reduced b-関数の根であれば, M_γ を出力する. γ が reduced b-関数の根でない場合は, Gröbner 基底として 1 を出力する.

このように, 本稿で得た計算アルゴリズムは高い汎用性を有しており, 様々な方法で利用することが可能である.

参考文献

[1] 柏原正樹, b-函数と超曲面の特異性, 京都大学数理解析研究所講究録, **225** (1975), 16–53.

[2] M. Kashiwara, *B-functions and holonomic systems,* Invent. math. **38** (1976), 33–53.

[3] K. Nabeshima, *Comprehensive Gröbner bases in various domains,* Doctoral Thesis, Johannes Kepler Universität Linz, Austria, 2007.

[4] K. Nabeshima, *Stability conditions of monomial bases and comprehensive Gröbner systems,* Lecture Notes in Computer Science **7442** (2012), 248–259.

[5] K. Nishiyama and M. Noro, *Stratification associated with local b-functions,* J. Symbolic Computation **45** (2010), 462–480.

[6] T. Oaku, *Algorithms for the b-function and D-modules associated to a polynomial,* J. Pure and Applied Algebra **117** & **118** (1997), 495–518.

[7] T. Oaku and N. Takayama, *An algorithm for de Rham cohomology groups of the complement of an affine variety via D-module computation*, J. Pure and Applied Algebra **139** (1999), 201–233.

[8] T. Yano, *On the theory of b-functions,* Pub. Res. Inst. Math. Sci. **14** (1978), 111–202.

超曲面に付随した ホロノミーD-加群の計算アルゴリズムについて II

–計算例–

田島　慎一　(筑波大学)[*1]
鍋島　克輔　(徳島大学)[*2]

本稿では, いくつかの典型的な非孤立特異点を持つ超曲面に対し, 我々の導出したアルゴリズム (名前をここでは仮に, ncgsw=New Comprehensive Gröbner System in Weyl algebra とする) を用いて得たホロノミー D_X-加群を紹介する．計算に使用する数式処理システムは, Risa/Asir である．f^s の annihilator, b-関数の計算には, Risa/Asir の lib にある ann, bfct を使っている．

例 1 $f(x,y,z)=xy^3+z^2, S=\{(x,y,z)\in X \mid f(x,y,z)=0\}$ とおく．ただし, $X=\mathbb{C}^3$. S の特異点集合 $\Sigma=\{(x,y,z)\mid y=z=0\}$ は, $\Sigma_1=\Sigma-\{O\}, \Sigma_0=\{O\}$ により $\Sigma=\Sigma_1\sqcup\Sigma_0$ と stratify される．b-関数は,

$$b_f(s)=(s+1)(2s+3)(6s+5)(6s+7)$$

である．$\mathrm{Ann}_{D_X}f^s$ は

$$3x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y},\ 2z\frac{\partial}{\partial x}-y^3\frac{\partial}{\partial z},\ 2z\frac{\partial}{\partial y}-3xy^2\frac{\partial}{\partial y},\ 2y\frac{\partial}{\partial y}+3z\frac{\partial}{\partial z}-6s$$

で生成される．ncgsw にこれら $\mathrm{Ann}_{D_X}f^s$ の生成元と $f,\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial z}$ を入力として渡すと,

$6s+5=0$ の時,　　$y,\ z,\ 3x\dfrac{\partial}{\partial x}+1$

$6s+7=0$ の時,　　$y^2,\ z,\ y\dfrac{\partial}{\partial y},\ 3x\dfrac{\partial}{\partial x}+2$

$2s+3=0$ の時,　　$x,\ y^3,\ z,\ y\dfrac{\partial}{\partial y}+3$

$72s^3+252s^2+286s+105\neq 0$ の時,　1

を出力する．4 番目の出力は $\beta\neq -\frac{5}{6},-\frac{7}{6},-\frac{3}{2}$ の時, $M_\beta=D_X/D_X$ 即ち, M_β は, 自明であることを意味する．

自明でない 3 つのホロノミー D_X-加群を局所コホモロジーの言葉で表せば,

$$M_{-\frac{5}{6}}=D_X(x^{-\frac{1}{3}}\begin{bmatrix}1\\ yz\end{bmatrix}),\ M_{-\frac{7}{6}}=D_X(x^{-\frac{2}{3}}\begin{bmatrix}1\\ y^2z\end{bmatrix}),\ M_{-\frac{3}{2}}=D_X(\begin{bmatrix}1\\ xy^3z\end{bmatrix}),$$

本研究は科研費 (課題番号: 15K04891, 15K17513) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 32S05
キーワード：ホロノミーD-加群, 非孤立特異点

[*1] 〒305-8671 つくば市天王台 1-1-1 筑波大学数理物質系数学域
e-mail: tajima@math.tsukuba.ac.jp
[*2] 〒770-8502 徳島市南三常島町 1-1 徳島大学総合科学部
e-mail: nabeshima@tokushima-u.ac.jp

と表せる.

ホロノミー D_X-加群 $M_{-\frac{5}{6}}$ と $M_{-\frac{7}{6}}$ は, Σ に台を持つ D_X-加群である. 両者とも stratum Σ_0 に特異性を持ち, stratum Σ_1 上の local system は自明でない monodromy 構造を有する. ホロノミー D_X-加群 $M_{-\frac{3}{2}}$ は, stratum Σ_0 に台を持っている.

例 2 $f(x,y,z) = xz^2 + y^2 z, S = \{(x,y,z) \in X \mid f(x,y,z) = 0\}$ とおく. ただし, $X = \mathbb{C}^3$. S の特異点集合 $\Sigma = \{(x,y,z) \mid y = z = 0\}$ は, $\Sigma_1 = \Sigma - \{O\}, \Sigma_0 = \{O\}$ により $\Sigma = \Sigma_1 \sqcup \Sigma_0$ と stratify される. b-関数は, $b_f(s) = (s+1)^2(4s+3)(4s+5)$ である. $\mathrm{Ann}_{D_X} f^s$ は

$$2y\frac{\partial}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial y},\ 4x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - 2z\frac{\partial}{\partial z},\ (2xz+y^2)\frac{\partial}{\partial y} - 2yz\frac{\partial}{\partial z},\ y\frac{\partial}{\partial y} + 2z\frac{\partial}{\partial z} - 4s$$

で生成される. ncgsw に $\mathrm{Ann}_{D_X} f^s$ のこれらの生成元と $f, \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$ さらに, $s+1$ を入力として渡すと,

$$s+1=0 \text{ の時} \qquad y^2, z, y\frac{\partial}{\partial y} + 2, \frac{\partial}{\partial x}$$

を出力する. このホロノミー D_X-加群 M_{-1} は, Σ に台を持つ D_X-加群であり, 局所コホモロジーを用いて表現すると,

$$M_{-1} = D_X(\begin{bmatrix} 1 \\ y^2 z \end{bmatrix})$$

と表せる. M_{-1} は, Σ_0 に特異性を持たないことに注意されたい. Stratum Σ_1 における monodromy 構造も自明である. これに対し, ホロノミー D_X-加群 $M_{-\frac{3}{4}}, M_{-\frac{5}{4}}$ は, Σ に台を持ち, Σ_0 に特異性を持つことが $(4s+3)(4s+5) = 0$ の場合に対する ncgsw による計算結果から容易にわかる.

