日本数学会

2014年度秋季総合分科会

函数論分科会
講演アブストラクト

2014年9月

於　広島大学

函　数　論

9月25日(木)　　第I会場

Notes on Carathéodory functions involving Möbius transformations

Shigeyoshi Owa (Yamato University)

Let $\mathcal{A}$ be the class of functions $p(z)$ of the form

$$p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \tag{1}$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$. If $p(z) \in \mathcal{A}$ satisfies

$$\mathrm{Re}p(z) > 0 \qquad (z \in \mathbb{U}), \tag{2}$$

then $p(z)$ is said to be Carathéodory function in $\mathbb{U}$. We denote by $\mathcal{P}$ the class of all such functions $p(z)$. Furhter, let $\mathcal{P}(\alpha)$ denote the class of $p(z) \in \mathcal{A}$ which satisfy

$$\mathrm{Re}p(z) > \alpha \qquad (z \in \mathbb{U}) \tag{3}$$

for some real α $(\alpha < 1)$. A function $p(z) \in \mathcal{P}(\alpha)$ is said to be Carathéodory function of order α in $\mathbb{U}$.

Let us introduce the function $w(\zeta)$ by

$$w(\zeta) = \frac{z + \zeta}{1 + \overline{z}\zeta} \qquad (\zeta \in \mathbb{U}) \tag{4}$$

for some fixed $z \in \mathbb{U}$. We know that $w(\zeta)$ maps $\mathbb{U}$ onto itself with $w(0) = z$.

For functions $p(z) \in \mathcal{P}(\alpha)$ and $w(\zeta)$, we define

$$g(\zeta) = \frac{p(w) - \alpha - i\mathrm{Im}p(z)}{\mathrm{Re}p(z) - \alpha} \qquad (\zeta \in \mathbb{U}). \tag{5}$$

Then, we see that $g(\zeta) \in \mathcal{P}$.

Theorem 1 *For $g(\zeta)$ given by (5), we have*

$$g^{(n)}(\zeta) = \frac{1}{\mathrm{Re}p(z) - \alpha} \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!(n-1)!(-\overline{z})^j (1 - |z|^2)^{n-j}}{j!(n-j)!(n-j-1)!(1 + \overline{z}\zeta)^{2n-j}} p^{(n-j)}(w) \right\} \tag{6}$$

for $n = 1, 2, 3, \cdots$.

Theorem 2 *If $p(z) \in \mathcal{P}(\alpha)$, then*

$$|p^{(n)}(z)| \leqq \frac{2n!(\mathrm{Re}p(z) - \alpha)}{(1-|z|)^n(1+|z|)} \qquad (z \in \mathbb{U}) \tag{7}$$

for $n = 1, 2, 3, \cdots$.

Next, let $\mathcal{Q}(\beta)$ be the class of functions $p(z) \in \mathcal{A}$ which satisfy

$$\mathrm{Re}p(z) < \beta \qquad (z \in \mathbb{U}) \tag{8}$$

for some real β $(\beta > 1)$.

Theorem 3 *If $p(z) \in \mathcal{Q}(\beta)$, then*

$$|p^{(n)}(z)| \leqq \frac{2n!(\beta - \mathrm{Re}p(z))}{(1-|z|)^n(1+|z|)} \qquad (z \in \mathbb{U}) \tag{9}$$

for $n = 1, 2, 3, \cdots$.

Finally, let $\mathcal{P}(\alpha, \beta)$ denote the class of functions $p(z) \in \mathcal{A}$ which satisfy

$$\alpha < \mathrm{Re}p(z) < \beta \qquad (z \in \mathbb{U}) \tag{19}$$

for some real α $(\alpha < 1)$ and β $(\beta > 1)$.

Theorem 4 *A function $p(z)$ given by*

$$p(z) = 1 + \frac{\beta - \alpha}{\pi} i\log\left(\frac{1 - e^{i\theta}z}{1 - e^{-i\theta}z}\right) \qquad (z \in \mathbb{U}) \tag{11}$$

for some real α $(\alpha < 1)$ and β $(\beta > 1)$, then $p(z) \in \mathcal{P}(\alpha, \beta)$, where $\theta = \dfrac{1-\alpha}{\beta-\alpha}\pi$.

Jenkins-Strebel測地線間のTeichmüller距離の極限値について

天野 政紀　(東京工業大学)*

1. 定義

X を種数 g, n 点穴あきのリーマン面で $3g-3+n>0$ を満たすものとし, $T(X)$ をその Teichmüller 空間, $d_{T(X)}$ を $T(X)$ 上の Teichmüller 距離とする. $r=r(t), r'=r'(t)$ $(t \geq 0)$ を $T(X)$ 上の Teichmüller 測地線 (正確には Teichmüller 測地半直線) とする.

定義. $r(t), r'(t)$ が**漸近的**とは, それぞれの測地線の始点 $r(0)$, $r'(0)$ をずらし

$$\lim_{t\to\infty} d_{T(X)}(r(t), r'(t)) = 0.$$

を満たすようにできる事とする. これは, ある $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在し

$$\lim_{t\to\infty} d_{T(X)}(r(t), r'(t+\alpha)) = 0$$

とできる事と同値である.

$r=r(t), r'=r'(t)$ を $T(X)$ 上の Jenkins-Strebel 測地線で, 始点は $r(0)=[Y,f], r'(0)=[Y',f']$, 向きは Y, Y' 上のノルム 1 の Jenkins-Strebel 微分 q, q' で定まるものとする. $r(\infty), r'(\infty)$ を r, r' の augmented Teichmüller 空間 $\hat{T}(X)$ 上の終点とする.

定義. r, r' が **similar** とは, X 上の互いに交わらず homotopic でもない, それぞれが一点や穴とも homotopic でもない単純閉曲線 $\gamma_1, \cdots, \gamma_k$ が存在し, q, q' の定める Y, Y' 上のシリンダーの core curves がそれぞれ $f(\gamma_1), \cdots, f(\gamma_k)$, $f'(\gamma_1), \cdots, f'(\gamma_k)$ と表せる時である. この時, それらに対応する modulus を $m_1, \cdots, m_k$, $m'_1, \cdots, m'_k$ とする.

r, r' が similar の時, 終点 $r(\infty), r'(\infty)$ の間に自然に Teichmüller 距離を定義できる. それを $d_{\hat{T}(X)}(r(\infty), r'(\infty))$ と表す.

2. 主結果

r, r' を上で定義したような Jenkins-Strebel 測地線とする.

定理 1. ([Ama14b])

$$\lim_{t\to\infty} d_{T(X)}(r(t), r'(t)) = \begin{cases} \max\left\{\dfrac{1}{2}\log \max\limits_{j=1,\cdots,k}\left\{\dfrac{m'_j}{m_j}, \dfrac{m_j}{m'_j}\right\}, d_{\hat{T}(X)}(r(\infty), r'(\infty))\right\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (r,\ r' \text{ が similar の場合}) \\ +\infty \ (\text{それ以外の場合}) \end{cases} \tag{1}$$

系 2. ([Ama14b]) r, r' が similar の時, r, r' の始点をずらした時の式 (1) の最小値は存在し

$$\min_{\alpha\in\mathbb{R}} \lim_{t\to\infty} d_{T(X)}(r(t), r'(t+\alpha)) = \max\left\{\frac{1}{2}\delta, d_{\hat{T}(X)}(r(\infty), r'(\infty))\right\}$$

* 〒152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1 東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻
e-mail: amano.m.ab@m.titech.ac.jp

で与えられる．ただし $\delta = \frac{1}{2}\log \max_{j=1,\cdots,k} \frac{m'_j}{m_j} + \frac{1}{2}\log \max_{j=1,\cdots,k} \frac{m_j}{m'_j}$ とする．

この δ は, 実は r, r' の終点を $T(X)$ の Gardiner-Masur 境界上 (cf. [GM91]) で表した時の detour metric (cf. [Wal12]) となっている．Walsh[Wal12] の結果により, $\delta = 0$ となるための必要十分条件は, r, r' が modularly equivalent の時, すなわちある $\lambda > 0$ が存在し任意の $j = 1, \cdots, k$ について $m'_j = \lambda m_j$ が成立する時である．よって次の系が直ちに分かる．

系 3. ([Ama14a]) *r, r' が漸近的となる必要十分条件は, これらが similar かつ modularly equivalent かつ終点が一致 ($r(\infty) = r'(\infty)$) となる事である.*

この結果はモジュライ空間での同様の結果 ([FM10]) の一般化となっている．

参考文献

[Ama14a] Masanori Amano. On behavior of pairs of Teichmüller geodesic rays. Conform. Geom. Dyn., 18:8-30, 2014.

[Ama14b] Masanori Amano. The asymptotic behavior of Teichmüller rays. arXiv:1402. 3622v1, 2014.

[FM10] Benson Farb and Howard Masur. Teichmüller geometry of moduli space, I: distance minimizing rays and the Deligne-Mumford compactification. J. Differential Geom., 85(2):187-227, 2010.

[GM91] Frederick P. Gardiner and Howard Masur. Extremal length geometry of Teichmüller space. Complex Variables Theory Appl., 16(2-3):209-237, 1991.

[Wal12] Cormac Walsh. The asymptotic geometry of the Teichmüller metric. arXiv:1210. 5565v1, 2012.

Veech 曲面の周期点の個数について

四之宮 佳彦　(早稲田大学, 学振 PD)*

1. 導入

曲面 X を向き付けられた種数 g の n 点穴あき曲面で，$3g-3+n>0$ を満たすものとする．曲面 X 上の集合 C に特異をもつ平坦構造 u とは，$X\setminus C$ 上の座標近傍系で，変換関数が $w=\pm z+c$ の形をしているもののことである．但し，C は有限集合であるとする．組 (X,u) を平坦曲面と呼び，C の各点を平坦曲面 (X,u) の特異点と呼ぶ．平坦曲面 (X,u) 上ではユークリッド幾何の用語を用いることができる．また，(X,u) はリーマン面とみなすこともできる．平坦曲面 (X,u) のアファイン写像 h とは，特異点集合 C を保つ X 上の自己擬等角写像 h で，座標近傍系 $(U,z),(V,w)\in u$ $(h(U)\subset V)$ を用いて

$$w\circ h\circ z^{-1}=Az+c \tag{1}$$

と表せるもののことをいう．アファイン写像全体の成す群を (X,u) のアファイン群と呼び，$\mathrm{Aff}^+(X,u)$ で表す．各アファイン写像 h に対して，上の表示 (1) における行列 $A\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ は符号の差を除いて一意に定まる．この行列 $\pm A\in\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ をアファイン写像 h の微分と呼び，アファイン写像の微分全体の成す群 $\Gamma(X,u)$ を Veech 群という．Veech[Vee89] によって，Veech 群はフックス群となることが示されている．

定義. Veech 群 $\Gamma(X,u)$ が $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ の lattice である時, 即ちオービフォルド $\mathbb{H}/\Gamma(X,u)$ の双曲面積が有限の時，(X,u) を Veech 曲面と呼ぶ．更に，Veech 群 $\Gamma(X,u)$ とモジュラー群 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ が通約的の時，Veech 曲面 (X,u) は算術的であるといい，そうでない時，非算術的であるという．

定義. 点 $z\in X$ が Veech 曲面 (X,u) の周期点であるとは，z の $\mathrm{Aff}^+(X,u)$-軌道 $\mathrm{Aff}^+(X,u)\{z\}$ が有限集合の時にいう．

Veech 曲面の周期点について以下のことが知られている．

定理 ([GHS03]). *Veech* 曲面が算術的ならば，その周期点の集合は X で稠密である．一方，非算術的な *Veech* 曲面の周期点は有限個である．

前回の学会では，非算術的 Veech 曲面の周期点について以下のような個数評価を与えた．ここで, フックス群 Γ の符号が $(p,k:\nu_1,\cdots,\nu_k)$ であるとは, オービフォルド $\mathbb{H}/\Gamma$ が種数 p で k 個のコーンを持ち, それらのオーダーが $\nu_1,\cdots,\nu_k\in\{2,3,\cdots,\infty\}$ である時にいう．但し，オーダー $\nu_i=\infty$ のコーンはカスプを意味する．

定理. *Veech* 曲面 (X,u) が非算術的であるとする．曲面 X が (g,n) 型であり，*Veech* 群 $\Gamma(X,u)$ の符号が $(p,k:\nu_1,\cdots,\nu_k)$ である時，(X,u) の周期点の個数は高々

$$2^{-26}d^{10}(\lambda\mu)^{-34}\left(\frac{1}{2}\lambda^6\mu^6\right)^{2^{2d+3}}$$

* 〒169-8050 東京都新宿区西早稲田 1-6-1 早稲田大学 教育学部 数学科
e-mail: y.shinomiya@kurenai.waseda.jp

である．ここで，$d = 3g - 3 + n, \lambda = \exp(5d/e)$，

$$\mu = \mathrm{Area}\,(\mathbb{H}/\Gamma(X,u)) = 2\pi \left(2p - 2 + \sum_{i=1}^{k} (1 - 1/\nu_i) \right)$$

である．また，e はネイピア数である．

2. 主結果

本講演では，前回の個数評価の改良版を報告する．

定理． *Veech* 曲面 (X,u) が非算術的であるとき，周期点の個数は高々

$$2^{-5} d^6 \mu^4 (\lambda\mu)^{36d+12}$$

である．ここで，d, λ, μ は上で定めた定数である．

参考文献

[GHS03] Eugene Gutkin, Pascal Hubert, and Thomas A. Schmidt. Affine diffeomorphisms of translation surfaces: periodic points, Fuchsian groups, and arithmeticity. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 36(6):847–866 (2004), 2003.

[Lei04] Christopher J. Leininger. On groups generated by two positive multi-twists: Teichmüller curves and Lehmer's number. *Geom. Topol.*, 8:1301–1359 (electronic), 2004.

[Vee89] W. A. Veech. Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards. *Invent. Math.*, 97(3):553–583, 1989.

[Vee91] W. A. Veech. Erratum: "Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards". *Invent. Math.*, 103(2):447, 1991.

2乗可積分タイヒミュラー空間上の Weil-Petersson 計量について

柳下　剛広　(早稲田大学, 日本学術振興会特別研究員DC)*

タイヒミュラー空間とは標識付きリーマン面の変形空間である. リーマン面 R が双曲型の場合は, 複素単位円板 $\Delta = \{|z| < 1 | z \in \mathbb{C}\}$ に作用するフックス群 Γ で $R = \Delta/\Gamma$ となるものを用いてタイヒミュラー空間が表現できる. フックス群 Γ のタイヒミュラー空間を $T(\Gamma)$ とする. 実数 $p \geq 1$ に対して, Γ の p **乗可積分タイヒミュラー空間** $T^p(\Gamma)$ とは, 以下で定義される $T(\Gamma)$ の部分距離空間である.

$$T^p(\Gamma) = \{\tau \in T(\Gamma) | \exists \mu \in \tau \text{ s.t. } \|\mu\|_p = \left(\iint_N |\mu(z)|^p \rho_\Delta(z)^2 dxdy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$$

ここで, N は Γ に関する Δ 内の基本領域, $\rho_\Delta(z) = (1-|z|^2)^{-1}$ は Δ 上のポアンカレ計量である. リーマン面が Δ のときは, Cui [2] および Takhtajan, Teo [3] らが 2 乗可積分タイヒミュラー空間 $T^2(1)$ にバナッハ空間をモデルとする複素構造が入ることを個々に示した. また, [4] においては, $p \geq 2$ かつフックス群 Γ が Lehner の条件というある幾何学的条件をみたすとき, $T^p(\Gamma)$ にもバナッハ空間をモデルとする複素構造が入ることを示した. そのモデルとなるバナッハ空間は $\Delta^* = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Delta$ 上の Γ に関する p 乗可積分な正則二次微分からなるバナッハ空間 $A^p(\Delta^*, \Gamma)$ である. すなわち, $\varphi \in A^p(\Delta^*, \Gamma)$ に対して,

$$\|\varphi\|_p = \left(\iint_{N^*} |\varphi(z)|^p \rho_{\Delta^*}(z)^{2-2p} dxdy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

ここで N^* は Γ に関する Δ^* 内の基本領域, $\rho_{\Delta^*}(z) = (|z|^2-1)^{-1}$ は Δ^* 上のポアンカレ計量である.

