日本数学会

2015年度年会

函数論分科会
講演アブストラクト

2015年3月

於　明治大学

函　数　論

3月23日(月)　　第VII会場

9:30〜11:45

				(分)	頁
1	齋藤三郎 黒田正和 道脇　裕 山根正巳	(群馬大⋆·再生核研)* (群馬大⋆) ((株)NejiLaw) (再生核研)	New meanings of the division by zero and interpretations on 100/0= 0 and on 0/0=0	(15)	1
2	齋藤三郎 道脇　裕 高木正子	(群馬大⋆·再生核研)* ((株)NejiLaw) (再生核研)	A new concept for the point at infinity and the division by zero z/0=0 (note)	(15)	3
3	米田力生	(小樽商大)*	フレドホルムテープリッツ作用素とベリジン変換	(10)	5
4	田中清喜 西尾昌治	(阪市大数学研) (阪市大理)	調和ベルグマン核の境界挙動	(15)	7
5	相川弘明	(北大理)	Construction of a domain which fails to satisfy the global boundary Harnack principle with the aid of the Helmholtz equation	(15)	9
6	戸田暢茂	(名工大⋆)*	On the defect relation for holomorphic curves	(15)	11
7	角　大輝	(阪大理)	ランダム複素多項式力学系におけるランダム性誘起現象とリアプノフ指数の負値性	(15)	13
8	諸澤俊介	(高知大理)	カントールの的型ジュリア集合を持つ有理半群の力学系について	(15)	15

14:15〜14:45

9	宮地秀樹	(阪大理)	Spirals and the asymptotic Teichmüller space	(15)	17
10	大竹博巳	(京都教育大)*	単位円板から Teichmüller 空間への等距離写像について	(15)	19

15:10〜16:10　特別講演

志賀啓成 (東工大理工)　Klein 群の変形空間について ······ 21

16:25〜17:25　2014年度(第13回)解析学賞受賞特別講演

濱田英隆 (九州産大工)　Approximation of holomorphic mappings on spirallike domains in $\mathbb{C}^n$ ······ 31

3月24日(火)　　第VII会場

9:30〜11:45

11	永野中行	(早大理工)	正二十面体不変式と志村曲線	(10)	41
12	永野中行	(早大理工)	正二十面体不変式と虚数乗法点	(10)	43
13	小池貴之	(東大数理)*	On the minimality of canonically attached singular Hermitian metrics on certain nef line bundles	(10)	45

NEW MEANINGS OF THE DIVISION BY ZERO AND INTERPRETATIONS ON $100/0 = 0$ AND ON $0/0 = 0$

Masao Kuroda[1], Hiroshi Michiwaki[2],
Saburou Saitoh[1,3] and Masami Yamane[3]
[1]Gunma University,
[2] NejiLaw Inc.,
[3]Institute of Reproducing Kernels, Kawauchi-cho, 5-1648-16,
Kiryu 376-0041, JAPAN
e-mail: saburou.saitoh@gmail.com

1 Introduction

In order to state the essential idea in elementary ways, we shall consider the numbers on the real numbers. Then, by a natural extension of the fraction

$$\frac{b}{a} \tag{1}$$

for any numbers a and b, we shall, in particular, show the surprising results

$$\frac{100}{0} = 0, \frac{0}{0} = 0. \tag{2}$$

However, in our recent paper [1] or the concept of the Moore-Penrose generalized inverse, the above results are clear - indeed, the results (2) themselves were found in a very general vector version in ([3]) - , however, many mathematicians do not admit the results. So, we would like to show the results in the elementary means and we shall give several interpretations of the results. Then, the results may be considered as very natural ones. Furthermore, the results will creat many problems in analysis and physics on the universe. The contents are as follows:

2 Definition of General Fractions

We shall introduce the division by zero by the three approaches;that is, from the general theory of the Tikhonov regularization containing the Moore-Penrose generalized inverses, Sin-EiTakahasi ([4] and [5]) established a simple and natural interpretation (2) by analyzing any extensions of fractions, and by showing the complete characterization for such property (2), and the intuitive meaning of the division by H. Michiwachi ([6]).

3. An Interpretation of $\frac{1}{0} = 0$
4. A Physical Interpretation of $\frac{0}{0} = 0$
5. By the Newton's Law
6. Analytic Function Theory, Singularity
7. An Interpretation of $0 \times 0 = 100$ **from** $100/0 = 0$
8. Capillary Pressure in a Narrow Capillary Tube

References

[1] L.P. Castro, S. Saitoh, *Fractional functions and their representations*, Complex Analysis and Operator Theory, **7**(2013), 1049-1063. DOI: 10.1007/s11785-011-0154-1.

[2] M. Kuroda, H. Michiwaki, S. Saitoh, and M. Yamane, *New meanings of the division by zero and interpretations on* $100/0 = 0$ *and on* $0/0 = 0$, Int. J. Appl. Math. Vol. 27, No 2 (2014), pp. 191-198, DOI: 10.12732/ijam.v27i2.9.

[3] S. Saitoh, *Generalized inversions of Hadamard and tensor products for matrices,* Advances in Linear Algebra & Matrix Theory. Vol.4 No.2 (2014), 87-95. http://www.scirp.org/journal/ALAMT/

[4] S.-E. Takahashi, *On the identities 100/0=0 and 0/0 =0.*(note)

[5] S.-E. Takahasi, M. Tsukada and Y. Kobayashi, *Classification of continuous fractional binary operations on the real and complex fields,* Tokyo Journal of Mathematics (in press).

[6] Announcement 179: *Division by zero is clear as z/0=0 and it is fundamental in mathematics,* Institute of Reproducing Kernels, 2014.8.22.

A new concept for the point at infinity and the division by zero z/0=0 (note)

Hiroshi Michiwaki (NejiLaw Inc.), Saburou Saitoh (Gunma Univ.) and Masako Takagi *Institute of Reproducing Kernels*
Kawauchi-cho, 5-1648-16, Kiryu 376-0041, Japan
E-mail: saburou.saitoh@gmail.com

By a natural extension of the fractions

$$\frac{b}{a} \tag{0.1}$$

for any complex numbers a and b, we, recently, found the surprising result, for any complex number b

$$\frac{b}{0} = 0, \tag{0.2}$$

incidentally in [3] by the Tikhonov regularization for the Hadamard product inversions for matrices and we discussed their properties and gave several physical interpretations on the general fractions in [2] for the case of real numbers. The result is a very special case for general fractional functions in [1].

The division by zero has a long and mysterious story over the world (see, for example, google site with the division by zero) with its physical viewpoints since the document of zero in India on AD 628, however, Sin-Ei Takahasi ([4]) established a simple and decisive interpretation (0.2) by analyzing some full extensions of fractions and by showing the complete characterization for such property (0.2). His result will show that our mathematics says that the result (0.2) should be accepted as a natural one.

We thus should consider, for any complex number b, as (0.2); that is, for the mapping

$$w = \frac{1}{z}, \tag{0.3}$$

the image of $z = 0$ is $w = 0$. This fact seems to be a curious one in connection with our well-established popular image for the point at infinity on the Riemann sphere.

However, we shall recall the elementary function

$$W(z) = \exp \frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots. \tag{0.4}$$

The function has an essential singularity around the origin. When we consider (0.2), meanwhile, surprisingly enough, we have:

$$W(0) = 1. \tag{0.5}$$

The point at infinity is not a number and so we will not be able to consider the function (0.4) at the zero point $z = 0$, meanwhile, we can consider the value 1 as in (0.5) at the zero point $z = 0$. How do we consider these situations?

As a typical result, we shall derive the surprising result: *At an isolated singular point of any analytic function, it takes a definite value* **with a natural meaning.** As the important applications of this result, the extension formula of functions with analytic parameters may be obtained and singular integrals may be interpretated with the division by zero, naturally.

References

[1] L. P. Castro and S.Saitoh, *Fractional functions and their representations,* Complex Anal. Oper. Theory **7** (2013), no. 4, 1049-1063.

[2] M. Kuroda, H. Michiwaki, S. Saitoh, and M. Yamane, *New meanings of the division by zero and interpretations on* $100/0 = 0$ *and on* $0/0 = 0$*,* Int. J. Appl. Math. Vol. 27, No 2 (2014), pp. 191-198, DOI: 10.12732/ijam.v27i2.9.

[3] S. Saitoh, *Generalized inversions of Hadamard and tensor products for matrices,* Advances in Linear Algebra & Matrix Theory. Vol.4 No.2 (2014), 87-95. http://www.scirp.org/journal/ALAMT/

[4] S.-E. Takahasi, M. Tsukada and Y. Kobayashi, *Classification of continuous fractional binary operations on the real and complex fields,* Tokyo Journal of Mathematics (in press).

The Fredholm Toeplitz operator and the Berezin transform

Rikio Yoneda

Otaru university of commerce

Let D be the open unit disk in complex plane C. For $z, w \in D$, $0 < r < 1$, let $\rho(z,w) = \left|\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\right|$ and $D(w,r) = \left\{z \in D, \rho(w,z) < r\right\}$.

For $\alpha > -1$, the space $L^2\left(dA(z)\right)$ is defined to be the space of Lebesgue measurable functions f on D such that

$$\| f \|_{L^2(dA(z))} = \left\{\int_D |f(z)|^2 dA(z)\right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty,$$

where $dA(z)$ denote the area measure on D. The weighted Bergman space is defined by $L_a^2\left(dA(z)\right) = H(D) \cap L^2\left(dA(z)\right)$.

Let X, Y be Banach spaces and let T be a linear operator from X into Y. Then T is called to be bounded below from X to Y if there exists a positive constant $C > 0$ such that $\| Tf \|_Y \geq C \| f \|_X$ for all $f \in X$, where $\| * \|_X$, $\| * \|_Y$ be the norm of X, Y, respectively. For $f \in L_a^2$,

$$Pf(z) = \int_D \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^2} dA(z)$$

And $g \in L^\infty(D)$, the Toeplitz operator is defined by

$$T_g f = P(gf)$$

where $f \in L_a^2$.

In this talk, we study the Fredholm Toeplitz operator.

Definition . $\tilde{T_g}(z) = < T_g k_z, k_z >$ $(z \in D)$ where k_z be normalized reproducing kernel.

Theorem 1. Let $g \in L^\infty(D)$ be radial. Then $T_g : L_a^2(D) \to L_a^2(D)$ is the Fredholm operator if and only if

$$\liminf_{n\to\infty} (n+1)\left|\int_0^1 g(r) r^{2n+1} dr\right| > 0.$$

Problem 2. *Let $g \in L^{\infty}(D)$ be radial, $g \in C(\overline{D})$.*
Then the following are equivalent:

(1) T_g *is Fredholm on* $L_a^2(D)$

(2) $\liminf_{x \to 1^-} \frac{1}{1-x} \left| \int_x^1 f(t)dt \right| > 0,$

(3) $\liminf_{|z| \to 1^-} \left| \tilde{T}_g(z) \right| > 0$

References

[1] H.Hedenmalm, B.Korenblum, K.Zhu, Theory of Bergman Spaces, in: Graduate Texts in Mathematics, vol. 199, Springer, New York, 2000.

[2] K.Zhu, Operator Theory in Function Spaces, Marcel Dekker, New York 1990.

調和ベルグマン核の境界挙動

西尾　昌治　(阪市大・理)[*1]
田中　清喜　(阪市大・数学研究所)[*2]

$\mathbb{B}$ を n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の単位球とし、Harm($\mathbb{B}$) で $\mathbb{B}$ 上の調和函数全体の成す空間を表す。Harm($\mathbb{B}$) の元でありかつ２乗可積分である関数全体の成す空間は調和ベルグマン空間と呼ばれる。特に $dV_\alpha(x) = (1-|x|^2)^\alpha dx$ $(\alpha > -1)$ に関する２乗可積分関数を考えた重み α 付き調和ベルグマン空間

$$b_\alpha^2(\mathbb{B}) := \mathrm{Harm}(\mathbb{B}) \cap L^2(\mathbb{B}, dV_\alpha),$$

は再生核ヒルベルト空間であり再生核の解析、調和ベルグマン空間上のテプリッツ作用素の特徴づけ等さまざまな研究が行われている (例えば [2], [5])。本講演では、回転対称な有限正測度 ν を重みとする調和ベルグマン空間

$$b_\nu^2 := \mathrm{Harm}(\mathbb{B}) \cap L^2(\mathbb{B}, d\nu)$$

を考える。

先行研究として、中路・山田 [3] は測度を重みとする正則ベルグマン空間が完備であるための必要十分条件を与えた。また中路・米田 [4] は回転対称な測度を重みとする正則ベルグマン空間を考え $\bar{\mathbb{B}}$ 上の連続関数を表象とするテプリッツ作用素のコンパクト性を特徴付けた。T. Le [1] は中路・米田の結果を調和ベルグマン空間において取り扱っている。

台がコンパクトでない $\mathbb{B}$ 上の回転対称有限正測度全体の成す空間を $\mathcal{M}_{rad}$ とする。以下、我々は $\nu \in \mathcal{M}_{rad}$ を重みとする調和ベルグマン空間 b_ν^2 を考える。このとき、b_ν^2 はヒルベルト空間であり、さらに

$$b_\nu^2 = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_m(\mathbb{B})$$

と直交分解されることに注意する。ここで $\mathcal{H}_m(\mathbb{B})$ は m 次同次調和多項式を $\mathbb{B}$ 上に制限したもの全体の成す空間とする。

直交射影 $Q_\nu : L^2(\mathbb{B}, d\nu) \to b_\nu^2$ は積分作用素

$$Q_\nu[f](x) = \int_{\mathbb{B}} R_\nu(x,y) f(y) d\nu(y)$$

によって表され、この積分核 R_ν を調和ベルグマン核と呼ぶ。

有限正測度 μ に対してテプリッツ作用素 $T_{\mu,\nu}$ を

$$\int_{\mathbb{B}} f(x) g(x) d\mu(x) = \langle T_{\mu,\nu} f, g \rangle_\nu$$

を満たす自己共役作用素として定義する。ここで $\langle f, g \rangle_\nu$ は b_ν^2 の内積を表す。

本講演では、回転対称な有限測度を表象とするテプリッツ作用素の表現およびノルム評価と調和ベルグマン核の境界挙動の比較について得られた結果の報告を行う。テプリッツ作用素お

本研究は科研費 (課題番号:23540220) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 31B05, 47B38
キーワード : harmonic Bergman space, harmonic Bergman kernel, Toeplitz operator
[*1] 〒 558-8585 大阪市住吉区杉本３丁目３番 138 号 大阪市立大学理学部数学教室
e-mail: nishio@sci.osaka-cu.ac.jp
[*2] 〒 558-8585 大阪市住吉区杉本３丁目３番 138 号 大阪市立大学数学研究所
e-mail: t.kiyoki@gmail.com

よびベルグマン核の比較に関係する関数として次を考える。

$$a_{\mu,\nu}(r) := \frac{\mu(\mathbb{B}\setminus\mathbb{B}_r)}{\nu(\mathbb{B}\setminus\mathbb{B}_r)}, \quad B_{\mu,\nu}(x) = \frac{\langle T_{\mu,\nu}R_\nu(x,\cdot), R_\nu(x,\cdot)\rangle_\nu}{R_\nu(x,x)}$$

次が本講演における主結果である。

定理 1. $\nu \in \mathcal{M}_{rad}$ とし μ を回転対称な有限測度とする。そのとき

$$T_{\mu,\nu} = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m Q_m^\nu$$

となる。ここで

$$\lambda_m = \lambda_m(T_{\mu,\nu}) = \frac{\int_{\mathbb{B}} |x|^{2m} d\mu(x)}{\int_{\mathbb{B}} |x|^{2m} d\nu(x)}$$

であり、Q_m^ν は b_ν^2 から $\mathcal{H}_m(\mathbb{B})$ への直交射影である。

定理 2. $\nu \in \mathcal{M}_{rad}$ とし μ を回転対称な有限測度とする。そのとき

$$\|T_{\mu,\nu}\| \le \sup_{0\le r<1} |a_{\mu,\nu}(r)|, \quad \|T_{\mu,\nu}\|_e \le \limsup_{r\to 1} |a_{\mu,\nu}(r)|$$

が成り立つ。ここで $\|T_{\mu,\nu}\|_e = \inf\{\|T_{\mu,\nu} - K\| : K$ コンパクト作用素 $\}$ とする。

定理 3. $\nu, \mu \in \mathcal{M}_{rad}$ とする。そのとき次が成り立つ。

$$\frac{R_\nu(x,x)}{R_\mu(x,x)} \le \sup_{0\le r<1} a_{\mu,\nu}(r), \quad \limsup_{|x|\to 1} \frac{R_\nu(x,x)}{R_\mu(x,x)} \le \limsup_{r\to 1} a_{\mu,\nu}(r)$$

系 1. $\nu, \mu \in \mathcal{M}_{rad}$ とする。極限 $\lim_{r\to 1} a_{\mu,\nu}(r)$ が存在するならば、

$$\|T_{\mu,\nu}\|_e = \lim_{|x|\to 1} B_{\mu,\nu}(x) = \lim_{|x|\to 1} \frac{R_\nu(x,x)}{R_\mu(x,x)} = \lim_{r\to 1} a_{\mu,\nu}(r)$$

となる。

参考文献

[1] T. Le, *Toeplitz operators on radially weighted harmonic Bergman spaces*, J. Math. Anal. Appl. **396** (2012), 164–172.

[2] J. Miao, *Toeplitz operators on harmonic Bergman spaces*, Integr. equ. oper. thoery **27** (1997), 426–438.

[3] T. Nakazi and M. Yamada, *Riesz's functions in weighted Hardy and Bergman spaces*, Can. J. Math., **48** (1996), 930–945.

[4] T. Nakazi and R. Yoneda, *Compact Toeplitz operators with continuous symbols on weighted Bergman spaces*, Glasgow Math. J., **42** (2000), 31–35.

[5] K. Stroethoff, *Compact Toeplitz operators on weighted harmonic Bergman spaces*, J. Austral. Math. Soc., **64** (1998), 136–148.

Construction of a domain which fails to satisfy the global boundary Harnack principle with the aid of the Helmholtz equation

Hiroaki Aikawa (Hokkaido University)*

Abstract

We study the Poisson representation for the Helmholtz equation in the half space and give a precise estimate of the Poisson integrals. This estimate is applied to show the sharpness of the modulus of continuity of a function f for which the domain above the graph of f satisfies the global boundary Harnack principle.

We study the validity of the global boundary Harnack principle on a domain whose boundary is locally given by the graph of a continuous function in $\mathbb{R}^{n-1}$ with modulus of continuity $\psi(t)$. Such a domain is referred to as a ψ-Hölder domain. A t^α-Hölder domain is simply called an α-Hölder domain. A 1-Hölder domain is a Lipschitz domain.

In case $n = 2$, conformal mappings are available, and hence the global boundary Harnack principle holds for every ψ-Hölder domain no matter how bad ψ is. So we let $n \geq 3$ from now on. Bass-Burdzy [BB91] proved probabilistically that every α-Hölder domain satisfies the global boundary Harnack principle if $1/2 < \alpha \leq 1$, and then Bañuelos-Bass-Burdzy [BBB91] extended the range of α to $0 < \alpha \leq 1$. More generally, we [Aik14] showed that

$$\int_0 \psi(t)\,\frac{dt}{t} < \infty \tag{*}$$

is a sufficient condition for a ψ-Hölder domain to satisfy the global boundary Harnack principle, under an additional technical condition. In particular, if ψ is the log-Hölder modulus continuity $\psi_\alpha(t) = (-\log t)^{-\alpha}$, then $\alpha > 1$ is a sufficient condition.

On the other hand, Bass-Burdzy [BB91] constructed a domain given by the graph of a continuous function f, for which the global boundary Harnack principle fails to hold. However, the modulus of continuity of f was not obtained. So far, no sharpness results on modulus of continuity has been known.

The main purpose of this talk is to show that $\alpha = 1$ is the critical exponent in the log-Hölder continuity. This shows the sharpness of (*).

Theorem 1. *If $0 < \alpha < 1$, then there exists a ψ_α-Hölder domain which fails to satisfy the global boundary Harnack principle.*

The construction of Bass-Burdzy [BB91] is based on hitting probabilities, or harmonic measures, in a thin rectangular cuboid. We follow basically the same approach

---

This work was supported in part by JSPS KAKENHI Grant Numbers 25287015, 25610017.
2010 Mathematics Subject Classification: 31B25, 35J05.
Keywords: Helmholtz equation, boundary Harnack principle, modulus of continuity.
* e-mail: aik@math.sci.hokudai.ac.jp
web: http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/˜aik/

but with very precise estimates of harmonic measures available by careful study of the Poisson representation for the Helmholtz equation.

Observe that there is a close relationship between harmonic functions in $\mathbb{R}^n$ and solutions to the Helmholtz equation in $\mathbb{R}^{n-1}$. More precisely, if $(-\Delta' + \lambda^2)u(x') = 0$ in $D' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ with Δ' being the Laplacian in $\mathbb{R}^{n-1}$, then $u(x')\cos(\lambda x_n)$ is a harmonic function in $D' \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ with $\varepsilon = \pi/(2\lambda)$. This hinges ordinary harmonic measure ω in $\mathbb{R}^n$ and harmonic measure ω_λ with respect to the the Helmholtz equation $(-\Delta' + \lambda^2)u = 0$ in $\mathbb{R}^{n-1}$. Observe that the smaller ε is, the larger λ is, and so, the faster ω_λ decays. With this observation, we construct a *deep ravine widening out swiftly*, i.e., the hitting probability of the side is much larger than the hitting probability of the top. We scale such ravines and attach them at the bottom of a cube to obtain a ψ_α-Hölder domain which fails to satisfy the global boundary Harnack principle, whenever $0 < \alpha < 1$.

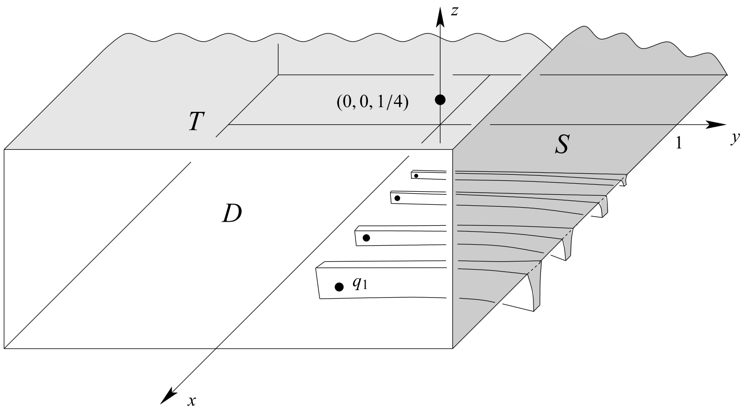

Figure 1: A cube attached deep ravines widening out swiftly.

References

[Aik14] H. Aikawa, *Extended Harnack inequalities with exceptional sets and a boundary Harnack principle*, J. Anal. Math. **124** (2014), no. 1, 83–116.

[BB91] R. F. Bass and K. Burdzy, *A boundary Harnack principle in twisted Hölder domains*, Ann. of Math. (2) **134** (1991), no. 2, 253–276.

[BBB91] R. Bañuelos, R. F. Bass, and K. Burdzy, *Hölder domains and the boundary Harnack principle*, Duke Math. J. **64** (1991), no. 1, 195–200.

On the defect relation for holomorphic curves

NOBUSHIGE TODA

1. Introduction Let $f = [f_1, \cdots, f_{n+1}]$ be a transcendental holomorphic curve from $\boldsymbol{C}$ into the n-dimensional complex projective space $P^n(\boldsymbol{C})$ with a reduced representation $(f_1, \cdots, f_{n+1}) : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$, where n is a positive integer. We suppose throughtout this talk that f is linearly non-degenerate over $\boldsymbol{C}$.

Let $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_{n+1})$ be any vector in $\boldsymbol{C}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$. We say that "$\boldsymbol{a}$ has multiplicity m for f if $(\boldsymbol{a}, f) = a_1 f_1 + \cdots + a_{n+1} f_{n+1}$ has at least one zero and the zeros of the function $(\boldsymbol{a}, f(z)) = a_1 f_1(z) + \cdots + a_{n+1} f_{n+1}(z)$ have multiplicity at least m, while at least one zero has multiplicity m. When $(\boldsymbol{a}, f)$ has no zero, we set $m = \infty$."

Definition A([4], see also [2]). For $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{C}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ with multiplicity m for f we put $\mu(\boldsymbol{a}, f) = (1 - n/m)^+ = 1 - n/\max(m, n)$, where $a^+ = \max(a, 0)$ for any real number a.

Let X be a subset of $\boldsymbol{C}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ in N-subgeneral position, where N is an integer satisfying $N \geq n$. We put $M^+ = \{\boldsymbol{a} \in X \mid \mu(\boldsymbol{a}, f) > 0\}$; $\Delta = \sum_{\boldsymbol{a} \in M^+} \mu(\boldsymbol{a}, f)$ and $M^1 = \{\boldsymbol{a} \in M^+ \mid \mu(\boldsymbol{a}, f) = 1\}$.

It is known that

(1.a)([5]). $\#M^+ + n\#M^1 \leq (n+1)(2N - n + 1)$.

(1.b)([4]). If there exist $n+1$ linearly independent vectors in M^1, then $M^+ = M^1$.

(1.c)([4]). $\#M^1 \leq N + N/n$.

The purpose of this talk is to estimate Δ when $\Delta > N + 1$ and $\#M^1 \leq N$.

2. Preliminaries For a non-empty finite subset S of X, we denote by $V(S)$ the vector space spanned by elements of S and by $d(S)$ the dimension of $V(S)$. We set $\mathcal{O} = \{S \subset X \mid 0 < \#S \leq N + 1\}$.

Definition 2.1([4]). (I) We put $\lambda = \min_{S \in \mathcal{O}} d(S)/\#S$.

(II) For $R \subsetneqq S$ $(R, S \in \mathcal{O})$, we put $\Lambda(R, S) = (d(S) - d(R))/(\#S - \#R)$.

Then, $0 \leq \Lambda(R, S) \leq 1$ ([1]).

Proposition 2.1. Suppose that $\lambda < (n+1)/(2N - n + 1)$.