これらの例が示すように, ホロノミー D_X-加群 M_β は, b-関数に比べより多くの情報を含んでいることに注意されたい.

参考文献

[1] T. de Jong, *Some classes of line singularities,* Math. Z. **198** (1988), 493–517.

[2] P. Deligne, *Le formalisme des cycles évanescents,* SGA 7, II, exposés 13, Lecture Notes in Math. **340** (1973), 82–115.

[3] M. Kashiwara, M *On the holonomic systems of linear differential equations, II*, Invent. math. **49** (1978), 121–135.

[4] M. Kashiwara, *Vanishing cycles for holonomic systems,* Lecture Notes in Math. **1016** (1983), 134–142.

[5] D. Siersma, *Isolated line singularities,* Proc. Symposia in Pure Math. **40** Part 2 (1983), 485–496.

[6] D. Siersma, *The vanishing topology of non isolated singularities,* New Developements in Singularity Theory, (2001) 447–472.

[7] S. Tajima, *On b-functions and algebraic local cohomology classes attached to hypersurfaces with line singularities,* RIMS Kôkyûroku Bessatsu **52** (2015), to appear.

[8] S. Tajima and Y. Umeta, *Computing structures of holonomic D-modules associated with a simple line singularity*, submitted.

Lehto-Virtanen, Marty, and Zalcman-type theorems and their applications to Kobayashi hyperbolic geometry

Yûsuke Okuyama (Kyoto Institute of Technology, okuyama@kit.ac.jp)

We will talk about a Lehto–Virtanen-type theorem and a rescaling principle for an isolated essential singularity of a holomorphic curve in a complex space [2, Theorems 1 and 3], as well as a Marty-type theorem and a Zalcman-type one for a family of holomorphic curves in a complex space, which are useful for establishing a big Picard-type theorem and a big Brody-type one for holomorphic curves.

Let V be a complex space. For a holomorphic mapping $f : \mathbb{D} \setminus \{0\} \to V$, we say that f has an *isolated essential singularity* at the origin if f does not extend to a holomorphic mapping from $\mathbb{D}$ to a complex space. Set $\mathbb{D}(a, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ for every $a \in \mathbb{C}$ and every $r > 0$, and set $\mathbb{D}(r) := \mathbb{D}(0, r)$ for every $r > 0$ (so $\mathbb{D}(1) = \mathbb{D}$). For every metric δ on a complex space V, set $\operatorname{diam}_\delta(S) := \sup\{\delta(a, a') : a, a' \in S\}$ for a non-empty subset S in V.

1. A Lehto-Virtanen-type theorem and a big Picard-type one

There always exists a metric δ on V inducing the topology of V, and when V is Kobayashi hyperbolic, the Kobayashi (pseudo)metric d_V on V induces the topology of V.

Theorem 1 (a Lehto–Virtanen-type theorem)**.** *Let V be a complex space equipped with a metric δ inducing the topology of V, and $f : \mathbb{D} \setminus \{0\} \to V$ be a holomorphic mapping having an isolated essential singularity at the origin. If $\bigcap_{r>0} \overline{f(\mathbb{D}(r) \setminus \{0\})} \neq \emptyset$, then there exists a sequence (z_n) in $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ tending to 0 as $n \to \infty$ such that $\lim_{n\to\infty} f(z_n)$ exists in V and that* $\liminf_{n\to 0} \operatorname{diam}_\delta(f(\partial\mathbb{D}(|z_n|))) > 0$.

A complex subspace Y in a complex space Z is called a hyperbolically imbedded complex subspace in Z if for every distinct points $p, q \in \overline{Y}$, there exist open neighborhoods U_p, U_q of p, q in Z, respectively, such that $d_Y(U_p \cap Y, U_q \cap Y) > 0$. The following is an application of Theorem 1 and slightly generalizes Kobayashi [1, Theorem VII.3.6].

Theorem 2 (a big Picard-type theorem)**.** *Let Y be a hyperbolically imbedded complex subspace in a complex space Z, and $f : \mathbb{D} \setminus \{0\} \to Y$ be a holomorphic mapping.*

If $\bigcap_{r>0} \overline{f(\mathbb{D}(r) \setminus \{0\})} \neq \emptyset$ as a subset in Z, then f extends to a holomorphic mapping from $\mathbb{D}$ to Z.

2. A Marty-type theorem and a Zalcman-type one

Suppose in addition that V is compact. Then there is a metric δ on V such that **(i)** the metric δ induces the topology of V and that **(ii)** there is an open covering $\{U_x : x \in V\}$ of V such that for every $x \in V$, U_x is a Kobayashi hyperbolic subdomain in V containing x and satisfies $\delta \le d_{U_x}$ on $U_x(\times U_x)$. For every open disk $\mathbb{D}(a, r)$ and every holomorphic mapping f from an open neighborhood of $\overline{\mathbb{D}(a, r)}$ in $\mathbb{C}$ to V, set

$$L_{f,\mathbb{D}(a,r)} := \sup_{(w,w')\in(\mathbb{D}(a,r)\times\mathbb{D}(a,r))\setminus\operatorname{diag}_{\mathbb{D}(a,r)}} \frac{\delta(f(w), f(w'))}{d_{\mathbb{D}(a,r)}(w, w')}.$$

The following are generalizations of Marty's theorem and Zalcman's lemma, respectively.

Theorem 2.1 (a Marty-type theorem)**.** *Let D be a domain in $\mathbb{C}$, V a compact complex space equipped with a metric δ satisfying the above conditions* **(i)** *and* **(ii)***, and $\mathcal{F}$ a family in $O(D, V)$. Then, $\mathcal{F}$ is normal on D if and only if* $\sup_{f\in\mathcal{F}} L_{f,\mathbb{D}(a,r)} < \infty$ *for every $a \in D$ and every $r > 0$ satisfying $\mathbb{D}(a, r) \Subset D$.*

Theorem 2.2 (a Zalcman-type theorem)**.** *Let D be a domain in $\mathbb{C}$, V a compact complex space equipped with a metric δ satisfying the above conditions* **(i)** *and* **(ii)***, and $\mathcal{F}$ a family in $O(D, V)$. Then, $\mathcal{F}$ is* not *normal at a point $a \in D$, that is, not normal on any open neighborhood of a in D, if and only if there are sequences (f_k), (z_k), and (ρ_k) in $\mathcal{F}$, D, and $(0, \infty)$, respectively, and a non-constant $g \in O(\mathbb{C}, V)$ such that* $\lim_{k\to\infty} z_k = a$*, that* $\lim_{k\to\infty} \rho_k = 0$*, and that* $\lim_{k\to\infty} f_k(z_k + \rho_k v) = g(v)$ *locally uniformly on $\mathbb{C}$.*

3. A rescaling principle for an isolated essential singularity of a holomorphic curve and a big Brody-type theorem

A Lehto-Virtanen-type Theorem (Theorem 1) together with a Zalcman-type theorem (Theorem 2.2) also establishes the following rescaling principle for an isolated essential singularity of a holomorphic curve.