フックス群 Γ が解析的有限のとき, $T(\Gamma)$ は有限次元の複素多様体となり, 任意の $p \geq 1$ に対して $T^p(\Gamma) = T(\Gamma)$ となる. また, 基本領域 N^* の双曲面積は有限となるので, エルミート内積

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \iint_{N^*} \varphi(z)\overline{\psi(z)} \rho_{\Delta^*}(z)^{-2} dxdy$$

から誘導されるエルミート計量が $T(\Gamma)$ 上に定まる. これを **Weil-Petersson 計量** という. ここで, 複素多様体 M 上のエルミート計量 h とは, 各点 $p \in M$ の正則接空間 T_pM 上のエルミート内積 h_p で, p に関して滑らかに変化するものである. $\omega = -2\,\mathrm{Im}\,h$ とおくと, ω は M 上の二次微分形式となる. ω が閉形式となるとき, h はケーラー計量であるという. ケーラー計量はユークリッド計量と二次の接触をすることを意味し, 微分幾何学においては重要な概念である. Ahlfors [1] は Weil-Petersson 計量がケーラー計量となること, およびその計量接続のリッチ曲率, スカラー曲率, 正則断面曲率がすべて負となることを示した.

$p = 2$ のとき $A^2(\Delta^*, \Gamma)$ はヒルベルト空間となるので, Lehner の条件をみたすフックス群 Γ の 2 乗可積分タイヒミュラー空間 $T^2(\Gamma)$ 上には, 上記と同様に Weil-Petersson

* 東京都新宿区大久保3-4-1
e-mail: m-yanagishita@asagi.waseda.jp

計量が定まる．本講演では, Ahlfors の証明法を元にした Weil-Petersson 計量のケーラー性について論ずる．

参考文献

[1] L. V. Ahlfors, Curvature properties of Teichmüller's space, J. Analyse Math. **9** (1961/1962), 161–176.

[2] G. Cui, Integrably asymptotic affine homeomorphisms of the circle and Teichmüller spaces, Sci. China Ser. A **43** (2000), 267–279.

[3] L. A. Takhtajan and L.-P. Teo, Weil-Petersson Metric on the Universal Teichmüller Space, Memoirs of the Amer. Math. Soc. **861**, Amer. Math. Soc., 2006.

[4] M. Yanagishita, Introduction of a complex structure on the p-integrable Teichmüller space, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., to appear.

Teichmüller 曲線の剛性と有限性について

東京工業大学理工学研究科
志賀　啓成

R を (g,n) 型 Riemann 面 $(3g-3+n>0)$ とする. このとき, R の Teichmüller space $T(R)$ は次元 $3g-3+n$ の複素多様体で, Kobayashi 距離は完備, 写像類群 $Mod(g,n)$ は $T(R)$ の正則自己同型群で $T(R)$ に等長的かつ properly discontinuous に作用し, その商空間 $M(R)=T(R)/Mod(g,n)$ は R の moduli space である.

タイトルにいう Teichmüller 曲線とは, 有限型 Riemann 面 X と X から $M(R)$ への局所等長的な正則写像 f との pair (X,f) のことを指す. Teichmüller 曲線のもっとも典型的なものは Veech 群と呼ばれる $Mod(g,n)$ の部分群によって構成されるものである. Veech 群は Teichmüller space $T(R)$ のある全測地的円板 $\mathbb{D}$ を不変にする $Mod(g,n)$ の部分群で lattice であるものとして定められる. Teichmüller disk $\mathbb{D}$ とそれによって定まる Veech 群に対して商写像 $f_{\mathbb{D}}: \mathbb{D}/\Gamma_{\mathbb{D}} \longrightarrow M(R)$ を考えると, $(\mathbb{D}/\Gamma_{\mathbb{D}}, f_{\mathbb{D}})$ は Teichmüller 曲線になる. ($\Gamma_{\mathbb{D}}$: Veech 群)

このように, 一旦 Teichmüller 曲線 $(\mathbb{D}/\Gamma_{\mathbb{D}}, f_{\mathbb{D}})$ を Veech 群から構成すると, $\mathbb{D}/\Gamma_{\mathbb{D}}$ の smooth な covering $\pi: X \to \mathbb{D}/\Gamma_{\mathbb{D}}$ を任意にとれば, $(X, f_{\mathbb{D}}\circ\pi)$ も再び Teichmüller 曲線になる. 実際にはすべての Teichmüller 曲線はこのように構成される.

Proposition (X,f) を Teichmüller 曲線とすると, $\exists$ Teichmüller disk $\mathbb{D}$, $\exists$ Veech 群 $\Gamma_{\mathbb{D}}$ および $\exists$ covering map $\pi: X \to \mathbb{D}/\Gamma_{\mathbb{D}}$ s.t. $f = f_{\mathbb{D}}\circ\pi$.

McMullen [M] は Teichmüller 曲線が holomorphic に rigid を
を示した. ここでは, 更に強く, 以下を示す.

Theorem 1: (X, f) を Teichmüller 曲線で, $g: Y \to M(R)$ を $f: X \to M(R)$ に位相的に同値な正則写像とする. このとき, X の正則自己同型をのぞき, $f = g$ である. 特に $X = Y$ でもある.

ここで有限型 Riemann 面 X_i $(i=1,2)$ と正則写像 $f_i : X_i \to M(R)$ の pairs (X_i, f_i) $(i=1,2)$ が**位相的に同値**とは, $\exists w : X_1 \to X_2$ s.t. w は qc で, $\theta_1 = \theta_2 \circ \iota_w : \pi_1(X_1) \to Mod(g,n)$ が成り立つこととする. ここに $\theta_i : \pi_1(X_i) \to Mod(g,n)$ は f_i による monodromy, $\iota_w : \pi_1(X_1) \to \pi_1(X_2)$ は w による自然な同型である.

上記定理より直ちに以下を得る.

Corollary ([M]): (X, f) を Teichmüller 曲線とすると, (X, f) は non-trivial な holomorphic deformation を持たない.

更に上記定理を用いると, 次のような有限性定理を示すことができる.

Theorem 2: (p, k) を $2p-2+k > 0$ なる非負整数の組とする. このとき, Teichmüller 曲線 (X, f) で X が (p, k) 型 Riemann 面になるもの全体は有限集合である.

Remark: 一般に Teichmüller 曲線を $(\mathbb{D}/\Gamma_{\mathbb{D}}, f_{\mathbb{D}})$ の形に制限しても, $\mathbb{D}/\Gamma_{\mathbb{D}}$ の位相型に制限を付けなければ, $M(R)$ への Teichmüller 曲線は無限個存在する.

[M] C. McMullen, Rigidity of Teichmüller curves, Math. Res. Lett (2009).

Conformal invariants defined by harmonic functions on Riemann surfaces

東京工業大学理工学研究科
志賀　啓成

R を open Riemann 面, $HP(R)$, $HB(R)$, $h^p(R)$ $(1<p<\infty)$ を, R 上の正値調和関数全体, 有界調和関数全体, p 次 harmonic Hardy 関数全体とする. よく知られているように, $HB(R)$, $h^p(R)$ は Banach spaces となっている. ただし, $u \in h^p(R)$ に対して norm $\|u\|_{h^p} = (L.H.M.|u|^p(a_0))^{1/p}$ で与える. ここに $a_0 \in R$ は base point で $L.H.M.|u|^p$ は $|u|^p$ の least harmonic majorant である. これらの空間に対して以下の等角不変量を考える.

$$d_H^R(a,b) = \sup\{|\log u(a)/u(b)| : u \in HP(R)\},$$

$$\rho_B^R(a,b) = \sup\{|u(a)-u(b)|/\|u\|_\infty : u \in HB(R)-\{0\}\},$$

$$\rho_p^R(a,b) = \sup\{|u(a)-u(b)|/\|u\|_{h^p} : u \in h^p(R)-\{0\}\},$$

$$\beta_H^R(z)|dz| = \sup\{|u_x - iu_y|\,u(z)^{-1}|dz| : u \in HP(R)\},$$

$$\beta_B^R(z)|dz| = \sup\{|u_x - iu_y|\,\|u\|_\infty^{-1}|dz| : u \in HB(R)-\{0\}\},$$

$$\beta_p^R(z)|dz| = \sup\{|u_x - iu_y|\,\|u\|_{h^p}^{-1}|dz| : u \in h^p(R)-\{0\}\}.$$

$d_H^R(a,b)$ は Harnack distance として知られているものである. これらの量を R 上の hyperbolic distance, hyperbolic metric と比較することを考える. 更に Harnack distance については, R の Martin compact 化を用いて記述し それを用いて得られた結果を述べる.

定理1. $d_R(\cdot,\cdot)$ を R 上の hyperbolic distance とする. このとき,

(1) $d_H^R(a,b) \leq d_R(a,b)$. 等号成立条件は

(1-1) $R \simeq \mathbb{D} = \{|z|<1\}$ または

(1-2) $R \simeq \mathbb{D}^* = \{0<|z|<1\}$ で, a と b は偏角が等しい.

(2) $\rho_B^R(a,b) \le \frac{8}{\pi}\arctan\left(\tanh\frac{d_R(a,b)}{4}\right)$. 等号成立条件は

(2-1) $R \simeq \mathbb{D}$ または

(2-2) $R \simeq \{0 < {}^{\exists}r < |z| < 1\}$ で a, b は $\{|z| = \sqrt{r}\}$ に関して対称.

(3) $\rho_P^R(a,b) \le \|\tilde{v}_{d_R(a_0,a)}\|_{h^p}$, ただし $d > 0$ に対して
$\tilde{v}_d(z) = \mathrm{Re}\left\{\left(2z\tanh\frac{d}{2}\right)\left(1 - z\tanh\frac{d}{2}\right)^{-1}\right\}$.
等号成立条件は $R \simeq \mathbb{D}$.

注意：(1),(2) は [HM] にある. ただしここでの証明は異なり全てを同じ手法で示すものである. また $h^p(R)$ は norm が base point a_0 に depend するので, statement が複雑になる. 簡単の為 $\rho_P^R(a_0,a)$ の結果のみを提示してある.

$\beta_H^R(z)|dz|$ 等についても hyperbolic metric $\lambda_R(z)|dz|$ と比較可能である. 結果は以下のとおり(等号成立条件は省略).

定理2. (1) $\beta_H^R(z)|dz| \le \lambda_R(z)|dz|$,

(2) $\beta_B^R(z)|dz| \le \frac{2}{\pi}\lambda_R(z)|dz|$,

(3) $\beta_P^R(z)|dz| \le d_p \lambda_R(z)|dz|$ at $z = a_0$, ただし

$$d_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\cos\theta|^q d\theta\right)^{1/q} \quad (p^{-1} + q^{-1} = 1).$$

また, Harnack distance の distance としての性質についても論じたい.

[HM] D. Herron and D. Minda, Comparing invariant distances and conformal metrics on Riemann surfaces, Israel J. Math. (2001).

Deformation spaces of Kleinian groups

東京工業大学理工学研究科
志賀　啓成

Gを非初等的な有限生成Klein群とする. この講演ではGの不連続領域$\Omega(G)$は空でないと仮定する. Riemann球面$\hat{\mathbb{C}}$からそれ自身への擬等角写像wに対しwGw^{-1}が再びKlein群になるときwをG-compatible qcと呼ぶ. このときwは$G \ni g \mapsto wgw^{-1}$によってGから$PSL(2,\mathbb{C})$への同型写像θ_wをみちびく.

ふたつのG-compatible qc w_1, w_2に対し, ある$A \in PSL(2,\mathbb{C})$が存在して$\theta_{w_1} = A\theta_{w_2}A^{-1}$となるとき, w_1とw_2はG-同値であるといい, G-同値であるG-compatible qc全体を$D(G)$と書き, これをGのqc-deformation spaceとよぶ. また, G-compatible qc wの同値類を$[w]$と書く. GがFuchs群Γのとき, $D(\Gamma)$はquasi-Fuchsian space $QF(\Gamma)$とよばれるもので, これはΓのTeichmüller spaceの直積になっている(Bersの同時一意化定理より).

$D(G)$は自然にcomplex structureを持つが, Kra-Maskitは以下を示した.

Theorem A：$D(G)$は正則凸である.

Riemann面のTeichmüller space, すなわちFuchs群のTeichmüller spaceは正則凸であることが知られているから, 上記の結果はこの一般化であるとも言える.

また, Teichmüller space では Kobayashi 距離と Teichmüller 距離は同一であり, 更に Carathéodory (擬) 距離は実際には完備な距離になることも知られている. $D(G)$ に関しても同様の問題を考えることができる. これについて得られた結果を述べる.

Theorem 1: (1) $D(G)$ 上, Carathéodory 擬距離は距離である.
(2) $\Omega(G)$ の任意の連結成分が単連結ならば, Carathéodory 距離は $D(G)$ 上完備である. 特に $D(G)$ は H^∞-凸である.
(3) $\Omega(G)$ のある連結成分が単連結でなければ, $D(G)$ は H^∞-凸ではない. したがって Carathéodory 距離は完備ではない.

Theorem 2: $D(G)$ において, Kobayashi 距離と Teichmüller 距離は一致する. 特に $D(G)$ 上 Kobayashi 距離は完備である.

上記ふたつの定理から直ちに次が得られる.
Corollary 3: $\Omega(G)$ のある連結成分が単連結でなければ, $D(G)$ において Kobayashi 距離と Carathéodory 距離は異なる.

講演で時間が許せば, quasi-Fuchsian space における disk-convexity (McMullen) の拡張などについてもふれたい.