(I)(see [7]). There exist an integer p $(1 \leq p < (n+1)/2)$ and a subfamily $\{T_i \mid 1 \leq i \leq p\}$ of $\mathcal{O}$ such that

(i) $\phi = T_0 \subsetneqq T_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq T_p$, $d(T_p) < (n+1)/2$;

(ii) $\Lambda(T_0, T_1) < \Lambda(T_1, T_2) < \cdots < \Lambda(T_{p-1}, T_p) < (n+1-d(T_p))/(2N-n+1-\#T_p)$.

(II)(see [7], [6]). We put

$$w(\boldsymbol{a}) = \begin{cases} \Lambda(T_{i-1}, T_i) & \text{if} \quad \boldsymbol{a} \in T_i \setminus T_{i-1} \ (i = 1, \cdots, p) \\ \dfrac{n + 1 - d(T_p)}{2N - n + 1 - \#T_p} & \text{if} \quad \boldsymbol{a} \in X \setminus T_p \end{cases}$$

and

$$h = (2N - n + 1 - \#T_p)/(n + 1 - d(T_p)),$$

where $T_0 = \phi$, T_i and $\Lambda(T_{i-1}; T_i)$ $(i = 1, \cdots, p)$ are those given in (I).

Then, the function w and the constant h have the following properties:

(a) For any $\boldsymbol{a} \in X$, $0 < hw(\boldsymbol{a}) \leq 1$ and $T_p = \{\boldsymbol{a} \in X \mid hw(\boldsymbol{a}) < 1\}$;
(b) For any $Q \subset X$ satisfying (i) $Q \supset T_p$ and (ii) $2N - n + 1 \leq \#Q < \infty$,

$$\#Q - (2N - n + 1) = h(\textstyle\sum_{\boldsymbol{a} \in Q} w(\boldsymbol{a}) - n - 1);$$

(c) $N/n \leq h \leq (2N - n + 1)/(n + 1)$;
(d) For any $S \in \mathcal{O}$, $\sum_{\boldsymbol{a} \in S} w(\boldsymbol{a}) \leq d(S)$.

(III)([7]). We put $\mathcal{O}_p = \{S \in \mathcal{O} \mid T_p \subsetneqq S,\ d(T_p) < d(S)\}$. Then, for any $S \in \mathcal{O}_p$, $h^{-1} \leq (d(S) - d(T_p))/(\#S - \#T_p)$.

Definition 2.2([7]). We say that
(I) X is of type I if for any $S \in \mathcal{O}_p$ $h^{-1} < \Lambda(T_p; S)$.
(II) X is of type II if for some $S \in \mathcal{O}_p$ $h^{-1} = \Lambda(T_p; S)$.

We know([1]) that for any $S \in \mathcal{O}$, $\#S \leq d(S) + N - n$.

Definition 2.3([7]). For $S \in \mathcal{O}$, we say that S is maximal when

$$\#S = d(S) + N - n.$$

Proposition 2.3([1]). Let $R, S \in \mathcal{O}$ such that $R \subsetneqq S$. If R is maximal, so is S.

Proposition 2.4([5] etc.). (I) $\sum_{\boldsymbol{a} \in M^+} w(\boldsymbol{a})\mu(\boldsymbol{a}, f) \leq n+1$. (II) $\Delta \leq 2N-n+1$.

Proposition 2.5([8]). Suppose that $N > n \geq 2$ and that $\Delta = 2N - n + 1$.
If $\lambda < (n + 1)/(2N - n + 1)$, then X is of type I, T_p is maximal and $M^1 = T_p$.

From now on we put $\#T_p = T$, $\#M^1 = M$ for simplicity.

3. Result We suppose throughout this section that (3-i) $N + 1 < \Delta$ and (3-ii) $M \leq N$.

Theorem. Suppose that $\lambda < (n+1)/(2N-n+1)$, X is of type I, T_p is maximal and that $T_p \subsetneqq M^1$. Under the conditions (3-i) and (3-ii) there are two positive constants α and β satisfying the inequality

$$N + 1 < 2N - n + 1 - \alpha(h - 1)(M - T) \leq \Delta \leq 2N - n + 1 - \beta(h - 1)(M - T)$$

for M such that $T + 1 \leq M \leq N$.

References

[1] H. Fujimoto: Aspects of Math. E21, Vieweg 1993.
[2] S. Kobayashi: Springer-Verlag, Berlin-Heiderberg-New York 1964.
[3] E. I. Nochka: Dokl. Acad. Nauk SSSR, 269-3(1983), 547-552.
[4] N. Toda: Proc. Japan Acad., Ser.A, 81-6 (2005), 99-104.
[5] N. Toda: Kodai Math. J., 30-1(2007), 111-130.
[6] N. Toda: Proc. Japan Acad., Ser.A, 83-9,10 (2007), 170-175.
[7] N. Toda: Kodai Math. J., 32-2(2009), 352-389.
[8] N. Toda: Kodai Math. J., 37-1(2014), 120-156.

ランダム複素多項式力学系におけるランダム性誘起現象とリアプノフ指数の負値性

角 大輝 (Sumi, Hiroki)
大阪大学大学院理学研究科数学専攻
E-mail: sumi@math.sci.osaka-u.ac.jp
http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~sumi/

$\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ をリーマン球面とする。次はよく知られている ([1]):

Fact. $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ が次数 2 以上の有理写像ならば $\dim_H(\{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|D(f^n)_z\| > 0\}) > 0$ となる。ただし $\dim_H$ は球面距離に関するハウスドルフ次元, f^n は f の n 回合成、$\|\cdot\|$ は球面計量に関する微分のノルムを表す。特に、集合 $\{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|D(f^n)_z\| > 0\}$ は**非可算**である。

しかし, ここでは次を示す。

定理 1 (主定理, 概要)**.**
$\hat{\mathbb{C}}$ 上の大概の *i.i.d.* ランダム複素多項式力学系（系の各写像は次数 2 以上とする）においては、系に依存したある定数 $C < 0$ が存在して、**高々可算個の点を除いたすべての** $z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、ほとんどすべての多項式列 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$ に対して（ここで例外的列の集合は z に依存する)、 次が成り立つ。

$$\chi(\gamma, z) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|D(\gamma_n \circ \cdots \circ \gamma_1)_z\| \text{ が存在して } \chi(\gamma, z) \le C < 0.$$

なお、上記の Fact から、Theorem 1 の主張は次数 2 以上の一つの有理写像の反復合成による通常の複素力学系では決して成り立たない。よって大概のランダム複素多項式力学系において、**カオス性は一つの 2 次以上の有理写像による通常の複素力学系より著しく少なくなり、秩序性が増す。**これはランダム性の効果によるものである。このような、一つの写像の反復合成による力学系には決して現れない、ランダム力学系特有の現象を “**ランダム性誘起現象**” という。以下で正確な記号と定義、結果を述べる。

定義 2. (1) $\hat{\mathbb{C}}$ ($:= \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{CP}^1 \cong S^2$) をリーマン球面とし d を $\hat{\mathbb{C}}$ 上の球面距離とする。

(2) $\mathcal{P} := \{h : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \mid h \text{ は多項式写像}, \deg(h) \ge 2\}$ とおき、そのうえの距離 η を $\eta(f, g) := \sup_{z\in\hat{\mathbb{C}}} d(f(z), g(z))$ で定義する。

(3) 距離空間 X に対し, $\mathfrak{M}_1(X)$ を X 上のボレル確率測度全体とする。

いまから、 $\tau \in \mathfrak{M}_1(\mathcal{P})$ を一つとり、毎回、τ に応じて $h \in \mathcal{P}$ を選択して h で $\hat{\mathbb{C}}$ 上の点を動かすような、$\hat{\mathbb{C}}$ 上のランダム力学系を考える。

定義 3. Y を $\mathcal{P}$ の閉集合とする。$\mathfrak{M}_{1,c}(Y) := \{\tau \in \mathfrak{M}_1(Y) \mid \operatorname{supp}\tau \text{ はコンパクト}\}$ とおく。$\mathfrak{M}_{1,c}(Y)$ 上の位相 $\mathcal{O}$ を、次が成り立つ位相とする：

「 $(\mathfrak{M}_{1,c}(Y), \mathcal{O})$ 上で $\tau_n \to \tau$ $(n \to \infty)$ となることは、次の 2 条件がいずれも成り立つことと同値。

(1) 任意の有界連続関数 $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ に対し、$\int \varphi\, d\tau_n \to \int \varphi\, d\tau$ $(n \to \infty)$ となる。

(2) Y の空でないコンパクト集合全体のなす空間において、ハウスドルフ距離に関して $\operatorname{supp}\tau_n \to \operatorname{supp}\tau$ $(n \to \infty)$ となる。」

定義 4. Y を $\mathcal{P}$ の連結複素部分多様体とし、$\sharp Y > 1$ とする。

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $S_n(Y) := \{z \in \mathbb{C} \mid (f_1, \ldots, f_n) \in Y^n \mapsto f_n \circ \cdots \circ f_1(z) \in \mathbb{C} \text{ は定数写像}\}$

とおく。(注意： 各 $S_n(Y)$ は有限集合である。)

(2) Y が **nice** であるとは、以下が成り立つときをいう。

「任意の $z \in \cap_{n=1}^{\infty} S_n(Y)$ に対し、 次の (a)(b) のどちらかが成り立つ。

(a) $f \mapsto f'(z)$ は Y 上非定数。(b) 任意の $f \in Y$ に対して $f'(z) = 0$。」

定義 5. Y を $\mathcal{P}$ の連結複素部分多様体とし、$\sharp Y > 1$ とする。Y が**例外的**とは、以下が成り立つときをいう。

$\cap_{n=1}^{\infty} S_n(Y)$ のある空でない部分集合 L が存在して、任意の $\tau \in \mathfrak{M}_{1,c}(Y)$ と任意の $h \in \operatorname{supp} \tau$ に対し、

- $h(L) \subset L$, かつ
- 任意の $z \in L$ に対し、 $(\otimes_{n=1}^{\infty} \tau)$-a.e. $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots) \in \mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ に対し, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|D(\gamma_n \circ \cdots \circ \gamma_1)_z\| = 0$. (注意： $\sharp \cap_{n=1}^{\infty} S_n(Y) < \infty$ なので、 $\sharp L < \infty$ である。)

定理 6 (主定理, 正確な主張)**.** Y を $\mathcal{P}$ の連結複素部分多様体とし、$\sharp Y > 1$ とする。Y は *nice* でかつ例外的でないとする。このとき、$(\mathfrak{M}_{1,c}(Y), \mathcal{O})$ のある**稠密かつ開部分集合**である A が存在して、次を満たす。

- 任意の $\tau \in A$ に対し、 ある定数 $C_\tau < 0$ と、$\hat{\mathbb{C}}$ のある部分集合 B_τ で $\sharp(\hat{\mathbb{C}} \setminus B_\tau) \le \aleph_0$ なるものが存在して、任意の $z \in B_\tau$ に対し、$(\otimes_{n=1}^{\infty} \tau)$-*a.e.* $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots) \in \mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ に対し（ここで例外的な γ の集合は z に依存する）,

$$\chi(\gamma, z) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|D(\gamma_n \circ \cdots \circ \gamma_1)_z\| \text{ が存在して } \chi(\gamma, z) \le C_\tau < 0 \text{ となる。}$$

また、$\cap_{n=1}^{\infty} S_n(Y) = \emptyset$ のときには、任意の $\tau \in A$ に対し、上の B_τ を $\hat{\mathbb{C}}$ で取れる。

よって大概のランダム複素多項式力学系において、**カオス性は一つの 2 次以上の有理写像の反復合成による通常の複素力学系より著しく少なくなり、秩序性が増す。**

例 7. nice でかつ例外的でない Y（それらに定理 6 を適用できる）の例をあげる。

(1) $Y = \mathcal{P}$. (注意：$\mathcal{P}$ は連結でないが定理 6 の主張が成り立つ。) この場合は $\cap_{n=1}^{\infty} S_n(Y) = \emptyset$ であり、**定理 6 の B_τ を $\hat{\mathbb{C}}$ で取れる。**

(2) $Y = \{z^2 + c \in \mathcal{P} \mid c \in \mathbb{C}\}$. この場合、$\cap_{n=1}^{\infty} S_n(Y) = \emptyset$ で**定理 6 の B_τ を $\hat{\mathbb{C}}$ で取れる。**

(3) $Y = \{\lambda z(1-z) \in \mathcal{P} \mid \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$. この場合、$\cap_{n=1}^{\infty} S_n(Y) = \{0, 1\}$.
(注意：$\cap_{n=1}^{\infty} S_n(Y)$ が空でない場合は、空である場合より証明中の議論がかなり複雑になる。)

(4) $f \in \mathcal{P}$ を、「$z_0 \in \mathbb{C}, f(z_0) = 0$ ならば $f'(z_0) \neq 0$」が成り立つ元とする。
$Y := \{z + \lambda f(z) \in \mathcal{P} \mid \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$ とおく。この場合、$\cap_{n=1}^{\infty} S_n(Y) = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 0\}$.

参考文献:

[1] R. Mañé, *The Hausdorff dimension of invariant probabilities of rational maps*, Dynamical Systems (Valparaiso, 1986) (Lecture Notes in Math. 1331) (Berlin: Springer) 86-117, 1988.

[2] H. Sumi, *Random complex dynamics and semigroups of holomorphic maps*, Proc. London Math. Soc. (2011) 102(1), pp 50–112.

[3] H. Sumi, *Cooperation principle, stability and bifurcation in random complex dynamics*, Adv. Math., 245 (2013) pp 137–181.

カントールの的型ジュリア集合を持つ
有理半群の力学系について

諸澤　俊介　(高知大学)*

1. 導入

有理関数の集合上に二項演算を関数の合成で定義する。この演算を用いて非定数有理関数の族 $\{f_1, f_2, \ldots\}$ で生成された半群を有理半群と呼ぶ。この半群を G とすると

$$G =< f_1, f_2, \cdots >$$

と表記する。すべての f_i が一次分数変換であるときは、その逆元も考慮すれば群として扱える。この離散部分群を研究対象とするのがクライン群論である。また、ただ一つの有理関数から生成される半群、すなわち反復合成を研究するのが、いわゆる複素力学系である。さらに複素力学系の場合には有理関数の次数は２以上とすることが一般的である。また、半群の場合にも少なくとも一つの有理関数の次数は２以上とする。G は $\widehat{\mathbb{C}}$ に作用している。G が正規族となる $\widehat{\mathbb{C}}$ の最大の開集合を G のファトウ集合と呼び、$F(G)$ で表す。その補集合 $\widehat{\mathbb{C}} \setminus F(G)$ を G のジュリア集合と呼び、$J(G)$ で表す。G がただ一つの有理関数 f から生成される場合、すなわち複素力学系の場合には、それぞれを $F(f)$、$J(f)$ で表す。複素力学系と半群の力学系ではいくつかの大きな違いがある。複素力学系ではファトウ集合、ジュリア集合は完全不変である。有理半群の力学系ではファトウ集合は前方不変であり、ジュリア集合は後方不変である。複素力学系ではジュリア集合が内点を持てば、$\widehat{\mathbb{C}}$ と一致する。有理半群の力学系ではジュリア集合が $\widehat{\mathbb{C}}$ と一致しないが、内点を持つものが存在する。

2. 結果

本講演では $\mathbb{R}$ の部分集合がカントール集合であるとは、それが開区間を含まない完全集合である時をいう。$\mathbb{C}$ の部分集合がカントールの的であるとは、$\mathbb{R}^+$ に含まれるカントール集合 C が存在して $\{z \mid |z| = r,\ r \in C\}$ と表せるときをいう。

定理 1 n と m は自然数で $\min(m, n) \geq 2$ と $\max(m, n) \geq 3$ を満たすとし、a と b は 0 でない複素数で $|a|^{m-1} \neq |b|^{n-1}$ を満たすとする。$f(z) = az^n$、$g(z) = bz^m$ とする。このとき $G =< f, g >$ のジュリア集合はカントールの的となる。

ファトウ集合の成分の境界にないジュリア集合の点を埋蔵点という。定理 1 で定義された半群の力学系について次のことが言える。

定理 2 f と g は定理 1 で定義したものとし、$G =< f, g >$ とする。このとき、次のことが成立する。

(1) $J(G)$ と $F(G)$ はともに完全不変である。

本研究は科研費 (課題番号:23540213) の助成を受けたものである。
* 〒 780-8520 高知県高知市曙町　高知大学教育研究部自然科学系理学部門
e-mail: morosawa@kochi-u.ac.jp
web: http://www.math.kochi-u.ac.jp/morosawa/index.html

(2) $F(G)$ は遊走領域を持たない。

(3) 極限関数は 0 または ∞ である。

(4) $h \in G \setminus \{f, g\}$ とすると、$J(h)$ は埋蔵円である。

有理半群については次のことが言える。

定理 3 n は 3 以上の自然数とし、a と b は複素数で $|a|^{1-n} \neq |b|^2$ を満たすとする。$f(z) = az^{-1}$、$g(z) = bz^n$ とする。このとき $G =< f, g >$ のジュリア集合はカントールの的となる。

カントールの的型ジュリア集合を持つ半群を考えることで次のことが示せる。

定理 4 有理半群でそのジュリア集合が内点を持たないが、ジュリア集合のハウスドルフ次元がいくらでも 2 に近いものが構成できる。

Spirals and the asymptotic Teichmüller space

宮地　秀樹　(大阪大学)*

1. 準備

1.1. 漸近的タイヒミュラー空間

単位円板 $\mathbb{D}$ 上の $1, 0, -1$ を固定するように正規化された擬等角写像全体を $\mathcal{QC}_0$ と書く．単位円板の外部 $\Delta = \{|z| > 1\} \cup \{\infty\}$ 上の正則関数 φ に対して

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{|z|<1} (|z|^2 - 1)^2 |\varphi(z)|$$

と定義して，このノルムが有限であるような Δ 上の正則関数全体のなす複素バナッハ空間を $\mathcal{B}$ と書く．正則関数 $\varphi \in \mathcal{B}$ は,

$$\lim_{r\to 1} \sup_{r<|z|<\infty} (|z|^2 - 1)^2 |\varphi(z)| = 0$$

を満たすとき**無限遠で零**となるといわれる．無限遠で零となる正則関数のなす $\mathcal{B}$ の閉部分空間を $\mathcal{B}_0$ と書く．商空間 $\mathcal{B}/\mathcal{B}_0$ を $\hat{\mathcal{B}}$ と記し，射影 $\mathcal{B} \to \hat{\mathcal{B}}$ を pr と書く．そして $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{B}$ について $\mathrm{pr}(\varphi_1) = \mathrm{pr}(\varphi_2)$ のとき，φ_1 と φ_2 は**漸近的に同値**であるという．

擬等角写像 $f \in \mathcal{QC}_0$ に対して，$\mathbb{D}$ 上 f と一致してかつ Δ 上で等角写像となるような $\hat{\mathbb{C}}$ 上の擬等角写像を W_f と書く．このときシュワルツ微分を対応させる写像

$$\mathcal{QC}_0 \ni f \mapsto \mathcal{S}(W_f\mid_\Delta) \in \mathcal{B}$$

の像を $\mathcal{T}$ と記し，**普遍タイヒミュラー空間**（の Bers 埋め込みの像）と呼ぶ．そして射影の像 $\mathcal{AT} = \mathrm{pr}(\mathcal{T}) \subset \hat{\mathcal{B}}$ を**漸近的タイヒミュラー空間**（の漸近的 Bers 写像による像）と呼ぶ（cf. [4]. [2] も参照せよ）．

1.2. Bers の稠密性問題

Bers の稠密性問題は「単葉関数のシュワルツ微分の全体は普遍タイヒミュラー空間の閉包と一致するか」である（cf. [1]）．Bers の稠密性問題は Gehring [5] によって否定的に解決された．実際，Gehring は図 1 のような Gehring-スパイラル領域を構成し，この領域のリーマン写像のシュワルツ微分は普遍タイヒミュラー空間の境界に含まれないことを示した (ただし $0 < a < 1/(8\pi)$ のとき)．また Flinn[3] は，そのシュワルツ微分が普遍タイヒミュラー空間の閉包に含まれないようなジョルダン領域を構成した．

2. 主定理

Bers の稠密性定理を漸近的タイヒミュラー空間に対して考える．

定理 1 ([6], [7])．次が成立する．

2010 Mathematics Subject Classification: 30F60, 32G15, 37F30
キーワード：Quasiconformal mapping, Universal Teichmüller space, Asymptotic Teichmüller space
* 〒560-0043 豊中市待兼山町 1-1 大阪大学大学院理学研究科
e-mail: miyachi@math.sci.osaka-u.ac.jp
web: http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~miyachi/index.html

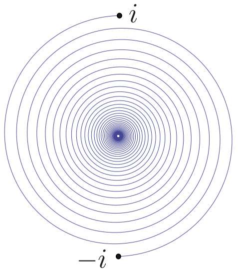

図 1: Gehringのスパイラル領域：$\{\pm ie^{(-a+i)t} \mid t \geq 0\} \cup \{0\}$ の補集合.

(1) *Gehring*のスパイラル領域のリーマン写像のシュワルツ微分は，普遍タイヒミュラー空間の閉包に含まれるような，ジョルダン領域のリーマン写像のシュワルツ微分と漸近的同値である．特に，*Gehring*のスパイラル領域のシュワルツ微分の漸近類は漸近的タイヒミュラー空間の閉包に含まれる（実は境界に含まれる）.

(2) *Flinn*のジョルダン領域のリーマン写像のシュワルツ微分の漸近類は，漸近的タイヒミュラー空間の閉包に含まれない.

3. 問題

筆者（講演者）の知る限り，次のような基本的な問題はまだ未解決である.

1. 単葉関数のシュワルツ微分の漸近類の集合は$\hat{\mathcal{B}}$内で閉集合であるか？
2. $\overline{\mathcal{AT}} = \mathrm{pr}(\overline{\mathcal{T}})$ であるか？ ($\overline{\mathcal{AT}} \supset \mathrm{pr}(\overline{\mathcal{T}})$ は自明)

主定理の (1) は問題2が肯定的であるとして考えてもよいことの（残念ながら非常に弱い）状況証拠を与えている.

参考文献

[1] L. Bers, Quasiconformal mappings, with applications to differential equations, function theory and topology, Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977), 1083–1100

[2] C. J. Earle, V. Markovic and D. Saric, Barycentric extension and the Bers embedding for asymptotic Teichmüller space, Contemp. Math., **311** (2002), 87–105.

[3] B. Flinn, Jordan domains and the universal Teichmüller space, Trans. Amer. Math. Soc. **282** (1984), 603–610.

[4] F. Gardiner and D. Sullivan, Symmetric structures on a closed curve, Amer. Jour. of Math. **114** (1992), 683–736.

[5] F. W. Gehring, Spirals and the universal Teichmüller space, Acta Math. **141** (1978), 99–113.

[6] H. Miyachi, Image of asymptotic Bers map, J. Math. Soc. Japan **60** (2008), 1255–1276.

[7] H. Miyachi, Spirals and the asymptotic Teichmüller space, Computational Methods and Function Theory **14** (Special Issue in Memory of Frederick W. Gehring) (2014), 609–622.

単位円板からTeichmüller空間への等距離写像について

大竹　博巳　(京都教育大学)*

1. 単位円板から多重単位円板への等距離写像

$\mathbb{D}$ を双曲距離を入れた単位円板, $\mathbb{D}^N$ を $\mathbb{D}$ の N 個 $(2 \le N \le \infty)$ の直積で, 距離を各成分における距離の上限で定めたものとする. このとき, 次の主張が成立する.

定理 1. 二つの写像 $h_1, h_2 : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ から作った $h : \mathbb{D} \ni z \mapsto (h_1(z), h_2(z)) \in \mathbb{D}^2$ が等距離写像であれば, h_1 か h_2 のどちらかが等距離写像である.

注 1. h が等距離写像であれば, h_1 と h_2 はともに距離非増加写像である. 逆に, h_1 と h_2 がともに距離非増加写像であり, どちらかが等距離写像であれば, h が等距離写像となることは明らかなので, 定理1の逆も成立する.

注 2. 定理1が成立するためには, h が $\mathbb{D}^2$ への写像であることが必要である. h が $\mathbb{D}^N$ $(N \ge 3)$ への写像である場合には対応する主張が成り立たない例が存在する.

定理1は次の補題を用いて示すことができる.

補題 1. $d(\cdot,\cdot)$ を $\mathbb{D}$ における双曲距離, $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ を距離非増加写像とし, $0 < r < 1$ とする.

$$E := \{z \in \mathbb{D} : |z| = r,\ d(g(z), g(-z)) = d(z, -z)\},$$
$$F := \{z \in \mathbb{D} : |z| = r,\ d(g(z), g(0)) = d(z, 0)\}$$

としたとき, E が 4点以上を含めば, F の閉凸包において g は等距離写像である.

注 3. 補題1において, E が4点以上を含むことは必要な条件である. 例えば, $0 < r < 1$ とし, $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ を, $\Im z \ge 0$ のとき $g(z) := z$, $\Im z < 0$ のとき $g(z) := \overline{z}$ で定めると, $E = \{\pm r\}$ となる. $F = \{|z| = r\}$ であるが, g は F の閉凸包 $\{|z| \le r\}$ の等距離写像ではない.

* 〒612-8522 京都市伏見区深草藤森町1
e-mail: ohtake@kyokyo-u.ac.jp

2. Teichmüller空間への応用

$T(R)$ を Riemann 面 R の Teichmüller 空間 (R 上の Beltrami 係数 μ の同値類 $[\mu]$ の集合) とする. 商空間である $T(R)$ には, Beltrami 係数のノルムから自然に距離が定まる. この距離を Teichmüller 距離という.

有限種数の Riemann 面から有限個の点を除いて得られる Riemann 面は解析的有限型であるという. R を解析的有限型ではない Riemann 面とする. このとき, $T(R)$ は無限次元であり, 台が共通部分をもたない R 上の極値的 Beltrami 微分 μ_j $(2 \leq j \leq N)$, $\|\mu_j\|_\infty = 1$, の列が存在する. このような列 (μ_j) を用いて, $\mathbb{D}^N \ni (z_j) \mapsto [\sum_{j=1}^N z_j \mu_j] \in T(R)$ を作ると, 等距離写像になることが知られている (Earle, Li [1]).

よって, 先の定理の系として, 次の定理が成立する.

定理 2. 解析的有限型ではない Riemann 面 R 上の極値的 Beltrami 微分 μ_1, μ_2, $\|\mu_1\|_\infty = \|\mu_2\|_\infty = 1$, と二つの写像 $h_1, h_2 : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ から作った写像

$$h : \mathbb{D} \ni z \mapsto [h_1(z)\mu_1 + h_2(z)\mu_2] \in T(R)$$

が等距離写像であれば, h_1 か h_2 のどちらかが等距離写像である.