Theorem 3 (a rescaling principle)**.** *Let V be a compact complex space equipped with a metric satisfying the conditions* **(i)** *and* **(ii)** *in Section 2, and $f : \mathbb{D} \setminus \{0\} \to V$ be a holomorphic mapping. Then, f has an isolated essential singularity at the origin if and only if there are sequences (z_k) and (ρ_k) in $\mathbb{C}$ and $(0, \infty)$, respectively, and a non-constant holomorphic mapping $g : X \to V$, where X is either $\mathbb{C}$ or $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, such that* $\lim_{k\to\infty} z_k = 0$ *on $\mathbb{C}$, that* $\lim_{k\to\infty} \rho_k = 0$ *in $\mathbb{R}$, and that* $\lim_{k\to\infty} f(z_k + \rho_k v) = g(v)$ *locally uniformly on X.*

The following immediately follows from Theorem 3.

Corollary 3.1 (a big Brody-type theorem)**.** *If there is a holomorphic mapping from $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ to a compact complex space V having an isolated essential singularity at the origin, then V is not Brody hyperbolic.*

Remark 3.1. Corollary 3.1 is also a consequence of Theorem 2 and the equivalence between the Kobayashi hyperbolicity and the Brody one for compact complex spaces, the latter of which is known as Brody's theorem (1978) and is a consequence of Zalcman's lemma (1975) when V is a complex manifold.

References

[1] Kobayashi, S. *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, second edition (2005), An introduction.

[2] Okuyama, Y. A Lehto–Virtanen-type theorem and a rescaling principle for an isolated essential singularity of a holomorphic curve in a complex space, *International Journal of Mathematics* (2015), 1541009.

Growth, distortion and coefficient bounds on complex Banach spaces

Tatsuhiro HONDA (Hiroshima Institute of Technology, Japan)*1
Ian GRAHAM (University of Toronto, Canada)
Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University, Japan)*2
Gabriela KOHR (Babeş-Bolyai University, Romania)
Kwang Ho SHON (Pusan National University, Korea)

Let X be a complex Banach space, B be the open unit ball of X, and let $H(B)$ be the set of holomorphic mappings from B into X.

We recall the Carathéodory family in $H(B)$:

$$\mathcal{M} = \{h \in H(B) : h(0) = 0, Dh(0) = I, \Re l_z(h(z)) > 0, z \in B \setminus \{0\}, l_z \in T(z)\}.$$

If $X = \mathbb{C}$, it is clear that $f \in \mathcal{M}$ if and only if $f(z)/z \in \mathcal{P}$, where

$$\mathcal{P} = \{p \in H(U) : p(0) = 1, \Re p(z) > 0, z \in U\}$$

is the Carathéodory family on the unit disc U in $\mathbb{C}$.

The following family of holomorphic mappings on B is a natural generalization of the Carathéodory family $\mathcal{M}$. This family was introduced by Graham, Hamada and Kohr (see [7]) in the case $X = \mathbb{C}^n$, and played an important role in the study of normalized biholomorphic mappings on the unit ball in $\mathbb{C}^n$ (see [7], [10], [12], [13]).

Definition 1. *Let $g : U \to \mathbb{C}$ be a univalent function such that $g(0) = 1$. Also, let $h : B \to X$ be a normalized holomorphic mapping. We say that h belongs to the family $\mathcal{M}_g$ if*

$$\frac{1}{\|z\|} l_z(h(z)) \in g(U), \quad z \in B \setminus \{0\}, \quad l_z \in T(z). \tag{1}$$

Remark 2. *Obviously, if $\Re g(\zeta) > 0$, $\zeta \in U$, then $\mathcal{M}_g \subseteq \mathcal{M}$. Also, if $g(\zeta) = \dfrac{1+\zeta}{1-\zeta}$, $\zeta \in U$, then $\mathcal{M}_g = \mathcal{M}$. However, there are other choices of g which provide interesting properties of the set $\mathcal{M}_g$ (see [7], [10], [13]).*

Definition 3. *Let $g : U \to \mathbb{C}$ be a univalent function such that $g(0) = 1$. Also, let $f : B \to X$ be a normalized holomorphic mapping. We say that f belongs to the family $\mathcal{R}_g$ if $h \in \mathcal{M}_g$, where $h(z) = Df(z)(z)$, $z \in B$. The family $\mathcal{R}_{g_0}$ is denoted by $\mathcal{R}$, where $g_0(\zeta) = \dfrac{1+\zeta}{1-\zeta}$, $|\zeta| < 1$.*

Remark 4. *Let $f \in H(B)$ be a normalized mapping. Also, let $A_m = \frac{1}{m!} D^m f(0)$ for $m \geq 2$. If the mapping f satisfies a stronger condition*

$$\Re l_u(Df(z)u) > 0, \quad z \in B, \quad u \in X \setminus \{0\}, \quad l_u \in T(u), \tag{2}$$

then f is univalent on B. Moreover, its partial sum $f_k(z) = z + \sum_{m=2}^{k} A_m(z^m)$ is univalent in $B_{1/2}$ for $k \geq 2$. This is a generalization of [16, Theorem 4].

This work has been supported by JSPS KAKENHI Grant Number 25400151.
2000 Mathematics Subject Classification: 32H99, 30C45, 46G20.
Keywords: biholomorphic mapping, starlike mapping. .
*1 e-mail: thonda@cc.it-hiroshima.ac.jp
*2 e-mail: h.hamada@ip.kyusan-u.ac.jp

In this talk, we consider subfamilies $\mathcal{M}_g$ of $\mathcal{M}$ depending on a univalent function g. We obtain growth theorems and coefficient bounds for holomorphic mappings in $\mathcal{M}_g$, including some sharp improvements of existing results. When g is convex, we study the family $\mathcal{R}_g$ consisting of holomorphic mappings $f : B \to X$ which have the property that the mapping $Df(z)(z)$ belongs to $\mathcal{M}_g$.

References

[1] F.F. Bonsall, J. Duncan, Numerical Ranges of Operators on Normed Spaces and of Elements of Normed Algebras, London Mathematical Society Lecture Note Series, 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1971.

[2] F. Bracci, M. Elin, D. Shoikhet, Growth estimates for pseudo-dissipative holomorphic maps in Banach spaces, J. Nonlinear Convex Anal. to appear.

[3] L. de. Branges, A proof of the Bieberbach conjecture, Acta Math. 154 (1985) 137–152.

[4] P. Duren, Univalent Functions, Springer-Verlag, New York, 1983.

[5] P. Duren, I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, Solutions for the generalized Loewner differential equation in several complex variables, Math. Ann. 347 (2010) 411–435.

[6] I. Graham, H. Hamada, T. Honda, G. Kohr, K. H. Shon,Growth, distortion and coefficient bounds for Carathéodory families in $\mathbb{C}^n$ and complex Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. 416-1 (2014) 449 – 469.

[7] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, Parametric representation of univalent mappings in several complex variables, Canadian J. Math. 54(2) (2002) 324–351.

[8] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr, Parametric representation and asymptotic starlikeness in $\mathbb{C}^n$, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008) 3963–3973.

[9] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr, Asymptotically spirallike mappings in several complex variables, J. Anal. Math. 105 (2008) 267–302.

[10] I. Graham, G. Kohr, Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions, Marcel Dekker Inc., New York, 2003.