L^d-Loewner chains with quasiconformal extensions

堀田　一敬　(東工大)*

Loewner 方程式はその正規化条件により Radial case（内点の正規化）と Chordal case（境界点の正規化）に分けられていたが，2010-2012年にかけて導入された理論（[BCDM12], [CDMG10]）によりこれらの統一的な扱いが可能になった．この枠組において，Loewner chain は次のように定義される．

Definition ([CDMG10])**.** 単位円板 $\mathbb{D}$ 上定義された正則函数の族 $(f_t)_{t\geq 0}$ が *Loewner chain of order* $d \in [1, \infty]$，または単に *L^d-Loewner chain* であるとは，次の条件を満たすときにいう；

LC1. 各 $t \in [0, \infty)$ に対し，$f_t : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ は単葉,

LC2. 全ての $0 \leq s < t < \infty$ に対し $f_s(\mathbb{D}) \subset f_t(\mathbb{D})$,

LC3. 任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{D}$ と $T > 0$ に対してある非負函数 $k_{K,T} \in L^d([0, T], \mathbb{R})$ が存在し，全ての $z \in K$ と $0 \leq s \leq t \leq T$ に対し

$$|f_s(z) - f_t(z)| \leq \int_s^t k_{K,T}(\zeta) d\zeta \tag{1}$$

を満たす．

上記の定義において，(f_t) にはいかなる正規化条件も課されていないことに注意する．

L^d-Loewner chains 全体を $\mathtt{LC}^d$ で表すことにする．$(f_t) \in \mathtt{LC}^d$ は次の一般化された Loewner 方程式を満たす；

$$\partial_t f_t(z) = (z - \tau(t))(1 - \overline{\tau(t)} z) \partial_z f_t(z) p(z, t), \tag{2}$$

ここで $\tau : [0, \infty) \to \overline{\mathbb{D}}$ は可測函数，p は *Herglotz function of order d* と呼ばれる函数である．$\tau = 0$ のときが radial case に，$\tau = 1$ のときが chordal case にそれぞれ対応している．

$(f_t) \in \mathtt{LC}^d$ の考察において，$(\varphi_{s,t})_{0\leq s\leq t<\infty} := (f_t^{-1} \circ f_s)$ という two parameter 函数が本質的に重要な役割を演じる．これを evolution family of order d と呼び，その全体を $\mathtt{EF}^d$ で記す．与えられた $(f_t) \in \mathtt{LC}^d$ に対して $(\varphi_{s,t}) \in \mathtt{EF}^d$ は一意に定まるが，一方で与えられた $(\varphi_{s,t})$ を $\mathtt{EF}^d$ として持つ $(f_t) \in \mathtt{LC}^d$ は無数に存在する．

計算により $(\varphi_{s,t}) \in \mathtt{EF}^d$ は常微分方程式

$$\partial_t \varphi_{s,t}(z) = (\varphi_{s,t}(z) - \tau(t))(\overline{\tau(t)} \varphi_{s,t}(z) - 1) p(\varphi_{s,t}(z), t) \quad (\text{a.e. } t \in [s, \infty)) \tag{3}$$

を満たすことがわかる．これにより，与えられた $(\varphi_{s,t}) \in \mathtt{EF}^d$ に対して τ と p はそれぞれ本質的に一意に定まる．また与えられた τ と p に対し，上記微分方程式の解は一意に定まりそれが $(\varphi_{s,t}) \in \mathtt{EF}^d$ となる．これを $G(z, t) := (z - \tau(t))(\overline{\tau(t)} z - 1) p(z, t)$ を用いて述べると，G によって定義される初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t w_t = G(w_t, t), & t > s, \\ w_s = z, \end{cases}$$

This work was supported by KAKENHI Grant Numbers 13J02250 and 26800053.

* e-mail: ikkeihotta@gmail.com

の一意解が $(\varphi_{s,t}) \in \mathtt{EF}^d$ となり，また逆に $(\varphi_{s,t}) \in \mathtt{EF}^d$ により G が本質的に一意に定まる．この G は Herglotz vector field of order d と呼ばれるものである．その全体を $\mathtt{HV}^d$ と記す．つまり $(\varphi_{s,t}) \in \mathtt{EF}^d$, $G \in \mathtt{HV}^d$, (p, τ) の間には本質的な相互の 1 対 1 対応がある．

本講演では以下の結果を紹介する．この定理において，τ に関していかなる制限も加えられていない事に留意されたい．

Theorem ([Hot])**.** $d \in [1, \infty)$ および $k \in [0, 1)$ とする．(f_t) を *Loewner chain of order d* とし，p を (2) で与えられる *Herglotz function of order d* とする．p が

$$\left|\frac{p(z,t)-1}{p(z,t)+1}\right| \leq k \quad (z \in \mathbb{D},\ \text{a.e. } t \in [0, \infty)) \tag{4}$$

を満たすとする．そのとき，

1. 各 $t \in [0, \infty)$ に対して f_t は $\widehat{\mathbb{C}}$ への k-擬等角拡張を持つ．
2. $t \to \infty$ としたとき $f_t(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ となる．

証明において，可測函数 τ をそのまま扱うのは困難であるので，τ を「都合のよい函数」で近似し，それによる $(\varphi_{s,t})$ の依存性を観察する．具体的には次の近似定理が有効である．事実自体は解析函数による制御理論の結果 [Rot98] から従うが，[Hot] ではそのレブナー理論へのカスタマイズが図られている．

Theorem ([Rot98], [Hot])**.** Γ を $G \in \mathtt{HV}^d$ の族で，ほとんど全ての各 $t \in [0, \infty)$ に対し $\{G(\cdot, t) : G \in \Gamma\}$ が正規族となるようなものとする．もし列 $\{G_n\} \subset \Gamma$ がある $G \in \mathtt{HV}^d$ へ弱収束するとき，G_n に対応する $(\varphi^n_{s,t}) \in \mathtt{EF}^d$ は G に対応する $(\varphi_{s,t})$ へ $(z, t) \in \mathbb{D} \times [s, \infty)$ 上広義一様収束する．

参考文献

[BCDM12] F. Bracci, M. D. Contreras, and S. Díaz-Madrigal, *Evolution families and the Loewner equation. I. The unit disc*, J. Reine Angew. Math. **672** (2012), 1–37.

[CDMG10] M. D. Contreras, S. Díaz-Madrigal, and P. Gumenyuk, *Loewner chains in the unit disk*, Rev. Mat. Iberoam. **26** (2010), no. 3, 975–1012.

[Hot] I. Hotta, *L^d-loewner chains with quasiconformal extensions*, preprint.

[Rot98] O. Roth, *Control Theory in $\mathcal{H}(\mathbb{D})$*, Ph.D. thesis, Universität Würzburg, 1998.

線形系による離散擬等角写像

R. Michael Porter (CINVESTAV)[*1]
島内 宏和 (東北大学)[*2]

1. 導入

等角写像の離散化手法としては, Thurston により予想され Rodin, Sullivan らにより証明された円充填 Riemann の写像定理に基づくものが, その脳の表面の画像処理への応用と併せてよく知られている. この方法では, 単連結領域間の等角写像を, 円充填から得られる単体的複体から誘導される PL 写像にて近似する. He は円充填を利用して, 与えられた Beltrami 係数に対応する擬等角写像を近似する PL 写像を構成した. (円充填関連についての詳細は [4] を参照.)

本講演では, 擬等角写像を近似する PL 写像を円充填を経由せずに直接構成するアルゴリズムを提示する. さらに, ある条件下ではアルゴリズムより得られる PL 写像の列が真の解に広義一様収束することを紹介する.

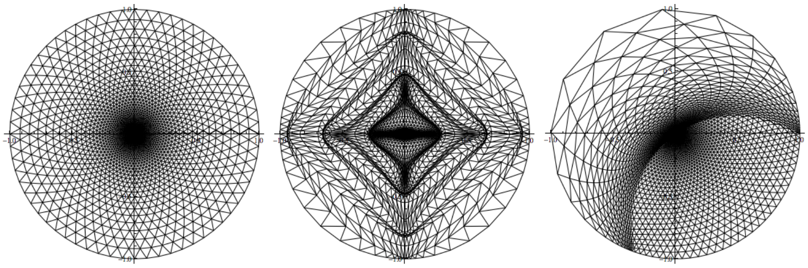


図 1: (左) 単位円板 $\mathbb{D}$ の三角形分割 T_z. (中央) T_z と Beltrami 係数 $\mu(z) = 0.9\sin 20|z|$ が与えられたときに, 本アルゴリズムより得られた $\mathbb{D}$ の三角形分割 T_w. PL 写像 $f : |T_z| \to |T_w|$ の Beltrami 係数は, 各三角形上で μ の平均値に近い. (右) 同様に, Beltrami 係数が $\{z \in \mathbb{D} : \operatorname{Im} z > 0\}$ で定数 $1/2$, それ以外では 0 という関数で与えられた場合のもの.

2. 離散擬等角写像の構成とその性質

$\mathbb{D}$ 上で定義された可測函数 μ で $\|\mu\|_\infty < 1$ を満たすものに対し, それを Beltrami 係数として持つ $\mathbb{D}$ の自己 μ-擬等角写像で 0 と 1 を固定するものを f^μ とする. 以下, μ が与えられたときに, 対応する f^μ を近似する PL 写像を構成する.

Beltrami 係数の拡張. $\mathbb{C}$ 上の可測函数 $\hat{\mu}(z)$ を, $\mathbb{D}$ の内部では μ, $\overline{\mathbb{D}}$ の外部では $\frac{z^2}{\bar{z}^2}\overline{\mu(\frac{1}{\bar{z}})}$ で定義する. $\hat{\mu}(z)$ を Beltrami 係数に持ち 0 と 1 を固定する擬等角写像を $f^{\hat{\mu}}$ とする. 対

本研究は*1 が CONACyT grant 166183 より部分的に助成を受け, *2 が東北大学国際高等研究教育院・博士研究教育院生制度の助成を受けたものである.
2010 Mathematics Subject Classification: 30C62
キーワード：擬等角写像, Beltrami 方程式, 三角形分割
*1 Department of Mathematics, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N., Apdo. Postal 1-798, Arteaga 5, 76000 Querétaro, Qro., Mexico
e-mail: mike@math.cinvestav.edu.mx
*2 〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-3-09 東北大学大学院 情報科学研究科 数学教室
e-mail: shimauchi@ims.is.tohoku.ac.jp, hirokazu.shimauchi@gmail.com

数座標 $Z = \log z$ をとれば $F(Z) := \log f^{\hat{\mu}}(e^Z)$ は虚軸に関し対称性を持つ.

三角形分割. $M, N \in \mathbb{N}$ を固定し, $R_{M,N} := \{Z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Im} Z < 2\pi, |\operatorname{Re} Z| < M\pi\sqrt{3}/N\}$ の三角形分割 T_Z を与え, $R_{M,N}$ 上で F を近似する PL 写像 $F_{M,N}$ を誘導する単体的複体 T_W の頂点を求めたい. T_Z を図 2 のように一辺が $2\pi/N$ の正三角形が虚軸方向に N 個, 実軸方向に $2M$ 個敷き詰められたものとする. T_Z の頂点は $Z_{j,k} = ((\sqrt{3}\pi)j + 2\pi(k + (j \bmod 2)/2)i)/N(-M \leq j \leq M, 0 \leq k \leq N)$ であり, これに対応する T_W の頂点を $W_{j,k}$ とおく. 次の三種の方程式で線形を構築する.

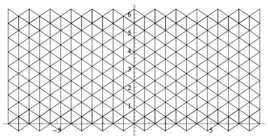


図 2: T_Z

方程式 1. 複素定数 $\mu_c \in \mathbb{D}$ に対し, μ_c-擬等角アフィン写像が三角形 (z_1, z_2, z_3) を三角形 (w_1, w_2, w_3) に写すとする. このとき, $L_{\mu_c}(z_2 - z_3)\, w_1 + L_{\mu_c}(z_3 - z_1)\, w_2 + L_{\mu_c}(z_1 - z_2)\, w_3 = 0$ が成立する. ここで, $L_{\mu_c}(z) = (z + \mu_c \bar{z})/(1 + \mu_c)$ である. この方程式の数は $2MN$.

方程式 2. $C_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ の f^μ による像は, r が十分小さければ楕円に近い. 「f^μ が 0 を固定する」という条件を「C_r の像が, $0, 1$ を固定する μ_0-擬等角アフィン写像による像 (楕円) の定数倍に写る (但し, μ_0 は C_r 内部での μ の平均値)」という条件に置き換える, すなわち $W_{-M,k} - W_{-M,k-1} = E_k - E_{k-1}$. ただし $E_k := \log L_{\mu_0}(e^{Z_{-M,k}})$. 実部が正の側の境界上の点についても同様で, この方程式の数は $2(N-1)$.

方程式 3. f^μ が 1 を固定するという条件を加える. すなわち, $W_{0,0} = 0$.

最小二乗解. $W_{j,k}$ を適当に縦一列に並べた縦ベクトルを V とすると, 線形系は $AV = B$ という形で表すことができる. A は $(2MN + 2(N-1) + 1) \times (2(M+1)N)$ の複素行列, B は長さ $2(M+1)N$ の複素ベクトルである. 線形系は優決定系であるため, $\|AV' - B\|_2$ を最小化する V' を近似解としてとる (最小二乗法については [1] を参照).

補題 1. *V' は一意であり, 虚軸に関し対称性を持つ.*

e^z の適用. 頂点 $\{Z_{j,k}\}, \{W_{j,k}\}(-M \leq j \leq 0, 0 \leq k \leq N)$ に e^z 適用したものを $\{z_{j,k}\}, \{w_{j,k}\}$ とし, 各頂点の対応から得られる PL 写像を $f_{M,N}$ とする.

定理 1. *μ を $\mathbb{D}$ 上の $\|\mu\|_\infty < 1$ を満たす C^1 級関数とし, M, N を $c_1 N \leq M \leq c_2 N \log N$ を満たしながら狭義単調に増加する列とする. ただし, c_1, c_2 は定数で $c_1 > 1/(\sqrt{3}\pi)$. このとき, M, N が十分大きければ $\{z_{j,k}\}, \{w_{j,k}\}$ はそれぞれ $\mathbb{D}$ の単体同値な三角形分割をなす. さらに, $f_{M,N}$ は $M, N \to \infty$ のとき真の解 f^μ に広義一様収束する.*

注意. 補題と定理の証明については, [3] を参照. 複数の数値実験結果より, μ が C^1 級という条件は緩められると考えている (例えば, 図 1(右) のベルトラミ係数は不連続だが, 真の解と近似解のベルトラミ係数の誤差は小さい). 擬等角写像の数値計算手法については, 他にも [2] などが提示されている.

参考文献

[1] Å. Björck, *Numerical Methods for Least Squares Problems,* SIAM. (1996).

[2] P. Daripa, A fast algorithm to solve the Beltrami equation with applications to quasiconformal mappings, *J. Comput. Phys.* **106**:355-365 (1993).