参考文献

[1] C.J.Earle, Z.Li. Isometrically embedded polydisks in infinite dimensional Teichmüller spaces, J.Geom.Anal., **9**, No.1, 51–71, (1999).

特別講演

Klein群の変形空間について

志賀　啓成　(東京工業大学大学院理工学研究科)*

1. Introduction

$PSL(2,\mathbb{C})$の離散部分群をKlein群と呼ぶ．Klein群Gは3次元上半空間$\mathbb{H}^3 = \{(x,y,t) \mid x,y \in \mathbb{R}, t > 0\}$の双曲計量に関して等長かつ真性不連続に作用する．したがって，$\mathbb{H}^3$の点pのG-orbit，Gpは$\partial\mathbb{H}^3 = \hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$に集積する．この集積点全体をKlein群$G$の極限集合と呼び，$\Lambda(G)$と書く（極限集合は$p \in \mathbb{H}^3$の取り方には依らない）．極限集合は空集合または有限集合となることもあるが，そのような場合Klein群の構造などはよくわかっているので，研究の対象とはしない．よって本講演では極限集合は常に無限集合であると仮定する．また特に断らない限りKlein群は有限生成と仮定する．

Klein群Gの極限集合$\Lambda(G)$の$\hat{\mathbb{C}}$における補集合を$\Omega(G)$とあらわし，Gの不連続領域と呼ぶ．定義より$\Omega(G)$は$\hat{\mathbb{C}}$内の開集合であるが，さらにGの作用が真性不連続になる$\hat{\mathbb{C}}$の最大の開集合として特徴付けられている（この場合のGの$\hat{\mathbb{C}}$への作用とは，もちろん一次分数変換の群としての作用である）．一方，$\Lambda(G)$はG-不変な空でない最小の閉集合として特徴付けられており，したがってGの位数無限大の元の固定点全体の閉包と一致している．

一般に$\Omega(G)$は空集合となることもあるが，不連続領域が空集合となるKlein群は，この講演において考察する変形空間がつまらないものになるので，不連続領域は空集合でないと仮定する．

Klein群Gの不連続領域は一般に無限個の連結成分を持つ．Ahlforsの有限性定理は$\Omega(G)$の連結成分のGの作用による同値類は有限個であり，さらにそれが有限型Riemann面を生成するということを主張する．すなわち，$\Omega(G)$の連結成分$\Delta_1,\ldots,\Delta_n$が存在して，$\Omega(G) = \sum_{j=1}^{n} G\Delta_j$であり，商空間$\Delta_j/G_j$ $(j=1,\ldots,n)$が有限型Riemann面になる．ここでG_jはΔ_jを固定するGの部分群を指す．

講演タイトルにある"Klein群の変形空間"にこの定理を敷衍すると，Riemann面の変形，もしくはTeichmüller空間という視点が現れる．本講演ではこの視点に立って主にKlein群の変形空間を観察し，特にその複素解析的構造を考察する．

2. Preliminaries

2.1. Klein群の変形空間

$\|\mu\|_\infty < 1$なる$L^\infty(\mathbb{C})$の関数に対して，Beltrami方程式

$$f_{\bar{z}} = \mu f_z \tag{1}$$

を満たす$\hat{\mathbb{C}}$からそれ自身への擬等角写像fが存在し，それは$PSL(2,\mathbb{C})$の左からの合成を除き一意的である．よって，与えられたμに対して(1)を満たし，$0,1,\infty$を固定するfはただ一つ決まる．これをw^μと書き，Beltrami係数μによって定まる**正規化された擬等角写像** *(normalized quasiconformal map)* という．

本研究は科研費(課題番号:2234008)の助成を受けたものである。

*e-mail: `shiga@math.titech.ac.jp`

このようなμがKlein群Gの任意の元gに対して

$$(\mu \circ g) \cdot \overline{g'} g'^{-1} = \mu \tag{2}$$

を満たしているならば，このμより得られた擬等角写像fによるGの共役fGf^{-1}も$PSL(2, \mathbb{C})$の部分群になり，したがってKlein群であることがわかる．逆に，fGf^{-1}が再びKlein群となるような擬等角写像fのBeltrami係数$\mu_f := f_{\bar{z}}/f_z$は(2)を満たしている．

一般にG-不変な$\hat{\mathbb{C}}$の開集合Ωに台を持つL^∞関数μで，$\|\mu\|_\infty < 1$かつ(2)を満たすもの全体を$M(G; \Omega)$と書く．上に述べた事柄は擬等角写像$f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$が共役

$$G \ni g \mapsto fgf^{-1}$$

によってGから$PSL(2, \mathbb{C})$への同型を導くための必要十分条件が，$\mu_f \in M(G; \hat{\mathbb{C}})$であることを意味している．

最初に述べたことから，$\mu \in M(G; \hat{\mathbb{C}})$から$w^\mu$が一意的に決まり，したがって，$w^\mu$より$\mathrm{Hom}(G, PSL(2, \mathbb{C}))$の元$\rho_\mu$が定まる．ただし$\mathrm{Hom}(G, PSL(2, \mathbb{C}))$は$G$から$PSL(2, \mathbb{C})$への準同型全体のなす空間である．Klein群$G$は有限生成であるから，$\mathrm{Hom}(G, PSL(2, \mathbb{C}))$には自然に（＝代数的に）位相が定まる．

開集合$\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$が$G$-不変ならば，$M(G; \Omega) \subset M(G; \hat{\mathbb{C}})$であるから，Beltami係数$\mu \in M(G; \Omega)$も$\mathrm{Hom}(G, PSL(2, \mathbb{C}))$の元$\rho_\mu$を定める．二つの元$\mu, \nu \in M(G; \Omega)$に対して$\rho_\mu = \rho_\nu$によって同値関係を定義し，この同値関係を$\sim_G$，$\mu$の属する同値類を$[\mu]_G$とおく．$M(G; \Omega)$の定める同値類全体を$D(G; \Omega)$と書き，Klein群$G$の$\Omega$に関する**変形空間** *(deformation space)* とよぶ．$\Omega = \hat{\mathbb{C}}$の場合は，$D(G)$とおいて，単に$G$のdeformation spaceとよぶ．$D(G; \Omega)$には$\mathrm{Hom}(G; PSL(2, \mathbb{C}))$の部分集合として自然に複素構造が定まる．

例 1 Klein群Γが$PSL(2, \mathbb{R})$の部分群であるとき**フックス群** *(Fuchsian group)* と呼ばれる．フックス群Γは上半平面$\mathbb{H}$に作用するが，その商空間$X := \mathbb{H}/\Gamma$が有限型Riemann面であるとき，$D(\Gamma; \mathbb{H})$はXのTeichmüller空間$T(X)$とみなすことができる．また，$D(\Gamma)$は（Γの）Quasi-Fuchsian space—これを$\mathcal{QF}_\Gamma$とおく—として知られる空間であり，Γが定めるRiemann面のTeichmüller空間の直積になる．

§1で述べたように，$\Lambda(G)$で無限位数の元の固定点はdenseであったから，二つの元$\mu, \nu \in M(G; \hat{\mathbb{C}})$が$\mu \sim_G \nu$であるための必要十分条件は

$$w^\mu|_{\Lambda(G)} = w^\nu|_{\Lambda(G)}$$

であることがわかる．したがって，Gのdeformation space $D(G)$は$\{w^\mu|_{\Lambda(G)} \mid \mu \in M(G; \hat{\mathbb{C}})\}$とみなすこともできる． このことは換言すれば，$M_0(G; \hat{\mathbb{C}})$を$w^\mu|_{\Lambda(G)}$が恒等写像になる$\mu \in M(G; \hat{\mathbb{C}})$全体としたとき，$[\mu]_G = [\nu]_G$であるということが$(w^\mu)^{-1} \circ w^\nu$のBeltrami係数が$M_0(G; \mathbb{C})$の元であることと同値であることを意味する．よって，$D(G)$は$M(G; \hat{\mathbb{C}})$の$M_0(G; \Omega)$による商空間$M(G; \hat{\mathbb{C}})/M_0(G; \Omega)$と同一視することができ，そのとき自然な射影

$$\pi : M(G; \hat{\mathbb{C}})(\subset L^\infty(\mathbb{C})) \to M(G; \hat{\mathbb{C}})/M_0(G; \Omega) \simeq D(G)$$

は正則になる．

2.2. 正則凸性と invariant distances

$\mathbb{C}$ 内の領域 D では，その境界 ∂D が D 上のある正則関数の ”自然境界 ” になっている．すなわち，D 上の正則関数 f で f はちょうど D で正則で，∂D のいかなる点にも解析接続されないものが存在する．一方，$n > 1$ の場合，$\mathbb{C}^n$ の領域においては事情は全く異なり，その上の任意の正則関数が，さらに広い領域まで自動的に解析接続されるような領域が存在する．一次元の場合のように，領域の境界がその上の正則関数の自然境界になっているとき，その領域は domain of holomorphy であるという．例えば，$\mathbb{C}^n$ の単位球は domain of holomorphy である．多変数複素関数論において，domain of holomorphy という概念は基本的かつ重要なものであるが，これは次に述べる正則凸性と深く関わっている．

M を（連結な）複素多様体とし，M 上定義された正則関数全体を $\mathcal{O}(M)$ とおく．$\mathcal{O}(M)$ の部分集合 $\mathcal{O}$ に対して，M が $\mathcal{O}$-convex であるとは，M 内の任意のコンパクト集合 K の $\mathcal{O}$-hull $\hat{K}_{\mathcal{O}}$ が再びコンパクト集合になる時をいう．ここで $\hat{K}_{\mathcal{O}}$ は

$$\hat{K}_{\mathcal{O}} := \bigcap_{f\in\mathcal{O}} \{p \in M \mid |f(p)| \leq \|f\|_K\}$$

で定義されるものである．ただし $\|f\|_K = \max_{p\in K} |f(p)|$.

$\mathcal{O} = \mathcal{O}(M)$ に対して M が $\mathcal{O}$-convex であるとき，M は**正則凸** *(holomorphically convex)* であるという．また，$\mathcal{O}$ が M 内の有界正則関数全体であるとき，M は H^∞-convex であるといい，M が $\mathbb{C}^n$ の領域で，$\mathcal{O}$ が多項式全体であるとき，多項式凸であるという．$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ のとき，$\mathcal{O}_1$-convex $\Rightarrow$ $\mathcal{O}_2$-convex であるから，$\mathbb{C}^n$ の領域に対しては，多項式凸 $\Rightarrow H^\infty$-convex $\Rightarrow$ 正則凸，となる．しかし，逆向きの implication は成立しない．正則凸性の重要性は次の定理から見て取れる．

定理 1 $\mathbb{C}^n$ 内の領域が正則凸であることと，それが domain of holomorphy であることとは同値である．

複素多様体 M の 2 点 p, q に対して

$$c_M(p, q) = \sup\{d_{\mathbb{D}}(f(p), f(q)) \mid f \in \mathcal{O}(M), \|f\|_\infty \leq 1\}$$

とおく．$c_M : M \times M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ は擬距離になる．これを M の *Carathéodory* **擬距離**という．この定義より次の**短縮原理**が直ちに従う．

命題 2 正則写像 $F : M \to N$ に対して

$$c_N(F(p), F(q)) \leq c_M(p, q)$$

が成り立つ．

これを二つの複素多様体 M, N とその直積 $M \times N$ および自然な射影 $\pi_M : M \times M \to N$, $\pi_N : M \times N \to N$ に適用して；

系 3

$$c_{M\times N}((p, q), (p', q')) \geq \max\{c_M(p, p'), c_N(q, q')\}.$$

特に，c_M, c_N が完備な距離ならば，$C_{M\times N}$ も $M \times N$ の完備な距離である．

c_M の完備性は上に述べた正則凸性とも関連している．

定理 4 複素多様体 M において，c_M が完備な距離ならば M は H^∞-convex である．

2.3. Holomorphic motion

Eを3点以上含む$\hat{\mathbb{C}}$の閉部分集合，Mを連結な複素多様体で，ある点$\lambda_0 \in M$を基点として指定されているとする．写像$\phi : M \times E \to \hat{\mathbb{C}}$が以下の条件を満たすとき，$\phi$を$M$上の$E$の**正則運動** *(holomorphic motion)* またはMをパラメーター空間とするEの正則運動と呼ぶ.

1. $\phi(\lambda_0, \cdot)$はE上の恒等写像である.
2. 各$\lambda \in M$に対して，$\phi(\lambda, \cdot)$はE上1対1である.
3. 各$z \in E$に対して$\phi(\cdot, z)$はMから$\hat{\mathbb{C}}$への正則写像である.

$E \ni 0, 1, \infty$で，任意の$\lambda \in M$に対して$\phi(\lambda, \cdot)$が$0, 1, \infty$を固定するとき，正則運動$\phi : M \times E \to \hat{\mathbb{C}}$を**正規化された正則運動** *(normalized holomorphic motion)* と呼ぶ．一次分数変換をほどこすことによって，holomorphic motionは常に正規化することができる.

Holomorphic motion自体，定義はごく単純なものであるが，それが一次元複素解析に果たす役割は極めて大きい．それは以下の事実による([4], [28]).

定理 5 閉集合$E \subset \hat{\mathbb{C}}$は$0, 1, \infty$を含み，$\phi : \mathbb{D} \times E \to \hat{\mathbb{C}}$を正規化された$E$の単位円板$\mathbb{D}$上のholomorphic motionとする．このとき，以下が成立する.

1. ϕは$\hat{\mathbb{C}}$の$\mathbb{D}$上のholomorphic motion $\hat{\phi}$に拡張される．さらに各$\lambda \in \mathbb{D}$に対して，$\hat{\phi}(\lambda, \cdot)$は$\hat{\mathbb{C}}$上の擬等角写像になり，そのBeltrami係数を$\mu(\lambda)$とすると，$\mathbb{D} \ni \lambda \mapsto \mu(\lambda) \in L^\infty(\mathbb{C})$は正則である.
2. EがKlein群Gについて普遍な集合で，ϕはEにおいてG-同変であるとする．すなわち，ある同型写像$\rho_\lambda : G \to PSL(2, \mathbb{C})$ $(\lambda \in \mathbb{D})$が存在して，任意の$(g, z) \in G \times E$に対して
$$\phi(\lambda, g(z)) = \rho_\lambda(g)(\phi(\lambda, z))$$
が成立しているとする．このとき，上の1の拡張$\hat{\phi}$を$\hat{\mathbb{C}}$においてG同変となるように取ることができる.

この定理の1の主張はパラメーター空間Mが2次元以上では，Mが単連結な場合でももはや成り立たない.

3. Statements of results

3.1. 先行研究

主結果を述べる前に，この研究に関連する先行結果を述べる.

Klein群のdeformation space.

Klein群のdeformation spaceの複素構造の研究はKra，Maskitの貢献が大きい．§1で述べたが，一般にKlein群Gの不連続領域$\Omega(G)$は無限個の連結成分を持つ．しかしAhlforsの有限性定理から，その連結成分のG-同値類は有限個である．Kra-MaskitはAhlforsの有限性定理が規定するRiemann面の変形が$D(G)$を決定し，特に$\Omega(G)$の連結成分がすべて単連結になるときは$D(G)$がこれらのRiemann面のTeichmüller空間の直積になることを示した．このような考察の結果として，次の定理が得られている([16]).

定理 6 $D(G)$ は正則凸である．

前節で例として挙げたquasi-Fuchsian space $\mathcal{QF}_\Gamma$ はそれ自身が興味深い対象である．McMullenはquasi-Fuchsian spaceについて以下のような凸性 (disk convexity) を示している ([23])．

定理 7 Γ は $\mathbb{H}/\Gamma$ が有限型Riemann面となるFuchs群とし，Φ を単位円板の閉包 $\overline{\mathbb{D}}$ から $\mathrm{Hom}(\Gamma, PSL(2,\mathbb{C}))$ への正則写像で，任意の $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$ に対して，$\Phi(\lambda) \in \mathrm{Hom}(\Gamma, PSL(2,\mathbb{C}))$ がtype-preservingになるものとする．このとき，もし $\Phi(\partial\mathbb{D}) \subset \mathcal{QF}_\Gamma$ ならば，$\Phi(\mathbb{D}) \subset \mathcal{QF}_\Gamma$ である．

ここで，準同型 $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, PSL(2,\mathbb{C}))$ がtype-preservingとは，$\rho(\gamma)$ がparabolicとなるのは $\gamma \in \Gamma$ もparabolicで，かつその時に限るときをいう．

Teichmüller space.

$\Gamma \subset PSL(2,\mathbb{R})$ を $X := \mathbb{H}/\Gamma$ が有限型Riemann面となるFuchs群とする．このとき，Riemann面 X のTeichmüller空間 $T(X)$ は Γ の $\mathbb{H}$ に関するdeformation space $D(\Gamma;\mathbb{H})$ と同一視される．Teichmüller空間 $T(X)$ には次のように定義される距離 d_T が存在する．

$$d_T([\mu_1]_\Gamma, [\mu_2]_\Gamma) = \inf_{w_1,w_2} \log K(w_2 \circ w_1^{-1}).$$

ただし，$[\mu_i]_\Gamma \in D(\Gamma;\mathbb{H})$ $(i=1,2)$ に対して，w_i は $[\mu_i]_\Gamma$ に属するBeltrami係数が定める正規化された擬等角写像で，infはそのような擬等角写像全体を動かして考えたものである．また，$K(f)$ は擬等角写像 f の最大歪曲度 (maximal dilatation) である．

擬等角写像に関する基本的な議論から，d_T は実際に $T(X)$ の距離になり，さらに完備であることが確認される．d_T を *Teichmüller* **距離**という．

Teichmüller距離はRiemann面の変形の観点から重要な概念であるが，次の事実はその重要性をさらに際立たせている (cf. [4], [11])．

定理 8 Teichmüller距離 d_T は $T(X)$ の小林距離と一致する．したがって，Teichmüller空間 $T(X)$ は完備（小林）双曲多様体である．

Teichmüller空間の正則凸性に関して，それが正則凸であることが証明されたが，実際にはさらに強く ([3], [26])；

定理 9 Teichmüller空間 $T(X)$ においてCarathéodory距離は完備である．したがって，$T(X)$ は H^∞-convexである．

3.2. 主結果

はじめにholomorphic motionについての結果を述べる．

既に述べたように，定理5はパラメーター空間が2以上であれば成立しないが，M の次元が1の場合，すなわち M がRiemann面の場合でも，単連結でなければ一般に成立しない．しかし，Riemann面がある意味で単位円版に近い場合には，定理5のはじめの主張は次のように拡張される ([1])．

定理 I $K \subset \mathbb{D}$ をAB-removableなコンパクト集合で，閉集合 $E \subset \hat{\mathbb{C}}$ はその補集合の連結成分がすべて単連結になるものとする．このとき，$\mathbb{D}_K := \mathbb{D} \setminus K$ をパラメーター空間とする E のholomorphic motion ϕ は $\mathbb{D}$ をパラメーター空間とする $\hat{\mathbb{C}}$ のholomorphic motion $\hat{\phi}$ に拡張される．さらに各 $\lambda \in \mathbb{D}$ に対して，$\hat{\phi}(\lambda, \cdot)$ は $\hat{\mathbb{C}}$ 上の擬等角写像になり，そのBeltrami係数 $\mu(\lambda)$ に対し，$\mathbb{D} \ni \lambda \mapsto \mu(\lambda) \in L^\infty(\mathbb{C})$ は正則．

ここで，$\mathbb{D}$のコンパクト集合KがAB-removableとは，$\mathbb{D}_K$で定義された任意の有界正則関数が$\mathbb{D}$の有界正則関数に拡張されるときをいう．

上記定理において,「Eの補集合の連結成分はすべて単連結」という仮定は外せない．実際，次が成り立つ([1])．

定理 II 閉集合Eの補集合の連結成分で単連結でないものが存在すれば，$\mathbb{D}^* := \mathbb{D} \setminus \{0\}$をパラメーター空間とする$E$のholomorphic motionで$\mathbb{D}$をパラメーター空間とする$E$のholomorphic motionに拡張できないものが存在する．

定理5のはじめの主張が定理Iで拡張されてしまえば，自然な問題として，定理5の二つ目の主張，Klein群Gに対して，そのG-同変versionが成り立つかどうかということが想起される．そして，この問題の解答は肯定的である([27])；

定理 III $K \subset \mathbb{D}$は単位円板$\mathbb{D}$内のコンパクトでAB-removableな集合，Gはその不連続領域の連結成分がすべて単連結であるKlein群とする．このとき，$\mathbb{D}_K := \mathbb{D} \setminus K$をパラメーター空間とする$\Lambda(G)$のholomorphic motion ϕは$\mathbb{D}$をパラメーター空間とするG-同変な$\hat{\mathbb{C}}$のholomorphic motion $\hat{\phi}$に拡張される．さらに各$\lambda \in \mathbb{D}$に対して，$\hat{\phi}(\lambda, \cdot)$は$\hat{\mathbb{C}}$上の擬等角写像になり，そのBeltrami係数$\mu(\lambda)$に対し，$\mathbb{D} \ni \lambda \mapsto \mu(\lambda) \in M(G; \hat{\mathbb{C}})$は正則である．

これを用いると，定理7は以下のように拡張される([27])．

系 10 K，Gは上記定理と同じものとする．またΦを$\mathbb{D}_K \cup \partial\mathbb{D}$から$\mathrm{Hom}(G, PSL(2, \mathbb{C}))$への正則写像で，任意の$\lambda \in \mathbb{D}_K \cup \partial\mathbb{D}$に対して，$\Phi(\lambda)$は位数無限大の元を，恒等写像または再び位数無限大に写すような準同型写像であるとする[1]．このとき，もし$\Phi(\partial\mathbb{D}) \subset D(G)$ならば，$\Phi$は$\mathbb{D}$全体に正則に拡張され，その像は$D(G)$に含まれる．

定理IのG-同変versionとして定理IIIを得れば，定理IIのG-同変versionについて問いかけるのも自然なことであろう．

定理 IV ([27]) GはKlein群で，その不連続領域の連結成分に単連結でないものが存在するとする．このとき，$\mathbb{D}^*$をパラメーター空間とするGの極限集合$\Lambda(G)$のG-同変なholomorphic motionで，$\mathbb{D}$まで拡張できないものが存在する．

ここでdeformation spaceの正則凸性に目を向ける．Klein群Gのdeformation spaceは正則凸であったが（定理6），一方Teichmüller空間はCarathéodry距離が完備であるため，さらに強い正則凸性を持っていた（定理9）．したがってKlein群のdeformation spaceにおいてもそのような強い正則凸性が期待される．しかし，これは必ずしも成立しない([27])．

定理 V Klein群Gのdeformation space $D(G)$について；

1. $D(G)$のCarathéodory擬距離は距離になる．
2. $\Omega(G)$の連結成分がすべて単連結ならば，$D(G)$のCarathéodory距離は完備であり，$D(G)$はH^∞-convexである．

[1] この仮定は,「像が恒等写像でない場合にはelliptic, loxodromic, parabolicのそれぞれを保つ」という意味での“type-preserving”に置き換えてもよい．

3. $\Omega(G)$ が単連結でない連結成分を持てば，$D(G)$ は H^∞-convex ではない．したがって，その Carathédory 距離は完備ではない．

注意 3.1 上記定理の主張は，G-不変な開集合 Ω についての deformation space $D(G;\Omega)$ に対しても,（reasonable な調整で）同様に成り立つ.

$D(G)$ には Teichmüller 空間とまったく同様に Teichmüller 距離 d_T が定義できる；2 点 $[\mu_1]_G, [\mu_2]_G \in D(G)$ の間の Teichmüller 距離は

$$d_T([\mu_1]_G, [\mu_2]_G) = \inf_{w_1, w_2} \log K(w_2 \circ w_1^{-1})$$

で定義する．ここに w_i $(i = 1, 2)$ は $[\mu_i]_G$ に属する Beltrami 係数が定める正規化された擬等角写像で，inf はそのようなもの全体で考えたものである.

Teichmüller 空間の場合と同じ理屈で，この Teichmüller 距離も $D(G)$ において完備な距離を定めている．さらに

定理 VI ([27]) $D(G)$ 上，Teichmüller 距離と小林距離は等しい．したがって，$D(G)$ は完備（小林）双曲多様体である.

定理 V，VI の二つから直ちに次を得る.

系 11 $\Omega(G)$ が単連結でない連結成分を持てば，$D(G)$ において Carathéodory 距離と小林距離は異なる ([27]).

注意 3.2 Teichmüller 空間において，Carathéodory 距離と小林距離は異なるかどうかは講演者の知る限り open problem である.

4. 証明の概略

ここでは，いくつか Key となる結果の証明の概略を解説する.

1. **定理 I.**

   この定理の証明のアイディアは若干トリッキーな手順も含むが，以下のようなものである.

   (a) $\mathbb{D}_K$ 上の holomorphic motion は局所的に擬等角写像の正則族から導かれるので，その monodromy，すなわち $\mathbb{D}_K$ の基本群 $\pi_1(\mathbb{D}_K)$ から E の各点を固定する $\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角写像のホモトピー類への準同型が得られることに着目.

   (b) E の補集合が単連結であるから，この monodromy は trivial.

   (c) したがって，この holomorphic motion を E の任意の有限集合に制限しても monodromy は trivial.

   (d) 有限集合の holomorphic motion は $(0, n)$ 型 Riemann 面の正則族．そして上のことから，この monodromy が trivial.

   (e) よって $\mathbb{D}_K$ から Teichmüller 空間への正則写像を導く.

   (f) Teichmüller 空間において Carathéodory 距離が完備であることから，この正則写像は $\mathbb{D}$ まで延びる.

   (g) 多少の normal family の議論を用いて (almost) done.