[11] K. Gurganus, Φ-like holomorphic functions in $\mathbb{C}^n$ and Banach spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 205 (1975) 389–406.

[12] H. Hamada, T. Honda, Sharp growth theorems and coefficient bounds for starlike mappings in several complex variables, Chinese Ann. Math. Ser.B 29 (2008) 353–368.

[13] H. Hamada, T. Honda, G. Kohr, Growth theorems and coefficient bounds for univalent holomorphic mappings which have parametric representation, J. Math. Anal. Appl. 317 (2006) 302–319.

[14] H. Hamada, G. Kohr, Φ-like and convex mappings in infinite dimensional spaces, Rev. Roum. Math. Pures Appl. 47 (2002) 315–328.

[15] H. Hamada, G. Kohr, Loewner chains and the Loewner differential equation in reflexive complex Banach spaces, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 49 (2004) 247–264.

[16] T.H. MacGregor, Functions whose derivative has a positive real part, Trans. Amer. Math. Soc. 104 (1962) 532–537.

[17] J.A. Pfaltzgraff, Subordination chains and univalence of holomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$, Math. Ann. 210 (1974) 55–68.

[18] W. Rogosinski, On the coefficients of subordinate functions, Proc. London Math. Soc. 48 (1943) 48–82.

[19] T.J. Suffridge, Starlikeness, convexity and other geometric properties of holomorphic maps in higher dimensions, Lecture Notes in Math. 599 146–159, Springer-Verlag, 1977.

[20] Q.H. Xu, T.S. Liu, On biholomorphic mappings in complex Banach spaces, Rocky Mountain J. Math. 41 (2011) 2069–2086.

Toward a higher codimensional Ueda theory

小池 貴之 (東京大学)*

本講演では上田理論の余次元が2である場合のアナロジーについての考察を行う [2]. 上田はXを複素多様体, Cをその滑らかでケーラーなコンパクト超曲面で$c_1(N_{C/X})=0$なるものとして, 直線束$\mathcal{O}_X(C)$がCの近傍でも平坦直線束となるための十分条件を記述した [3, Theorem 3]. 本講演ではこの余次元2版として, Xを複素多様体, Sをその滑らかな超曲面, CをSの滑らかでケーラーなコンパクト超曲面で$c_1(N_{S/X}|_C)=0$なるものとして, 直線束$\mathcal{O}_X(S)$がCの近傍でも平坦直線束となるための十分条件を記述する.

Xを複素多様体, Sをその滑らかな超曲面, CをSの滑らかでケーラーなコンパクト超曲面として, 法線束$N_{S/X}$がS中Cの近傍で平坦である (変換関数系が$U(1):=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$に退化する) ようなものとする. 上田による障害類の余次元2でのアナロジーとして, このような三つ組み(C,S,X)に対し, 障害類$u_{n,m}(C,S,X)\in H^1(C, N_{S/X}|_C^{-n}\otimes N_{C/S}^{-m})$を定義し, 次を示した:

定理 1. *Xを複素多様体, Sをその滑らかな超曲面, CをSの滑らかでケーラーなコンパクト超曲面として, 法線束$N_{S/X}$がS中Cの近傍で平坦であるようなものとする. 次の三条件の内のいずれかの成立を仮定する: (i) $N_{C/S}\in\mathcal{E}_0(C)$かつ$N_{S/X}|_C\in\mathcal{E}_0(C)$, (ii) $N_{C/S}$と$N_{S/X}|_C$とは同型であり, 共に$\mathcal{E}_1(C)$の元である, (iii) $N_{S/X}|_C\in\mathcal{E}_0(C)$であり, かつ$C$の$S$中 strongly 1-convex な近傍$V$として, CがVの極大コンパクト部分多様体となっているようなものが存在する. このとき, 任意の$n\geq 1, m\geq 0$に対して$u_{n,m}(C,S,X)=0$であるならば, X中Cの近傍Wとして$\mathcal{O}_X(S)|_W$が平坦なるものが存在する.* □

ここで$\mathcal{E}_0(C)$は$\mathrm{Pic}^0(C)$のねじれ元全体の集合であり, 集合$\mathcal{E}_1(C)$は

$$\mathcal{E}_1(C):=\{E\in\mathrm{Pic}^0(C)\mid \exists\alpha\in\mathbb{R}_{>0}\ \text{s.t.}\ \forall n\in\mathbb{Z}_{>0},\ d(\mathcal{O}_C,E^n)\geq(2n)^{-\alpha}\}$$

で定義される集合である (dは$\mathrm{Pic}^0(C_0)$のユークリッド距離). $\mathrm{Pic}^0(C)$中$\mathcal{E}_1(C)$はルベーグ全測度部分集合である一方で, 疎な閉集合の可算和として実現される部分集合であることが知られている. またCの次元が1である場合には, 定理1の条件(iii)は以下の条件と同値であることがGrauertの定理から分かる: $N_{C/S}$が負であり, かつ$N_{S/X}|_C\in\mathcal{E}_0(C)$である.

[3, Theorem 3] の代数幾何学的な状況への重要な応用の一つとして, 射影平面$\mathbb{P}^2$の9点爆発Xの反標準束K_X^{-1}が半正である (つまりK_X^{-1}のC^∞エルミート計量として半正曲率をもつものが存在する) ための十分条件の記述がある ([1] も参照). このアナロジーとして, 定理1には次のような応用がある:

Corollary 2. *$C_0\subset\mathbb{P}^3$を互いに横断的に交わる二つの二次曲面の交差とする. 互いに相異なる8点$p_1,p_2,\dots,p_8\in C_0$を固定する. 直線束$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)|_{C_0}\otimes\mathcal{O}_{C_0}(p_1+p_2+\cdots+p_8)$が$\mathcal{E}_0(C_0)\cup\mathcal{E}_1(C_0)$の元である場合には, $\mathbb{P}^3$の$\{p_j\}_{j=1}^8$での爆発Xの反標準束K_X^{-1}は半正である. 特に$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)|_{C_0}\otimes\mathcal{O}_{C_0}(p_1+p_2+\cdots+p_8)\in\mathcal{E}_1(C_0)$なる場合には, K_X^{-1}は半豊富でないが半正である.* □

*e-mail: tkoike@ms.u-tokyo.ac.jp

表 1: $\mathbb{P}^3$ の 8 点爆発 X の反標準束 K_X^{-1} の性質 $(N := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)|_{C_0} \otimes \mathcal{O}_{C_0}(p_1+p_2+\cdots+p_8))$.

	N : torsion	N : non-torsion
安定固定部分 $\mathbb{B}(K_X^{-1})$	$\emptyset$ or C	C
半豊富性	半豊富	半豊富でない
飯高次元	2	1

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)|_{C_0} \otimes \mathcal{O}_{C_0}(p_1+p_2+\cdots+p_8) \in \mathcal{E}_0(C_0)$ なる場合には K_X^{-1} は半豊富であり (つまり, ある自然数 $n > 0$ に対して K_X^{-n} が大域切断で生成され), ここから直ちに半正でもあることが分かることに注意する. その一方で $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)|_{C_0} \otimes \mathcal{O}_{C_0}(p_1+p_2+\cdots+p_8) \notin \mathcal{E}_0(C_0)$ なる場合には, K_X^{-1} の安定固定部分は C_0 の強変換 $C \subset X$ と一致し, (ネフだが) 半豊富ではない例となっていることが分かる.