[3] R. M. Porter and H. Shimauchi, Numerical solution of the Beltrami equation via a purely linear system, `arXiv: 1405.7359` [math.CV]

[4] K. Stephenson, *Introduction to circle packing. The theory of discrete analytic functions*, Cambridge University Press, Cambridge (2005)

擬等角写像の無限小空間に関する力学系的考察

宮地　秀樹　(大阪大学)*

1. 準備

複素平面 $\mathbb{C}$ 上の $0,1$ を固定するように正規化された擬等角写像の成す族を $\mathcal{QC}$ と書く．$\mathcal{QC}$ は $\mathbb{C}$ 上局所一様収束（$\hat{\mathbb{C}}$ 上の一様収束）の位相により距離空間となる．さらに，$K \geq 1$ に対して

$$\mathcal{QC}_K = \{f \in \mathcal{QC} \mid K(f) \leq K\}$$

は $\mathcal{QC}$ 内のコンパクト集合である．ただし $K(f)$ は f の最大歪曲度である．

平面上の擬等角写像 f と $z_0 \in \mathbb{C}$ 及び $t \in \mathbb{R} - \{0\}$ に対して，$F_t \in \mathcal{QC}$ を

$$F_t(z) = \frac{f(z_0 + tz) - f(z_0)}{f(z_0 + t) - f(z_0)}$$

と定義する．正規化された K-擬等角写像の族のコンパクト性より，集合

$$T(z_0\colon f) = \{\{F_t\}_{t \neq 0} \text{ の } t \to 0 \text{ としたときの集積点}\}$$

は空集合ではない．この $T(z_0\colon f)$ を **f の z_0 における無限小空間 (infinitesimal space)** と呼ぶ（[1]）．F_t は $K(f)$ 擬等角写像であるので，$f \in \mathcal{QC}$ が K-擬等角写像のときは $T(z_0\colon f) \subset \mathcal{QC}_K$ である．

無限小空間 $T(z_0\colon f)$ の各元は f の z_0 における無限小近似と考えることが出来る．例えば，f は z_0 において全微分可能であれば，

$$T(z_0\colon f) = \{L_{f\colon z_0}\}$$

である．ただし，$L_{f\colon z_0}$ は L の z_0 における一次の Taylor 近似の正規化

$$L_{f\colon z_0}(z) = \frac{1}{f_z(z_0) + f_{\overline{z}}(z_0)}(f_z(z_0)z + f_{\overline{z}}(z_0)\overline{z})$$

である．擬等角写像はほとんど至る所全微分可能であるが，一般には全微分できない点をもつことがある．

2. 結果

本講演では $\mathcal{QC}$ に作用する流れの力学系的な振る舞いを用いて擬等角写像の無限小空間について議論する．特に任意の $\mathbb{C}$ 上の擬等角写像 f と $z_0 \in \mathbb{C}$ に対して

$$f_0(z) = \frac{f(z_0 + z) - f(z)}{(z_0 + 1) - f(z_0)}$$

とすると $T(z_0\colon f) = T(0\colon f_0)$ である．故に正規化された擬等角写像の原点における無限小空間を調べることとしても一般性を損なわないことに注意する．

2010 Mathematics Subject Classification: 30F60, 32G15, 37F30, 51M10, 32Q45, 54E40
キーワード：Quasiconformal mapping, Infinitesimal space
* 〒560-0043 豊中市待兼山町 1-1 大阪大学大学院理学研究科
e-mail: miyachi@math.sci.osaka-u.ac.jp
web: http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~miyachi/index.html

2.1. 極限集合としての無限小空間

$\mathcal{QC}$ 上の連続な流れ $\mathcal{F}_t^+$，$\mathcal{F}_t^-$ を

$$\mathbb{R} \times \mathcal{QC} \ni (t, f) \mapsto \mathcal{F}_t^+(f) = \frac{f(e^{-t}z)}{f(e^{-t})} \in \mathcal{QC}$$
$$\mathbb{R} \times \mathcal{QC} \ni (t, f) \mapsto \mathcal{F}_t^-(f) = \frac{f(-e^{-t}z)}{f(-e^{-t})} \in \mathcal{QC}$$

と定義する．$\mathcal{F}_t^+$ と $\mathcal{F}_t^-$ の ω-極限集合をそれぞれ $\Lambda^+(0, f)$ および $\Lambda^-(0, f)$ と書く．各 $\Lambda^+(0, f)$，$\Lambda^-(0, f)$ は連結である．また $\mathcal{R}\colon \mathcal{QC} \to \mathcal{QC}$ を

$$\mathcal{R}(f) = \frac{f(-z)}{f(-1)}$$

とする．

定理 1 (構造定理)**.** 次が成立する．

(1) $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$ は恒等写像であり，$\mathcal{R} \circ \mathcal{F}_t^+ = \mathcal{F}_t^-$ が成り立つ．特に $\mathcal{R}(\Lambda^+(0, f)) = \Lambda^-(0, f)$ である．

(2) $T(0, f) = \Lambda^+(0, f) \cup \Lambda^-(0, f)$

(3) $\Lambda^\pm(0, f)$ は一点集合であるか非可算集合のいずれかである．

この構造定理から次がわかる．

系 1 ($\{1, 2, \infty\}$-定理)**.** $T(0, f)$ は，３点以上含めば非可算集合である．さらに $T(0, f)$ が１点集合の場合もしくは２点集合の場合は実際に起こる．

2.2. 力学系的性質

定義から連続な流れ $\mathcal{F}_t^\pm$ は $\mathcal{QC}_K$ 上の流れと考えることが出来る．$\mathcal{F}_t^\pm$ の力学系的な性質として次がわかる．

定理 2 (位相的推移性)**.** 流れ $\mathcal{F}_t^\pm$ は $\mathcal{QC}_K$ 上で位相的推移的である．

この定理から特に次が導かれる．

系 2. 任意の可算集合 A と $K \geq 1$ に対して，集合

$$\{f \in \mathcal{QC}_K \mid T(z_0\colon f) = \mathcal{QC}_K, z_0 \in A\}$$

は $\mathcal{QC}_K$ 内の（*Baire*空間の意味で）*generic* な集合である．

参考文献

[1] B. Bojarski, V. Gutlyanskii, O. Martio and V. Ryazanov, *Infinitesimal geometry of quasiconformal and Bi-Lipschitz mappings in the plane*, Tracts in Mathematics **19**, European Mathematical Society (2013)

開リーマン面の閉リーマン面への等角的埋め込み

周期行列の極値的性質

柴　雅和　(広島大学)*1
山口　博史　(滋賀大学)*2

1. リーマン面の接続

1つのリーマン面 R を部分領域として含むもう1つのリーマン面 $\tilde{R}$ をもとのリーマン面 R の接続と呼ぶのはすでに古典的な用法である．この定義は R が開リーマン面のときにこそ意味があるが，歴史的関心は専ら種数が無限大の場合にあった．極大リーマン面に関する研究がその例である．しかし，種数が有限のリーマン面の場合にもまた，この定義に遡り得る興味深い考察ができる．種数が有限の開リーマン面は，おそらく平面領域との類似性が高い（に違いない）という理由から，大方の関心を惹きにくいようであるが，平面領域だけを対象としていては考えられない多くの問題を提供するし，接続を "同じ種数の閉リーマン面" に限って考察する だけでも，さまざまな観点から興味深く重要な問題 が生じる．

リーマン面の 接続を現代的に，かつ以下の状況に即して，より正確に述べれば：有限種数 $g\,(\geq 1)$ の開リーマン面 R が与えられているとき，R の理想境界を法とする標準ホモロジー基底 $\chi := \{A_j, B_j\}_{j=1,2,\ldots,g}$ を1つ固定する．習慣を真似て対 (R,χ) を "ホモロジー的に印づけられた開リーマン面" と呼ぶのが便利である．閉リーマン面 $\tilde{R}$ とその標準ホモロジー基底 $\tilde{\chi} := \{\tilde{A}_j, \tilde{B}_j\}_{j=1,2,\ldots}$ との対 $(\tilde{R},\tilde{\chi})$ にも同様の呼び名を用いることは自然である．これら2つの対の間に等角的埋め込み（中への等角写像）

$$\iota : R \to \tilde{R} \qquad \iota(A_j) \sim \tilde{A}_j, \quad \iota(B_j) \sim \tilde{B}_j$$

があるとき（記号 $\sim$: is homologous to），$(\tilde{R},\tilde{\chi})$ を (R,χ) の "同じ種数のコンパクトな接続" と名付けるのは些か手荒すぎる；等角的埋め込み $\tilde{\iota} : (R,\chi) \to (\tilde{R},\tilde{\chi})$ を考慮した $(\tilde{R},\tilde{\chi},\tilde{\iota})$ を考えるべきである．これらの間にさらに同値関係を入れて得られる各同値類を，ここでは短く (R,χ) の closing と呼ぶことにする．

2. 流体力学的接続

Closings の中で特に際立った性質をもつのが流体力学的接続である．それは以下に挙げる微分や関数（のどれか，あるいはすべて）に由来する：(i) 楠の半完全標準微分（複素解析的微分），(ii) Ahlfors の distinguished differential （[複素] 調和微分），(iii) Sario の主関数（実調和関数）．ある実数 $t \in (-1, 1]$ に対し

$$\exp(-\pi i t/2)\,\varphi^t$$

が半完全標準微分となるような R 上の有理型微分 φ^t は，多くのよい性質を備えた closing を作り出す．そのような closing は唯一とは限らないが，そのいずれの上へも φ^t は正則

2010 Mathematics Subject Classification: 30Fxx, 30Cxx
キーワード：リーマン面の接続, 極値的平行截線写像，リーマン行列
*1 e-mail: masaka_zu_hause @muc.biglobe.ne.jp
*2 e-mail: h.yamaguchi@s2.dion.ne.jp

に拡張される．R の理想境界の各成分はこの closing の上の流れの流線の一部として実現されていることに鑑み，これらの closings を hydrodynamic closings と呼ぶ．私たちの興味は，固定された 1 つの (R,χ) の closings の全体を理解することであるが，そこでは hydrodynamic closings が非常に重要な働きをする．

3. リーマン周期行列

(R,χ) の closing $(\tilde{R},\tilde{\chi},\tilde{\iota})$ に対し，$(\tilde{R},\tilde{\chi})$ の正規正則微分を $\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2,\ldots,\tilde{\varphi}_g$ とする．すなわち

$$\int_{\tilde{A}_k}\tilde{\varphi}_j=\delta_{jk},\qquad j,k=1,2,\ldots,g$$

とする．このとき g^2 個の複素数

$$\tilde{\tau}_{jk}:=\int_{\tilde{B}_k}\tilde{\varphi}_j\qquad j,k=1,2,\ldots,g$$

によって作られる行列

$$\tilde{T}=\tilde{T}(\tilde{R},\tilde{\chi},\tilde{\iota}):=(\tilde{\tau}_{jk})_{j,k=1,2,\ldots,g}$$

がいわゆるリーマンの周期行列であるが，これは対称で，かつその虚部は正定値である．

各 $t\in(-1,1]$ に対して，

$$\int_{A_k}\varphi_j^t=\delta_{jk},\qquad j,k=1,2,\ldots,g$$

を満たす R 上の 正則微分 φ_j^t が唯 1 組存在する．それらの B_k 周期 τ_{jk} を並べて拵えた $g\times g$ 複素行列 $T_t=(\tau_{jk}^t)$ は必ずしも対称ではないが，その虚部は対称で正定値である．

私たちはすでに次の事実を知っている：

定理． (1) 対角要素はそれぞれある閉円板に含まれる．

(2) 各円周上の点は流体力学的接続として特徴づけられる．

(3) これらの円板の半径は，一斉に正であるか一斉に零であるかのいずれかである．

4. 主結果

実 g ベクトル $\boldsymbol{a}:=(a_1,a_2,\ldots,a_g)$ に対して複素数

$$\tau_{\boldsymbol{a}}:=\tau_{\boldsymbol{a}}(\tilde{R},\tilde{\chi},\tilde{\iota})=\boldsymbol{a}\tilde{T}\boldsymbol{a}^T\qquad(\boldsymbol{a}^T：\text{行列 }\boldsymbol{a}\text{ の転置})$$

を (R,χ) の closing$(\tilde{R},\tilde{\chi},\tilde{\iota})$ の $\boldsymbol{a}$ モジュラスと呼ぶことにすれば，

定理． ホモロジー的に印づけられた有限正種数 g の開リーマン面 (R,χ) と任意の実 g ベクトル $\boldsymbol{a}:=(a_1,a_2,\ldots,a_g)$ に対し，ある複素数 $\tau^*=\tau^*_{\boldsymbol{a}}$ $(\operatorname{Im}\tau^*>0)$ およびある非負数 $\rho=\rho_{\boldsymbol{a}}$ があって，これらをそれぞれ中心および半径とする閉円板

$$\mathfrak{M}_{\boldsymbol{a}}=\mathfrak{M}_{\boldsymbol{a}}(R,\chi)=\{\tau\in\mathbb{C}\mid|\tau-\tau^*|\leq\rho\}$$

について次が成り立つ：

(1) 円周 $\partial\mathfrak{M}_{\boldsymbol{a}}$ は $\varphi^t:=a_1\varphi_1^t+a_2\varphi_2^t+\cdots+a_g\varphi_g^t$ による hydrodynamic closing によって径数表示される：

$$\tau_t=\tau_*+\rho e^{-\pi i(t-1/2)},\qquad t\in(-1,1]$$

(2) (R,χ) のすべての closing の $\boldsymbol{a}$ モジュラスは $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{a}}$ に属する．

最後に，簡単な注意として：$\boldsymbol{a}=(\delta_{j1},\delta_{j2},\ldots,\delta_{jg})$ のときは，先の定理に帰着する．

The period matrix of the hyperelliptic curve $w^2 = z^{2g+1} - 1$

田所 勇樹 (国立木更津工業高等専門学校 基礎学系)*

1. 序

コンパクトRiemann面の周期行列はその複素構造のみに依存して定まる．古典的に知られており，g次Siegel上半空間と結びつけるなど様々な角度から研究されている．具体的なRiemann面についての計算やアルゴリズムなどもいくつか知られている．本講演では[4]に基づいて，超楕円曲線$w^2 = z^{2g+1} - 1$ $(g \geq 2)$の周期行列の直接表示について説明したい．また，この論文には，ある条件を満たすコンパクトRiemann面の周期行列を求める幾何的アルゴリズムについても書かれている．

2. 周期行列

Xを種数$g \geq 2$のコンパクトRiemann面とする．その周期行列τ_Xは複素g次正方行列であり，1次元ホモロジー群$H_1(X;\mathbb{Z})$におけるシンプレクティック基底の選び方のみに依存して定まる．τ_Xは対称行列であり，その虚部は正定値であることが知られている．Xのヤコビ代数多様体$J(X)$は複素トーラス$\mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g + \tau_X\mathbb{Z}^g)$として定まる．Torelliの定理について述べる．XとYが双正則同型であるためには，$J(X)$と$J(Y)$が主偏極アーベル多様体として同型であることが必要十分条件である．これにより，周期行列τ_XはXの複素構造から定まる不変量と言える．一般に周期行列の具体的な計算は容易ではない．と言うのは，$H_1(X;\mathbb{Z})$のシンプレクティック基底の直接表示が難しいからである．たとえば，種数gが小さいXでの計算例は，Klein 4次曲線$(g = 3)$ $\{(X : Y : Z) \in \mathbb{C}P^2 \,|\, X^3Y + Y^3Z + Z^3X = 0\}$などの場合が知られている．また，一般の種数$g$の例は講演者の知る限り，3つの超楕円曲線$w^2 = z^{2g+2} - 1, w^2 = z(z^{2g+1} - 1), w = z(z^{2g} - 1)$ $(g \geq 2)$の計算例しか知られていない[3].