Eの補集合は単連結といっても，E自体が複雑な形状をしていることもあるので，(b)のステップはややデリケートな議論を要するが，[6]の結果などを用いて解決される．

2. **定理II.**

補集合が単連結でない閉集合Eに対して反例を構成すればよいが，そのアイディアは次の簡明な例が元になっている．

$E = \{0, 1, \infty\} \cup \{a, b\}$ $(0 < |a|, |b| < 1/2)$として，Eの$\mathbb{D}^*$上のholomorphic motion $\phi : \mathbb{D}^* \times E \to \hat{\mathbb{C}}$を，$z = 0, 1, \infty$のとき$\phi(\lambda, z) = z$，$z = a, b$のとき$\phi(\lambda, z) = 2\lambda z$と定める（$\lambda = 1/2$がbase point）．このholomorphic motionは[24]の結果を用いれば$\hat{\mathbb{C}}$のholomorphic motionに拡張できないことがわかる．

Eが一般の閉集合の場合も表現が煩雑になるが，同様のアイディアでholomorphic motionを構成することによって反例が構成される．

3. **定理III.**

この定理は定理Iの結果とほんの少しの極限操作に注意すれば易しい．

4. **系10.**

与えられた正則写像Φから$\mathbb{D}_K$上の$\Lambda(\Phi(1)(G))$のholomorphic motionを構成し，定理IIIを適用する．そのために$\Phi(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{D}_K)$が群同型であることを示し，Riley-Sullivanの定理を用い，（G-同変holomorphic motionの）ある種standardなテクニックに持ち込む．

5. **定理IV.**

この定理を示すためには，$\mathbb{D}^*$上のG-同変なholomorphic motionで原点まで正則に延びないものを構成すればよい．この点は定理IIと同じだが，G-同変という制約があるため無闇矢鱈なholomorphic motionでよいというわけにはいかない．ここでは次のような方法で構成する．

(a) Δを$\Omega(G)$の単連結でない成分とする．簡単のため$G(\Delta) = \Delta$と仮定する．Δ内のnon-trivialな単純閉曲線αで，その$X_\Delta := \Delta/G$への射影$\bar{\alpha}$がnon-trivialかつnon-peripheralな単純閉曲線になるものをとる（とれる）．

(b) $\bar{\alpha}$とhomotopicな閉曲線をcore curveに持つX_Δのsingle Jenkins-Strebel微分J_αをとり，それが作るTeichmüller disk $D[J_\alpha]$を考える．

(c) $\bar{\alpha}$についてのDehn twist $\tau(\bar{\alpha})$は$D[J_\alpha]$に“parabolic”に作用している（[19]）．したがって$D[J_\alpha]/ < \tau(\bar{\alpha}) >$は$\mathbb{D}^*$となる．

(d) $D[J_\alpha]/ < \tau(\bar{\alpha}) >$は自然にRiemann面の正則族を定める．そのmonodromyは$\tau(\alpha)$となるが，それを定めるX_Δの自己擬等角写像をΔにliftするとαに関するDehn twistとなる．一方，それはGに関してtrivialな作用を導く．よって，$\mathbb{D}^*$でのmonodromyがtrivialになる．これより$\mathbb{D}^*$から$D(G)$への正則写像F (holomorphic motion)ができる．

(e) $\lambda \in \mathbb{D}^*$ を半径方向から 0 に収束させると，$F(\lambda)$ によって与えられる Riemann 面は $\bar{\alpha}$ に対応する閉曲線において退化する．したがって F は $\lambda = 0$ まで $D(G)$ へ延長できない．

参考文献

[1] M. Beck, Y. Jiang, S. Mitra and H. Shiga, Extending holomorphic motions and monodromy, Ann. Acad. Sci. Fenn. **37** (2012), 53–67.

[2] L. Bers, Holomorphic families of isomorphisms of Möbius groups, J. Math. Kyoto Univ. **26** (1986), 73–76.

[3] C. J. Earle, On the Carathéodory metric in Teichmüller spaces, in "Discontinuous Groups and Riemann Surfaces, 1973 Maryland Conference ", Princeton University Press Princeton, NJ, 99–103, 1974.

[4] C. J. Earle, I. Kra and S. L. Krushkal', Holomorphic motions and Teichmüller spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **343** (1994), 927–948.

[5] C. J. Earle and A. Marden, On holomorphic families of Riemann surfaces, Contemporary Math. **573** (2012), 67–97.

[6] C. J. Earle and C. McMullen, Quasiconformal isotopies, in "Holomorphic Functions and Moduli I ", Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg London Paris Tokyo, 143–154, 1988.

[7] C. J. Earle and S. Mitra, Variation of moduli under holomorphic motions, Contemporary Math. **256** (2000), 39–67.

[8] R. C. Gunning, Introduction to holomorphic functions of several variables, Volume I, Wadsworth & Brooks/Cole, 1990.

[9] J. H. Hubbard, Sur les sections analytiques de la courbe universelle de Teichmüller, Mem. Amer. Math. Soc. **166** (1976), 1–137.

[10] J. H. Hubbard, *Teichmüller Theory*–Vol. 1, Matrix Editions, 2006.

[11] Y. Imayoshi and M. Taniguchi, *Introduction to Teichmüller Spaces*, Springer-Tokyo 1992.

[12] Y. Jiang and S. Mitra, Some applications of universal holomorphic motions, Kodai Math. J. **30** (2007), 85–96.

[13] S. Kobayashi, *Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings*, Marcel Dekker, 1970.

[14] I. Kra, On spaces of Kleinian groups, Comment. Math. Helv. **47** (1972), 53–69.

[15] I. Kra, Deformation spaces, in 'A crash course on Kleinian groups', Lecture Notes in Math. **400** Springer-Verlag, Berlin, (1974), 48–70.

[16] I. Kra and B. Maskit, The deformation space of a Kleinian group, Amer. J. Math. **103** (1981), 1065–1102.

[17] O. Lehto, Univalent Functions and Teichmüller Spaces, GTM 109, Springer-Verlag 1986.

[18] R. Mañe, P. Sad, and D. Sullivan, On the dynamics of rational maps, Ann. Sci. École Norm. Sup. **16** (1983), 193-217.

[19] A. Marden and H. Masur, A foliation of Teichmüller space by twist invariant disks, Math. Scand **36** (1975), 211-228.

[20] B. Maskit, A theorem on planar covering surfaces with applications to 3-manifolds, Ann. of Math. **65** (1965), 341–355.

[21] B. Maskit, Self-maps on Kleinian groups, Amer. J. Math. **93** (1971), 840–856.

[22] K. Matsuzaki and M. Taniguchi, *Hyperbolic Manifolds and Kleinian Groups*, Clarendon Press Oxford 1998.

[23] C. T. McMullen, Complex earthquakes and Teichmüler theory, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), 283–320.

[24] S. Mitra and H. Shiga, Extensions of holomorphic motions and holomorphic families of Möbius groups, Osaka J. Math. **47** (2010), 1167-1187.

[25] R. Riley, Holomorphically parameterized families of subgroups of SL(2,C), Mathematika **32** (1985), 248-264.

[26] H. Shiga, On analytic and geometric properties of Teichmüller spaces, J. Math. Kyoto Univ. **24** (1984), 441–452.

[27] H. Shiga, On analytic properties of deformation spaces of Kleinian groups, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[28] Z. Slodkowski, Holomorphic motions and polynomial hulls, Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991), 347-355.

[29] D. Sullivan, Quasiconformal homeomorpisms and dynamics II.: Structural stability implies hyperbolicity for Kleinian groups, Acta Math. **150** (1985), 243–260.

Approximation of holomorphic mappings on spirallike domains in $\mathbb{C}^n$

Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University, Japan)*

Abstract

In this talk, we will show that any domain D in $\mathbb{C}^n$ which is spirallike with respect to a linear operator A, where $m(A) > 0$, is Runge. We also show the local uniform approximation of biholomorphic mappings on a spirallike domain D with respect to A, where $k_+(A) < 2m(A)$, by automorphisms of $\mathbb{C}^n$. Finally, as an application of the above result, we will show that any Loewner PDE in a complete hyperbolic spirallike domain D with respect to A, where $k_+(A) < 2m(A)$, of $\mathbb{C}^n$ admits an essentially unique univalent solution with values in $\mathbb{C}^n$.

1. Introduction

In 1923, Charles Loewner [52] introduced Loewner's partial differential equation

$$\frac{\partial f_s}{\partial s}(z) = -(df_s)_z G(z,s), \quad \text{a.e. } s \geq 0,$$

to study extremal problems in the unit disc $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$. Later, P.P. Kufarev [50] and C. Pommerenke [57], [58] developed the original theory. The Loewner theory was one of the main tool in the de Branges' proof of the Bieberbach conjecture. In 1999, O. Schramm [66] introduced a stochastic version of the original differential equation(SLE), which was a basic tool to prove Mandelbrot's conjecture by himself, G. Lawler and W. Werner.

In several complex variables, Pfaltzgraff [55] first studied subordination chains in 1974. He generalized to higher dimensions the Loewner differential equation and obtained uniqueness theorem for its solutions. His results are as follows:

Let $\mathbb{B}^n = B_1^n$ be the Euclidean unit ball in $\mathbb{C}^n$ and let

$$\mathcal{M} = \{h \in H(\mathbb{B}^n) : h(0) = 0, dh(0) = I_n, \mathsf{Re}\,\langle h(z), z\rangle > 0, z \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}\}$$

be the Carathéodory class in $\mathbb{C}^n$.

Theorem 1.1. *Let $h = h(z,t) : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ be a mapping which satisfies the following conditions:*

(i) $h(\cdot,t) \in \mathcal{M}$, *for all* $t \geq 0$,

(ii) $h(z,\cdot)$ *is measurable on* $[0,\infty)$ *for* $z \in \mathbb{B}^n$,

This work has been supported by JSPS KAKENHI Grant Number 25400151.
2000 Mathematics Subject Classification: 32H02, 30C45.
Keywords: complete hyperbolic complex manifold, evolution family, Herglotz vector field, Loewner chain, Loewner PDE, Runge, spirallike domain.
*e-mail: h.hamada@ip.kyusan-u.ac.jp

(iii) *For each $T > 0$ and $r \in (0,1)$, there exists a number $K = K(r,T) > 0$ such that*

$$\|h(z,t)\| \leq K(r,T), \quad \text{for } \|z\| \leq r, 0 \leq t \leq T.$$

Then for each $s \geq 0$ and $z \in \mathbb{B}^n$, the initial value problem

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -h(v,t) \;\; a.e. \;\; t \geq s, \quad v(z,s,s) = z, \tag{1}$$

has a unique solution $v = v(z,s,t)$ such that $v(\cdot,s,t)$ is a univalent Schwarz mapping and $dv(0,s,t) = \exp(-(t-s))I_n$ for $t \geq s \geq 0$. Moreover, the limit

$$\lim_{t\to\infty} e^t v(z,s,t) = f(z,s)$$

exists locally uniformly on $\mathbb{B}^n$ and $f(z,s)$ is univalent on $\mathbb{B}^n$ for each $s \geq 0$.

Theorem 1.2. *Let $f(z,t) = e^t z + \cdots$ be a solution to the Loewner PDE*

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = df(z,t)h(z,t) \;\; a.e. \;\; t \geq 0, \quad \forall z \in \mathbb{B}^n.$$

Then $f(z,t)$ is a subordination chain such that $f(z,s) = f(v(z,s,t),t)$, where $v(z,s,t)$ is the solution to (1). Moreover, if $\{e^{-t}f(\cdot,t)\}_{t\geq 0}$ is a normal family on $\mathbb{B}^n$, then $\lim_{t\to\infty} e^t v(z,s,t) = f(z,s)$.

We remark that the assumption (iii) in Theorem 1.1 on h does not necessarily hold for general holomorphic mappings on the unit ball B in infinite dimensional complex Banach spaces. In [44] (cf.[28]), we showed that $\mathcal{M}$ is uniformly bounded on each ball rB $(0 < r < 1)$ in complex Banach spaces. Using this result, we generalized various results to complex Banach spaces [14], [35], [36].

The existence and uniqueness theory and its applications in several complex variables have been considered by M. Chuaqui, P. Duren, S. Gong, I. Graham, H. Hamada, T. Honda, G. Kohr, M. Kohr, T. Liu, J.A. Pfaltzgraff, T. Poreda, T.J. Suffridge, M. Voda and others ([27], [39]). In recent five years, we have studied about solutions for the Loewner differential equation [19], [29], [35], [41], quasiconformal extension [46], extension operators to higher dimensional spaces [30], extreme points and support points [13], [31], [34], [37], convex subordination chains [47], growth theorems and coefficient bounds [45].

Recently, F. Bracci, M. Contreras and S. Díaz-Madrigal [10], [12], Contreras, Díaz-Madrigal and P. Gumenyuk [15], L. Arosio, F. Bracci, H. Hamada and G. Kohr [7] proposed a general setting for the Loewner theory, which works also on complete hyperbolic complex manifolds. L. Arosio [3], [4], [5], L. Arosio, F. Bracci and E. F. Wold [8], Contreras, Díaz-Madrigal and P. Gumenyuk [16], H. Hamada, G. Kohr, J. R. Muir [48] gave further developments. The classical theory deals with normalized objects, but this general theory does not require any normalization, and encloses the classical theory as a special case.

The purpose of this talk is an announcement of our results in [42]. Let $D \subset \mathbb{C}^n$ be a starlike domain. It is known that D is Runge [23]. Andersén and Lempert [2] obtained the local uniform approximation of biholomorphic mappings on D by automorphisms of $\mathbb{C}^n$. As an application of this result, Arosio, Bracci and Wold [8] proved that any Loewner PDE in a complete hyperbolic starlike domain of $\mathbb{C}^n$ admits an essentially unique univalent solution with values in $\mathbb{C}^n$.

In this talk, we will generalize the above results to spirallike domains with respect to a linear operator A. We note that a starlike domain is a spirallike domain with respect to the identity mapping I_n. In section 3, we will show that any spirallike domain D with respect to A, where $m(A) > 0$, is Runge. In section 4, we will show the local uniform approximation of biholomorphic mappings on a spirallike domain D with respect to A, where $k_+(A) < 2m(A)$, by automorphisms of $\mathbb{C}^n$. The condition $k_+(A) < 2m(A)$ plays an important role in univalent function theory in several complex variables ([19], [33], [35], [37], [41]). Under the assumption $k_+(A) < 2m(A)$, we will construct a mapping Φ_t which satisfies the assumptions of a theorem (Theorem 4.1) about the local uniform approximation of biholomorphic mappings on a domain Ω in $\mathbb{C}^n$ by automorphisms of $\mathbb{C}^n$. In section 5, as an application of the above result, we will show that any Loewner PDE in a complete hyperbolic spirallike domain D with respect to A, where $k_+(A) < 2m(A)$, of $\mathbb{C}^n$ admits an essentially unique univalent solution with values in $\mathbb{C}^n$.

2. Preliminaries

Let $\mathbb{C}^n$ denote the space of n complex variables $z = (z_1, \ldots, z_n)$ with the Euclidean inner product $\langle z, w\rangle = \sum_{j=1}^n z_j \overline{w}_j$ and the Euclidean norm $\|z\| = \langle z, z\rangle^{1/2}$. The open ball $\{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < r\}$ is denoted by B_r^n.

Let $L(\mathbb{C}^n)$ denote the space of linear operators from $\mathbb{C}^n$ into itself with the standard operator norm and let I_n be the identity in $L(\mathbb{C}^n)$. We shall use the following notions related to an operator $A \in L(\mathbb{C}^n)$:

$$\begin{aligned} m(A) &= \min\{\mathsf{Re}\,\langle A(z), z\rangle : \|z\| = 1\}, \\ k_+(A) &= \max\{\mathsf{Re}\,\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}, \end{aligned}$$

where $\sigma(A)$ is the spectrum of A. Then $m(A) \leq k_+(A) \leq \|A\|$ and it is known ([17]; see also [60, p. 311]) that

$$k_+(A) = \lim_{t\to\infty} \frac{\log \|e^{tA}\|}{t}.$$

Note that $k_+(A)$ is usually called the upper exponential index of A. For each $\rho > k_+(A)$, there exists a constant $\delta = \delta(\rho) > 0$ such that

$$\|e^{tA}\| \leq \delta e^{\rho t}, \quad t \geq 0 \tag{2}$$

by [17] (see also [60, p.311]).

Definition 2.1. (see [40], [67]) Let $A \in L(\mathbb{C}^n)$ be such that $m(A) > 0$. Also let D be a domain in $\mathbb{C}^n$ which contains the origin. We say that D is spirallike with respect to A if $e^{-tA}(w) \in D$, for all $w \in D$ and $t \geq 0$.

If $A = I_n$ in the above definition, then D is said to be starlike.

We use the following growth estimate related to a linear operator $A \in L(\mathbb{C}^n)$ (see [30, Lemma 1.1]; cf. [19]):

Lemma 2.2. *If $A \in L(\mathbb{C}^n)$, then the following relation holds:*

$$\|e^{-tA}(u)\| \leq e^{-m(A)t}, \quad t \in [0, \infty), \quad \|u\| = 1. \tag{3}$$

3. Runge property

In this section, we will show that spirallike domains are Runge.

For a complex manifold M, let $\mathcal{O}(M)$ denote the family of holomorphic functions on M.

Definition 3.1. Let M be a non-empty open subset of a complex manifold $\tilde{M}$. The pair $(M, \tilde{M})$ is called a Runge pair if $\mathcal{O}(\tilde{M})$ is dense in $\mathcal{O}(M)$. A domain $D \subset \mathbb{C}^n$ is said to be Runge if $(D, \mathbb{C}^n)$ is a Runge pair.

It is known that starlike domains are Runge (El Kasimi [23]). We will generalize this result to spirallike domains with respect to A with $m(A) > 0$.

Theorem 3.2. *Let $A \in L(\mathbb{C}^n)$ with $m(A) > 0$ and let $D \subset \mathbb{C}^n$ be a spirallike domain with respect to A. Then for any holomorphic function f on D, there exists a sequence of polynomials P_j which converges to f locally uniformly on D (i.e. D is a Runge domain).*

4. Approximation by automorphisms of $\mathbb{C}^n$

Let $\mathsf{Aut}(\mathbb{C}^n)$ denote the group of holomorphic automorphisms of $\mathbb{C}^n$. Forstnerič and Rosay [26, Theorem 1.1] proved the following result (cf. Andersén and Lempert [2]).

Theorem 4.1. *Let Ω be a domain in $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$. For every $t \in [0, 1]$, let Φ_t be a biholomorphic mapping from Ω into $\mathbb{C}^n$, of class C^2 in $(z, t) \in \Omega \times [0, 1]$. Assume that each domain $\Omega_t = \Phi_t(\Omega)$ is Runge in $\mathbb{C}^n$. If Φ_0 can be approximated locally uniformly on Ω by $\mathsf{Aut}(\mathbb{C}^n)$, then for every $t \in [0, 1]$, the mapping Φ_t can be approximated locally uniformly on Ω by $\mathsf{Aut}(\mathbb{C}^n)$.*

For an operator $A \in L(\mathbb{C}^n)$, we recall the following definitions:

$$\begin{aligned} m(A) &= \min\{\mathsf{Re}\,\langle A(z), z\rangle : \|z\| = 1\}, \\ k_+(A) &= \max\{\mathsf{Re}\,\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}, \end{aligned}$$

where $\sigma(A)$ is the spectrum of A. The following lemma is a key for proving our theorem.

Lemma 4.2. *Let $A \in L(\mathbb{C}^n)$ with $k_+(A) < 2m(A)$. Then $m(A) > 0$ and for any $p > 0$, there exists a constant $c_0 = c_0(p, A) > 0$ such that*

$$\lim_{t \to +0} \frac{\left\|e^{c_0 A(-\log t)}\right\| \cdot \left\|e^{c_0 A(\log t)}\right\|^2}{t^p} = 0.$$

Andersén and Lempert [2, Theorem 2.1] obtained the following theorem when $A = I_n$, i.e. D is a starlike domain in $\mathbb{C}^n$. From Theorems 3.2, 4.1 and Lemma 4.2, we obtain the following theorem.

Theorem 4.3. *Let $n \geq 2$. Let $A \in L(\mathbb{C}^n)$ with $k_+(A) < 2m(A)$. Let $D \subset \mathbb{C}^n$ be a spirallike domain with respect to A, $\Phi : D \to \mathbb{C}^n$ be a biholomorphic mapping whose image $\Phi(D)$ is a Runge domain. Then Φ can be approximated by $\mathsf{Aut}(\mathbb{C}^n)$ locally uniformly on D.*

Proof. Let $\Phi_0(\zeta) = \zeta$ and $\Phi_t(\zeta) = e^{-c_0 A \log t}\Phi(e^{c_0 A \log t}\zeta)$ for $0 < t \leq 1$, where $c_0 = c_0(2, A) > 0$ is a constant which satisfies the conclusion of Lemma 4.2 for $p = 2$. Then $\Phi_t(z)$ satisfies the assumptions of Theorem 4.1. Lemma 4.2 is used for the proof of the fact that $\Phi_t(z)$ is C^2 near $t = 0$. Thus, in view of Theorem 4.1, $\Phi = \Phi_1$ can be approximated locally uniformly on D by $\mathsf{Aut}(\mathbb{C}^n)$ as desired. $\square$

Remark 4.4. Let
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$
Then $k_+(A) = 2m(A) = 2$ and Lemma 4.2 does not hold for any $p > 0$. Moreover, there exist a domain $D \subset \mathbb{C}^n$ which is spirallike with respect to A and a biholomorphic mapping $\Phi : D \to \mathbb{C}^n$ whose image $\Phi(D)$ is a Runge domain such that the mapping $\Phi_t(\zeta)$ defined similarly to the proof of Theorem 4.3 is not continuous at $t = 0$. Indeed, for any $p > 0$, we have

$$\frac{\left\|e^{c_0 A(-\log t)}\right\| \cdot \left\|e^{c_0 A(\log t)}\right\|^2}{t^p} = \frac{t^{-2c_0}(t^{c_0})^2}{t^p} = \frac{1}{t^p} \to \infty$$

as $t \to +0$. Thus, Lemma 4.2 does not hold for any $p > 0$. Moreover, let $f(z_1, z_2) = (z_1, z_2 + az_1^2)$, where $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $D = f(B_1^2)$ and $\Phi = f^{-1} : D \to B_1^2$. Then it is proved in [33, Remark 2.7] that D is a spirallike domain with respect to A for any $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Clearly, Φ is biholomorphic and $\Phi(D) = B_1^2$ is a Runge domain. Since $\Phi_t(\zeta) = (\zeta_1, \zeta_2 - a\zeta_1^2)$ for $0 < t \le 1$ and $\Phi_0(\zeta) = \zeta$, $\Phi_t(\zeta)$ is not continuous at $t = 0$.

In the above remark, $\Phi(\zeta) = (\zeta_1, \zeta_2 - a\zeta_1^2)$ is an automorphism of $\mathbb{C}^n$. Now, we pose the following open problem.

Open Problem 4.5. Is there a linear operator A with $k_+(A) = 2m(A)$ such that Theorem 4.3 does not hold?

Arosio, Bracci and Wold [8, Theorem 3.4] obtained the following theorem when $A = I_n$. As in [8, Theorem 3.4], we obtain the following theorem from Theorem 4.3.

Theorem 4.6. *Let M be a complex manifold of dimension $n \ge 2$. Let $\{M_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ be a sequence of open connected subsets of M such that $M_j \subset M_{j+1}$ for every $j \in \mathbb{N}$ and $M = \cup_{j\in\mathbb{N}} M_j$. Let $A \in L(\mathbb{C}^n)$ with $k_+(A) < 2m(A)$. Assume that*

(i) each pair (M_j, M_{j+1}) is a Runge pair,

(ii) each M_j is biholomorphic to a Stein spirallike domain Ω_j with respect to A.

Then, M is biholomorphic to a Runge and Stein domain Ω in $\mathbb{C}^n$.

Now, we pose the following open problem.

Open Problem 4.7. Is there a linear operator A with $k_+(A) = 2m(A)$ such that Theorem 4.6 does not hold?

5. Solutions to the Loewner PDE

Let M be a complex manifold and $p \in [1, +\infty]$. Let N be a complex manifold of the same dimension of M and let d_N denote the distance induced on N by some Hermitian metric.

Definition 5.1. ([7], [15]) A family $(f_t)_{t\ge0}$ of mappings $f_t : M \to N$ is called an L^p-Loewner chain if

(i) For each fixed $t \ge 0$, $f_t : M \to N$ is a univalent holomorphic mapping,

(ii) $f_s(M) \subset f_t(M)$ for all $0 \le s \le t < +\infty$,

(iii) For any compact set $K \subset\subset M$ and any $T > 0$, there exists a function $k_{K,T} \in L^p([0,T], \mathbb{R}^+)$ such that for all $z \in K$ and for all $0 \le s \le t \le T$,

$$d_N(f_s(z), f_t(z)) \le \int_s^t k_{K,T}(\xi) d\xi.$$

Definition 5.2. (Docquier and Grauert [18]) Let M be a non-empty open subset of a complex manifold $\tilde{M}$. Then we say that M is semicontinuously holomorphically extendable to $\tilde{M}$ by means of a family $(M_t)_{0 \le t \le 1}$ of non-empty open subsets of $\tilde{M}$ if the following holds:
(0) M_t is a Stein manifold for all t in a dense subset of $[0,1]$,
(1) $M_0 = M$ and $\cup_{0 \le t < 1} M_t = \tilde{M}$,
(2) $M_s \subset M_t$ for all $0 \le s \le t \le 1$,
(3) $\cup_{0 \le t < t_0} M_t$ is a union of connected components of M_{t_0} for $0 < t_0 \le 1$,
(4) M_{t_0} is a union of connected components of the interior part of $\cap_{t_0 < t \le 1} M_t$ for $0 \le t_0 < 1$.

The following result is proved in Docquier and Grauert [18, Satz 17-19].

Theorem 5.3. *Let M be a non-empty Stein open subset of a Stein manifold $\tilde{M}$. If M is semicontinuously holomorphically extendable to $\tilde{M}$, then $(M, \tilde{M})$ is a Runge pair.*

As in section 4 of Arosio, Bracci and Wold [8], we obtain the following theorem.