Lesieutre・Ottem 両氏は, 十分に一般の 8 点配置に対して $\mathbb{P}^3$ の 8 点爆発 X の反標準束 K_X^{-1} が以下の性質を満たすことを示した: K_X^{-1} はネフである一方で, $(K_X^{-1}.C) = 0$ なる X の曲線 C は可算無限個である ([4], これは Totaro 氏の問題に回答を与えている). この結果と系 2 とを組み合わせることで次が分かる: 三次元射影的多様体 X 上の直線束 L として, L はネフである一方で $(L.C) = 0$ なる X の曲線 C が可算無限個であるような例が存在する (十分に一般の 8 点配置に対して $\mathbb{P}^3$ の 8 点爆発 X とその上の反標準束 $L := K_X^{-1}$ がこのような例となっている).

参考文献

[1] M. Brunella, On Kähler surfaces with semipositive Ricci curvature, Riv. Mat. Univ. Parma, **1**, 441–450 (2010).

[2] T. Koike, Toward a higher codimensional Ueda theory, to appear in Math. Z. (arXiv:1412.2354).

[3] T. Ueda, On the neighborhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle, Math. Kyoto Univ., **22** (1983), 583–607.

[4] J. Lesieutre, J. C. Ottem, Curves disjoint from a nef divisor, arXiv:1410.4467.

Variational formula for L_s-canonical semi-exact differential and application

濱野 佐知子 (Fukushima University)*

Abstract

We establish the variational formula of L_s-canonical semi-exact differential $(-1 < s \leq 1)$ for the deforming open torus $R(t)$ with complex parameter $t \in \Delta = \{|t| < r\}$. This formula implies the intimate relation between the Euclidean radius of the moduli disk for $R(t)$ and the pseudoconvexity.

1. Preliminary

1.1. Variational formulas for L_1- and L_0-principal functions

Let $(\widetilde{\mathcal{R}}, \pi, \Delta)$ be a holomorphic family such that $\widetilde{\mathcal{R}}$ is a two-dimensional complex manifold; $\Delta = \{|t| < r\}$; and π is a holomorphic projection from $\widetilde{\mathcal{R}}$ onto Δ. We assume that $\widetilde{R}(t) = \pi^{-1}(t)$, $t \in \Delta$ is irreducible and non-singular in $\widetilde{\mathcal{R}}$. Let $(\mathcal{R}, \pi, \Delta)$ be a sub-holomorphic family of $(\widetilde{\mathcal{R}}, \pi, \Delta)$ such that $\mathcal{R} \subset \widetilde{\mathcal{R}}$; $\partial\mathcal{R}$ is C^ω smooth in $\widetilde{\mathcal{R}}$; $R(t) = \pi^{-1}(t) \subset \widetilde{R}(t)$, $t \in \Delta$; $R(t)$ is a bordered Riemann surface of genus $g (\geq 0)$ with C^ω smooth boundary $\partial R(t)$ in $\widetilde{R}(t)$. We identify $\mathcal{R}$ with the variation of $R(t)$, so that each $R(t)$ admits the L_i-principal function $p_i(t, z)$ $(i = 1, 0)$. We showed the following:

Lemma 1. *Let $\{A_l(t), B_l(t)\}_{l=1}^g$ be a canonical homology basis of $R(t)$ such that $A_l(t)$ and $B_l(t)$ vary continuously with $t \in \Delta$. Then*

$$\frac{\partial^2 \alpha_1(t)}{\partial t \partial \bar{t}} = -\left(\frac{1}{\pi} \int_{\partial R(t)} k_2(t,z) \left| \frac{\partial p_1(t,z)}{\partial z} \right|^2 ds_z + \frac{4}{\pi} \iint_{R(t)} \left| \frac{\partial^2 p_1(t,z)}{\partial \bar{t} \partial z} \right|^2 dxdy \right). \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \alpha_0(t)}{\partial t \partial \bar{t}} = &\frac{1}{\pi} \int_{\partial R(t)} k_2(t,z) \left| \frac{\partial p_0(t,z)}{\partial z} \right|^2 ds_z + \frac{4}{\pi} \iint_{R(t)} \left| \frac{\partial^2 p_0(t,z)}{\partial \bar{t} \partial z} \right|^2 dxdy \\ &- \frac{2}{\pi} \mathrm{Im} \left\{ \sum_{l=1}^{g} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{A_l(t)} * dp_0(t,z) \right) \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\int_{B_l(t)} * dp_0(t,z) \right) \right\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Here

$$k_2(t,z) = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial \bar{t}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|^2 - 2\mathrm{Re} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{t} \partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \right\} + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \bar{z}} \right) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|^{-3} \quad \text{on } \partial\mathcal{R}, \tag{3}$$

where $\varphi(t, z)$ is a C^2 smooth defining function of $\partial\mathcal{R}$ in $\widetilde{\mathcal{R}}$ which is defined in [3, (1.2)].

If $\mathcal{R}$ is pseudoconvex and each $R(t)$ is planar, the contrast between the superharmonicity of $\alpha_1(t)$ and the subharmonicity of $\alpha_0(t)$ is unified with the Schiffer span $s(t) := \alpha_0(t) - \alpha_1(t)$. In [1] we applied the *logarithmically* subharmonicity of $s(t)$ to show the simultaneous uniformization of moving *planar* Riemann surfaces of class O_{AD}.

This work was supported by JSPS Grant-in-Aid for Scientific Research(C)15K04914.

* e-mail: `hamano@educ.fukushima-u.ac.jp`

1.2. canonical semi-exact differentials

Let R be a bordered Riemann surface of genus one in a Riemann surface $\widetilde{R}$ such that $R \Subset \widetilde{R}$ and ∂R consists of C^ω smooth contours; $\partial R = C_1 + \ldots + C_\nu$. Let $\chi = \{A, B\}$ be a canonical homology basis of R modulo dividing cycles. Let ϕ be a holomorphic differential on $\overline{R} = R \cup \partial R$. We say that ϕ is a *canonical semi-exact differential* on R if ϕ satisfies $\int_{C_j} \phi = 0$ and $\operatorname{Im} \phi = 0$ on C_j $(j = 1, \ldots, \nu)$.

Theorem 2 (Kusunoki [2]). *There uniquely exists a holomorphic differential ϕ_s $(-1 < s \leq 1)$ on R such that*
(i) $e^{-\frac{\pi i}{2}s}\phi_s$ is a canonical semi-exact differential on R, (ii) $\int_A \phi_s = 1$.

We call ϕ_s the *L_s-cannonical semi-exact differential* for (R, A), and set $\tau_s = \int_B \phi_s$.