3. 超楕円曲線$w^2 = z^{2g+1} - 1$の周期行列

超楕円曲線C_gを平面曲線

$$\left\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \,|\, w^2 = z^{2g+1} - 1\right\}$$

のコンパクト化とする．$C_g \ni (z, w) \mapsto z \in \mathbb{C}P^1$は2重分岐被覆となり，$\iota(z, w) = (z, -w)$は超楕円対合となる．Arnol'd [1] や Mumford [2] で触れられているシンプレクティック基底$\{A_i, B_i\}_{i=1,2,\ldots,g} \subset H_1(C_g;\mathbb{Z})$に対応した$C_g$の周期行列を得た[4]. Schindler [3]により求められたC_gの周期行列は漸化式を用いた表示であり，このような直接表示ではない．また，途中で得られる周期はすでに，田代-山崎-伊藤-樋口[5]により計算されている．この結果とファンデルモンド行列の逆行列を計算することにより主定理が得られる．1の$2g+1$乗根を$\zeta = \zeta_{2g+1} = \exp(2\pi\sqrt{-1}/(2g+1))$のように1

本研究は科研費若手研究(B)(課題番号:25800053)の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 14H30, 14H50, 32G20
キーワード：超楕円曲線, 周期行列
* 〒292-0041 千葉県木更津市清見台東2-11-1
e-mail: tado @ nebula.n.kisarazu.ac.jp

つ固定する．整数$k=0,1,\dots,2g$に対してC_g上のループ$\gamma_k:[0,1]\to C_g$を

$$\gamma_k(t)=\begin{cases}(\zeta^k\cdot 2t,\sqrt{-1}\sqrt{1-(2t)^{2g+1}}) & (0\le t\le 1/2),\\ (\zeta^k(2-2t),-\sqrt{-1}\sqrt{1-(2-2t)^{2g+1}}) & (1/2\le t\le 1).\end{cases}$$

と定める．

Lemma 1. $A_i=\gamma_{2i-1}\cdot\gamma_{2i}^{-1}$, $B_i=\gamma_{2i-1}\cdot\gamma_{2i-2}^{-1}\cdot\dots\cdot\gamma_1\cdot\gamma_0^{-1}$ $(i=1,2,\dots,g)$と定義すると，$\{A_i,B_i\}_{i=1,2,\dots,g}$は$H_1(C_g;\mathbb{Z})$のシンプレクティック基底になる．

変数$x_1,x_2,\dots,x_n$に対して，i次対称式$\sigma_i(x_1,x_2,\dots,x_n)$を

$$\sum_{1\le j_1<\dots<j_i\le n}x_{j_1}\cdots x_{j_i}$$

と定める．ただし，$1\le i\le n$であり，$\sigma_0(x_1,x_2,\dots,x_n)=1$とする．

Theorem 2. この条件のもとで，超楕円曲線C_gの周期行列τ_{C_g}は

$$\tau_{C_g}=\left(\sum_{k=1}^{g}\frac{(-1)^{i+g}}{2g+1}(1-\zeta^{2kj})\sigma_{g-i}(\zeta^2,\zeta^4,\dots,\widehat{\zeta^{2j}},\dots,\zeta^{2g})\prod_{m=g-k+1}^{2g-k}(1-\zeta^{2m})\right)_{i,j},$$

である．ここで，$\widehat{\zeta^{2j}}$は組$(\zeta^2,\zeta^4,\dots,\zeta^{2g})$から，$\zeta^{2j}$をとりさることを意味する．

参考文献

[1] V.I. Arnol'd, *Remark on the branching of hyperelliptic integrals as functions of the parameters.*, Funct. Anal. Appl. **2** (1968), 187–189.

[2] David Mumford, *Tata lectures on theta. II: Jacobian theta functions and differential equations. With the collaboration of C. Musili, M. Nori, E. Previato, M. Stillman, and H. Umemura. Reprint of the 1984 edition.*, Modern Birkhäuser Classics. Basel: Birkhäuser. xiv, 272 p., 2007.

[3] Bernhard Schindler, *Period matrices of hyperelliptic curves.*, Manuscr. Math. **78** (1993), no. 4, 369–380.

[4] Yuuki Tadokoro, *The period matrix of the hyperelliptic curve* $w^2=z^{2g+1}-1$, preprint, arXiv:1211.6910, 2012.

[5] Yoshiaki Tashiro, Seishi Yamazaki, Minoru Ito, and Teiichi Higuchi, *On Riemann's period matrix of* $y^2=x^{2n+1}-1$., RIMS Kokyuroku **963** (1996), 124–141.

J-Stability of immediately expanding polynomial maps in p-adic dynamics

LEE, Junghun *

1 Introduction

In the theory of complex dynamical systems, we consider the iterations $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ of a rational map f over the field $\mathbb{C}$ of complex numbers on the Riemann sphere $\hat{\mathbb{C}}$ where f^n denotes the n th iteration of f. The theory of complex dynamical systems was established by P. Fatou and G. Julia in the early 20th century and they considered the Fatou set $\mathcal{F}(f)$ of f, which is defined as the largest open set on which the family $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ of iterated rational maps is equicontinuous, and the Julia set $\mathcal{J}(f)$ of f, which is a compact set defined as the complement of $\mathcal{F}(f)$. See [Miln06] for more details on the theory of complex dynamical systems.

In the theory of p-adic dynamical systems, we consider the iterations $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ of a rational map f over the field $\mathbb{C}_p$ of p-adic complex numbers on the projective line $\hat{\mathbb{C}}_p$ over $\mathbb{C}_p$. As we do in the theory of complex dynamical systems, we also define the Fatou set $\mathcal{F}(f)$ of f and the Julia set $\mathcal{J}(f)$ of f with equicontinuity. See [Silv07] for more details. Unlike the Riemann sphere $\hat{\mathbb{C}}$, the projective line $\hat{\mathbb{C}}_p$ over $\mathbb{C}_p$ has different topological properties such as non-compactness and disconnectedness. These also effect on the dynamics. For example, the Julia set of a polynomial map might be non-compact.

There is a natural question in the theory of dynamical systems: are there any relations of the Julia sets of two maps if those two maps are close enough? Our aim of this talk is to give an answer to the question.

1.1 Motivations from the theory of complex dynamical systems

In the theory of complex dynamical systems, Manẽ-Sad-Sullivan established the notion of J-stability and proved the following theorem in [MSS83]. As an application of their theorem, we can obtain the following theorems. Recall that a polynomial map f over $\mathbb{C}$ is *hyperbolic* if there exist a $\lambda > 1$ and a $c > 0$ such that $|(f^n)'(z)| \geq c\cdot\lambda^n$ for any z in the Julia set $\mathcal{J}(f)$ of f and n in $\mathbb{N}$.

Theorem A. *Let f be a polynomial map of degree $d \geq 2$ over $\mathbb{C}$. If f is hyperbolic, then there exists a connected open neighborhood U of f in the family of polynomial maps of degree d over $\mathbb{C}$ such that for any g in U, there exists a homeomorphism $h : \mathcal{J}(f) \to \mathcal{J}(g)$ such that $h\circ f = g\circ h$ on the Julia set $\mathcal{J}(f)$ of f.*

We say such a polynomial map f is *J-stable in the family of polynomial maps.*

Theorem B. *Let d be a natural number with $d \geq 2$ and consider the polynomial maps*

$$f_c(z) := z^d + c$$

where c in $\mathbb{C}$. Suppose that the parameters c and c' satisfy

$$\lim_{k\to\infty} |f_c^k(0)| = \lim_{k\to\infty} |f_{c'}^k(0)| = \infty.$$

* *Graduate School of Mathematics, Nagoya University, Nagoya 464-8602, Japan (e-mail: m12003v@math.nagoya-u.ac.jp)*

Then there exists a homeomorphism $h : \mathcal{J}(f_c) \to \mathcal{J}(f_{c'})$ such that $h \circ f_c = f_{c'} \circ h$ on the Julia set $\mathcal{J}(f_c)$ of f_c.

1.2 The main theorems

Let us begin with the definition of *J-stability in the family of polynomial maps* of p-adic dynamics. We shall use $\mathbb{C}_p$, $|\cdot|_p$, and $Poly_d(\mathbb{C}_p)$ to denote *the field of p-adic complex numbers*, *the p-adic norm on* $\mathbb{C}_p$, and *the family of polynomial maps of degree* d, respectively. In particular, we consider $Poly_d(\mathbb{C}_p)$ as a topological space with the topology of $\mathbb{C}_p^\times \times \mathbb{C}_p^d$.

Definition. Let p be a prime number, f be a polynomial map of degree $d \geq 2$ over $\mathbb{C}_p$, and A be a set in $\mathbb{C}_p$.

1. We call the polynomial map f *J-stable in* $Poly_d(\mathbb{C}_p)$ if there exists a neighborhood U in $Poly_d(\mathbb{C}_p)$ such that for any g in U, there exists a homeomorphism $h : \mathcal{J}(f) \to \mathcal{J}(g)$ such that $h \circ f = g \circ h$ on the Julia set $\mathcal{J}(f)$ of f.
2. We call a polynomial map f *immediately expanding on* A if there exists a $\lambda > 1$ such that for any z in A, $|f'(z)|_p \geq \lambda$. In particular, we say that f is *immediately expanding* if the Julia set $\mathcal{J}(f)$ of f is non-empty and f is immediately expanding on $\mathcal{J}(f)$.

Our main theorems are as follows:

Theorem 1.1. *Let p be a prime number and f be a polynomial map of degree $d \geq 2$ over $\mathbb{C}_p$. Suppose that f is immediately expanding. Then f is J-stable in $Poly_d(\mathbb{C}_p)$.*

Theorem 1.2. *Let p be a prime number, d be a natural number with $d \geq 2$, and consider the polynomial map*

$$f_c(z) := z^d + c$$

where c in $\mathbb{C}_p$. Suppose that d is not divided by p and the parameters c and c' satisfy

$$\lim_{k\to\infty} |f_c^k(0)|_p = \lim_{k\to\infty} |f_{c'}^k(0)|_p = \infty \quad \textit{and} \quad |c - c'|_p \leq |c|_p^{1/d}.$$

Then there exists a homeomorphism $h : \mathcal{J}(f_c) \to \mathcal{J}(f_{c'})$ such that $h \circ f_c = f_{c'} \circ h$ on the Julia set $\mathcal{J}(f_c)$ of f_c.

References

[MSS83] R. Mañé, P. Sad and D. Sullivan, *On the dynamics of rational maps*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (2) **16** (1983), 193–217.

[Miln06] J. Milnor, *Dynamics in one complex variable*, Third edition, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006.

[Silv07] J. H. Silverman, *The arithmetic of dynamical systems*, Springer, New York, 2007.

Transcendental entire function of slow growth with prescribed polynomial dynamics

木坂　正史　(京都大学大学院 人間・環境学研究科)[*1]
(M.Kisaka)　(Graduate School of Human and Environmental Studies, Kyoto University)

Let f be a transcendental entire function and f^n the n-th iterate of f.

Definition 0.1. (1) The **Fatou set** $F(f)$ and the **Julia set** $J(f)$ of f are defined as follows:

$$\begin{aligned} F(f) &:= \{z \in \mathbb{C} \mid {}^{\exists}U : \text{nbd. of } z,\ \{f^n|_U\}_{n=1}^{\infty} \text{ is normal}\} \\ J(f) &:= \mathbb{C} \setminus F(f) \ : \ \textbf{Julia set} = \overline{\{\text{repelling periodic points}\}} \end{aligned}$$

(2) A fixed point $z_0 \in \mathbb{C}$ (i.e. $f(z_0) = z_0$) of f is called a **Cremer point** if
  (i) $f'(z_0) = e^{2\pi i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ and
  (ii) f is not linearizable in any neighborhood of z_0.

(3) A topological space X is **locally connected at** $x_0 \in X$ if $x_0 \in X$ has arbitrary small connected neighborhoods.

(4) X is **locally connected** if X is locally connected at every $x \in X$.

(5) We say that there exists an f of arbitrarily slow growth with property P if for any monotone increasing function $\varphi(r) > 0$ $(r > 0)$ with $\lim_{r\to\infty} \varphi(r) = +\infty$, there exists f with the property P and satisfies

$$\log M(r, f) < \varphi(r) \log r, \quad {}^{\forall}r > r_0 \quad (\ M(r, f) := \max_{|z|=r} |f(z)|\ )$$

(Note that if $\varphi(r) \equiv \text{const}$, then f is a polynomial.)

Main result is the following:

Theorem A. *For a given polynomial P with $\deg P \geq 2$, There exists a transcendental entire function with arbitrarily slow growth which satisfies the following:*

(1) There exists a topological disk U such that $(f|U, U, f(U))$ is polynomial-like and conjugate to P.

(2) Periodic Fatou components of $(f|U, U, f(U))$, (which come from P) are the only periodic Fatou components of f and any Fatou component of f is eventually mapped to one of these components. In particular,
  (i) f has no wandering domains.
  (ii) If $J(P) = K(P) := \{z \mid P^n(z) \not\to \infty\ (n \to \infty)\}$, then $J(f) = \mathbb{C}$

(3) f has no asymptotic values and all the critical points of f escape to ∞ under the iterate of f, except for the ones which correspond to the non-escaping critical points of P.

We construct such an f as a limit of polynomials P_n which are obtained by quasiconformal surgery. The next is the key for the proof:

Proposition B. *Suppose a given polynomial P with $d = \deg P \geq 2$ and $z_1,\ z_2, \cdots,$ $z_{k-1} \in \mathbb{C}$ satisfy the following:*

(a) $P(0) = 0$, $P(1) = 1$,　*(b) $z_1,\ z_2, \cdots, z_{k-1} \in K(P)$*

[*1] 〒606-8501 京都市左京区吉田二本松町　京都大学大学院 人間・環境学研究科
e-mail: kisaka@math.h.kyoto-u.ac.jp

(c) Let $c_1,\ c_2, \cdots, c_l$ be the distinct critical points of P, then $c_1, \cdots, c_m \in K(P),\ c_{m+1}, \cdots, c_l \in \mathbb{C} \setminus K(P)$.
Then for any given $z_k \in \mathbb{C} \setminus K(P),\ \varepsilon > 0$ and $R > 0$, there exist a polynomial Q and $z'_1,\ z'_2, \cdots, z'_k$ which satisfy the following:
(1) $\deg Q = d + 1$
(2) $Q(0) = 0,\ Q(1) = 1$
(3) There exists a quasiconformal map φ and a topological disk U such that $K(P) \subset \varphi(U)$ and $Q|U \sim_\varphi P$.
(4) $z'_j := \varphi^{-1}(z_j)\ (1 \le j \le k)$ satisfy

$$|z_j - z'_j| < \varepsilon\ (1 \le j \le k), \quad z'_1,\ z'_2, \cdots, z'_{k-1},\ z'_k \in K(Q) \ \ (\textit{in fact } {}^\exists m,\ Q^m(z'_k) = 0)$$

(5) $|P(z) - Q(z)| < \varepsilon$ for $|z| < R$
(6) $c'_j := \varphi^{-1}(c_j)\ (1 \le j \le l)$ and ${}^\exists c'_{l+1}$ are the distinct critical points of Q and satisfy

$$|c_j - c'_j| < \varepsilon, \quad c'_1 \sim c'_m \in K(Q), \quad c'_{m+1} \sim c'_l,\ c'_{l+1} \in \mathbb{C} \setminus K(Q)$$

(7) Let $a_1, \cdots, a_d$ be the zeros of P, then the zeros of Q are $a'_1, \cdots a'_d,\ a'_{d+1}$ and satisfy

$$|a_j - a'_j| < \varepsilon\ (1 \le j \le d), \quad |a'_{d+1}| > R$$

Next we show some applications of Theorem A. When f is a polynomial, the following is well-known.

Theorem 0.1. *If f is a polynomial with a Cremer point, then $J(f)$ is not locally connected.*

Question : How about transcendental f with a Cremer point?
We can answer this question by applying Theorem A to a certain polynomial P.

Corollary C. *There exists a transcendental entire function with arbitrarily slow growth such that f has a Cremer point but $J(f)$ is locally connected.*

There are some more applications of Theorem A.

Corollary D. *There exists a transcendental entire function with arbitrarily slow growth such that $J(f)$ is a Sierpiński carpet (i.e., it is connected, locally connected, nowhere dense and the boundaries of each connected components of X^c are mutually disjoint Jordan curves).*

Corollary E. *There exists a transcendental entire function with arbitrarily slow growth which has prescribed finite number of attracting, parabolic, Siegel and Cremer cycles.*

参考文献

[Ba] I. N. Baker, Dynamics of slowly growing entire functions, *Bull. Austral. Math. Soc.* **63** (2001), no. 3, 367–377.

[B-E] W. Bergweiler and A. Eremenko, Entire functions of slow growth whose Julia set coincides with the plane, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **20** (2000), no. 6, 1577–1582.

[Bo] D. A. Boyd, An entire function with slow growth and simple dynamics, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **22** (2002), no. 2, 317–322.