Theorem 5.4. *Let M be a complete hyperbolic Stein manifold and N be a complex manifold of the same dimension. Let $(f_t : M \to N)$ be a Loewner chain of order $p \in [1, \infty]$. Then $(f_{s_1}(M), f_{s_2}(M))$ is a Runge pair for $0 \le s_1 < s_2$.*

Proof. Let $M_t = f_{s_1 + t(s_2 - s_1)}(M)$ and $\tilde{M} = f_{s_2}(M)$. We can show that $M_0 = f_{s_1}(M)$ is semicontinuously holomorphically extendable to $\tilde{M} = f_{s_2}(M)$ by L^p-continuity of f_s and the assumption that M is complete hyperbolic. □

Definition 5.5. A weak holomorphic vector field of order $p \in [1, \infty]$ on a complex manifold M is a mapping $G : M \times \mathbb{R}^+ \to TM$ with the following properties:

(i) $G(z, \cdot)$ is measurable on $\mathbb{R}^+$ for all $z \in M$,

(ii) $G(\cdot, t)$ is a holomorphic vector field on M for all $t \in \mathbb{R}^+$,

(iii) For any compact set $K \subset\subset M$ and any $T > 0$, there exists a function $C_{K,T} \in L^p([0,T], \mathbb{R}^+)$ such that

$$\|G(z,t)\| \le C_{K,T}(t), \quad z \in K, \text{ a.e. } t \in [0,T].$$

Definition 5.6. A holomorphic vector field G on a complex manifold M is called an infinitesimal generator provided the Cauchy problem

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = G(z(t)), \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

has a solution $z : \mathbb{R}^+ \to M$ for all $z_0 \in M$.

Definition 5.7. ([7], [10]) A Herglotz vector field of order $p \in [1, \infty]$ on a complex manifold M is a weak holomorphic vector field of order p such that the holomorphic vector field $z \mapsto G(z,t)$ is an infinitesimal generator for a.e. fixed $t \in \mathbb{R}^+$.

Arosio, Bracci, Hamada and Kohr [7] proved that any Loewner PDE in a complete hyperbolic complex manifold admits an essentially unique univalent solution. Recent related results are obtained in [1], [3], [4], [5], [6], [8], [10], [12], [15], [16].

Theorem 5.8. *Let M be a complete hyperbolic complex manifold of dimension n. Let $G : M \times \mathbb{R}^+ \to TM$ be a Herglotz vector field of order $p \in [1, \infty]$. Then there exists a Loewner chain $(f_t : M \to N)$ of order p which solves the Loewner PDE*

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}(z) = -df_t(z)G(z,t), \quad a.e.\ t \geq 0, \forall z \in M, \tag{1}$$

where $N = \cup_{t \geq 0} f_t(M)$ is a complex manifold of dimension n and any other solution to (1) with values in a complex manifold Q is of the form $(\Lambda \circ f_t)$ where $\Lambda\colon N \to Q$ is holomorphic.

An important open problem related to Theorem 5.8 is the following:

Open Problem 5.9. Given a Herglotz vector field $G(z,t)$ of order $p \in [1, \infty]$ on a complete hyperbolic domain $D \subset \mathbb{C}^n$, does there exist a univalent solution $(f_t : D \to \mathbb{C}^n)$ to the Loewner PDE (1) with values in $\mathbb{C}^n$?

Remark 5.10. Let $\mathbb{U}$ be the unit disc in $\mathbb{C}$. Since $N = \cup_{t \geq 0} f_t(\mathbb{U})$ is non-compact and simply connected, by the uniformization theorem N is biholomorphic to $\mathbb{U}$ or $\mathbb{C}$.

In several complex variables, Arosio, Bracci and Wold [8] solved the above problem when D is a complete hyperbolic starlike domain in $\mathbb{C}^n$. As in section 4 of [8], we obtain the following theorem from Theorems 4.6, 5.4, 5.8.

Theorem 5.11. *Let $n \geq 2$. Let $D \subset \mathbb{C}^n$ be a complete hyperbolic spirallike domain with respect to $A \in L(\mathbb{C}^n)$, where $k_+(A) < 2m(A)$. Let $G : D \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}^n$ be a Herglotz vector field of order $p \in [1, \infty]$. Then there exists a Loewner chain $(f_t : D \to \mathbb{C}^n)$ of order p with values in $\mathbb{C}^n$ which solves the Loewner PDE*

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}(z) = -df_t(z)G(z,t), \quad a.e.\ t \geq 0, \forall z \in D. \tag{2}$$

Moreover, $R = \cup_{t \geq 0} f_t(D)$ is a Runge and Stein domain in $\mathbb{C}^n$ and any other solution to (2) with values in $\mathbb{C}^n$ is of the form $(\Phi \circ f_t)$ for a suitable holomorphic mapping $\Phi : R \to \mathbb{C}^n$.

Proof. By Theorem 5.8, there exists a Loewner chain $(g_t : D \to N)$ of order p which solves the Loewner PDE

$$\frac{\partial g_t}{\partial t}(z) = -dg_t(z)G(z,t), \quad \text{a.e. } t \geq 0, \forall z \in D, \tag{3}$$

where $N = \cup_{t \geq 0} g_t(D)$ is a complex manifold of dimension n. Since D is complete hyperbolic, it is pseudoconvex. So, by Theorem 5.4, $(g_j(D), g_{j+1}(D))$ is a Runge pair for every $j \in \mathbb{N}$. Since g_t is a univalent holomorphic mapping, $g_t(D)$ is an open connected subset of N for each $t \geq 0$. Therefore, there exist a Runge and Stein domain R in $\mathbb{C}^n$ and a biholomorphic mapping $F : N \to R$ by Theorem 4.6. $f_t = F \circ g_t$ satisfies the conclusion of the theorem. $\square$

References

[1] M. Abate, F. Bracci, M.D. Contreras, S. Díaz-Madrigal, *The evolution of Loewner's differential equations*, Eur. Math. Soc. Newsl. **78** (2010), 31–38.

[2] E. Andersén, L. Lempert, *On the group of holomorphic automorphisms of* $\mathbb{C}^n$, Invent. Math. **110** (1992), 371–388.

[3] L. Arosio, *Resonances in Loewner equations*, Adv. Math. **227** (2011), 1413-1435.

[4] L. Arosio, *Basins of attraction in Loewner equations*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **37** (2012), 563–570.

[5] L. Arosio, *Loewner equations on complete hyperbolic domains,* J. Math. Anal. Appl. **398** (2013), 609–621.

[6] L. Arosio, F. Bracci, *Infinitesimal generators and the Loewner equation on complete hyperbolic manifolds*, Anal. Math. Phys. **1** (2011), 337-350

[7] L. Arosio, F. Bracci, H. Hamada, G. Kohr, *An abstract approach to Loewner chains*, J. Anal. Math. **119** (2013), 89–114.

[8] L. Arosio, F. Bracci, E. F. Wold, *Solving the Loewner PDE in complete hyperbolic starlike domains of* $\mathbb{C}^n$, Adv. Math. **242** (2013), 209–216.

[9] F. Bracci, *Shearing process and an example of a bounded support function in* $S^0(\mathbb{B}^2)$. Comput. Methods Funct. Theory. To appear; arXiv:1401.5428

[10] F. Bracci, M. D. Contreras, S. Díaz-Madrigal, *Evolution families and the Loewner equation II: complex hyperbolic manifolds*, Math. Ann. **344** (2009), 947–962.

[11] F. Bracci, M. D. Contreras, S. Díaz-Madrigal, *Pluripotential theory, semigroups and boundary behaviour of infinitesimal generators in strongly convex domains*, J. Eur. Math. Soc. **12** (2010), 23–53.

[12] F. Bracci, M. D. Contreras, S. Díaz-Madrigal, *Evolution families and the Loewner equation I: the unit disk*, J. Reine Angew. Math. **672** (2012), 1–37.

[13] F. Bracci, I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, *Variation of Loewner chains, extreme and support points in the class* S^0 *in higher dimensions*. Submitted (2014); arXiv:1402.5538v1

[14] C.H. Chu, H. Hamada, T. Honda, G. Kohr, *Starlike and convex rational mappings on infinite dimensional domains*, Math. Nachr. **282** (2009), 160–168.

[15] M. D. Contreras, S. Díaz-Madrigal, P. Gumenyuk, *Loewner chains in the unit disk*, Rev. Mat. Iberoamericana **26** (2010), 975–1012.

[16] M. D. Contreras, S. Díaz-Madrigal, P. Gumenyuk, *Local duality in Loewner equations*, J. Nonlinear Convex Anal. **15** (2014), 269–297.

[17] Ju. L. Daleckii, M.G. Krein, *Stability of solutions of differential equations in Banach space*. Translated from the Russian by S. Smith. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 43. American Mathematical Society, Providence, R.I. (1974).

[18] F. Docquier, H. Grauert, *Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **140** (1960), 94–123.

[19] P. Duren, I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, *Solutions for the generalized Loewner differential equation in several complex variables*, Math. Ann. **347** (2010), 411–435.

[20] P. Duren, H. Hamada, G. Kohr, *Two-point distortion theorems for harmonic and pluriharmonic mappings*, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), 6197–6218.

[21] M. Elin, S. Reich, D. Shoikhet, *Holomorphically accretive mappings and spiral-shaped functions of proper contractions*, Nonlinear Anal. Forum **5** (2000), 149–161.

[22] M. Elin, S. Reich, D. Shoikhet, *Complex dynamical systems and the geometry of domains in Banach spaces*, Dissertationes Mathematicae **427** (2004), 1–62.

[23] A. El Kasimi, *Approximation polynômiale dans les domaines étoilés de* $\mathbb{C}^n$, Complex Variables Theory Appl. **10** (1988), 179–182.

[24] J. E. Fornæss, N. Sibony, *Increasing sequences of complex manifolds*. Math. Ann. **255** (1981), 351–360.

[25] J. E. Fornæss, B. Stensønes, *Stable manifolds of holomorphic hyperbolic maps*, Internat. J. Math. **15** (2004), 749–758

[26] F. Forstnerič, J.-P. Rosay, *Approximation of biholomorphic mappings by automorphisms of* $\mathbb{C}^n$, Invent. Math. **112** (1993), 323–349 and Erratum: Invent. Math. **118** (1994), 573–574.

[27] S. Gong, *Convex and starlike mappings in several complex variables*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.

[28] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, *Parametric representation of univalent mappings in several complex variables*, Canadian J. Math. **54** (2002), 324–351.

[29] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, *On subordination chains with normalization given by a time-dependent linear operator*, Complex Anal. Operator Theory **5** (2011), 787–797.

[30] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, *Extension operators and subordination chains*, J. Math. Anal. Appl. **386** (2012), 278–289.

[31] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, *Extremal problems and g-Loewner chains in* $\mathbb{C}^n$ *and reflexive complex Banach spaces*. In: Topics in Mathematical Analysis and Applications (eds. T.M. Rassias and L. Toth), Springer, **94**, 393–424 (2014)

[32] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr, *Asymptotically spirallike mappings in several complex variables*, J. Anal. Math. **105** (2008), 267–302.

[33] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr, *Spirallike mappings and univalent subordination chains in* $\mathbb{C}^n$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa-Cl. Sci. **7** (2008), 717–740.

[34] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr, *Extreme points, support points and the Loewner variation in several complex variables*, Sci. China Math. **55** (2012), 1353–1366.

[35] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr, *Univalent subordination chains in reflexive complex Banach spaces*, Complex Analysis and Dynamical Systems V, Contemporary Mathematics **591** (2013), 83–111.

[36] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr, *Asymptotically spirallike mappings in reflexive complex Banach spaces*, Complex Anal. Oper. Theory **7** (2013), 1909–1927.

[37] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr, *Extremal properties associated with univalent subordination chains in* $\mathbb{C}^n$, Math. Ann. **359** (2014), 61–99.

[38] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, J. A. Pfaltzgraff, *Convex subordination chains in several complex variables*, Canad. J. Math. **61** (2009), 566–582.

[39] I. Graham, G. Kohr, *Geometric function theory in one and higher dimensions*, Marcel Dekker Inc., New York, 2003.

[40] K. Gurganus, *Φ-like holomorphic functions in* $\mathbb{C}^n$ *and Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **205** (1975), 389–406.

[41] H. Hamada, *Polynomially bounded solutions to the Loewner differential equation in several complex variables*, J. Math. Anal. Appl. **381** (2011), 179–186.

[42] H. Hamada, *Approximation properties on spirallike domains of* $\mathbb{C}^n$, Adv. Math. **268** (2015), 467–477.

[43] H. Hamada, T. Honda, *Sharp growth theorems and coefficient bounds for starlike mappings in several complex variables,* Chin. Ann. Math. Ser.B **29** (2008), 353–368.

[44] H. Hamada, G. Kohr, *Φ-like and convex mappings in infinite dimensional spaces*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **47** (2002), 315–328.

[45] H. Hamada, G. Kohr, *On some classes of bounded univalent mappings in several complex variables*, Manuscripta Math. **131** (2010), 487–502.

[46] H. Hamada, G. Kohr, *Univalence criterion and quasiconformal extension of holomorphic mappings*, Manuscripta Math. **141** (2013), 195–209.

[47] H. Hamada, G. Kohr, P. T. Mocanu, I. Şerb, *Convex subordination chains and injective mappings in $\mathbb{C}^n$*, J. Math. Anal. Appl. **364** (2010), 32–40.

[48] H. Hamada, G. Kohr and J. R. Muir, *Extension of L^d-Loewner chains to higher dimensions*, J. Anal. Math. **120** (2013), 357–392.

[49] S. Kobayashi, *Hyperbolic complex spaces*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **318**, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[50] P.P. Kufarev, *On one-parameter families of analytic functions*, Mat. Sb. **13** (1943), 87–118 (in Russian).

[51] P. Liczberski, V.V. Starkov, *Starlikeness with respect to a boundary point and Julia's theorem in $\mathbb{C}^n$*. J. Math. Anal. Appl. **366** (2010), no. 1, 360–366.

[52] C. Loewner, *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises*, Math. Ann. **89** (1923), 103–121.

[53] J.R. Muir Jr., *A modification of the Roper-Suffridge extension operator*, Comput. Meth. Funct. Theory **5** (2005), 237–251.

[54] J.R. Muir Jr., *A class of Loewner chain preserving extension operators*, J. Math. Anal. Appl. **337** (2008), 862–879.

[55] J.A. Pfaltzgraff, *Subordination chains and univalence of holomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$*, Math. Ann. **210** (1974), 55–68.

[56] J.A. Pfaltzgraff, *Subordination chains and quasiconformal extension of holomorphic maps in $\mathbb{C}^n$*, Ann. Acad. Scie. Fenn. Ser. A I Math. **1** (1975), 13–25.

[57] C. Pommerenke, *Über die Subordination analytischer Funktionen*, J. Reine Angew. Math. **218** (1965), 159–173.

[58] C. Pommerenke, *Univalent functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

[59] T. Poreda, *On generalized differential equations in Banach spaces*, Dissertationes Mathematicae **310** (1991), 1–50.

[60] S. Reich, D. Shoikhet, *Nonlinear semigroups, fixed points, and geometry of domains in Banach spaces*, Imperial College Press, London, 2005.

[61] K.A. Roper, T.J. Suffridge, *Convex mappings on the unit ball of $\mathbb{C}^n$*, J. Anal. Math. **65** (1995), 333–347.

[62] O. Roth, *Pontryagin's maximum principle for the Loewner equation in higher dimensions*. Canadian J. Math. To appear; DOI:10.4153/CJM-2014-027-6.

[63] W. Rudin, *Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 241, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980.

[64] W. Rudin, *Real and complex analysis*, Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, (1987).

[65] S. Schleissinger, *On support points of the class $S^0(\mathbb{B}^n)$*. Proc. Amer. Math. Soc. **142** (2014), 3881–3887.

[66] O. Schramm, *Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees*, Israel J. Math. **118** (2000), 221–288.

[67] T.J. Suffridge, *Starlikeness, convexity and other geometric properties of holomorphic maps in higher dimensions*, Lecture Notes in Math. **599**, 146–159, Springer, 1977.

[68] M. Voda, *Solution of a Loewner chain equation in several variables*, J. Math. Anal. Appl. **375** (2011), no. 1, 58–74.

正二十面体不変式と志村曲線

永野中行 (早稲田大学)

楕円曲線を $E = \mathbb{C}/\Lambda$ (Λ は格子) とする。End(E) $= \{\lambda \in \mathbb{C} | \lambda\Lambda \subset \Lambda\}$ とおく。楕円曲線 E が**虚数乗法を持つ**とは、

$$\mathrm{End}(E) \neq \mathbb{Z}$$

となることをいう。虚数乗法を持つ楕円曲線に付随するモジュラー関数の特殊値は、虚二次体の整数論において極めて重要な役割を果たす (古典的類体論)。

この話を 2 次元に上げるると状況は複雑になる。$\Lambda = (\Omega, I_2)$ を $\mathbb{C}^2$ の正規化された格子とする。複素トーラス

$$A = \mathbb{C}^2/\Lambda = \mathbb{C}^2/(\Omega, I_2) \qquad (\Omega \in \mathfrak{S}_2 = \{\Omega \in M_2(\mathbb{C}) | {}^t\Omega = \Omega, \mathrm{Im}(\Omega) > 0\})$$

が代数多様体となるとき、A は Abel 曲面という。適当な偏極 (いまの場合は主偏極) が入るとしよう。

$$\mathrm{End}(A) = \{\alpha \in M_2(\mathbb{C}) | \alpha(\Omega, I_2) = (\Omega, I_2)M \text{ for some } M \in GL(4, \mathbb{Z})\}.$$

を Abel 曲面の**自己準同型環**という。**拡大自己準同型環** $\mathrm{End}_0(A) = \mathrm{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ は、A が単純ならば多元体 (division algebra) となる。自己準同型環と対応するモジュライ空間は次の表で分類される。

$\mathrm{End}_0(A)$	主偏極アーベル曲面の状況	対応するモジュライ空間	モジュライ空間の次元
$\mathbb{Q}$	一般	井草 3-fold $\mathcal{A}_2$	3 次元
実 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$	実乗法 (RM) を持つ	アンベール曲面 $\mathcal{H}_\Delta$	2 次元
不定符号四元数環 B_D	QM を持つ	(広い意味での) 志村曲線 $\mathcal{S}_D$	1 次元
4 次 CM 体 K	虚数乗法 (CM) を持つ	CM 点	0 次元

Table 1: 主偏極アーベル曲面の拡大自己準同型環とそのモジュライ空間の名称

B_D を $\mathbb{Q}$ 上の判別式 D の不定符号の四元数環とし、その maximal order を $\mathfrak{O}$ とする。$\Gamma^{(1)} = \{\gamma \in \mathfrak{O} | \mathrm{Nr}_{B_D/\mathbb{Q}}(\gamma) = 1\}$ は、SL(2, $\mathbb{R}$) Fuchs 群と同型になる。そして商空間

$$\mathbb{S}_D = \mathbb{H}/\Gamma^{(1)}$$

を **(本来の意味での) 志村曲線**と呼ぶことにする。

商空間 $\mathbb{S}_D$ は決して尖点 (cusp) を持たない。そのため、志村曲線の具体的なモデルを得ることは非常に非自明な問題となり、数論方面の研究者によって盛んに研究されている。

[R] は、射影 $\varphi : \mathbb{S}_D \to \mathcal{A}_2$ の存在を示した。像 $\mathcal{S}_D = \varphi(\mathbb{S}_D)$ が、表 1 の **(広い意味での) 志村曲線**である。Abel 曲面のモジュライ空間としてはこちらの $\mathcal{S}_D$ を扱うことになる。

1 正二十面体不変式を座標とする射影空間での志村曲線のモデル

正二十面体群 (交代群 $\mathcal{A}_5$) は $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ に作用し、その不変式 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ は Klein が得ている。Hirzebruch [Hi] は、判別式最小の実 2 次体による RM をもつ Abel 曲面のモジュライ空間、則ち Humbert 曲面 $\mathcal{H}_5$ が、

$$\mathcal{H}_5 \simeq \mathbb{P}^(\mathbb{C})/\mathcal{A}_5 \simeq \mathrm{Proj}(\mathbb{C}[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}]) = \mathbb{P}(1:3:5)$$

となることを示した。

さて、[N1] で、$\mathrm{Proj}(\mathbb{C}[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}]) = \mathbb{P}(1:3:5)$ 上の $K3$ 曲面族

$$S(\mathfrak{A} : \mathfrak{B} : \mathfrak{C}) : z^2 = x^3 - 4(4y^3 - 5\mathfrak{A}y^2)x^2 + 20\mathfrak{B}y^3x + \mathfrak{C}y^4 \tag{1.1}$$

の周期写像が考察されている。特に次の定理により、この $K3$ 曲面族の周期写像の逆対応がテータ関数により特徴づけられている。

Theorem 1.1. *([N1])* $(X,Y)=\left(\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}^3},\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}^5}\right)$ とおく。

(1) $\{S(\mathfrak{A}:\mathfrak{B}:\mathfrak{C})\}$ の周期写像は $\mathrm{Proj}(\mathfrak{A}:\mathfrak{B}:\mathfrak{C})$ から $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ への多価の解析写像となる。

(2) 周期写像の逆対応 $(z_1,z_2)\mapsto(X(z_1,z_2),Y(z_1,z_2))$ は、次のような具体的表示を持つ。

$$X(z_1,z_2)=2^5\cdot 5^2\cdot\frac{s_6(z_1,z_2)}{g_2^3(z_1,z_2)},\qquad Y(z_1,z_2)=2^{10}\cdot 5^5\cdot\frac{s_{10}(z_1,z_2)}{g_2^5(z_1,z_2)}. \tag{1.2}$$

ここで、g_2,s_6,s_{10} は *Freitag* のテータと呼ばれる $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ 上の正則関数から $\mathbb{Z}$ 係数の多項式を作ることで得られる。

志村曲線のモデルを次のようにして得る。[EK] による Humbert 曲面 $\mathcal{H}_8$ のパラメトライズがある。[Ha] は志村曲線 $\mathcal{S}_D$ が 2 つの Humbert 曲面の共通部分 $\mathcal{H}_{\Delta_1}\cap\mathcal{H}_{\Delta_2}$ に含まれる条件を与えている。

今回は Humbert 曲面同士の共通部分 $\mathcal{H}_5\cap\mathcal{H}_8$ を考え、それを $\mathcal{H}_5\simeq\mathrm{Proj}(\mathbb{C}[\mathfrak{A}:\mathfrak{B}:\mathfrak{C}])$ の因子として実現することで次の簡明な志村曲線のモデルを得る。

Theorem 1.2. *([N2])* 判別式 6 の志村曲線 $\mathcal{S}_6$ は因子 R_2、判別式 10 の志村曲線 $\mathcal{S}_{10}$ は因子 R_1 である*:*

$$\begin{cases} R_1:\mathfrak{A}^5-5\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}+\mathfrak{C}=0,\\ R_2:3125\mathfrak{A}^5-3375\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}+243\mathfrak{C}=0.\end{cases} \tag{1.3}$$

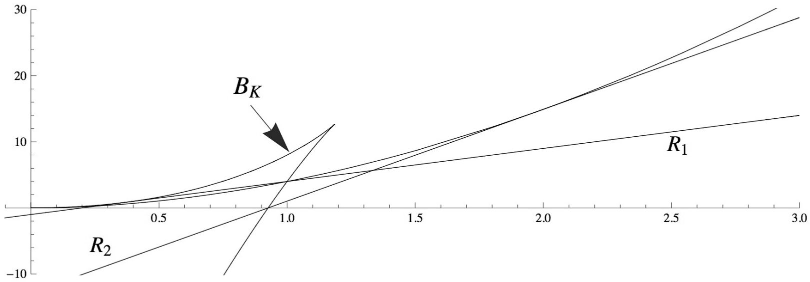

Figure 1: 判別式 $6,10$ の志村曲線と正二十面体方程式 B_K.

この定理の証明には次の事実が必要であることに注意する。

(a) 志村曲線が決してカスプを通らないという性質

(b) (X,Y) の解析関数による表示 (1.2) のカスプや CM 点における特殊値

(c) $K3$ 曲面の周期写像の単射性 ([N1],[NS] で得られた格子偏極 $K3$ 曲面のモジュライについての結果)

Remark 1.1. *[EK]* は多くの判別式 Δ についての *Humbert* 曲面 $\mathcal{H}_\Delta$ を与えている。$\Delta=12,21$ の場合を用いると、判別式 $14,15$ が次に小さい場合の志村曲線 $\mathcal{S}_{14},\mathcal{S}_{15}$ も同様に得られる *([N2])*。

Remark 1.2. 今回のモデルは、表示 *(1.2)* が *Freitag* のテータの $\mathbb{Z}$ 係数の有理式であるということ、また定義方程式 *(1.3)* も整数係数であることより、整数論への有為な応用が可能であると期待される。

References

[EK] N. Elkies and A. Kumar, *$K3$ Surfaces and equations for Hilbert modular surfaces,* arXiv:1209.3527v2.

[Ha] K. Hashimoto, *Explicit forms of quaternion modular embeddings*, Osaka J. Math., **32**, 1995, 533-546.

[Hi] F. Hirzebruch, *The ring of Hilbert modular forms for real quadratic fields of small discriminant,* Lecture Notes in Math. **627**, Springer-Verlag, 1977, 287-323.

[N1] A. Nagano, *A theta expression of the Hilbert modular functions for $\sqrt{5}$ via period of $K3$ surfaces,* Kyoto J. Math., **53** (4), 2013, 815-843.

[N2] A. Nagano, *Icosahedral invariants and Shimura curves,* preprint, 2014.

[NS] A. Nagano and H. Shiga, *Modular map for the family of abelian surfaces via elliptic $K3$ surfaces,* Math. Nachr., to appear, 2014.

[R] V. Rotger, *Shimura curves embedded in Igusa's threefold,* Modular curves and abelian varieties (Progress in Math. **224**), Birkhäuser, 2004, 263-276.