Theorem 3 (Shiba [4]). *(1) The moduli disk $\mathcal{M}(R, \chi)$ is written by*

$$\mathcal{M}(R, \chi) = \{\tau \in \mathbf{H} \mid |\tau - \tau^*| \leq \rho\}, \text{ where } \tau^* = \tfrac{1}{2}(\tau_1 + \tau_0), \quad \rho = \tfrac{1}{2i}(\tau_1 - \tau_0) > 0.$$

(2) Let $\zeta_\theta = \tau^* + \rho e^{i\theta} \in \partial\mathcal{M}(R, \chi)$, $-\pi < \theta \leq \pi$. Then $\zeta_\theta = \tau_s$ with $s = \frac{\theta}{\pi}$.

2. Results

Let $(\widetilde{\mathcal{R}}, \pi, \Delta)$ be the holomorphic family stated in 1.1 for Lemma 1. We restrict each $R(t)$ to a bordered Riemann surface of $g = 1$ in $\widetilde{R}(t)$. For $t \in \Delta$, we fix a canonical homology basis $\chi(t) = \{A(t), B(t)\}$ of $R(t)$ modulo dividing cycles such that $A(t)$ and $B(t)$ move continuously in $\mathcal{R}$ with t. Each $R(t)$ carries the L_s-canonical semi-exact differential $\phi_s(t, z)$ for $(R(t), A(t))$, so that $\int_{A(t)} \phi_s(t, z) = 1$. Set $\tau_s(t) = \int_{B(t)} \phi_s(t, z)$. As usual we write $\phi_s(t, z) = f_s(t, z)dz$ by use of the local parameter of $\overline{R(t)}$.

Theorem 4. *For $-1 < s \leq 1$, we have*

$$\frac{\partial^2 \operatorname{Im}[e^{-\pi i s}\tau_s(t)]}{\partial t \partial \bar{t}} = -\frac{1}{2}\int_{\partial R(t)} k_2(t, z)|f_s(t, z)|^2 |dz| - \left\| \frac{\partial \phi_s(t, z)}{\partial \bar{t}} \right\|^2_{R(t)}. \tag{4}$$

Here $k_2(t, z)$ is the same as (3).

We remark that $k_2(t, z)|f_s(t, z)|$ is a real-valued function on $\partial\mathcal{R}$. Note that $\tau_s(t)$ depend on $B(t)$ but the right hand side of (4) do not depend on $B(t)$.

Corollary 5. *Assume that $\mathcal{R}$ is a Stein manifold. Then*

(1) the Euclidean radius $\rho(t)$ of $\mathcal{M}(R(t), \chi(t))$ is subharmonic on Δ;

(2) if $\rho(t)$ is harmonic on Δ, then the center $\tau^*(t)$ of $\mathcal{M}(R(t), \chi(t))$ moves holomorphic on Δ and $\rho(t) = \rho(0)$ for every $t \in \Delta$.

References

[1] S. Hamano, *Uniformity of holomorphic families of non-homeomorphic planar Riemann surfaces,* Annales Polonici Mathematici **111** no.2 (2014), 165-182.

[2] Y. Kusunoki, *Theory of Abelian integrals and its applications to conformal mappings*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A. **32** Math. no.2 (1959), 235-258.

[3] N. Levenberg and H. Yamaguchi, *The metric induced by the Robin function*, Mem. AMS. **92**, no. 448 (1991), 1-156.

[4] M. Shiba, *The moduli of compact continuations of an open Riemann surface of genus one,* Transactions of the AMS. **301** no.1 (1987), 299-311.

[5] M. Shiba, H. Yamaguchi and S. Hamano, *Hyperbolic span and pseudoconvexity* (submitted).

可解な自己同型群をもつある種のチューブ領域の構造と同値性

清水　悟　(東北大学大学院理学研究科)

概　要

In the study of the holomorphic equivalence problem for tube domains, it is fundamental to investigate tube domains with polynomial infinitesimal automorphisms. To apply Lie group theory to the holomorphic equivalence problem for such tube domains T_Ω, investigating certain solvable subalgebras of $\mathfrak{g}(T_\Omega)$ plays an important role, where $\mathfrak{g}(T_\Omega)$ is the Lie algebra of all complete polynomial vector fields on T_Ω. Related to this theme, we discuss the structure and equivalence of a class of tube domains with solvable groups of automorphisms. Besides, we give a concrete example of a tube domain whose automorphism group is solvable and contains nonaffine automorphisms.

1. 多項式無限小自己同型をもつチューブ領域

チューブ領域は，その上の各完備正則ベクトル場が多項式ベクトル場になるとき，多項式無限小自己同型をもつチューブ領域と呼ばれる．チューブ領域に関する正則同値問題の研究においては，多項式無限小自己同型をもつチューブ領域に対する場合の研究が基本的である ([2]，[3]，[4]，[5] 参照)．第 1 種ジーゲル領域は多項式無限小自己同型をもつチューブ領域の典型例であり，その無限小自己同型環の構造，例えば階別リー環としての直和分解等，がよく分かっている．そしてそれを利用して，正則同値問題について肯定的解答が与えられている ([1])．しかしこれらの結果は第 1 種ジーゲル領域特有の性質に非常に強く依拠しており，一般の多項式無限小自己同型をもつチューブ領域の場合には，同様の議論，手法を当てはめることは難しく，無限小自己同型環の直和分解の成立さえ明らかではない．従って必ずしも第 1 種ジーゲル領域とは限らない多項式無限小自己同型をもつチューブ領域を扱う際にはまったく新しい観点が必要とされる．[5] において与えられたチューブ領域上の完備多項式ベクトル場に関する延長定理は，一般の多項式無限小自己同型をもつチューブ領域に対して，その無限小自己同型環が自然な直和分解をもつなどの結果を保証し，新たな観点からの研究を可能とする．

2. 可解な自己同型群をもつある種のチューブ領域の構造と同値性

一般に，複素有界領域の正則自己同型群がリー群の構造をもつという H. Cartan の定理は，リー群論における共役性定理の複素有界領域の理論への応用を可能にする．共役性定理を $\mathbf{C}^n$ 内の多項式無限小自己同型をもつチューブ領域 T_Ω に関する正則同値問題へ応用するためには，T_Ω の無限小自己同型環 $\mathfrak{g}(T_\Omega)$ のある種の可解なリー部分環を研究する必要が生ずる．典型的な場合は $\mathfrak{g}(T_\Omega)$ 自身が可解である場合であり，そのような場合に上記の観点から実験的研究を試みて得られた結果を報告する．

　具体的には，$T_\Omega = \mathbf{R}^n + \sqrt{-1}\Omega$ を $\mathbf{C}^n$ 内の多項式無限小自己同型をもつチューブ領域とし，その底 Ω は $\mathbf{R}^n$ 内の直線を含まない凸領域であるとする．このとき，T_Ω の

正則自己同型群 $\mathrm{Aut}(T_\Omega)$ が可解で，T_Ω のある点を通る $\mathrm{Aut}(T_\Omega)$ の軌道の次元が $n+1$ である場合に，$\mathfrak{g}(T_\Omega)$ の構造を明らかにすると同時に正則同値問題に肯定的解答を与えた．

また，多項式無限小自己同型をもつチューブ領域 T_Ω の間で，第 1 種ジーゲル領域，すなわち Ω が凸錐体であるチューブ領域 T_Ω はつぎの点で特徴的である：$\mathrm{Aut}(T_\Omega)$ が可解であるならば，$\mathrm{Aut}(T_\Omega)$ の単位成分は必ずアフィン自己同型から成る．上記結果の具体例として，Ω が凸錐体ではない場合に，$\mathrm{Aut}(T_\Omega)$ が可解で非アフィン自己同型を含むつぎのようなチューブ領域 T_Ω の例を与えた．

例　Ω を

$$\Omega = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3 \,|\, y_2 > y_1^2 + e^{y_3^2} - 2\}$$

により与えられる $\mathbf{R}^3$ 内の直線を含まない凸領域とする．このとき，T_Ω は多項式無限小自己同型をもつチューブ領域であり，$\mathrm{Aut}(T_\Omega)$ は可解で非アフィン自己同型を含む．そして $\mathrm{Aut}(T_\Omega)$ の原点 $O \in T_\Omega$ を通る軌道の次元は 4 である．

参考文献

[1] Y. Matsushima *On tube domains*, in Symmetric Spaces, Pure and Appl. Math., Vol. 8, Dekker, New York, 1972, pp. 255–270.