[K1] M. Kisaka, Local uniform convergence and convergence of Julia sets, *Nonlinearity* **8** (1995), 273–281.

[K2] M. Kisaka, On the connectivity of Julia sets of transcendental entire functions, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **18** (1998), no. 1, 189–205.

An implosion arising from saddle connection in 2D complex dynamics

稲生　啓行　(京都大学)[*1]
中根　静男　(東京工芸大学)[*2]

$\mathbb{C}^2$ の polynomial skew product :

$$f(z,w) = (p(z), q_z(w)) = (z^2 + bz, w^2 + 2(a-z)w)$$

を考える。その k 回合成は

$$f^k(z,w) = (p^k(z), Q_z^k(w)) := (p^k(z), q_{p^{k-1}(z)} \circ \cdots \circ q_z(w))$$

と表される。

$$(a,b) \in S := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2; 0 < |b| < 1, a > \frac{1}{2}, 0 < a - 1 + b < \frac{1}{2}\}.$$

ならば f は $\alpha_+ = (0,0)$ と $\alpha_- = (\beta, 0) := (1-b, 0)$ をサドル不動点に持つ。z-平面 $w = 0$ は f-不変であり、そこでの f の力学系は p の力学系に他ならない。したがって、α_- の不安定多様体と α_+ の安定多様体は以下のように交わる。

$$W^u(\alpha_-) \cap W^s(\alpha_+) \supset int\, K_p \times \{0\}.$$

この saddle connection のために、fiber Julia sets は $z = \beta$ で不連続である。この不連続性を parabolic implosion と類似の議論を用いて説明する。

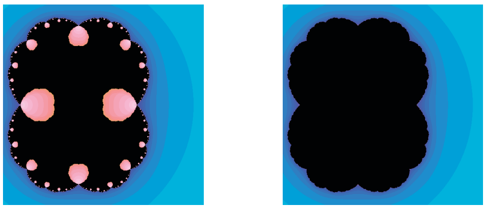


図 1: Fiber Julia sets $(a = 1.2, b = 0.1)$ left : $z = 0.8999999$, right : $z = \beta = 0.9$

Parabolic の場合の Fatou 座標に相当するものは、サドル $\alpha_\pm$ での線形化座標である。Brjuno の定理より次が従う。

補題 1. *S の full measure の部分集合 S' が存在して、すべての $(a,b) \in S'$ に対して、f の $\alpha_\pm$ での線形化座標 $\Psi_\pm$ が、正規化条件の下でただひとつ存在する。*

以下では常に $(a,b) \in S'$ と仮定する。正規化された線形化座標の一意性より $\Psi_\pm$ の第 1 座標は p の $z = 0, \beta$ での Koenigs 座標 $\phi_\pm$ となり、$\Psi_\pm(z,w) = (\phi_\pm(z), \psi_{\pm,z}(w))$ は skew product である。

[*1] e-mail: inou@math.kyoto-u.ac.jp
[*2] e-mail: nakane@gen.t-kougei.ac.jp

β に収束する $int\, K_p$ (= basin of 0) の点列 z_n をとる。p の $\beta, 0$ での fundamental domains を固定する：

$$\mathcal{A}_\beta := \phi_-^{-1}(\{\mu_- r \le |z| < r\}), \quad \mathcal{A}_0 := \phi_+^{-1}(\{r < |z| \le \mu_+ r\}).$$

すると、$k'_n, k''_n\, (\to \infty)$ が一意に存在して次を満たす。

$$p^{k'_n}(z_n) \in \mathcal{A}_\beta, \quad p^{k''_n}(z_n) \in \mathcal{A}_0.$$

ここで、$\overline{\{p^{k'_n}(z_n)\}}$ は $int\, K_p$ でコンパクトと仮定する。これは z_n の β への近づき方を制限するものであり、z_n が実数なら成り立つ。このとき $\{k''_n - k'_n\}$ は有界である。

定理 1. さらに $\{k_n\}$ と $\sigma \neq 0$ が存在して $(Q_{z_n}^{k_n})'(0) \to \sigma$ を満たせば、$W^s(\alpha_-)$ 上広義一様に

$$Q_{z_n}^{k_n} \to g_\sigma := \psi_{+,0}^{-1} \circ m_\sigma \circ \psi_{-,\beta},$$

と収束する。ここで $m_\sigma(w) := \sigma w$ である。

$g_\sigma : W^s(\alpha_-) \to W^u(\alpha_+)$ は parabolic の場合の *Lavaurs map* に相当する。

$$W^s(\alpha_-) = \{\beta\} \times int\, K_\beta, \quad W^u(\alpha_+) = \{0\} \times \mathbb{C},$$

より g_σ の合成 g_σ^2 は定義できない。

与えられた点列 $\{z_n\}$ に対し、適当な部分列を取れば、定理 1 の仮定を満たす k_n と σ が存在する。

$$K(\beta, \sigma) := K_\beta \setminus g_\sigma^{-1}(\mathbb{C} \setminus K_0), \quad J(\beta, \sigma) := \overline{g_\sigma^{-1}(J_0)}$$

とおく。$J(\beta, \sigma)$ を *fiber Julia-Lavaurs set* と呼ぶ。次が成り立つ。

$$J_\beta \subsetneq J(\beta, \sigma) = \partial K(\beta, \sigma).$$

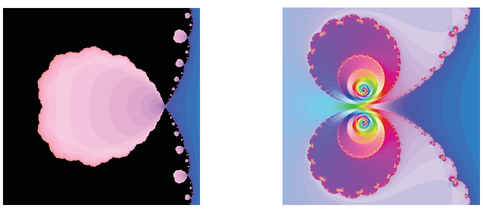
Semi-distance を $\partial(X, Y) := \sup_{x \in X} d(x, Y)$ とおく。

命題 1. $Q_{z_n}^{k_n} \to g_\sigma$ ならば、次が成り立つ。

$$\partial(K_{z_n}, K(\beta, \sigma)) \to 0, \quad \partial(J(\beta, \sigma), J_{z_n}) \to 0.$$

この命題により fiber Julia sets J_z が $z = \beta$ で不連続であることがわかる。

次の図の左図は、fiber Julia-Lavaurs set, 右図は parabolic の Julia-Lavaurs set の拡大図である。g_σ の合成が定義できないので、fiber Julia-Lavaurs set は parabolic の場合に比べて、単純である。



円環における半完全正則微分のなす空間の再生核

濱野 佐知子 (福島大学)*

1. 序

有限種数の滑らかな境界 $(C_1, \ldots, C_\nu)$ をもつリーマン面 R 上の L^2 正則微分 $\omega = f(z)dz$ のなすヒルベルト空間を $A(R)$ とおく．$A(R)$ のうち半完全正則微分のなす空間 $S(R)$ を考える．$S(R)$ は $A(R)$ の閉部分空間であるから，$A(R) = S(R) \oplus S(R)^\perp$. $K(z,\zeta)dzd\bar{\zeta}$ (resp. $\widetilde{K}(z,\zeta)dzd\bar{\zeta}$) を $A(R)$ (resp. $S(R)$) の再生核関数とする．再生核 $K(\zeta,\zeta)|d\zeta|^2$ は Bergman 核とよばれ, 次の関係式が知られている．

$$K(z,\zeta) = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 g(z,\zeta)}{\partial z \partial\bar{\zeta}} \text{ (by Schiffer, 1946)}, \quad K(\zeta,\zeta) = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial^2 \lambda(\zeta)}{\partial \zeta \partial\bar{\zeta}} \text{ (by Suita, 1972)}.$$

ここで, $g(z,\zeta)$ は (R,ζ) に関するグリーン関数, $\lambda(\zeta)$ はロバン定数である．

定義 1. 上述の R が 2 点 $\{a,\ b\} \subset R$ を含むとし，正則局所座標を $U_a : |z-\zeta| < r_a$, $U_b : |z| < r_b$ (a はζに, b は 0に写る) とする．$R \setminus \{a,b\}$ 上の調和関数で, a で $\log|z-\zeta|$ および b で $-\log|z|$ の極をもち，L_1-境界条件 (各境界成分 C_j で, $h(z)$ は定数 c_j かつ $\int_{C_j} \frac{\partial h}{\partial n_z} ds_z = 0$) を満たす関数は，$\lim_{z\to 0}(h(z)+\log|z|) = 0$ で正規化すると一意に定まる．この $h(z)$ を $(R,0,\zeta)$ に関する L_1-主関数, $\mu := \lim_{z\to\zeta}(h(z) - \log|z-\zeta|)$ を L_1-定数 とよぶ (正確には, *for* (R,b,a) *w.r.t.* U_a *and* U_b).

定理 1 ([2]). 再生核関数および再生核 $\widetilde{K}$ の具体的表現は

$$\widetilde{K}(z,\zeta) = \frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 h(z,\zeta)}{\partial z \partial\bar{\zeta}}, \qquad \widetilde{K}(\zeta,\zeta) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial^2 \mu(\zeta)}{\partial \zeta \partial\bar{\zeta}}.$$

ここで, $h(z,\zeta)$ は $(R,0,\zeta)$ に関する L_1-主関数, $\mu(\zeta)$ は L_1-定数である．

2. 今回の結果

2.1. 円環領域での再生核 $\widetilde{K}$ の表示

定理 2. 円環領域 $A = \{\sqrt{r} < |z| < \frac{1}{\sqrt{r}}\}$ $(0 < r < 1)$ における再生核 $\widetilde{K}$ は,

$$\widetilde{K}(\zeta,\zeta) = \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty} r^{2\nu-1}\left\{\frac{1}{(1-r^{2\nu-1}|\zeta|^2)^2} + \frac{1}{(|\zeta|^2 - r^{2\nu-1})^2}\right\}.$$

証明は, 定理 1 と次の補題 1 による.

補題 1. 円環領域 A の任意の点 $\zeta \in A \setminus \{1\}$ をとる．$(A,1,\zeta)$ に関する L_1-定数 $\mu(\zeta)$ は,

$$\begin{aligned}\mu(\zeta) &= -2\log|1-\zeta| \\ &\quad -\sum_{\nu=1}^{\infty}\log\left|\frac{(1-r^{2\nu}\zeta)^2(1-r^{2\nu}\zeta^{-1})^2(1-r^{2\nu-1})^2(1-r^{2\nu-1}|\zeta|^2)(1-r^{2\nu-1}|\zeta|^{-2})}{(1-r^{2\nu-1}\zeta)^2(1-r^{2\nu-1}\zeta^{-1})^2(1-r^{2\nu})^4}\right|.\end{aligned}$$

本研究は科研費 若手研究 (B)(課題番号:23740098) の助成を受けたものです.
2010 Mathematics Subject Classification: 30C40, 32U05
キーワード：擬凸領域, 再生核, 計量, L_1-主関数
* 〒960-1296 福島市金谷川 1 番地 福島大学 人間発達文化学類
e-mail: hamano@educ.fukushima-u.ac.jp

R には Bergman 核関数を用いて R の任意の双正則変換により不変な Bergman 計量 $ds^2 = K(\zeta,\zeta)|d\zeta|^2$ が導入される．それを $S(R)$ へ直交射影した計量 $\widetilde{ds}^2 = \widetilde{K}(\zeta,\zeta)$ との関係は, $\widetilde{ds}^2 - ds^2 \le 0$ である．実際,

命題 1. 円環領域 A における上述の 2 つの再生核の差は,

$$\tilde{K}(\zeta,\zeta) - K(\zeta,\zeta) = \frac{1}{2\pi|\zeta|^2\log r} \quad (<0).$$

[3] では円環領域におけるロバン定数 $\lambda(\zeta)$ の 2 階微分を考察することで, $\pi K(\zeta,\zeta) > e^{-2\lambda(\zeta)}$ を示されています．その結果を拡張された [4] では, 一般領域で $\pi K(\zeta,\zeta) \ge e^{-2\lambda(\zeta)}$ が成り立つことを示されています．次回は, $\widetilde{K}(\zeta,\zeta)$ と $e^{\mu(\zeta)}$ の関係について触れます．

2.2. 円環 $A(t)$ の擬凸変動における L_1-定数 $\mu(t)$ の劣調和性

複素パラメータ $t \in B = \{|t| < \rho\} \subset \mathbb{C}$ を導入し, 境界つきリーマン面 $R(t)$, $t \in B$ は 2 点 $\{0, \zeta(t)\}$ を含み, $z = \zeta(t) (\neq 0)$ は B で正則と仮定する．[1] では, 極を 2 つもつ L_1-定数 $\mu(t)$ for $(R(t), 0, \zeta(t))$ の 2 階変分公式を求めることにより, 次を示した．

定理 3 ([1])**.** $\mathcal{R} = \cup_{t\in B}(t, R(t))$ が滑らかな変動からなる $B \times \mathbb{C}_z$ 上の 2 次元擬凸領域ならば, $(R(t), 0, \zeta(t))$ に関する L_1-定数 $\mu(t)$ は B 上で劣調和である．

この具体例を, 円環の擬凸変動で構成する．

例 1. *各 $t \in B = \{|t| < 1\} \subset \mathbb{C}$ に対し, 円環 $A(t) = \{\sqrt{r(t)} < |z| < \frac{1}{\sqrt{r(t)}}\}$ $(0 < r(t) < 1)$ を考え, $\mathcal{R} := \cup_{t\in B}(t, A(t))$ とおく．$\forall t \in B$ に対して $A(t) \supset \{|z| = 1\}$ である．極を $1, -1$ にもつ L_1-定数 $\mu(t)$ for $(A(t), 1, -1)$ は, 補題 1 より*

$$\mu(t) = -2\log 2 - 4\sum_{n=1}^{\infty} \log\left|\frac{(1-r(t)^{2n-1})(1+r(t)^{2n})}{(1-r(t)^{2n})(1+r(t)^{2n-1})}\right|.$$

$\log r(t)$ は B 上劣調和と仮定すると, $\mathcal{R}$ は擬凸である．このとき, $\mu(t)$ は劣調和である．

$$\because)\ \partial\bar{\partial}\mu(t) = -4\sum_{n=1}^{\infty}\left\{P_n(r(t))|\partial r(t)|^2 + Q_n(r(t))\partial\bar{\partial} r(t)\right\}$$
$$\ge -4\sum_{n=1}^{\infty}\left\{P_n(r(t)) + \frac{Q_n(r(t))}{r(t)}\right\}|\partial r(t)|^2 \quad (\text{by 擬凸条件と } Q_n(r(t))<0)$$
$$= \frac{8(1+r(t)^2)}{r(t)\{1-r(t)^2\}^2}|\partial r(t)|^2 \ge 0.$$

□

この証明を振り返ると, $\mu(t)$ が B で調和ならば, $\mathcal{R} = B \times A(0)$ であることが分かる．

参考文献

[1] S. Hamano, *Variation formulas for L_1-principal functions and the application to simultaneous uniformization problem*, Michigan Math. J. **60** No.2 (2011), 271–288.

[2] S. Hamano, *Log-plurisubharmonicity of metric deformations induced by Schiffer and harmonic spans* (submitted).

[3] N. Suita, *Capacities and kernels on Riemann surfaces*, Arch.Rat.Mech.Anal. **46** (1972), 212–217.

[4] Z. Blocki, Suita conjecture and the Ohsawa-Takegoshi extension theorem, Inventiones Mathematicae 193 (2013), 149-158.