正二十面体不変式と虚数乗法点

永野中行 (早稲田大学)

$\mathbb{Q}$ 上の N 次の代数的数体を K とする。$\alpha \in K$ は

$$\alpha^m + c_{m-1}\alpha^{m-1} + \cdots + c_1\alpha + c_0 = 0, \quad (0 < m \le N, c_j \in \mathbb{Q})$$

とかける。ここで $c_1, \cdots, c_m \in \mathbb{Z}$ とかける α 全体は環をなす。これを K の**代数的整数環**といい $\mathfrak{O}_K$ とかく。

$\mathfrak{O}_K$ のイデアルで 0 でないものを K の整イデアルという。集合 $\mathfrak{a} \subset K$ が

$$\mathfrak{a} = cX \qquad (c \in K^*, X \text{ が整イデアル})$$

とかけるとき $\mathfrak{a}$ を**分数イデアル**といい、その全体を I_K とかく。

I_K は積 $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \{\sum_{j=1}^r a_j b_j | a_j \in \mathfrak{a}, b_j \in \mathfrak{b}\}$ により群をなす。P_K を単項生成イデアル全体とする: $P_K = \{c\mathfrak{O}_K | c \in K^*\}$. 明らかに $P_K \subset I_K$. このとき、

$$h_K = [I_K : P_K]$$

を K の**類数**という。

古典的な虚数乗法論・類体論は、次の大変見通しの良い結果を与えている。

(1) K を虚二次体とする。K の代数的整数環を

$$\mathfrak{O}_K = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}z^0, \qquad (z^0 \in \mathbb{H})$$

とかく。$\mathbb{Z} + \mathbb{Z}z^0$ は $\mathbb{C}$ の格子となる。楕円曲線

$$E(z^0) : \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}z^0)$$

を考えると、$E(z^0)$ は虚数乗法を持つ。

(2) $E(z^0)$ のモジュライは、上半平面に離散的に作用する群 $SL(2, \mathbb{Z})$ に関するフルモジュラー関数、つまり楕円 J 関数と呼ばれる解析関数の $z_0 \in \mathbb{H}$ における特殊値で与えられる。

(3) **(１変数解析関数の特殊値から類体の構成)** 虚二次体 K に特殊値 $j(z^0)$ を添加することで、K の最大不分岐 Abel 拡大体 (=**絶対類体**) $L = K(j(z^0))$ を得る。とくに、ガロア群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ はイデアル類群 I_K/P_K と同型となり、L は K の類数 h_K 次の拡大を与える。

1 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 上の 4 次 CM 体の上の類体を正二十面体不変式で得ること

上記古典理論の高次元化の理論は志村 [S] にまとめられている。

以下 K を総実 n 次体 K_0 上の総虚二次拡大とする。これを $2n$ 次の **CM 体**という。$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ という n 個の独立な埋め込み $\varphi_j : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ と組にして、$(K, \{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\})$ を **CM-type** という。

A を n 次元の Abel 多様体として、$\iota : K \hookrightarrow \mathrm{End}^0(A)$ という埋め込みがある場合を考えよう。

$$\iota(\mathfrak{O}_K) = \mathrm{End}(A)$$

となるとき、(A, ι) は K に principal な**虚数乗法を持つ**という。

うめこみ $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ の取り方により、K の reflex K^* という CM 体が定義される。K^* の次数は K の次数より落ちることがあり、$[K : \mathbb{Q}] = [K^* : \mathbb{Q}]$ となる場合、(K, φ_j) は **primitive** という (詳細は [S])。

イデアル群 I_{K^*} の部分群

$$H_0 = \{\mathfrak{a} \in I_{K^*} | \Pi_{j=1}^n \mathfrak{a}^{\varphi_j} = \mathfrak{O}_K b, \mathrm{Nr}(\mathfrak{a}) = b\bar{b} \text{ with } b \in K\} \tag{1.1}$$

を考えよう。群 H_0 は $P_{K^*} \subset H_0 \subset I_{K^*}$ をみたす。

Fact 1.1. *([S])* 上の記号で (K, φ_j) が *primitive* とする。このとき、群 H_0 に対する K^* の絶対類体は

$$L^* = M_{\mathbb{Q}} K^* \qquad (\text{拡大次数は } [L^* : K^*] = [I_{K^*} : H_0]) \leq h_{K^*})$$

となる。ここで、$M_{\mathbb{Q}}$ は、(A, ι) の **field of moduli** である *(*詳細は *[S])*。

[S] の一般論と、[I],[N],[NS] の考察を組み合わせると、古典論に平行した次の結果が得られる。

Theorem 1.1. $(K, \{\varphi_1, \varphi_2\}) = (K, \{id, \varphi\})$ を $K_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 上の *primitive* な *CM* 体とする。
(1) $\alpha \in K$ に対し、$u(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^{\varphi} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ とする。整数環 $\mathfrak{O}_K$ の基底を $\alpha_1, \cdots, \alpha_4$ を上手く選び、必要に応じて $\mathbb{C}^2$ の基底も取り替えると、列ベクトルを並べた 2 行 4 列行列は

$$(u(\alpha_1)u(\alpha_2)u(\alpha_3)u(\alpha_4)) = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 & 1 & 0 \\ \tau_2 & \tau_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_2, \quad \tau_1 = \tau_2 + \tau_3 \right) \tag{1.2}$$

とかける。列ベクトルは $\mathbb{C}^2$ の格子を生成し、適当な *Riemann* 形式を入れると *Abel* 曲面

$$A = \mathbb{C}^2 / \Lambda$$

は K を *princpal* な虚数乗法に持つ *Abel* 曲面 (A, ι) の構造を持つ。
(2) 主偏極 *Abel* 曲面 A において *(1.2)* の記号で $z_1^0 = (\tau_2 + \sqrt{5}\tau_2 + 2\tau_3)/2, z_2^0 = (\tau_2 - \sqrt{5}\tau_2 + 2\tau_3)/2$ とおく。(A, ι) の *field of moduli* は正二十面体不変式由来の *2* 変数解析関数の特殊値を $\mathbb{Q}$ に添加して得られる。

$$X(z_1^0, z_2^0) = 2^5 \cdot 5^2 \cdot \frac{s_6(z_1^0, z_2^0)}{g_2^3(z_1^0, z_2^0)}, \qquad Y(z_1^0, z_2^0) = 2^{10} \cdot 5^5 \cdot \frac{s_{10}(z_1^0, z_2^0)}{g_2^5(z_1^0, z_2^0)}.$$

(3) **(２変数解析関数の特殊値から類体の構成)** *reflex* K^* に $X(z_1^0, z_2^0), Y(z_1^0, z_2^0)$ を添加すると、K^* の H_0 に関する不分岐類体 L を得る。

2　非自明な類体の拡大例の構成

とはいえ、2 次元 Abel 曲面から非自明な類体を構成しようとすると、そこには繊細な問題が生じる。
[懸念 i] reflex K^* の拡大次数が落ちる場合、つまり $(K, \{id, \varphi\})$ が primitive でない場合は、結局は古典的類体論、つまり 1 変数の場合に帰着されてしまう (本質的に多変数ではない結果になってしまう)。
[懸念 ii] 多変数の場合、 1 変数のように見通しの良いイデアル類群ではなく、非常に複雑な群 H_0 in (1.1) を考えなければならない。類数が $h_K > 1$ なだけでは、非自明な類体の拡大が得られるとは限らない。

例えば、K が $\mathbb{Q}$ 上 4 次の巡回拡大 CM 体の場合、$K = K^*$ が成立し **[懸念 i]** は心配無用となる。このときまず考えるべきは、類数が 1 以外で最小の $h_K = 2$ の場合であろう。類数 2 の $\mathbb{Q}$ 上 4 次の巡回拡大 CM 体は [HHRW] で分類されている。しかし類数 2 の場合、[M] によって、

$$M_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \qquad \text{よって} \qquad \text{類体 } L = K$$

となることがわかる。つまり **[懸念 ii]** に引っかかり、類数 2 では非自明な拡大は得られないことになる。

今回の発表では、Theorem 1.1 を用いて非自明な類体の拡大が得られる例について紹介する予定である。

References

[HHRW] K. Hardy, R. H. Hudson, D. Richmann and K. S. Williams, *Determination of all Imaginary Cyclic Quartic Fields with Class Number* 2*,* Trans. Amer. Math., 1989, 1-55.

[M] N. Murabayashi, *The field of moduli of abelian surfaces with complex multiplication*, Crelle, **470**, 1996, 1-26.

[I] J. Igusa, *Arithmetic variety of moduli for genus two,* Ann. Math, **72** (3), 1960, 612-649.

[N] A. Nagano, *A theta expression of the Hilbert modular functions for* $\sqrt{5}$ *via period of* $K3$ *surfaces,* Kyoto J. Math., **53** (4), 2013, 815-843.

[NS] A. Nagano and H. Shiga, *Modular map for the family of abelian surfaces via elliptic* $K3$ *surfaces,* Math. Nachr., to appear, 2014.

[S] G. Shimura, *Abelian Varieties with Complex Multiplication and Modular Functions,* Princeton Press, 1997.

On the minimality of canonically attached singular Hermitian metrics on certain nef line bundles

小池 貴之　(東京大学)*

本講演は, 複素代数多様体上のネフ直線束の, 半正性判定に関するものである. X を滑らかな複素代数多様体, L を X 上の正則直線束とする. 小平の埋め込み定理によれば, 豊富という性質は, L が正であること, つまり L に滑らかな計量であり曲率がいたるところ正であるものが存在するという性質と同値である. 今回の目標は, この小平の埋め込み定理をモデルケースとして, 直線束の代数幾何学的な正値性と複素幾何学的な正値性との関係を明らかにすることにある. 特に中心的に扱うのは, 豊富や正といった性質のある種の極限と見做せる, 半豊富やネフ, 半正といった正値性の条件たちの関係である. 初めにこれらについて述べる.

まず L が半豊富であるとは, 十分大きい自然数 m として $L^{\otimes m}$ が大域切断で生成されることをいう. 次に, L がネフであるとは, X のどの部分代数曲線上に制限しても L の次数が非負であることを言う. 最後に L が半正であるとは, L に滑らかな計量であり曲率がいたるところ非負であるものが存在するという.

以上三つの性質, 半豊富, ネフ, 及び半正は, 概言すれば, それぞれ豊富という性質の代数幾何学的, 数値幾何学的, 複素幾何学的な極限のような性質であり, 一見同じような性質にも見える. 事実, L が半豊富であれば L は半正であり, また L が半正であれば L はネフであることは簡単に分かる. しかしこれらそれぞれの主張の逆については後述するようにそれぞれ反例が知られている. 従って実際には, 半豊富, ネフ, 半正はそれぞれ別の性質であると言える. 一方で L が X の標準直線束である場合には, これらは全て同値であることが予想されている (アバンダンス予想).

以前の年会で, 半豊富性と半正性との差異に関して重要な Zariski による具体例について述べた. Zariski は $\mathbb{P}^2$ の適切な 12 点での爆発 X 上に, ネフだが半豊富でない直線束 L を構成した. この Zariski の例 (X, L) は特に, 切断環 $\bigoplus_{m=0}^{\infty} H^0(X, L^{\otimes m})$ が非有限生成であるという意味でも代数幾何学的に病的であり, 重要な例である. 一方で, この L は, 実は半正であることが分かる [5, 1.1]. これの証明には, Grauert の判定法 ([3, Satz 7]) から, L の線形系の固定点集合 C が X 中で正則な管状近傍を持つ (つまり法線束の零切断の管状近傍と双正則な C の近傍が存在する) ことが重要である. この例についての証明の手法は一般の次元の (X, L) についても, L の線形系の固定点集合が X の滑らかな超曲面であるような場合には機能するので, ネフな直線束 L が半正となるための一つの十分条件を, C の近傍の情報を用いて記述することができる. 簡単のため曲面の場合に述べれば, 以下のようになる:

定理 1 ([5]). *X を滑らかな射影曲面, $C \subset X$ を種数 g の滑らかな部分曲線とする. X 上のネフ直線束 L として, $\deg_C(L|_C) = 0$ なるものを考える. L が半正直線束と $\mathcal{O}_X(C)$ とのテンソルに分解するとき, C の自己交点数が $\min\{0, 2-2g\}$ 未満であれば, L は半正である.*

本研究は科研費 (課題番号:25-2869) 及び博士課程教育リーディングプログラムの助成を受けたものである.
2010 Mathematics Subject Classification: 32J25; 14C20.
* 〒153-8914　東京都目黒区駒場 3-8-1　東京大学大学院数理科学研究科
e-mail: tkoike@ms.u-tokyo.ac.jp

本講演では, ネフな直線束がいつ半正にならないか, という問題を考える. 研究当初知られていたほぼ唯一のネフだが半正でない例は, Demailly, Peternell, Schneiderによる例であった [1, 1.7]. この例は滑らかな楕円曲線 C_0 上のある線織面 X 上のものである. 彼らは X に対応する階数 2 のベクトル束が自明束の自明束による非自明な拡張である場合に, 線織面の射 $X \to C_0$ の切断 C に対応する X 上のネフ直線束 $\mathcal{O}_X(C)$ が半正でないことを示した. しかしその証明は, この具体例の特殊事情を用いた具体的かつ詳細な複素解析に基づくものであり, 同じ方針では他の例についての半正性判定は望めない状態にあった. 一方で, この例における C の X 中での近傍が, 次の意味で非自明な複素構造を持つことに着目する: 複素曲面に埋め込まれた滑らかなコンパクト曲線の近傍の複素構造の非自明さ反映する理論に上田による理論 [8] がある. 上田は, 一般の複素曲面 X と, X に埋め込まれた滑らかなコンパクト曲線 C として法線束 $N_{C/X}$ が平坦束であるものの組 (C, X) を, C が X 中に有限次のジェットの段階で複雑な複素構造を持つ場合である "有限型" と, そうでない場合である "無限型" とに分類した. さらに上田は組 (C, X) が有限型である時に, C 近傍における多重劣調和関数の増大度に制限があることを示した [8, 2]. この定理を応用することで, 以下を得る:

定理 2 ([6, 1.1]). 組 (C, X) が有限型であるとする. このとき, $f_C \in H^0(X, \mathcal{O}_X(C))$ を *canonical section* として, $|f_C|^{-2}$ は直線束 $\mathcal{O}_X(C)$ の半正曲率を持つ特異計量の中で最も特異性の小さいものである. 特にこのとき, $\mathcal{O}_X(C)$ はネフだが半正でない.

この結果とNeemanによる $u_n(C, X)$ の計算とを組み合わせることで, 上記のDemailly, Peternell, Schneiderによる結果の一般化を得 [6, 1.2], また線織面でない X 上にもネフだが半正でない L の例を得ることが出来た.

またこの結果の別の応用として, ネフよりより強い条件である強ネフという条件 (X のどの部分代数曲線上に制限しても L の次数が正であるという条件) に関する結果を得ることも出来た. L が強ネフであっても半豊富性とは限らないことは知られていたが [4, 10.6], 強ネフな L が半正であるかについては, 藤野によって強ネフだが半正でない例の候補が挙げられている [2, 5.9] のみで, まだ分かってはいなかった. 上記の結果を応用することで, 藤野による例が確かに強ネフだが半正でない例となっていることが示せる [6, 1.4].

参考文献

[1] J-P. Demailly, T. Peternell, M. Schneider, Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles, J. Algebraic Geom., **3** (1994), 295-345.

[2] O. Fujino, A transcendental approach to Kollár's injectivity theorem II, J. Reine Angew. Math. **681** (2013), 149–174.

[3] H. Grauert, Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, Math. Ann. **146** (1962), 331-368.

[4] R. Hartshorne, Ample subvarieties of algebraic varieties, Lecture Notes in Math. **156**, Springer-Verlag, Heidelberg (1970).

[5] T. Koike, "On minimal singular metrics of certain class of line bundles whose section ring is not finitely generated", to appear in Ann. Inst. Fourier (Grenoble).

[6] T. Koike, "On the minimality of canonically attached singular Hermitian metrics on certain nef line bundles", to appear in Kyoto J. Math.

[7] A. Neeman, Ueda theory: theorems and problems., Mem. Amer. Math. Soc. **81** (1989), no. 415.

[8] T. Ueda, On the neighborhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle, Math. Kyoto Univ., **22** (1983), 583–607.

局所環における Extended Ideal Membership アルゴリズムについて

鍋島克輔　(徳島大学)[*1]
田島慎一　(筑波大学)[*2]

$\mathbb{C}^n$ の原点 O の開近傍を X，$\mathcal{O}_X$ を X の正則関数の成す層とし，$\mathcal{O}_{X,O}$ を $\mathcal{O}_X$ の原点における茎とする．原点 O に台を持つ代数的局所コホモロジー群を $H^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ で表す．以下，n 変数 $x_1,\ldots,x_n$ を x と略記する．

多項式 $f_1,f_2,\ldots,f_s\in\mathbb{C}[x]$ が $\{a\in X|f_1(a)=f_2(a)=\cdots=f_s(a)=0\}=\{O\}$ を満たすと仮定する．このとき，収束冪級数環 $\mathcal{O}_{X,O}$ 上でのイデアル $\mathcal{J}=\langle f_1,\ldots,f_s\rangle$ の所属問題は，$f_1,f_2,\ldots,f_s$ により annihilate される代数的局所コホモロジー

$$H_{\mathcal{J}}=\{\psi\in H^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)|f_1\psi=f_2\psi=\cdots=f_s\psi=0\}$$

によって解くことが可能である [3, 4].

本講演では，収束冪級数環 $\mathcal{O}_{X,O}$ 上において，多項式 h がイデアル $\mathcal{J}$ に含まれているとき，

$$h=p_1f_1+p_2f_2+\cdots+p_sf_s$$

となる $p_1,\ldots,p_s\in\mathcal{O}_X$ を求める計算法 (Extended ideal membership アルゴリズム) を紹介する．また，$f_1,f_2,\ldots,f_s$ が係数にパラメータを持つ場合も考察し，パラメータ付き Extended ideal membership アルゴリズムも紹介する．

注意: 多項式環 $\mathbb{C}[x]$ 上での Extended ideal membership 問題はグレブナー基底を用いることで解くことが可能であるが，収束冪級数環 $\mathcal{O}_{X,O}$ では p_i が冪級数となるため簡単には求めることができない．

1. 計算法のアイデア

多項式 $f_1,f_2,\ldots,f_s$ により生成されるイデアルを，収束冪級数環 $\mathcal{O}_{X,O}$ で考えるとき $\mathcal{J}_O$ と表し，多項式環 $\mathbb{C}[x]$ で考えるとき J と表す．このとき，$J=\mathcal{J}_O\cap J_R$ となるような，$\{O\}\notin\mathbb{V}(J_R)$ で $J_R\subset\mathbb{C}[x]$ となるイデアル J_R が存在する．($\mathbb{V}(J_R)$ はイデアル J_R のゼロ点集合を表す．)

ここで，多項式 $h\in\mathcal{J}_0$ と仮定する．そうすると，$gh=q_1f_1+q_2f_2+\cdots+q_sf_s\in\mathbb{C}[x]$ となる，$g\in J_R$ の元と $q_1,\ldots,q_s\in\mathbb{C}[x]$ が存在する．(ただし，原点 O において $g\neq 0$ である．) もし，$g,q_1,\ldots,q_s$ が求められれば

$$h=\frac{q_1}{g}f_1+\frac{q_2}{g}f_2+\cdots+\frac{q_s}{g}f_s$$

となり，Extended ideal membership が収束冪級数環 $\mathcal{O}_{X,O}$ 上で解けたことになる．

本研究は科研費 (課題番号:24540162) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 14B15, 14F10
キーワード：algebraic local cohomology
[*1] 〒770-8502　徳島市南常三島町 1 − 1　徳島大学総合科学部
e-mail: nabeshima@tokushima-u.ac.jp
[*2] 〒305-8571 つくば市天王台 1 − 1 − 1　筑波大学 数理物質系 数学域
e-mail: tajima@math.tsukuba.ac.jp

今，Jのゼロ点として原点以外は座標軸上にゼロ点が存在しないとする．このとき，gは，$\mathbb{C}[x]$ 上での J のグレブナー基底を辞書式項順序で計算することで得られる．gが得られれば $gh, f_1, f_2, \ldots, f_s$ の syzygy を $\mathbb{C}[x]$ 上で計算することより $q_1, \ldots, q_s$ を求めることができる．この計算方法は，収束冪級数環 $\mathcal{O}_{X,O}$ 上の問題を多項式環 $\mathbb{C}[x]$ 上の問題として考え $\mathbb{C}[x]$ 上で計算するという画期的なものである．また，この方法は $f_1, \ldots, f_s$ がパラメータを含む時にも拡張可能である．

2. 計算例

多項式 $f = x^3 + y^{10} + 2xy^8$ のヤコビイデアル $\mathcal{J}_O = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle$ を考える．代数的局所コホモロジー類 $H_{\mathcal{J}_O}$ より，$xy^9 \in \mathcal{J}_O$ であることがわかる．このとき，ベクトル空間 $H_{\mathcal{J}_O}$ の次元は18である．今，$\dim\left(\mathbb{C}[x]/\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\rangle\right) = 22$ であることは用意に計算できるので，原点以外のゼロ点が $22 - 18 = 4$ 個存在する．$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle$ のグレブナー基底を $y \prec x$となる辞書式項順序で計算すると

$$\{128y^{15} + 75y^{11}, 8y^7x + 5y^9, 3x^2 + 2y^8\}$$

となり，yのみからなる式を見ると $128y^{15} + 75y^{11} = y^{11}(128y^4 + 75)$ より，4点の y 座標は明らかに $128y^4 + 75 = 0$を満たす式である．

ここで，$(128y^4 + 75)xy^9, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ の syzygy を $\mathbb{C}[x]$ 上で計算すると

$$[0, 16y^7x + 10y^9, -3x^2 - 2y^8], \quad [-2, -80y^7, 15x + 16y^6]$$

となるので，$-2(128y^4+75)xy^9 + (-80y^7)\frac{\partial f}{\partial x} + (15x+16y^6)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$である．したがって，

$$xy^9 = \frac{-80y^7}{2(128y^4 + 75)}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{15x + 16y^6}{2(128y^4 + 75)}\frac{\partial f}{\partial y}$$

となる．

パラメータ付き代数的局所コホモロジー，グレブナー基底，syzygy 計算は可能であるので ([1, 2])， パラメータ付きExtended ideal membershipも計算可能である．

参考文献

[1] K. Nabeshima, *On the computation of parametric Gröbner baes for modules and syzygies.* Japan journal of industrial and applied mathematics, **27**, No.2, (2010), 217–238.

[2] 鍋島克輔, 中村 弥生, 田島慎一, パラメータ付き零次元代数的局所コホモロジーを用いたパラメトリック・スタンダード基底計算について, 京都大学数理解析研究所講究録, Vol.1764, pp.102–125, (2011).

[3] S. Tajima and Y. Nakamura, *Annihilating ideals for an algebraic local cohomology class.* Journal of symbolic computation **44**, (2009), 435 – 448.

[4] S. Tajima, Y. Nakamura and K. Nabeshima, *Standard bases and algebraic local cohomology for zero dimensional ideals.* Advanced studies in pure mathematics **56**, (2009), 341 – 361.

収束冪級数環における integral dependence relation と局所コホモロジー

田島慎一　(筑波大学)[*1]
鍋島克輔　(徳島大学)[*2]

$\mathbb{C}^n$ の原点 O の近傍 X において正則な関数 f が定める超曲面を $S = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ とする．正則関数 f は原点を孤立特異点として持つとし, f の原点 O での, 冪級数環 $\mathcal{O}_{X,O}$ におけるヤコビイデアルを J で表す.

$$J = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \subset \mathcal{O}_{X,O}.$$

本講演では, 正則関数 $h \in \mathcal{O}_{X,O}$ と正の自然数 k に対し,

$$h^k + c_1 h^{k-1} + c_2 h^{k-2} + \cdots + c_{k-1} h + c_k = 0$$

を満たす, $c_i \in J^i, i = 1, 2, \ldots k$ が存在するか否か判定するという問題を一般化して考える.

1. 局所コホモロジーと annihilator

原点 O に台を持つ局所コホモロジーを $\mathcal{H}^n_{\{O\}}(\mathcal{O}_X)$ で表す:

$$\mathcal{H}^n_{\{O\}}(\mathcal{O}_X) = R^n\Gamma_{\{O\}}(\mathcal{O}_X).$$

ただし, $R^n\Gamma_{\{O\}}$ は関手 $\Gamma_{\{O\}}$ の n 番目の導来関手を表す (純余次元性を持つ). 収束冪級数環におけるイデアル $I^{(k)}_{(J,h)} \subset \mathcal{O}_{X,O}$ を

$$I^{(k)}_{(J,h)} = Jh^{k-1} + J^2 h^{k-2} + \cdots + J^{k-1} h + J^k$$

で定め, さらに

$$H^{(k)}_{(J,h)} = \{\psi \in \mathcal{H}^n_{\{O\}}(\mathcal{O}_X) \mid I^{(k)}_{(J,h)}\psi = 0\}$$

とおく. $H^{(k)}_{(J,h)}$ は $\mathcal{O}_{X,O}$-加群の構造を持つ $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間である. Grothendieck local duality より, 次の pairing は非退化であることが従うことに注意する.

$$\mathcal{O}_{X,O}/I^{(k)}_{(J,h)} \times H^{(k)}_{(J,h)} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

さて, $h^k(H^{(k)}_{(J,h)}) \subset \mathcal{H}^n_{\{O\}}(\mathcal{O}_X)$ の $\mathcal{O}_{X,O}$ における annihilator を $Ann^{(k)}_{(J,h)}$ とおく：

$$Ann^{(k)}_{(J,h)} = Ann_{\mathcal{O}_{X,O}}(h^k(H^{(k)}_{(J,h)})).$$

次が成立する.

本研究は科研費 (課題番号:24540162) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 14B15, 14F10
キーワード：integral closure, algebraic local cohomology
[*1] 〒305-8571 つくば市天王台 1 － 1 － 1　筑波大学 数理物質系 数学域
e-mail: `tajima@math.tsukuba.ac.jp`
[*2] 〒770-8502　徳島市南常三島町 1 ー 1　徳島大学総合科学部
e-mail: `nabeshima@tokushima-u.ac.jp`

命題 1. k は正の自然数，$h \in \mathcal{O}_{X,O}$ とする．このとき，次は同値である．

(i) $a \in Ann_{(J,h)}^{(k)}$.

(ii) $ah^k + c_1 h^{k-1} + c_2 h^{k-2} + \cdots + c_{k-1} h + c_k = 0$ を満たす $c_i \in J^i, i = 1, 2, \dots k$ が存在する.

2. 計算アルゴリズム

ここでは, $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ は原点 O を孤立特異点として持つ多項式であるとする. 以下に, ヤコビイデアルに関する integral dependence relation を求めるアルゴリズムを紹介する.

アルゴリズム

入力： $f, h \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, 正の自然数 k.

出力： $Ann_{(J,h)}^{(k)}$ のスタンダード基底.

Step1. $H_{(J,h)}^{(k)}$ を計算.

Step2. $h^k(H_{(J,h)}^{(k)})$ を計算.

Step3. $Ann_{(J,h)}^{(k)}$ のスタンダード基底を計算.

注意1. 収束冪級数環における syzygy 計算により, $a \in Ann_{(J,h)}^{(k)}$ に対し,

$$ah^k + c_1 h^{k-1} + c_2 h^{k-2} + \cdots + c_{k-1} h + c_k = 0$$

を満たす, $c_i \in J^i, i = 1, 2, \dots k$ を求めることができる.

注意2. これらの計算は, 多項式 f, h が係数にパラメータを含む場合に拡張できる.