[2] S. Shimizu, *Automorphisms of tube domains*, in Geometry and Analysis on Complex Manifolds, Festschrift for Professor S Kobayashi's 60th Birthday (T. Mabuchi, J. Noguchi, T. Ochiai, ed.), World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1994, pp. 198–241.

[3] S. Shimizu, *Holomorphic equivalence problem for two-dimensional tube domains with polynomial infinitesimal automorphisms*, in Geometric Complex Analysis, Proceedings of the third international research institute, the Mathematical Society of Japan, Hayama, 1995 (J. Noguchi, H. Fujimoto, J. Kajiwara, T. Ohsawa, ed.), World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1996, pp. 563–568.

[4] S. Shimizu, *Prolongation of holomorphic vector fields on a tube domain and its applications*, Advanced Studies in Pure Mathematics 42, 2004, Complex Analysis in Several Variables - Memorial Conference of Kiyoshi Oka's Centennial Birthday, Kyoto/Nara 2001, pp. 289-299.

[5] S. Shimizu, *Prolongation of holomorphic vector fields on a tube domain*, Tohoku Math. J. 65 (2013), 495–514.

APPLICATION AND SIMPLIFIED PROOF OF A SHARP L^2 EXTENSION THEOREM

TAKEO OHSAWA

In [O-T], it was proved that there exists a positive mumber $C \leq 1620\pi$ such that, for any pseudoconvex domain D contained in $\{z = (z', z_n) \in \mathbb{C}^n; |z_n| < 1\}$, for any plurisubharmonic function $\varphi(z)$ on D, and for any holomorphic function $f(z')$ on $D' = \{z' \in \mathbb{C}^{n-1}; (z', 0) \in D\}$ satisfying

$$\int_{D'} e^{-\varphi(z',0)}|f(z')|^2 d\lambda_{n-1} < \infty,$$

where $d\lambda_{n-1}$ denotes the Lebesgue measure on $\mathbb{C}^n$, there exists a holomorphic function $\tilde{f}(z)$ on D such that $\tilde{f}(z', 0) = f(z')\ \ (z' \in D')$ and

$$\int_D e^{-\varphi(z)}|\tilde{f}(z)|^2 d\lambda_n \leq C \int_D e^{-\varphi(z',0)}|f(z')|^2 d\lambda_{n-1}$$

hold.

As a result, it turned out that the Bergman kernel function $K_D(z, w)$ grows at least as fast as $\delta(z)^{-2}$ when $z = w$ and z tends to the boundary ∂D of D, if D is a bounded pseudoconvex domain with C^1-smooth boundary. Here $\delta(z)$ denotes the euclidean distance from z to ∂D.

By improving this in [O], the author was contented to know that, if D is a bounded pseudoconvex domain with C^2-smooth boundary, application of the result implies that $K_D(z, z)$ grows at least as $\delta(z)^{-2-\nu}$ as z tends to a point $z_0 \in \partial D$ non-tangentially, where ν denotes the rank of the Levi form of ∂D at z_0.

Recently, Guan-Zhou [G-Z] showed sharp L^2 extension theorems in this sense including the following refinement of [O] as a special case.

Theorem 0.1 (cf. [G-Z]). *Let X be a Stein manifold of dimension n, let φ and ψ be plurisubharmonic functions on X, and let w be a holomorphic function on X such that* $\sup(\psi + 2\log|w|) \leq 0$ *and dw is not identically zero on every irreducible component of $w^{-1}(0) = H$. Then, for any holomorphic $(n-1)$-form f on $H_0 = H - SingH$ satisfying*

$$|\int_{H_0} e^{-\varphi} f \wedge \bar{f}| < \infty,$$

there exists a holomorphic n-form F on X such that $F = dw \wedge f$ at any point of H_0 and

$$|\int_X e^{-\varphi+\psi} F \wedge \bar{F}| \leq 2\pi |\int_{H_0} e^{-\varphi} f \wedge \bar{f}|, \tag{0.1}$$

where SingH denotes the set of singular points of H.

The purpose of the present note is to give remarks on Theorem 0.1 and its proof. First we shall show that Theorem 0.1 implies a stability result on the asymptotic behavior of the ratio of the Bergman kernel of D and a weighted Bergman kernel of D'.

Theorem 0.2. *Let D be a bounded pseudoconvex domain with C^2-smooth boundary in $\mathbb{C}^n$ and let $\phi(z)$ be a real valued C^2 function on a neighborhood of $\bar{D}$ such that $\{z; \phi(z) > 0\}$ is pseudoconvex and $D = \{z; \phi(z) > |z_n|^2\}$. Assume that $\phi|_{\bar{D}'} = v\delta^t$ $(t > 0)$ for some positive C^2 function v, $-\log \phi$ is plurisubharmonic on D, and*

$$\phi(z) = \phi(z', 0) + o(\phi(z', 0) + |z_n|^2) \tag{0.2}$$

as z tends to $\partial D \cap \{z_n = 0\}$. Then, the reproducing kernel $K_{D',\phi}(z', w')$ of the space of L^2 holomorphic functions on $D' = \{z' \in \mathbb{C}^{n-1}; (z', 0) \in D\}$ with respect to the measure $\phi(z', 0)d\lambda_{n-1}$ satisfies

$$\frac{K_{D',\phi}(z', z')}{K_D((z', 0), (z', 0))} \longrightarrow 1$$

as $(z', 0)$ tends to $\partial D \cap \{z_n = 0\}$.

Another remark on Theorem 0.1 is that one can avoid solving an ODE by choosing a family of cut off functions producing the $\bar{\partial}$-data in such a way that they are naturally related to the Poincaré metric of the punctured disc. This change causes a difference in adjusting the twist and the weight, and simplifies the situation very much. Since the new cut off functions are of the same nature as those appearing in the proof of Theorem 0.2, they seem to deserve a special attention in the future research.

REFERENCES

[G-Z] Guan, Q. and Zhou, X.-Y., Optimal constant problem in the L^2 extension theorem, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 350 (2012), 753-756.

[O] Ohsawa, T., On the extension of L^2 holomorphic functions III - Negligible weights, Math. Z. 219 (1995), 215-225.

[O-T] Ohsawa, T. and Takegoshi, K., On the extension of L^2 holomorphic functions, Math. Z., 195 (1987), 197-204.