弱擬凸領域の Diederich–Fornaess 指数の大域的評価

足立 真訓 (名大・多元数理)*1
Judith Brinkschulte (Univ. Leipzig)*2

概　要
強多重劣調和な有界皆既関数を許容する複素領域は, 超凸と呼ばれる. Diederich–Fornaess 指数 (以下, DF 指数) は, 複素領域の超凸性の程度を測る指数である. DF 指数は $[0,1]$ に値をとり, 強擬凸境界の Stein 領域に対しては 1 となる. また, いわゆるワーム領域により, DF 指数が任意に 0 に近い弱擬凸領域が構成できる. 我々は, 一般の弱擬凸領域に対し, その境界の Levi 形式の階数により DF 指数を上から評価する公式を得たので, これを報告する.

1. 背景

X を複素多様体とし, $\mathcal{C}^2$ 級実超曲面 M で囲まれた相対コンパクト領域 Ω を考える. $\overline{\Omega}$ の近傍 U 上の $\mathcal{C}^2$ 級実数値関数 δ が Ω の境界距離函数であるとは, $\Omega = \{p \in U \mid \delta > 0\}$, かつ, M 上 $d\delta \neq 0$ となることをいう. 領域 Ω の境界距離函数 δ の **DF 指数** η_δ は,

$$\eta_\delta := \sup\left(\{\eta \in (0,1) \mid -\delta^\eta \text{ が } \Omega \text{ 上強多重劣調和}\} \cup \{0\}\right)$$

と定義される. 領域 Ω の **DF 指数** $\eta(\Omega)$ は, Ω の境界距離函数 δ を渡っての η_δ の上限値として定義される.

Diederich–Fornaess [3] は, Stein 多様体 X (特に, $X = \mathbb{C}^n$) 内の $\mathcal{C}^2$ 級擬凸境界 M を持つ $\Omega \Subset X$ に対し, 常に $\eta(\Omega) > 0$ であって, Ω が超凸であることを示した. ($\eta \in (0, \eta_\delta)$ に対し, $-\delta^\eta$ は Ω 上の強多重劣調和な有界皆既関数となることに注意. $-\delta^\eta$ は境界で特異性を持ち, その程度により超凸性の強さをある意味で測っているのである.) この結果は, M が強擬凸の時, M は強多重劣調和な定義関数を持ち, $\eta(\Omega) = 1$ となることの一般化である. この後, Diederich–Fornaess [4] は, いわゆるワーム領域により, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $0 < \eta(\Omega) < \varepsilon$ となる領域 $\Omega \Subset \mathbb{C}^2$ が作れることを示した.

2. 問題と主結果

ワーム領域の境界には Levi 平坦点からなる開集合が含まれ, その影響により, DF 指数が小さな値に制約される. 一方, 境界が強擬凸点のみからなる Stein 領域の場合は, DF 指数は 1 であった. そこで, 「Levi 形式が退化した境界点が多いほど, DF 指数が小さくなるのではないか」と考えるのは自然であろう.

我々の主結果は, この直感を正当化する.

<u>主結果</u>. $n(\geq 2)$ 次元複素多様体 X 内の $\mathcal{C}^3$ 級境界を持つ相対コンパクト領域 Ω を考える. 自然数 $0 \leq \ell \leq n-1$ に対し, 境界 M の Levi 形式が至る所 ℓ 次元以上退化する時, $\eta(\Omega) \leq 1 - \ell/n$ である.

本研究発表は科研費 (課題番号: 26800057) の助成を受けたものである.
2010 Mathematics Subject Classification: 32V15; 32V40.
*1 e-mail: `m08002z@math.nagoya-u.ac.jp`
web: `http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~m08002z/`
*2 e-mail: `brinkschulte@math.uni-leipzig.de`

この主結果は, 系として「$\eta(\Omega) > 1/n$ の時, M は非 Levi 平坦点を持つ」「$\eta(\Omega) > 1-1/n$ の時, M は強擬凸点を持つ」を導く. 本主結果は, DF 指数の値の大域的な意味を, 境界の Levi 形式の階数と関係させる形で, 明らかにしている.

注意. 複素曲面内の Levi 平坦境界の領域 ($n=2$, $\ell=1$) に対し, 主結果の与える上界の値 $1/2$ は最良である. 双曲型閉 Riemann 面 Σ に対し, Σ の Teichmüller 空間の元を用い, Σ 上の線織面内の正則円板束を考えると, DF 指数が正の Levi 平坦境界の領域が作れる. Teichmüller 空間の元を基点に近づけると, DF 指数は $1/2$ に近づく ([1]).

注意. 本主結果は, Siqi Fu 氏, Mei-chi Shaw 氏によっても, 独立な別手法によって得られていたことが判明している. ([5]) .

3. 証明のアイディア

主結果の証明の鍵は, 次の Donnelly–Fefferman 型の L^2 消滅定理である.

定理. $n(\geq 2)$ 次元複素多様体 X 内の $\mathcal{C}^2$ 級境界を持つ相対コンパクト領域 Ω を考える. DF 指数が正の境界距離函数 δ と $\eta \in (0, \eta_\delta)$ に対し, $\omega := i\partial\overline{\partial}(-\delta^\eta)$ により Ω の Kähler 計量を定め, 重み $\delta^{-\eta}$ の L^2 微分形式 $L^2_{(\cdot,\cdot)}(\Omega, \delta^{-\eta}, \omega)$ を考える. この時, $f \in L^2_{(n,n)}(\Omega, \delta^{-\eta}, \omega)$ に対する $\overline{\partial}$-方程式 $\overline{\partial}u = f$ は Ω 上の超関数解 $u \in L^2_{(n,n-1)}(\Omega, \delta^{-\eta}, \omega)$ を持つ.

主結果の証明は背理法による. $\eta(\Omega) > 1-\ell/n$ を仮定し, $\eta_\delta > \eta > 1-\ell/n$ となる δ, η をとる. Ω 内に台を持つ bump form f に対し, この L^2 消滅定理を適用し, $\overline{\partial}u = f$ の Ω 上の超関数解 u を $u \in L^2_{(n,n-1)}(\Omega, \delta^{-\eta}, i\partial\overline{\partial}(-\delta^\eta))$ で得る. すると, 境界の Levi 形式が至る所 ℓ 次元以上退化する場合, u のゼロ拡張が $\overline{\partial}u = f$ の X 上の超関数解を定めてしまうことが分かる. これはコンパクト台の de Rham コホモロジー $H^{2n}_c(X)$ の消滅を意味し, 矛盾である. u のゼロ拡張が X 上の超関数解を定める点は, Kähler 計量 $i\partial\overline{\partial}(-\delta^\eta)$ の体積形式の境界 M での発散のオーダーが, M の Levi 形式の退化次元 ℓ により評価できることに基づく.

参考文献

[1] M. Adachi, *A local expression of the Diederich–Fornaess exponent and the exponent of conformal harmonic measures*, accepted for publication in Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.), available at arXiv:1403.3179. (足立の 2014 年春の学会における発表内容)

[2] M. Adachi and J. Brinkschulte, *A global estimate for the Diederich–Fornaess index of weakly pseudoconvex domains*, submitted, available at arXiv:1401.2264.

[3] K. Diederich and J. E. Fornaess, *Pseudoconvex domains: bounded strictly plurisubharmonic exhaustion functions*, Invent. Math. **39**, 129–141 (1977).

[4] K. Diederich and J. E. Fornaess, *Pseudoconvex domains: an example with nontrivial Nebenhülle*, Math. Ann. **225**, 275–292 (1977).

[5] S. Fu and M.-C. Shaw, *The Diederich-Fornæss exponent and non-existence of Stein domains with Levi-flat boundaries*, preprint, available at arXiv:1401.1834.

原点を含むある種の非有界ラインハルト領域に関する正則同値問題

清水　悟　(東北大学大学院理学研究科)

概　要

In this talk, I talk about the holomorphic equivalence problem for (essentially) unbounded pseudoconvex Reinhardt domains. When the domains contain no coordinate hyperplanes, an affirmative answer was already given in [5]. As an opposite case to such a case, we discuss a class of unbounded Reinhardt domains containing the origin, which are said to be of broadened type. The main purpose of this talk is to give an affirmative answer to the holomorphic equivalence problem for them by making use of the way of a Liouville foliation.

1. ラインハルト領域に関する正則同値問題

$U(1)$ により絶対値 1 の複素数のなす乗法群を表し，$T = (U(1))^n$ とおく．このとき n 次元コンパクトトーラス T は $\mathbf{C}^n$ 上に次の規則により正則変換群として作用する：$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in T$, $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ に対して，$\alpha \cdot z = (\alpha_1 z_1, \cdots, \alpha_n z_n)$.

さて $\mathbf{C}^n$ 内の領域 D は，すべての $\alpha \in T$ に対して $\alpha \cdot D \subset D$ が成り立つとき，ラインハルト領域と呼ばれる．このとき T は D 上に正則変換群として作用する．T の作用から誘導される D の正則自己同型群 $\mathrm{Aut}(D)$ の部分群を $T(D)$ で表す．

ラインハルト領域に関する正則同値問題を論ずるためには，$(\mathbf{C}^*)^n$ の代数的自己同型の概念が必要である．$(\mathbf{C}^*)^n$ の正則自己同型 φ は

$$\varphi : (\mathbf{C}^*)^n \ni (z_1, \cdots, z_n) \longmapsto (w_1, \cdots, w_n) \in (\mathbf{C}^*)^n,$$
$$w_i = \alpha_i z_1^{a_{1i}} \cdots z_n^{a_{ni}}, \quad i = 1, \cdots, n,$$

の形をもつとき，$(\mathbf{C}^*)^n$ の代数的自己同型と呼ばれる．ここで $(a_{ij}) \in GL(n, \mathbf{Z})$, $(\alpha_i) \in (\mathbf{C}^*)^n$ である．$\mathrm{Aut}_{\mathrm{alg}}((\mathbf{C}^*)^n)$ により $(\mathbf{C}^*)^n$ の代数的自己同型全体のなす $\mathrm{Aut}((\mathbf{C}^*)^n)$ の部分群を表す．次の命題は，ラインハルト領域の間の T-作用に関する同変双正則写像が $(\mathbf{C}^*)^n$ の代数的自己同型により与えられることを示す．

命題 ([2])　$\varphi : D \to D'$ を $\mathbf{C}^n$ 内の 2 つのラインハルト領域 D, D' の間の双正則写像とする．このとき $\varphi T(D) \varphi^{-1} = T(D')$ となるための必要十分条件は φ が $\mathrm{Aut}_{\mathrm{alg}}((\mathbf{C}^*)^n)$ のある元の制限として与えられることである．

ラインハルト領域の間の T-作用に関する同変双正則写像はラインハルト領域のカテゴリーにおける自然な射と考えられるので，次の定義と問題が導かれる．

定義　$\mathbf{C}^n$ 内の 2 つのラインハルト領域は，それらの間に $\mathrm{Aut}_{\mathrm{alg}}((\mathbf{C}^*)^n)$ のある元の制限として与えられる双正則写像が存在するとき，代数的に同値であると呼ばれる．

問題（ラインハルト領域に関する正則同値問題）　$\mathbf{C}^n$ 内の 2 つのラインハルト領域 D と D' が双正則同値ならば，それらは代数的に同値になるか？

D, D' が有界なとき，この問題には肯定的な解答が与えられている ([1]).

2. 末広型ラインハルト領域

D を $\mathbf{C}^n$ 内の擬凸ラインハルト領域とする．このとき $D^* := D \cap (\mathbf{C}^*)^n$ は $(\mathbf{C}^*)^n$ 内の擬凸ラインハルト領域であり，D^* の対数像

$$\mathrm{ord}(D^*) = \left\{ \left(-\frac{1}{2\pi}\log|\,z_1\,|, \cdots, -\frac{1}{2\pi}\log|\,z_n\,| \right) \in \mathbf{R}^n \,\middle|\, (z_1, \cdots, z_n) \in D^* \right\}$$

は $\mathbf{R}^n$ 内の凸領域となる．$\mathrm{ord}(D^*)$ に含まれる極大なアフィン部分空間の次元を $\ell(D)$ とおく．

さて，座標超平面の和集合 $\{(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n \,|\, z_1 \cdots z_n = 0\}$ を含む $\mathbf{C}^n$ 内の擬凸ラインハルト領域を末広型ラインハルト領域と呼ぶことにする．この講演では主に次の２つの結果を報告する．

定理１　D, D' を $\mathbf{C}^n$ 内の末広型ラインハルト領域とし，$\ell(D) < n$, $\ell(D') < n$ とする．$H = D - D^*$, $H' = D' - D'^*$ とおくとき，D と D' の間の任意の双正則写像 $\varphi : D \to D'$ に対して，$\varphi(H) = H'$ が成り立つ．

この結果はリュービル葉層構造の考え方を用いて示される．定理１と [5] の結果を利用して，末広型ラインハルト領域に関する正則同値問題へ肯定的な解答を与えることができる．

定理２　$\mathbf{C}^n$ 内の２つの末広型ラインハルト領域が双正則同値であるならば，それらは代数的に同値になる．

定理２は，$n = 2$ のときについては [3]，[4] において示された．

参考文献

[1] S. Shimizu, *Automorphisms and equivalence of bounded Reinhardt domains not containing the origin*, Tohoku Math. J. 40 (1988), 119–152.

[2] S. Shimizu, *Automorphisms of bounded Reinhardt domains*, Japan. J. Math. 15 (1989), 385–414.

[3] S. Shimizu, *Holomorphic equivalence problem for a certain class of unbounded Reinhardt domains in* $\mathbf{C}^2$, Osaka J. Math. 28 (1991), 609–621.

[4] S. Shimizu, *Holomorphic equivalence problem for a certain class of unbounded Reinhardt domains in* $\mathbf{C}^2$*, II*, Kodai Math. J. 15 (1992), 430–444.

[5] S. Shimizu, *Holomorphic equivalence problem for Reinhardt domains and the conjugacy of torus actions*, submitted.

Averaging property of capacity

Hiroaki Aikawa (Hokkaido University)*1
Tsubasa Itoh (Tokyo Institute of Technology)*2

Let φ be a nonnegative set function on $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, such that

(i) If $E \subset F$, then $\varphi(E) \leq \varphi(F)$.

(ii) If U is a nonempty bounded open set, then $0 < \varphi(U) < \infty$.

By $B(x,r)$ we denote the open ball with center at x and radius r. We study

$$\mathcal{A}(\varphi, r, E) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\varphi(E \cap B(x,r))}{\varphi(B(x,r))}.$$

By definition $0 \leq \mathcal{A}(\varphi, r, E) \leq 1$. If $\mathcal{A}(\varphi, r, E) > 0$, then E is uniformly distributed in $\mathbb{R}^n$ in the scale r with respect to φ. A typical example of φ is the n-dimensional Lebesgue outer measure m. We have the following property.

Proposition 1 *If $\mathcal{A}(m, r_0, E) > 0$ for some r_0, then $\mathcal{A}(m, r, E) > 0$ for $r \geq r_0$. More precisely, there exists a constant $A > 1$ depending only on n such that*

$$\mathcal{A}(m, R, E) \geq A^{-1} \mathcal{A}(m, r, E) \quad \text{for } R \geq r.$$

This proposition means that if E is uniformly distributed in $\mathbb{R}^n$ in the scale r_0 with respect to m, then so is in the scale r, $r \geq r_0$. We note that the *density* is not improved no matter how large r is. It is easy to construct a closed set E such that $\lim_{r \to \infty} \mathcal{A}(m, r, E) = c$ for each $c \in (0,1)$.

If φ is a capacity, then the situation is very different. By $C_\ell(E)$ we denote the logarithmic capacity of $E \subset \mathbb{R}^2$. Stegenga [Ste80] proved the following theorem (slightly changed).