参考文献

[1] M. Kashiwara, *B-functions and holonomic systems*, Invent. math. **38** (1976), 33–53.

[2] M. Kato, *The b function of a μ-constant deformation of* $x^7 + y^5$, Bull. College of Science, Univ. of the Ryukyus, **32** (1981), 5–10.

[3] M. Lejeune-Jalabert et B. Teissier, *Closure intégrale des idéaux et équisingularité, avec 7 compléments*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, **17**, No.4 (2008), 781–859.

[4] 鍋島克輔, 田島慎一, 代数的局所コホモロジーを用いたパラメータ付き拡張ideal membership 判定アルゴリズム, 投稿中, 京都大学数理解析研究所講究録 (2015).

[5] B. Teissier, *Introduction to equisingularity problems*, Proc. Sympos. Pure Math. **29** (1975), 593–632.

Böttcher coordinates at superattracting fixed points of holomorphic skew products

Kohei Ueno (Daido University)*

Let $p : (\mathbf{C}, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ be a holomorphic germ with a superattracting fixed point at the origin. Taking an affine conjugate, we may write $p(z) = z^\delta + O(z^{\delta+1})$, where $\delta \geq 2$. Let $p_0(z) = z^\delta$. Böttcher's theorem [1] asserts that there is a conformal function φ_p defined on an open neighborhood of the origin, with $\varphi_p \sim id$, that conjugates p to p_0. This function is called the Böttcher coordinate for p, and obtained as the limit of the compositions of p_0^{-n} and p^n, where p^n denotes the n-th iterate of p.

Böttcher's theorem does not extend to higher dimensions entirely as stated in [2]. In this talk we generalize this theorem to that of holomorphic skew products with superattracting fixed points at the origin in $\mathbf{C}^2$; by assigning suitable weights, we obtain an analogue of the one-dimensional Böttcher coordinates. This study is closely related to our previous paper [3], in which we obtained similar results on Böttcher coordinates for polynomial skew products near infinity.

Let $f : (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ be a holomorphic germ of the form $f(z, w) = (p(z), q(z, w))$, which is called a holomorphic skew product in this talk. We assume that it has a superattracting fixed point at the origin; that is, $f(0) = 0$ and $Df(0)$ is the zero matrix. Then we may write $p(z) = z^\delta + O(z^{\delta+1})$, where $\delta \geq 2$. On the other hand, let

$$q(z, w) = z^\gamma w^d + \sum b_j z^{n_j} w^{m_j},$$

where $d \geq 2$, $n_j \geq \gamma$, and $m_j > d$ if $n_j = \gamma$. In this talk we say that f is *trivial* if $m_j \geq d$ for any j, and that f is *non-trivial* if $m_j < d$ for some j. We may ask whether f is conjugate to f_0 or not, where $f_0(z, w) = (z^\delta, z^\gamma w^d)$. To answer this question, we define the rational number α associated with f as

$$\min \left\{ a \geq 0 \;\middle|\; \begin{array}{l} a\gamma + d \leq \delta \text{ and } a\gamma + d \leq an_j + m_j \text{ for} \\ \text{any integers } n_j \text{ and } m_j \text{ s.t. } z^{n_j} w^{m_j} \text{ is} \\ \text{a term in } q \text{ with a nonzero coefficient} \end{array} \right\}$$

if f is *non-trivial*, and as 0 if f is *trivial*. Let $U_r = \{|z| < r|w|^\alpha, |w| < r\}$ for small r. Although α may not be well-defined, the benefit of α is presented in the following lemma.

Lemma 1 *If α is well-defined, then $f \sim f_0$ on U_r as $r \to 0$, and $f(U_r) \subset U_r$.*

The notation $f \sim f_0$ means that both the first and second components of f and f_0 converge to 1 on U_r as r tends to 0, which is ensured by the condition $a\gamma + d \leq an_j + m_j$. We need the condition $a\gamma + d \leq \delta$ to ensure the invariance of U_r. If f is *non-trivial* and α is well-defined, then $\alpha > 0$. Hence U_r is a neighborhood of the origin only if f is *trivial*.

As the one-dimensional case, this lemma induces the Böttcher coordinate for f obtained as the limit of the compositions of f_0^{-n} and f^n.

Theorem 1 *If α is well-defined, then there is a biholomorphic map ϕ defined on U_r, with $\phi \sim id$ on U_r as $r \to 0$, that conjugates f to f_0.*

*e-mail: k-ueno@daido-it.ac.jp

Our idea is useful even if $d = 1$; we have the same lemma and theorem with the additional condition $\alpha < (\delta - 1)/\gamma$. Our results also hold for the nilpotent case. We say that the point x is nilpotent if the eigenvalues of $Df(x)$ are both zero. If the origin is a nilpotent fixed point of f, then it is superattracting for f^2.

Finally, we give a practical description of α. By definition, $\alpha = 0$ if f is *trivial*. Let f be *non-trivial*. Then the condition $a\gamma + d \leq an_j + m_j$ implies that $a \geq m_f > 0$, where

$$m_f = \max \left\{ \frac{d - m_j}{n_j - \gamma} \;\middle|\; \begin{array}{l} z^{n_j} w^{m_j} \text{ is a term in } q \text{ with a non-} \\ \text{zero coefficient such that } n_j > \gamma \end{array} \right\}.$$

Combining with the condition $a\gamma + d \leq \delta$, we can chart α as follows.

f *non-trivial*	$\gamma = 0$	$\gamma \neq 0$
$\delta > d$	m_f	m_f or $\nexists$
$\delta = d$	m_f	$\nexists$
$\delta < d$	$\nexists$	$\nexists$

The notation m_f means that α is well-defined and equal to m_f, and the notation $\nexists$ means that α is not well-defined. For the case $\delta > d$ and $\gamma \neq 0$, we have two subcases: α is well-defined and equal to m_f if $m_f \leq (\delta - d)/\gamma$, and α is not well-defined if $m_f > (\delta - d)/\gamma$.

References

[1] L. E. Böttcher, *The principal laws of convergence of iterates and their application to analysis* (Russian), Izv. Kazan. Fiz.-Mat. Obshch. **14** (1904), 137-152.

[2] J. H. Hubbard and P. Papadopol, *Superattractive fixed points in* $\mathbf{C}^n$, Indiana Univ. Math. J. **43** (1994), 321-365.

[3] K. Ueno, *Böttcher coordinates for polynomial skew products*, to appear in Ergodic Theory Dynam. Systems.

Local dynamics at an indeterminate point of Newton's method

篠原 知子 (東京都立産業技術高等専門学校)*

1. 序

この講演では，2変数正則写像 $F : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ の重根に対するニュートン法 NF の力学系について報告する．これまでに，ある F の重根に対するニュートン法 NF の不定点には，複数の力学系構造が存在することが示されていた．今回はこの不定点で blow up を行うことにより力学系構造の特徴付けを行う．

2. 準備

$F : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ を正則写像とし，$(x, y) \in \mathbf{C}^2$ とおく．$F(x, y)$ に対し，$(x_0, y_0) \in \mathbf{C}^2$ が単純根であるとは，$F(x_0, y_0) = (0, 0)$ と $|JF(x_0, y_0)| \neq 0$ が成り立つこととする．$(x_0, y_0) \in \mathbf{C}^2$ が重根であるとは，$F(x_0, y_0) = (0, 0)$ と $|JF(x_0, y_0)| = 0$ が成り立つこととする．$F(x, y) = (0, 0)$ の根を求めるため，ニュートン法という以下の有理写像を考える．

$$NF(x, y) := (x, y) - JF(x, y)^{-1}F(x, y)$$

$F(x, y)$ の単純根 (x_0, y_0) はニュートン法 $NF(x, y)$ の吸引不動点となり，(x_0, y_0) のある近傍内の全ての点の軌道は，(x_0, y_0) に収束する．一方，$F(x, y) = (0, 0)$ の重根 (x_0, y_0) は，ニュートン法 $NF(x, y)$ の不定点になる ([1], [2] 参照)．有理写像の不定点の任意の近傍の像は非有界になることが知られており，力学系構造を調べることは難しい．これより先，$(x_0, y_0) = (0, 0)$ とする．Y. Yamagishi [2] において，$(x, y) = (0, 0)$ におけるべき級数展開が，次の形をした正則写像 F について研究が行われている．

$$F(x, y) = (x + a_2x^2 + a_1xy + a_0y^2 + \cdots, y^2 - x^2 + \cdots),\ a_2 + a_0 \neq \pm a_1$$

この F に対するニュートン法 NF は次の形をしていることがわかる．

$$NF(x, y) = \left(\frac{h_1(x, y)}{2y + h_0(x, y)}, \frac{y^2 - x^2 + h_2(x, y)}{2y + h_0(x, y)} \right)$$

但し，$h_0(x, y)$ は2次以上，$h_1(x, y)$, $h_2(x, y)$ は3次以上の項を表す．この NF に対し，次が成り立つことが知られている．

Theorem(Y. Yamagishi [2]). $(x_0, y_0) = (0, 0)$ のある近傍 U が存在し，$U \setminus \{(x_0, y_0)\}$ は以下の3つの集合 A, B, C に分割される．

(1) A は $NF(A) \subset A$ を満たす attracting set と呼ばれる集合である．特に任意の $(x, y) \in A$ に対し，$x_n/y_n \to 0$ と $y_{n+1}/y_n \to 1/2$ が $n \to \infty$ とするとき成り立つ．但し $(x_n, y_n) := NF^n(x, y)$ である．

本研究は科研費 (基盤研究 (C), 課題番号:24540225) の助成を受けたものである．
2010 Mathematics Subject Classification: 32H50
キーワード：複素力学系，不定点，不変集合
* 〒140-0011 東京都品川区東大井1-10-40 東京都立産業技術高等専門学校
e-mail: sinohara@s.metro-cit.ac.jp

(2) B は $B := \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$ と定義される bursting set と呼ばれる集合である．
但し $B_0 := U \setminus NF^{-1}(U),\ B_{n+1} := U \cap NF^{-1}(B_n)\ (n \geq 0)$ である．

(3) C は $C = \bigcup_{j \in \{1,2\}^{\mathbf{N}}} V_j$ と定義されるカントールブーケと呼ばれる集合である．
但し $\{V_j\}_{j \in \{1,2\}^{\mathbf{N}}}$ は (x_0, y_0) の super stable manifolds の族である．

今回の講演では，Y. Yamagishi[2] の中で扱われたニュートン法の特別な場合である，以下の有理写像 f の不定点 $p_0 = (0,0)$ の近傍における力学系構造について報告を行う．

$$f(x,y) = \left(\frac{x^3}{2y + x^2},\ \frac{y^2 - x^2 + x^3}{2y + x^2} \right)$$

これまで，有理写像の不定点における力学系については，[3], [4] で研究を進めてきた．特に不定点 p_0 においてblow up を繰り返し行うことで不定点のカントールブーケを構成してきた．今回はこの手法を上記の有理写像 f に対して用いる．不定点 p_0 において，有理写像 f の不定性を解消するためのblow up を行う．その過程で得られる除外曲線上の力学系構造を調べることにより，A, B, C を再構成する．

参考文献

[1] J. H. Hubbard and P. Papadopol, *Newton's method applied to two quadratic equationsin C^2 viewed as a global dynamical systems*, Amer. Math. Soc. vol. 191 no. 891(2008)

[2] Y. Yamagishi, *On the local convergence of Newton's metod to a multiple root*, J. Math. Soc. Japan, Vol. 55 (2003), 898–908.

[3] T. Shinohara, *Another construction of a Cantor bouquet at a fixed indeterminate point*, Kyoto J. Math. 50(2010), no.1, 205–224.

[4] T. Shinohara, *Some family of center manifolds of a fixed indeterminate point*, KODAI MATH. J. vol. 37-2(2014), 434-452.

光錐型の境界をもつ非有界等質領域の自己同型群について

椋野　純一　(名古屋大学)[*1]
永田　義一　(名古屋大学)[*2]

当講演では, 光錐型の境界をもつ非有界等質領域の自己同型群を決定することができたので報告する.

R.Arens [1] の定理により, 複素多様体の自己同型群は位相群の構造をもつことが知られている. そこで, 次の問題が生じる:

問題. 複素多様体の自己同型群はいつ Lie 群の構造をもつか?

$\mathbb{C}^n$ 内の有界領域の自己同型群は H.Cartan [4] により Lie 群になることが示された. また, S.Bochner–D.Montgomery [2] らによりコンパクト複素多様体の自己同型群は Lie 群になることが示された. しかしながら, 非コンパクトな複素多様体の場合, 必ずしも Lie 群になるとは限らない. 実際, もし $n \geq 2$ ならば, $\mathbb{C}^n$ の自己同型群が Lie 群にはならないことはよく知られている. 現在まで, $\mathbb{C}^n$ のさまざまな非有界等質領域に関する自己同型群の構造や特徴付けについて研究がなされ, R.Penney [7], M.Eastwood–A.Isaev [5], J.Byun–A.Kodama–S.Shimizu [3] 等によって研究成果があげられている.

我々は以下で定義された非有界等質領域 $C^{1,n}$ や $D^{1,n}$ の自己同型群を考察した:

$$D^{1,n} = \{(z_0, z_1, z_2, \cdots z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid -|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2 > 0\}.$$
$$C^{1,n} = \{(z_0, z_1, z_2, \cdots z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid -|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2 < 0\}.$$

非有界等質領域 $C^{1,n}$ や $D^{1,n}$ に自然に推移的に作用するリー群 $GU(1,n)$ を以下のように定義する:

$$GU(1,n) = \{A \in GL(n+1, \mathbb{C}) \mid A^*JA = \nu J,\ \nu \text{はある正の実数}\}.$$

ただし, $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$ で, E_n は単位行列である. 我々は次の定理を得ることができた:

定理 ([6]). 以下のことが成り立つ:

- $D^{1,n}$ の自己同型群は $GU(1,n)$ であり, Lie 群になる.
- $C^{1,n}$ の自己同型群は Lie 群にならない. 実際, 任意の $f = (f_0, f_1, \cdots f_n) \in \mathrm{Aut}(C^{n,1})$ は以下のように書ける:

$$f_0(z_0, z_1, z_2, \cdots z_n) = c\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}, \cdots, \frac{z_n}{z_0}\right) z_0^{\pm 1}$$
$$f_i(z_0, z_1, z_2, \cdots z_n) = f_0(z_0, z_1, z_2, \cdots z_n) \frac{\sum_{j=0}^n a_{i,j} z_j}{\sum_{j=0}^n a_{0,j} z_j} \quad (i = 1, \cdots, n).$$

ただし, c は $\mathbb{B}^n$ 上の非ゼロ正則関数とし, 行列 $(a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ は $PU(1,n)$ の元である.

[*1] e-mail: m08043e@math.nagoya-u.ac.jp
[*2] e-mail: m10035y@math.nagoya-u.ac.jp

上記の定理から, $C^{1,n}$ や $D^{1,n}$ の自己同型群の不連続部分群を調べることでコンパクト商に関する次の系が導かれる.

系 ([6]). $C^{1,n}$ のコンパクト商は存在するが, $D^{1,n}$ のコンパクト商は存在しない.

参考文献

[1] R. Arens, *Topologies for homeomorphism groups*, Amer. J. Math. **68**, (1946), 593–610.

[2] S. Bochner and D. Montgomery, *Groups on analytic manifolds*, Ann. of Math. (2) **48**, (1947), 659–669.

[3] J. Byun, A. Kodama, and S. Shimizu, *A group-theoretic characterization of the direct product of a ball and punctured planes*, Tohoku Math. J. (2) **62** (2010), no. 4, 485–507.

[4] H. Cartan, *Sur les groupes de transformations analytiques*, Actualitités Sci. Ind. **198**, (1935).

[5] M. Eastwood and A. Isaev, *Examples of unbounded homogeneous domains in complex space*, Sci. China Ser. A **48** (2005), suppl., 248–261.

[6] J. Mukuno and Y. Nagata, *in preparation.*

[7] R. Penney, *The structure of rational homogeneous domains in* $\mathbf{C}^n$, Ann. of Math. (2) **126** (1987), no. 2, 389–414.

The autormophism group of a certain unbounded Reinhardt domain

山 盛 厚 伺 (POSTECH)[*1]
Hyeseon Kim (POSTECH)
Van Thu Nihn (POSTECH)

1. 背景

本講演の目的は非有界領域

$$D_{n,m} = \{(z,\zeta) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m : \|\zeta\|^2 < e^{-s\|z\|^2}\}$$

の正則自己同型群を記述することである $(s > 0)$. 領域 $D_{n,m}$ の定義より直ちに $\mathbb{U} = \{(z,0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m\}$ が部分集合として含まれることが観察される. 従い, $D_{n,m}$ はいかなる有界領域とも正則同値とならない. このような背景により, 以下に記したカルタンの定理が $D_{n,m}$ で成立するかどうかの判別は非自明な問となる.

定理 1 (カルタンの定理) 有界な円型領域 (i.e. $z \mapsto e^{i\theta}z$ で不変な領域) D は原点を含むとする. このとき原点を保存する D の正則自己同型写像は線型写像である.

本講演では次節で説明する Bergman 写像を用いて $D_{n,m}$ に対してもカルタンの定理が成立することを述べる. §3 ではそれを応用して, $D_{n,m}$ の正則自己同型群を決定する. 本講演は H. Kim 氏, V. T. Nihn 氏との共同研究に基づく.

2. Bergman 写像

以下, 議論の簡易化のため領域 D は常に原点を含む円型領域と仮定する. まず記号の導入を行う. 領域 D の Bergman 核を K_D, 行列 T_D を

$$T_D(z,w) = \left(\frac{\partial^2 \log K_D(z,w)}{\partial z_\alpha \partial \overline{w}_\beta}\right)_{\alpha,\beta=1,\dots,n}, \quad \text{for } K_D(z,w) \neq 0,$$

により定義する. 行列 T_D は対角成分上 $z = w$ では常に定義されるが, それ以外の点では必ずしも well-defined とは限らないことに注意する. 本講演で重要な役割を果たす Bergman 写像 σ_0^D は次で定義される.

$$\sigma_0^D(z) = T_D(0,0)^{-1/2} \mathrm{grad}_{\overline{w}} \frac{K_D(z,w)}{K_D(0,w)}\bigg|_{w=0}. \tag{1}$$

Bergman 写像は K_D と T_D により定義されているため領域 D のみに依存する. そして, この写像は次の可換図式を満たす [1].

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\sigma_0^D"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D \arrow[d, "\sigma_0^D"] \\ \mathbb{C}^n \arrow[r, "\exists L"] & \mathbb{C}^n. \end{tikzcd}$$

ただし, f は原点を固定する正則自己同型写像, L はユニタリ変換. 有界な円型領域の場合は $K_D(z,0) > 0$ かつ $T_D(0,0)$ は positive definite となる. これにより写像 σ_0^D は

[*1] e-mail: `yamamori@postech.ac.kr, ats.yamamori@gmail.com`

well-definedであり, さらに線型な双正則写像となることも判明する. これと上記の可換図式より, $\mathrm{Iso}_0(D)$ の元が線型写像となることが帰結される. 非有界領域の場合も σ_0^D が well-definedとなるような領域 D であれば同様の議論が成立する. ここでは詳細は省くが, 論文[3]において得られた $D_{n,m}$ のBergman核の表示を用いると $\sigma_0^{D_{n,m}}$ がwell-definedとなることが確認される. これにより, 次の結果が得られた.

定理 2 原点を保存するような $D_{n,m}$ の正則自己同型写像は線型写像である.

注意 1 円型領域より広い領域のクラスである準円型領域では一般に σ_0^D は多項式写像となる. 文献[4]では $\mathbb{C}^2$ 内の準円型領域に対するBergman写像 σ_0^D が線型となる条件が考察されている.

3. $D_{n,m}$ の正則自己同型群

前節で $D_{n,m}$ でもカルタンの定理が成立することが確かめられた. 正則自己同型群の記述のためにはそれに加えて次の補題が必要である (証明は文献[2]参照).

補題 1 集合 $\mathbb{U}$ は任意の正則自己同型写像 $\varphi \in \mathrm{Aut}(D_{n,m})$ で不変である (i.e. $\varphi(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$).

次の補題は $D_{n,m}$ の線型な正則自己同型写像の特徴付けを与える.

補題 2 領域 $D_{n,m}$ の線型な正則自己同型写像 ψ はユニタリ変換 $U \in U(n), U' \in U(m)$ を用いて, $\psi(z,\zeta) = (Uz, U'\zeta)$ で与えられる.

写像 f を $D_{n,m}$ における任意の正則自己同型写像とする. このとき, 補題1よりある $v_0 \in \mathbb{C}^n$ が存在し $f(0,0) = (v_0, 0)$ となる. ここで写像 φ_v を次のように定義する:

$$\varphi_v : (z,\zeta) \mapsto (z+v, e^{-\mu\langle z,\zeta\rangle - \frac{\mu}{2}\|v\|^2}\zeta), \quad v \in \mathbb{C}^n.$$

この写像が $D_{n,m}$ の正則自己同型写像となることは直ちに確認される. 写像 φ_{-v_0} と f を合成すると $(\varphi_{-v_0} \circ f)(0) = 0$ となるため定理2より $\varphi_{-v_0} \circ f$ は線型である. 以上の議論と補題2より次の結果が得られた.

定理 3 領域 $D_{n,m}$ の正則自己同型群は次の写像で生成される:

$$\begin{aligned} &\varphi_U : (z,\zeta) \mapsto (Uz, \zeta), \\ &\varphi_{U'} : (z,\zeta) \mapsto (z, U'\zeta), \\ &\varphi_v : (z,\zeta) \mapsto (z+v, e^{-\mu\langle z,\zeta\rangle - \frac{\mu}{2}\|v\|^2}\zeta). \end{aligned}$$

ただし, $U \in U(n), U' \in U(m), v \in \mathbb{C}^n$.

参考文献

[1] H. Ishi and C. Kai, *The representative domain of a homogeneous bounded domain*, Kyushu J. Math. 64 (2010), 35–47.

[2] H. Kim, V. T. Ninh and A. Yamamori, *The automorphism group of a certain unbounded non-hyperbolic domain*, J. Math. Anal. Appl. 409 (2014), 637–642.

[3] A. Yamamori, *The Bergman kernel of the Fock-Bargmann-Hartogs domain and the polylogarithm function*, Complex Var. Elliptic Equ. 58 (2013), no. 6, 783–793.

[4] A. Yamamori, *Automorphisms of normal quasi-circular domains*, Bull. Sci. Math., 138 (2014), 406–415.

On the holomorphic automorphism group of a generalized Hartogs triangle and a related question

Akio Kodama (Kanazawa University)*

Abstract

In this talk, we completely determine the structure of the holomorphic automorphism group of a generalized Hartogs triangle and obtain natural generalizations of some results due to Landucci and Chen-Xu. These give affirmative answers to some open problems posed by Jarnicki and Pflug. Also we discuss some related question with our results.

For any $\ell_i, m_j \in \mathbf{N}$ and any $0 < p_i, q_j \in \mathbf{R}$ with $1 \le i \le I$, $1 \le j \le J$, we set

$$\ell = (\ell_1, \dots, \ell_I),\ m = (m_1, \dots, m_J),\ p = (p_1, \dots, p_I),\ q = (q_1, \dots, q_J)$$

and define a *generalized Hartogs triangle* $\mathcal{H}^{p,q}_{\ell,m}$ in $\mathbf{C}^N$ by

$$\mathcal{H}^{p,q}_{\ell,m} = \left\{ (z,w) \in \mathbf{C}^N \ ; \ \sum_{i=1}^{I} \|z_i\|^{2p_i} < \sum_{j=1}^{J} \|w_j\|^{2q_j} < 1 \right\},$$

where

$$\begin{aligned} &z = (z_1, \dots, z_I) \in \mathbf{C}^{\ell_1} \times \cdots \times \mathbf{C}^{\ell_I} = \mathbf{C}^{|\ell|},\ |\ell| = \ell_1 + \cdots + \ell_I, \\ &w = (w_1, \dots, w_J) \in \mathbf{C}^{m_1} \times \cdots \times \mathbf{C}^{m_J} = \mathbf{C}^{|m|},\ |m| = m_1 + \cdots + m_J, \\ &\text{and } \ \mathbf{C}^N = \mathbf{C}^{|\ell|} \times \mathbf{C}^{|m|},\ N = |\ell| + |m|. \end{aligned}$$

We may always assume that $p_2, \dots, p_I \neq 1,\ q_2, \dots, q_J \neq 1$ if $I \ge 2$ or $J \ge 2$.

The main purpose of this talk is to announce that, by using our previous result [Complex Var. Elliptic Equ. 59 (2014)], we can establish the following theorems (to appear in Tohoku Math. J.):

THEOREM 1. *Let $\mathcal{H}^{p,q}_{\ell,m}$ be a generalized Hartogs triangle in $\mathbf{C}^{|\ell|} \times \mathbf{C}^{|m|}$ with $|m| = 1$. Then the holomorphic automorphism group* $\mathrm{Aut}(\mathcal{H}^{p,q}_{\ell,m})$ *consists of all transformations*

$$\Phi : (z_1, \dots, z_I, w) \longmapsto (\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_I, \tilde{w})$$

of the following form:

(I) $p_1 = 1$, $q \in \mathbf{N}$: *In this case, we have*

$$\tilde{z}_1 = w^q H(z_1/w^q), \quad \tilde{z}_i = \gamma_i(z_1/w^q) A_i z_{\sigma(i)} \ (2 \le i \le I), \quad \tilde{w} = Bw$$

(*think of z_i as column vectors*), *where*

The author is partially supported by the Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No. 24540166, the Ministry of Education, Science, Sports and Culture, Japan.
2000 Mathematics Subject Classification: Primary 32A07; Secondary 32M05.
Keywords: Holomorphic automorphism groups, Generalized complex ellipsoids, Generalized Hartogs triangles..
*e-mail: kodama@se.kanazawa-u.ac.jp

(1) $H \in \mathrm{Aut}(B^{\ell_1})$, *where* B^{ℓ_1} *denotes the unit ball in* $\mathbf{C}^{\ell_1}$;
(2) γ_i *are nowhere vanishing holomorphic functions on* B^{ℓ_1} *defined by*

$$\gamma_i(z_1) = \left(\frac{1-\|a\|^2}{\big(1-\langle z_1, a\rangle\big)^2}\right)^{1/2p_i}, \quad a = H^{-1}(o) \in B^{\ell_1},$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *denotes the standard Hermitian inner product on* $\mathbf{C}^{\ell_1}$ *and* $o \in B^{\ell_1}$ *is the origin of* $\mathbf{C}^{\ell_1}$;
(3) $A_i \in U(\ell_i)$, *the unitary group of degree* ℓ_i, *and* $B \in \mathbf{C}$ *with* $|B| = 1$;
(4) σ *is a permutation of* $\{2, \ldots, I\}$ *satisfying the following*: $\sigma(i) = s$ *can only happen when* $(\ell_i, p_i) = (\ell_s, p_s)$.