逆アーベル積分の収束半径と分岐被覆領域のレビ問題について

野口潤次郎 (東京大学)[1)]

§1 序 不分岐リーマン領域のレビ問題（ハルトークスの逆問題）は次の様に解決された：

(i) 1942 年 Oka VI: $\mathbf{C}^2$ の擬凸部分領域は、スタインである。

(ii) 1943 年 Takagi Reports: $\mathbf{C}^n$ の擬凸不分岐リーマン領域は、スタイン（未発表)。

(iii) 1953 年 Oka IX : $\mathbf{C}^n$ $(n \geq 2)$ の擬凸不分岐リーマン領域は、スタインである。岡の第 1 連接定理 (Oka VII) を使った証明。

(iv) 1954 年 Bremmermann, Norguet: $\mathbf{C}^n$ $(n \geq 2)$ の擬凸部分領域は、スタイン。

この結果の $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ の場合への拡張及び、分岐領域の場合の反例は次の様に得られた：

(v) 1962 年 H Grauert の反例: $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ 上の有限葉擬凸（局所スタイン）分岐リーマン領域で、スタインでない例。

(vi) 1963/64 年 R. Fujita・A. Takeuchi: $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ 上の擬凸不分岐リーマン領域は、スタインである。

(vii) 1978 年 J.E. Fornæss の反例: $\mathbf{C}^n$（特に $n=2$）上の 2 葉擬凸分岐リーマン領域で、スタインでない例。

ここでは、$\mathbf{C}^n$ 上の分岐リーマン領域（非特異）のレビ問題が肯定的である為の幾何学的十分条件を考察する。

§2 主結果 以下、X を n 次元連結複素多様体としその正則余接束を $\mathbf{T}(X)^*$ とする。次の条件を考える。

条件 1 (Cond A). $\mathbf{T}(X)^*$ には X 上の大域（正則）枠 $\omega = (\omega^1, \ldots, \omega^n)$ が存在して、成分は閉微分 $d\omega^j = 0$ である。

$\Omega \subset X$ を部分領域として Cond A の下で次のアーベル積分を考える。

$$\alpha : x \in \Omega \longrightarrow \zeta = (\zeta^j) = \left(\int_a^x \omega^1, \ldots, \int_a^x \omega^n \right) \in \mathbf{C}^n. \tag{2}$$

$\mathrm{P}\Delta = \prod_{j=1}^n \{|\zeta^j| < 1\}$ で $\mathbf{C}^n$ の原点中心の単位多重円板を表す。小さな $\rho > 0$ に対し、$\alpha(x) = \zeta$ は $\phi_{a,\rho}(\zeta) = x$ は $\rho\mathrm{P}\Delta$ 上で逆を持つ：

$$\phi_{a,\rho} : \rho\mathrm{P}\Delta \longrightarrow U_0 = \phi_{a,\rho}(\rho\mathrm{P}\Delta) \subset \Omega. \tag{3}$$

そのような ρ の上限を $\rho(a,\Omega) (\leq \infty)$ とおく。. $\rho(a,\Omega)$ は、枠 ω の取り方によるので $\rho(a,\omega,\Omega)$ と書くべき所であるが、ω は、止めて考えるので省略する。

注 (i) $\rho(a,\Omega)$ は、有限ならば連続関数; (ii) F_Ω を小林双曲的擬計量とすると、$\rho(a,\Omega) \leq \inf\{|v|_\omega : v \in \mathbf{T}(X)_a, F_\Omega(v) = 1\}$, ただし、$|v|_\omega = \max_j |\omega^j(v)|$ とする。

$K \Subset \Omega$ の正則凸包を $\hat{K}_\Omega$ と書く。部分領域 $\Omega \Subset X$ が "正則領域" であることも通常の意味で定義される。まず、次の Cartan-Thullen(1932) 型の定理が示される。

[1)]科学研究費基盤 (C) 課題番号 15K04917 の補助を受けている。

定理 4. X を $Cond\,A$ を満たす複素多様体とし、$\Omega \Subset X$ をその相対コンパクト正則領域とする。相対コンパクト部分集合 $K \Subset \Omega$ と正則関数 $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ が、

$$|f(a)| \leq \rho(a, \Omega), \quad \forall a \in K$$

を満たすならば、

$$|f(a)| \leq \rho(a, \Omega), \quad \forall a \in \hat{K}_\Omega$$

が成立する。特に、$\rho(K, \Omega)(:= \inf_{a \in K} \rho(a, \Omega)) = \rho(\hat{K}_\Omega, \Omega)$.

系 5. X は Cond A を満たすものとする。部分領域 $\Omega \Subset X$ が正則領域であることと正則凸領域であることは、同値である。

正則写像 $\pi : X \to \mathbf{C}^n$ のファイバー $\pi^{-1}\pi(x)$ が常に離散的であるとき、それをリーマン被覆領域と呼び、局所双正則ならば不分岐、そうでない時は分岐を付けて呼ぶ。

定義 6 (局所スタイン). リーマン被覆領域 $\pi : X \to \mathbf{C}^n$ が局所スタインであるとは次の条件が満たされることである。任意の点 $z \in \mathbf{C}^n$ に対しその近傍 V が存在して、$\pi^{-1}V$ はスタインである。

一般にレビ問題（ハルトークスの逆問題）とは、局所スタイン性から大域的スタイン性が従うかを問うものである。Elencwajg (1975) と Andreotti-Narasimhan (1964) の結果により、分岐リーマン領域の相対コンパクト部分領域に対してはレビ問題は肯定的である。従って問題は、$\pi : X \to \mathbf{C}^n$ の境界にあることになる。次の境界条件を考える。

条件 7 (Cond B). (i) $\lim_{a \to \partial X} \rho(a, X) = 0$; (ii) 任意の理想境界点 $b \in \partial X$ に対して $\pi(b) \in \mathbf{C}^n$ の近傍 $V \Subset W$ が存在して、$\pi^{-1}V$ の任意の連結成分 $\widetilde{V}$ と $\pi^{-1}W$ の連結成分 $\widetilde{W}$ ($\widetilde{V} \subset \widetilde{W}$) に対し次が成立する：$\rho(a, X) = \rho(a, \widetilde{W}), \quad \forall a \in \widetilde{V}$.

主定理 8. $\pi : X \to \mathbf{C}^n$ を有限葉分岐リーマン被覆領域とし、$Cond\,A$ 及び $Cond\,B$ を満たすものとする。このとき、$\pi : X \to \mathbf{C}^n$ が局所スタインならば、X はスタインである。

注 9. (i) Fornæss の反例は、Cond A を満たさないことが分かる。
(ii) Grauert の反例は、Cond A と Cond B を $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ 上で満たすので、上の定理は、Fujita・Takeuti の定理の様に $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ 上へは拡張できない。
(iii) 上の証明法を開リーマン面に適用するとスタイン性 (Behnke-Stein, 1949) の別証明が得られる。

参考文献

[1] 野口潤次郎, 多変数解析関数論, 朝倉書店, 東京, 2013.

[2] J. Noguchi, A scalar associated with the Inverse of some Abelian integrals and a ramified Riemann domain, Preprint UTMS 2015-5, arXiv:1502.01548, 2015.