(II) $p_1 \neq 1$ *or* $q \notin \mathbf{N}$: *In this case, we have*

$$\tilde{z}_i = A_i z_{\sigma(i)} \ (1 \le i \le I), \quad \tilde{w} = Bw,$$

where $A_i \in U(\ell_i)$, $B \in \mathbf{C}$ *with* $|B| = 1$, *and* σ *is a permutation of* $\{1, \ldots, I\}$ *satisfying the condition*: $\sigma(i) = s$ *can only happen when* $(\ell_i, p_i) = (\ell_s, p_s)$.

THEOREM 2. *Let* $\mathcal{H}^{p,q}_{\ell,m}$ *be a generalized Hartogs triangle in* $\mathbf{C}^{|\ell|} \times \mathbf{C}^{|m|}$ *with* $|m| \ge 2$. *Then the holomorphic automorphism group* $\mathrm{Aut}(\mathcal{H}^{p,q}_{\ell,m})$ *consists of all transformations*

$$\Phi : (z_1, \ldots, z_I, w_1, \ldots, w_J) \longmapsto (\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_I, \tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_J)$$

of the form

$$\tilde{z}_i = A_i z_{\sigma(i)} \ (1 \le i \le I), \quad \tilde{w}_j = B_j w_{\tau(j)} \ (1 \le j \le J)$$

(*think of* z_i, w_j *as column vectors*), *where* $A_i \in U(\ell_i)$, $B_j \in U(m_j)$ *and* σ, τ *are permutations of* $\{1, \ldots, I\}, \{1, \ldots, J\}$ *respectively, satisfying the condition*: $\sigma(i) = s$, $\tau(j) = t$ *can only happen when* $(\ell_i, p_i) = (\ell_s, p_s)$, $(m_j, q_j) = (m_t, q_t)$.

Considering the special case where all the $\ell_i, m_j = 1$ in Theorems 1 and 2, we obtain natural generalizations of some results due to Landucci [Ann. Mat. Pura Appl. 155 (1989)] and Chen-Xu [Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 18 (2002)]. In particular, our Theorems 1 and 2 give affirmative answers to some open problems posed in Jarnicki and Pflug [EMS Textbooks in Math., Euro. Math. Soc., Zürich, 2008, p.213].

Next, we consider a *generalized complex ellipsoid*

$$\mathcal{E} = \left\{(z_1, \ldots, z_K) \in \mathbf{C}^{n_1} \times \cdots \times \mathbf{C}^{n_K} ;\ \sum_{k=1}^{K} \|z_k\|^{2p_k} < 1\right\},$$

where $n_k \in \mathbf{N}$, $0 < p_k \in \mathbf{R}$ $(1 \le k \le K)$. Then there is a natural question as follows:

QUESTION. *Is any proper holomorphic self-mapping of* $\mathcal{E}$ *an automorphism?*

This will be important in the study of proper holomorphic self-mappings of $\mathcal{H}^{p,q}_{\ell,m}$.

In the case where $p_k \in \mathbf{N}$ for all k, this question is affirmatively solved by Bedford-Bell [Math. Ann. 261 (1982)]; and also, in the case where $n_k = 1$ for all k, this is solved affirmatively by Dini-Primicerio [Ann. Mat. Pura Appl. 158 (1991)]. Finally we would like to remark the following fact: Consider the generalized complex ellipsoid

$$\mathcal{E}(k, \alpha) = \left\{(z, w) \in \mathbf{C}^k \times \mathbf{C}^{n-k} ;\ \|z\|^2 + \|w\|^{2\alpha} < 1\right\} \quad (0 < \alpha \in \mathbf{R},\ 1 \le k \le n-2)$$

in $\mathbf{C}^n$. Then, by using our previous result [Tohoku Math. J. 51 (1999)], we can show that *any proper holomorphic self-mapping of* $\mathcal{E}(k, \alpha)$ *is necessarily an automorphism.*

Sufficient conditions for univalence and starlikeness in complex Banach spaces

Tatsuhiro HONDA (Hiroshima Institute of Technology, Japan)[*1]
Ian GRAHAM (University of Toronto, Canada)
Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University, Japan)[*2]
Gabriela KOHR (Babeş-Bolyai University, Romania)
Kwang Ho SHON (Pusan National University, Korea)

Let X be a complex Banach space and let $h = h(z,t) : B \times [0,\infty) \to X$ be a mapping which satisfies the following conditions:

(i) $h(\cdot,t) \in \mathcal{M}$ for $t \geq 0$; (ii) h is continuous on $B \times [0,\infty)$.

Then for each $s \geq 0$ and $z \in B$, the initial value problem

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -h(v,t), \quad \forall\, t \geq s, \quad v(z,s,s) = z, \tag{1}$$

has a unique solution $v = v(z,s,t)$ such that $v(\cdot,s,t)$ is a univalent Schwarz mapping, $v(z,s,\cdot)$ is Lipschitz continuous on $[s,\infty)$ uniformly with respect to $z \in \overline{B}_r$, $r \in (0,1)$, and $Dv(0,s,t) = e^{s-t}I$ for $t \geq s \geq 0$. Moreover, the limit $\lim_{t\to\infty} e^t v(z,s,t) = f(z,s)$ exists uniformly on each closed ball $\overline{B}_r$ for $r \in (0,1)$ and $s \geq 0$. Also, $f(z,t)$ is a Loewner chain.

The above existence and uniqueness result for solutions to the initial value problem (1) is due to Poreda [15, Lemmas 4.3-4.5], and is a generalization to complex Banach spaces of [12, Theorem 2.1 and Lemma 2.2]. Note that Poreda initially required the condition $\|h(z,t)\| \leq M(r)$ for $\|z\| \leq r$ and $t \geq 0$, where $M(r)$ is a positive constant. This condition is satisfied, in view of [7, Lemma 2].

In view of the above, we may consider the notion of smooth parametric representation on complex Banach spaces (cf. [2], [13] and [14], for $X = \mathbb{C}^n$; cf. [4] and [8]).

Definition 1. *Let X be a complex Banach space and let $f \in H(B)$ be a normalized mapping. We say that f has smooth parametric representation ($f \in \tilde{S}^0(B)$) if there exists a mapping $h = h(z,t) : B \times [0,\infty) \to X$ which satisfies the conditions (i) and (ii) such that $f(z) = \lim_{t\to\infty} e^t v(z,t)$ uniformly on each closed ball $\overline{B}_r$ for $r \in (0,1)$, where $v = v(z,t)$ is the unique Lipschitz continuous solution on $[0,\infty)$ of the initial value problem $\frac{\partial v}{\partial t} = -h(v,t), \quad \forall\, t \geq 0, \quad v(z,0) = z$, for each $z \in B$.*

Graham, Hamada and Kohr [3, Lemmas 2.2 and 5.2] obtained a sufficient condition for smooth parametric representation when X is a complex Hilbert space.

Theorem 2. *Let X be a complex Hilbert space. Let $f \in H(B)$ be a normalized mapping. If $\|Df(z) - I\| < 1$, $z \in B$, then f is biholomorphic on B and $f \in \tilde{S}^0(B)$. In particular, if $\sum_{m=2}^{\infty} m\|A_m\| \leq 1$, where $A_m = \frac{1}{m!}D^m f(0)$, $m \geq 2$, then f is biholomorphic on B and $f \in \tilde{S}^0(B)$.*

This work has been supported by JSPS KAKENHI Grant Number 25400151.
2000 Mathematics Subject Classification: 32H99, 30C45, 46G20.
Keywords: biholomorphic mapping, starlike mapping. .

[*1] e-mail: thonda@cc.it-hiroshima.ac.jp
[*2] e-mail: h.hamada@ip.kyusan-u.ac.jp

The following provides a sufficient condition of starlikeness on the unit ball B (see [9, Theorem 2], [10, Lemma 3.1]). This is an improvement of [3, Theorem 2.4].

Theorem 3. *Let X be a complex Hilbert space. Let $f \in H(B)$ be a normalized mapping and let $A_m = \dfrac{1}{m!}D^m f(0)$ for $m \geq 2$. If $\sum_{m=2}^{\infty} m\|A_m\| \leq \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, then $f \in S^*(B)$.*

In this talk, we discuss sufficient conditions for univalence or starlikeness in X.

References

[1] I. Graham, H. Hamada, T. Honda, G. Kohr, K. H. Shon,Growth, distortion and coefficient bounds for Carathéodory families in $\mathbb{C}^n$ and complex Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. 416-1 (2014) 449 – 469.

[2] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, Parametric representation of univalent mappings in several complex variables, Canadian J. Math. 54(2) (2002) 324–351.

[3] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, Radius problems for holomorphic mappings on the unit ball in $\mathbb{C}^n$, Math. Nachr. 279 (2006) 1474–1490.

[4] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr, Univalent subordination chains in reflexive complex Banach spaces, Contemp. Math. 591 (2013) 83–111.

[5] K. Gurganus, Φ-like holomorphic functions in $\mathbb{C}^n$ and Banach spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 205 (1975) 389–406.

[6] H. Hamada, T. Honda, G. Kohr, Growth theorems and coefficient bounds for univalent holomorphic mappings which have parametric representation, J. Math. Anal. Appl. 317 (2006) 302–319.

[7] H. Hamada, G. Kohr, Φ-like and convex mappings in infinite dimensional spaces, Rev. Roum. Math. Pures Appl. 47 (2002) 315–328.

[8] H. Hamada, G. Kohr, Loewner chains and the Loewner differential equation in reflexive complex Banach spaces, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 49 (2004) 247–264.

[9] M.S. Liu, Y. Zhu, On some sufficient conditions for starlikeness of order α in $\mathbb{C}^n$, Taiwanese J. Math. 10 (2006) 1169–1182.

[10] M.S. Liu, Y. Zhu, The radius of convexity and a sufficient condition for starlike mappings, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 35(2) (2012) 425–433.

[11] T.H. MacGregor, Functions whose derivative has a positive real part, Trans. Amer. Math. Soc. 104 (1962) 532–537.

[12] J.A. Pfaltzgraff, Subordination chains and univalence of holomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$, Math. Ann. 210 (1974) 55–68.

[13] T. Poreda, On the univalent holomorphic maps of the unit polydisc of $\mathbb{C}^n$ which have the parametric representation, I - the geometrical properties, Ann. Univ. Mariae Curie Sklodowska, Sect.A 41 (1987) 105–113.

[14] T. Poreda, On the univalent holomorphic maps of the unit polydisc of $\mathbb{C}^n$ which have the parametric representation, II - necessary and sufficient conditions, Ann. Univ. Mariae Curie Sklodowska, Sect.A 41 (1987) 114–121.

[15] T. Poreda, On generalized differential equations in Banach spaces, Dissertationes Math. 310 (1991) 1–50.

[16] W. Rogosinski, On the coefficients of subordinate functions, Proc. London Math. Soc. 48 (1943) 48–82.

[17] T.J. Suffridge, Starlikeness, convexity and other geometric properties of holomorphic maps in higher dimensions, Lecture Notes in Math. 599 146–159, Springer-Verlag, 1977.

[18] Q.H. Xu, T.S. Liu, On biholomorphic mappings in complex Banach spaces, Rocky Mountain J. Math. 41 (2011) 2069–2086.

Hyperbolic span and pseudoconvexity

柴　雅和　(広島大学)*1
山口　博史　(滋賀大学)*2
濱野　佐知子　(福島大学)*3

1. Abstract

M. Schiffer (1943) showed that a *planar* open Riemann surface R admits Schiffer span $s(R,\zeta)$ with respect to a point $\zeta \in R$. Recently, S. Hamano in [1] established a variation formula of $s(R(t),\zeta(t))$ for the moving planar open Riemann surface $R(t)$ with complex parameter t in the unit disk Δ in $\mathbf{C}_t$. This formula implies the intimate relation between the Schiffer span and the pseudoconvexity. Using this formula concerning the several complex variables she showed in [2] a remarkable one complex variable property of the Schiffer span.

M. Shiba (1993) showed that an open Riemann surface R of *genus one* admits the hyperbolic span $\sigma_H(R)$. We establish the variation formula of $\sigma_H(t) := \sigma_H(R(t))$ for the moving open Riemann surface $R(t)$ of genus one with $t \in \Delta$. We show that this formula also implies an intimate relation between the hyperbolic span and the pseudoconvexity.

2. Hyperbolic span

Let R_0 be an open Riemann surface of genus one and $\chi_0 = \{A_0, B_0\}$ be a fixed canonical homology basis of R_0 modulo dividing cycles. Consider a triplet (R,χ,i) consisting of (closed) torus R, a canonical homology basis $\chi = \{A, B\}$ of R and a conformal embedding i of R_0 into R such that $i(A_0)$ (resp. $i(B_0)$) is homologous to the cycle A (resp. B) of R. We say that two such triplets (R,χ,i) and (R',χ',i') are equivalent if there is a conformal mapping f of R onto R' with $f \circ i = i'$. Each equivalence class is called a *closing* of (R_0,χ_0) and is denoted by $[R,\chi,i]$. As well-known, each closing $[R,\chi,i]$ carries a unique holomorphic differential ϕ^R with $\int_A \phi^R = 1$, which will be called the *normal differential* on $[R,\chi,i]$. We put $\tau[R,\chi,i] = \int_B \phi^R$, which is referred to as the modulus of $[R,\chi,i]$. Denote by $\mathcal{C}(R_0,\chi_0)$ the set of closings of (R_0,χ_0) and put

$$\mathcal{M}(R_0,\chi_0) = \{\tau \in \mathbf{C} \mid \tau = \tau[R,\chi,i],\ [R,\chi,i] \in \mathcal{C}(R_0,\chi_0)\}.$$

The set $\mathcal{M}(R_0,\chi_0)$ obviously is in the upper half plane $\mathbf{H}$.

Theorem 1. (M. Shiba [3] and [4])

(1) $\mathcal{M}(R_0,\chi_0)$ *is a closed disk (which may degenerate to a singleton); there exists* $\tau^* \in \mathbf{H}$ *and* $\rho \in \mathbf{R}$ *such that* $0 \le \rho < \Im\tau^*$ *and*

$$\mathcal{M}(R_0,\chi_0) = \{\tau \in \mathbf{H} \mid \ |\tau - \tau^*| \le \rho\}.$$

(2) The hyperbolic diameter $\sigma_H(R_0)$ *of* $\mathcal{M}(R_0,\chi_0)$ *in* $\mathbf{H}$ *is determined solely by the surface* R_0*; it is invariant under any change of canonical homology bases modulo dividing cycles of* R_0*.*

We call $\mathcal{M}(R_0,\chi_0)$ the *moduli disk* for (R_0,χ_0) and $\sigma_H(R_0)$ the *hyperbolic span* for R_0.

*1 e-mail: masaka_zu_hause@muc.biglobe.ne.jp
*2 e-mail: h.yamaguchi@s2.dion.ne.jp
*3 e-mail: hamano@edu.fukusima-u.ac.jp

3. Variation of hyperbolic span

Let $(\widetilde{\mathcal{R}}, \pi, \Delta)$ be a holomorphic family such that $\widetilde{\mathcal{R}}$ is a two-dimensional complex manifold; $\Delta = \{t \in \mathbf{C}_t \mid |t| < r\}$; and π is a holomorphic projection from $\widetilde{\mathcal{R}}$ onto Δ. We assume that each fiber $\widetilde{R}(t) = \pi^{-1}(t)$, $t \in \Delta$ is non-compact, irreducible and non-singular in $\widetilde{\mathcal{R}}$, so that $\widetilde{R}(t)$ is an open Riemann surface. Let $(\mathcal{R}, \pi, \Delta)$ be a sub-holomorphic family of $(\widetilde{\mathcal{R}}, \pi, \Delta)$ such that $\mathcal{R} \subset \widetilde{\mathcal{R}}$; $\partial\mathcal{R}$ is C^ω smooth in $\widetilde{\mathcal{R}}$; $R(t) = \pi^{-1}(t) \subset \widetilde{R}(t)$, $t \in \Delta$; $R(t)$ is a bordered Riemann surface of genus one with C^ω smooth boundary $\partial R(t)$ in $\widetilde{R}(t)$. We set $\mathcal{R} = \cup_{t\in\Delta}(t, R(t)) \subset \widetilde{\mathcal{R}}$, $\partial\mathcal{R} = \cup_{t\in\Delta}(t, \partial R(t)) \subset \widetilde{\mathcal{R}}$, and identify $\mathcal{R}$ with the variation of open torus $R(t)$,

$$\mathcal{R}: \ t \in \Delta \to R(t) \subset\subset \widetilde{R}(t).$$

Each $R(t), t \in \Delta$ admits the hyperbolic span $\sigma_H(t){:=}\sigma_H(R(t))$.

Theorem 2. *Assume that $\mathcal{R}$ is a Stein manifold. Then*

(1) The hyperbolic span $\sigma_H(t)$ is subharmonic on Δ.

(2) $\sigma_H(t)$ is harmonic on Δ if and only if $(\mathcal{R}, \pi, \Delta)$ is a trivial holomorphic family, i.e., $(\mathcal{R}, \pi, \Delta) \approx \Delta \times R(0)$ as holomorphic family.

The key of the proof of (2) is that the harmonicity of $\sigma_H(t)$ on Δ makes the stop of the moving of the moduli disk $\mathcal{M}(R(t), \chi(t))$ with $t \in \Delta$.

We have the generalization of this theorem. Let $(\mathcal{R}, \pi, \Delta)$ be a holomorphic family such that $\mathcal{R}$ is an $(n+1)$-dimensional complex manifold, Δ is a domain in $\mathbf{C}_t^n$, and each $R(t) = \pi^{-1}(t)$, $t \in \Delta$ is irreducible and non-singular in $\mathcal{R}$ such that $R(t)$ is an open torus with finite ν (independent of $t \in \Delta$) ideal boundary components. We denote by $s_H(t)$ the hyperbolic span for $R(t)$.

Corollary 1.

(1) Assume that, for each $t_0 \in \Delta$ there exists a small ball δ of center t_0 in Δ such that $\mathcal{R}|_\delta$ is a Stein manifold. Then $s_H(t)$ is plurisubharmonic on Δ.

(2) Assume that

(i) $\mathcal{R}$ itself is a Stein manifold.

(ii) Each ideal boundary component of $R(t)$, $t \in \Delta$ is non-parabolic.

Then $s_H(t)$ is pluriharmonic on Δ if and only if $(\mathcal{R}, \pi, \Delta)$ is a trivial holomorphic family.

Note that Δ is a pseudoconvex domain in $\mathbf{C}_t^n$ by (i), which is used for the proof of (2).

References

[1] S. Hamano, *Uniformity of holomorphic family of non-homeomorphic planar Riemann surfaces,* Annales Polonici Mathematici, 111 (2014), 165-183.

[2] ________, *Log-plurisubharmonicity of metric deformations induced by Schiffer and harmonic spans* (submitted)

[3] M. Shiba, *The moduli of compact continuations of an open Riemann surface of genus one,* Transactions of the A. M. S. 301 (1987), 299-311.

[4] ________, *The Euclidean, hyperbolic, and spherical spans of an open Riemann surface of low genus and the related area theorems*, Kodai Math. J. 16 (1993), 118-137.

特別講演

極大多重劣調和関数の最小値原理と複素モンジュ・アンペール方程式へのその応用

千葉　優作　(東京工業大学)*

この講演では $\mathbb{C}^n$ 内の領域 D に対して, D 上の多重劣調和関数全体を $\mathrm{Psh}(D)$ とする. Bedford-Taylor [2] により, 微分可能でない連続な多重劣調和関数上のモンジュ・アンペール作用素が定義された.

定義 1. $u \in \mathrm{Psh}(D) \cap C^0(D)$ に対して, k 次モンジュ・アンペール方程式 $(dd^c u)^k$ $(k = 2, \dots, n)$ を次のように帰納的に定義する.

$$\begin{aligned}(dd^c u)^2 &= dd^c(u dd^c u),\\ &\vdots\\ (dd^c u)^k &= dd^c(u(dd^c u)^{k-1}).\end{aligned}$$

この定義は, u が C^2 級のとき通常のものと一致する. $u \in \mathrm{Psh}(D) \cap C^0(D)$ が $(dd^c u)^n = 0$ を満たすことと, u が極大となることは同値であることが知られている. ここで多重劣調和関数が極大であることは次のように定義される.

定義 2. $u \in \mathrm{Psh}(D) \cap C^0(D)$ とする. 任意の相対コンパクトな部分領域 $G \subset\subset D$ と, ∂G 上 $v \le u$ を満たす任意の $v \in \mathrm{Psh}(G) \cap C^0(\overline{G})$ に対して G 上 $v \le u$ となるとき, u を極大多重劣調和関数という.

k 次 $(1 \le k \le n)$ モンジュ・アンペール方程式の解がある程度滑らかなとき, その幾何学的性質は次のようになる. $u \in \mathrm{Psh}(D) \cap C^3(D)$ が D 上 $(dd^c u)^k = 0$ で, D の任意の点で $(dd^c u)^{k-1} \neq 0$ ならば, D 上に C^1 級葉層構造で, その葉は複素 $(n-k+1)$ 次元であり, 葉に制限すると u は多重調和関数となるものが存在する ([1]). しかし u の滑らかさが低い場合は, 次のような例が示すように幾何学的な性質はよくわかっていない.

例 1 (Sibony)**.** B を $\mathbb{C}^2$ 内の開球とする. このとき $u \in \mathrm{Psh}(B) \cap C^{1,1}(B) \cap C^0(\overline{B})$ で次の性質を満たすものが存在する.

- B 上 $(dd^c u)^2 = 0$.
- ある点 $p \in B$ で u は最小値をとり, p を通る任意の正則円板上で u は調和関数 (定数関数) ではない.

この講演ではモンジュ・アンペール方程式の解に, より強い条件を付けてその幾何学的な性質を調べる. まず最初に次のような極大多重劣調和関数に対する最小値原理を説明する.

定理 1. $u \in \mathrm{Psh}(D) \cap C^0(D)$ として, D 上 $u \ge 0$, $(dd^c u)^n = 0$ とする. ここで $u^{-1}(0) \subset D$ は空集合ではなく, さらに凸集合であると仮定する. このとき $u^{-1}(0)$ の任意の点 x に対して, $u^{-1}(0)$ に含まれる複素一次元凸集合で x をその相対内部に含むものが存在する.

本研究は科研費 (課題番号:25-902) の助成を受けたものである。

* 〒152-8550 東京都目黒区大岡山 2 丁目 12-1　東京工業大学　大学院理工学研究科
e-mail: yt11701@gmail.com

複素k次元凸集合とは, その集合が張るアフィン空間が複素k次元となるような凸集合である. Sibonyの例が示すように定理 1で$u^{-1}(0)$が凸集合であるという仮定を外すことはできない. 定理 1によって次の定理が示される.

定理 2. $u \in \mathrm{Psh}(D) \cap C^0(D)$として$D$上$(dd^c u)^k = 0$とする $(1 \le k \le n-1)$. ある$r \in \mathbb{R}$に対してuの定める集合$\{z \in D; u(z) \le r\}$が凸集合であると仮定する. このとき$u^{-1}(r)$の任意の点xに対して, $u^{-1}(r)$に含まれる複素$(n-k)$次元凸集合でxをその相対内部に含むものが存在する.

uが滑らかなときのように, $x \in u^{-1}(r)$を通る局所閉な$(n-k+1)$次元の複素部分多様体が存在するかどうかは不明である. しかし次のようにその逆を示すことができる.

命題 1. $u \in \mathrm{Psh}(D) \cap C^0(D)$とする. Dの各点に対して, D内の局所閉な$(n-k+1)$次元複素部分多様体で, uをその上に制限すると多重調和関数となるものが存在すると仮定する. このときD上$(dd^c u)^k = 0$である.

講演では定理 2と命題 1の二つの応用を紹介する.

一つ目は管状領域上の多重劣調和関数で, その値が虚数方向には依らないものへの応用である. そのような多重劣調和関数は凸関数となるため, 定理 2, 命題1によりモンジュ・アンペール方程式の解となるための必要な条件, または十分な条件を求めることができる. 同様にラインハルト領域上で, その値が各成分の回転に依らない多重劣調和関数の, モンジュ・アンペール方程式に関する性質を調べることも可能である.

二つ目の応用は, 有界凸領域$D \subset \mathbb{C}^n$上の小林距離に関する球の, 凸性の解析である (以降Dは有界凸領域とする). D内の二点x, y間の小林距離を$k_D(x, y)$とする. Lempert [3]によると, $k_D(x, y)$は$\tanh^{-1} \exp K_x(y)$で与えられる. ここで$K_x \in \mathrm{Psh}(D)$はD上xに対数的な極を持つ多重複素グリーン関数である. K_xは$D \setminus \{x\}$上でn次のモンジュ・アンペール方程式の解となる. このためxを中心とした小林距離に関する球はK_xのレベル集合と一致する. Lempertは小林距離に関する球が凸集合となることを示している. さらにLempert, Patrizioらは, Dが滑らかな境界の強凸領域である場合には, D上任意の点で$(dd^c K_x)^{n-1} \neq 0$であることを示し, これによって小林距離の球も強凸集合となることを示した. 我々はこれらの結果を受けて, 定理2と命題1を使い, 一般の(強凸ではない)凸領域Dの小林距離に関する球の凸性をモンジュ・アンペールカレント$(dd^c K_x)^k, (dd^c e^{K_x})^k$の台集合と関連づけて調べる.

参考文献

[1] E. Bedford and M. Kalka, Foliations and complex Monge-Ampère equations, Communications on Pure and Applied Mathematics, **30** (1977), 543–571.

[2] E. Bedford and B. A. Taylor, The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampère equation, Invent. Math. **37** (1976), 1–44.

[3] L. Lempert, La métrique de Kobayashi et la représentation des domaines sur la boule, Bull. Soc. Math. France **109** (1981), 427–474.

[4] Y. Tiba, On a convex level set of a plurisubharmonic function and the support of the Monge-Ampère current, arXiv:1410.3785.