Theorem A *Let $E \subset \mathbb{R}^2$. If $\mathcal{A}(C_\ell, r_0, E) > 0$ for some $r_0 > 0$, then* $\lim\limits_{r \to \infty} \mathcal{A}(C_\ell, r, E) = 1$.

We shall show that the same averaging property holds for other capacities. Hereafter, let $1 < p < \infty$ and let w be a p-admissible weight as in [HKM93, Chapter 1]. We write $d\mu(x) = w(x)dx$. Let $D \subset \mathbb{R}^n$ be an open set. For a compact subset K of D we define

$$\mathrm{Cap}_{p,\mu}(K, D) = \inf \Big\{ \int_D |\nabla u|^p d\mu : \ u \geq 1 \text{ on } K,\ u \in C_0^\infty(D) \Big\}.$$

For an open subset U of D we let

$$\mathrm{Cap}_{p,\mu}(U, D) = \sup_{U \supset K \text{ compact}} \mathrm{Cap}_{p,\mu}(K, D),$$

This work was supported in part by JSPS KAKENHI Grant Numbers 25287015 and 25610017.
2010 Mathematics Subject Classification: 31B15.
Keywords: capacity.
*1 e-mail: aik@math.sci.hokudai.ac.jp
*2 e-mail: tsubasa@math.titech.ac.jp

and finally for an arbitrary subset E of D

$$\operatorname{Cap}_{p,\mu}(E,D) = \inf_{\substack{E\subset U\subset D\\ U \text{ open}}} \operatorname{Cap}_{p,\mu}(U,D).$$

We call $\operatorname{Cap}_{p,\mu}(E,D)$ the (variational) p-capacity of condenser (E,D) or simply the p-capacity of E in D. See [HKM93, Chapter 2].

We show that the same phenomenon as in Theorem A occurs for p-capacity in $\mathbb{R}^n$.

Theorem 2 *Let $\lambda_1 > 1$ and $\lambda_2 > 1$. Let $E \subset \mathbb{R}^n$ and suppose*

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\operatorname{Cap}_{p,\mu}(E\cap \overline{B}(x,r_0), B(x,\lambda_1 r_0))}{\operatorname{Cap}_{p,\mu}(\overline{B}(x,r_0), B(x,\lambda_1 r_0))} > 0$$

for some $r_0 > 0$. Then

$$\lim_{r\to\infty} \left(\inf_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\operatorname{Cap}_{p,\mu}(E\cap \overline{B}(x,r), B(x,\lambda_2 r))}{\operatorname{Cap}_{p,\mu}(\overline{B}(x,r), B(x,\lambda_2 r))} \right) = 1.$$

In case $w \equiv 1$ and $D = \mathbb{R}^n$ we simply write $\operatorname{Cap}_p(E)$ for $\operatorname{Cap}_{p,\mu}(E,\mathbb{R}^n)$. It is well-known that if $p \ge n$, then $\operatorname{Cap}_p(E) = 0$ for every $E \subset \mathbb{R}^n$; if $1 < p < n$ and $\lambda > 1$, then

$$\operatorname{Cap}_p(E) \le \operatorname{Cap}_p(E, B(x,\lambda r)) \le A \operatorname{Cap}_p(E) \quad \text{for } E \subset B(x,r),$$

where A depends only on λ, n and p ([Maz70, Proposition 4]). If $1 < p < n$, then we can take $\lambda_1 = \lambda_2 = \infty$ in Corollary 2, and we obtain a counterpart of Theorem A in the p-capacity context.

Theorem 3 *Let $1 < p < n$. Let $E \subset \mathbb{R}^n$. If $\mathcal{A}(\operatorname{Cap}_p, r_0, E) > 0$ for some $r_0 > 0$, then $\lim_{r\to\infty} \mathcal{A}(\operatorname{Cap}_p, r, E) = 1$.*

References

[HKM93] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, and O. Martio, *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1993, Oxford Science Publications.

[Maz70] V. G. Maz′ja, *The continuity at a boundary point of the solutions of quasi-linear elliptic equations*, Vestnik Leningrad. Univ. **25** (1970), no. 13, 42–55.

[Ste80] D. A. Stegenga, *A geometric condition which implies BMOA*, Michigan Math. J. **27** (1980), no. 2, 247–252.

Trudinger's exponential integrability for Riesz potentials of functions in generalized grand Morrey spaces

水田 義弘 (広島工業大学・工学部)
大野 貴雄 (大分大学・教育福祉科学部)

G は $\mathbf{R}^n$ 内の有界開集合とする．α $(0<\alpha<n)$ 次のリースポテンシャル

$$U_\alpha f(x) = \int_G |x-y|^{\alpha-n} f(y)\, dy$$

を考える．ここに，f は非負可測関数で $U_\alpha f \not\equiv \infty$ と仮定する．

$1<p<\infty, 0<\nu\le n$ に対して，

$$\|f\|_{L^{p,\nu}(G)} = \inf\left\{\lambda>0 : \sup_{x\in G, 0<r<d_G} \frac{r^\nu}{|B(x,r)|}\int_{G\cap B(x,r)} \left|\frac{f(y)}{\lambda}\right|^p dy \le 1\right\} < \infty$$

を満たす $f\in L^1_{loc}(G)$ からなる関数空間を Morrey 空間 $L^{p,\nu}(G)$ と呼ぶ ([5])．また，$\theta>0$ に対して，

$$\|f\|_{L^{p),\nu,\theta}(G)} = \inf\left\{\lambda>0 : \sup_{x\in G, 0<r<d_G, 0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^\theta \frac{r^\nu}{|B(x,r)|}\int_{G\cap B(x,r)} \left|\frac{f(y)}{\lambda}\right|^{p-\varepsilon} dy \le 1\right\} < \infty$$

を満たす $f\in L^1_{loc}(G)$ からなる関数空間を Grand Morrey 空間 $L^{p),\nu,\theta}(G)$ と呼ぶ ([2])．特に，$\nu=n$ のとき，$L^{p),n,\theta}(G)=L^{p),\theta}(G)$ と表し，Grand Lebesgue 空間と呼ぶ．

次の事実は知られている．

定理 A([3])．$0<\alpha<n$ とし，$1<p<\infty, \nu=\alpha p\le n$ に対して G 上の非負可測関数 f は $\|f\|_{L^{p,\nu}(G)}\le 1$ を満たすとする．このとき，$0<\eta<\alpha$ に対して，ある定数 $c_1, c_2>0$ が存在して，

$$\sup_{z\in G, 0<r<d_G} \frac{r^\eta}{|B(z,r)|}\int_{G\cap B(z,r)} \exp\left(c_1 U_\alpha f(x)\right)\, dx \le c_2.$$

定理 B([1])．$\theta>0$ に対して G 上の非負可測関数 f は $\|f\|_{L^{n),\theta}(G)}\le 1$ を満たすとする．このとき，ある定数 $c_1, c_2>0$ が存在して，

$$\int_G \exp\left(c_1 \left\{U_1 f(x)\right\}^{n/(n-1+\theta)}\right)\, dx \le c_2.$$

本講演では，定理 A, B の拡張を行う．そのために，次のような $(0,\infty)$ 上の正値非減少関数 φ を考える：

$(\varphi 1)$ ある定数 $A_1\ge 1$ が存在して，

$$A_1^{-1} r^n \le \varphi(r) \le A_1 \qquad (0<^\forall r<1);$$

$(\varphi 2)$ φ は $(0,\infty)$ 上で二倍条件を満たす．つまり，ある定数 $A_2\ge 1$ が存在して，

$$\varphi(2t)\le A_2\varphi(t) \qquad ({}^\forall t>0).$$

このとき，$1 < p < \infty, \theta > 0$ に対して，

$$\|f\|_{L^{p),\varphi,\theta}(G)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \sup_{x\in G, 0<r<d_G, 0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^\theta \frac{\varphi(r)}{|B(x,r)|}\int_{G\cap B(x,r)} \left|\frac{f(y)}{\lambda}\right|^{p-\varepsilon} dy \le 1\right\} < \infty$$

を満たす $f \in L^1_{loc}(G)$ からなる関数空間を Generalized grand Morrey 空間 $L^{p),\varphi,\theta}(G)$ と呼ぶ ([4]).

$\beta > 0$ に対して，

$$\psi_\beta(r) = \int_{1/r}^{2d_G} t^\beta \varphi(t)^{-1/p}(\log(2d_G/t))^{\theta/p}\frac{dt}{t} \qquad (r \ge 1/d_G).$$

また，$0 < r < 1/d_G$ に対しては，

$$\psi_\beta(r) = d_G\psi_\beta(1/d_G)r.$$

定理 1. $0 < \alpha < n$ とし，$1 < p < \infty, \theta > 0$ に対して G 上の非負可測関数 f は $\|f\|_{L^{p),\varphi,\theta}(G)} \le 1$ を満たすとする．このとき，$0 < \beta < \alpha$ に対して，ある定数 $c_1, c_2 > 0$ が存在して，

$$\sup_{z\in G, 0<r<d_G} \frac{\psi_\beta(1/r)^{-1}}{|B(z,r)|}\int_{B(z,r)} \left\{\psi_\alpha^{-1}(c_1 U_\alpha f(x))\right\}^{\alpha-\beta} dx \le c_2.$$

ここに，

$$\psi_\alpha^{-1}(s) = \sup\{t > 0\,;\, \psi_\alpha(t) < s\}.$$

定理 2. $0 < \alpha < n$ とし，$p = n/\alpha, \theta > 0$ に対して G 上の非負可測関数 f は $\|f\|_{L^{p),\theta}(G)} \le 1$ を満たすとする．このとき，$0 < \eta < \alpha$ に対して，ある定数 $c_1, c_2 > 0$ が存在して，

$$\sup_{z\in G, 0<r<d_G} \frac{r^\eta}{|B(z,r)|}\int_{B(z,r)} \exp\left(c_1\{U_\alpha f(x)\}^{1/(1+(\theta-1)/p)}\right) dx \le c_2.$$

本報告の結果は，[4] による．

参考文献

[1] N. Fusco, P. L. Lions and C. Sbordone, Sobolev embedding theorems in borderline cases, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 561–565.

[2] T. Iwaniec and C. Sbordone, On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses, Arch. Rational Mech. Anal. **119** (1992), 129–143.

[3] Y. Mizuta, E. Nakai, T. Ohno and T. Shimomura, An elementary proof of Sobolev embeddings for Riesz potentials of functions in Morrey spaces $L^{1,\nu,\beta}(G)$, Hiroshima Math. J. **38** (2008), 425–436.

[4] Y. Mizuta and T. Ohno, Trudinger's exponential integrability for Riesz potentials of functions in generalized grand Morrey spaces, to appear in J. Math. Anal. Appl.

[5] C. B. Morrey, On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. **43** (1938), 126–166.

Trudinger's inequality for Riesz potentials of functions in Musielak-Orlicz spaces

大野 貴雄　(大分大学・教育福祉科学部)
下村　哲　(広島大学・教育学部)

G は $\mathbf{R}^N$ 内の有界開集合とし，その直径を d_G とする．α $(0<\alpha<N)$ 次のリースポテンシャル

$$I_\alpha f(x) = \int_G |x-y|^{\alpha-N} f(y)\,dy$$

を考える．ここに，f は非負可測関数で $I_\alpha f \not\equiv \infty$ と仮定する．次の事実はよく知られている．

> **定理 A**. $0 < \alpha < N$ とし，$p = N/\alpha$ に対して G 上の非負可測関数 f は $\|f\|_{L^p(G)} \le 1$ を満たすとする．このとき，ある定数 $c_1, c_2 > 0$ が存在して，
>
> $$\int_G \exp\left(c_1 \left\{I_\alpha f(x)\right\}^{N/(N-\alpha)}\right) dx \le c_2.$$

本講演では，定理 A の拡張を行う．そのために，関数 $\Phi(x,t) = t\phi(x,t)$ は次を満たすものを考える：

(Φ1) $\phi(\,\cdot\,,t)$ は G 上可測関数で $\phi(x,\,\cdot\,)$ は $[0,\infty)$ 上連続関数である;

(Φ2) 定数 $A_1 \ge 1$ が存在して，

$$A_1^{-1} \le \phi(x,1) \le A_1 \quad (x \in G);$$

(Φ3) 定数 $\varepsilon_0 > 0, A_2 \ge 1$ が存在して，

$$t^{-\varepsilon_0}\phi(x,t) \le A_2 s^{-\varepsilon_0}\phi(x,s) \quad (x \in G,\ 0 \le t < s);$$

(Φ4) 定数 $A_3 \ge 1$ が存在して，

$$\phi(x,2t) \le A_3\phi(x,t) \quad (x \in G,\ t > 0);$$

(Φ5) ${}^\forall\gamma > 0$ に対して，定数 $B_\gamma \ge 1$ が存在して，

$$\phi(x,t) \le B_\gamma\phi(y,t) \quad (|x-y| \le \gamma t^{-1/N},\ t \ge 1).$$

$\bar{\phi}(x,t) = \sup_{0\le s\le t}\phi(x,s)$ とし，

$$\overline{\Phi}(x,t) = \int_0^t \bar{\phi}(x,r)\,dr \quad (x \in G,\ t > 0)$$

とする．このとき，

$$\|f\|_{L^\Phi(G)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_G \overline{\Phi}(y,|f(y)|/\lambda)\,dy \le 1\right\} < \infty$$

を満たす G 上の可測関数 f からなる関数空間を $L^\Phi(G)$ とする ([1])．また，$\gamma(x,t)$: $G \times (0,d_G) \to [0,\infty)$ は次を満たすものを考える：

(γ1) $\gamma(\,\cdot\,,t)$ は G 上可測関数で $\gamma(x,\,\cdot\,)$ は $(0,d_G)$ 上連続関数である;

(γ2) 定数 $B_0 \geq 1$ が存在して，

$$B_0^{-1} \leq \gamma(x,t) \leq B_0 t^{-N} \quad (x \in G,\ 0 < t < d_G).$$

さらに，$\Gamma_\alpha(x,t) : G \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ は次を満たすものを考える：

(Γ1) $\Gamma(\,\cdot\,,t)$ は G 上可測関数で $\Gamma(x,\,\cdot\,)$ は $[0,\infty)$ 上連続関数である;

(Γ2) 定数 $B_1 \geq 1$ が存在して，

$$\Gamma_\alpha(x,t) \leq B_1 \Gamma_\alpha(x,s) \quad (x \in G,\ 0 \leq t < s);$$

(Γ3) 定数 $\alpha_0 > 0, B_2 \geq 1, B_3 \geq 1$ が存在して，

$$t^{\alpha-N}\phi(x,\gamma(x,t))^{-1} \leq B_2 \Gamma_\alpha(x,1/t) \quad (x \in G,\ \alpha \geq \alpha_0,\ 0 < t < d_G)$$

かつ

$$\int_t^{d_G} \rho^\alpha \gamma(x,\rho)\,\frac{d\rho}{\rho} \leq B_3 \Gamma_\alpha(x,1/t) \qquad (x \in G,\ \alpha \geq \alpha_0,\ 0 < t \leq d_G/2);$$

($\Gamma_{\log}$) 定数 $c_\Gamma > 0$ が存在して，

$$c_\Gamma^{-1}\Gamma_\alpha(x,s) \leq \Gamma_\alpha(x,s^2) \leq c_\Gamma \Gamma_\alpha(x,s) \quad (x \in G,\ s > 0).$$

定理 ([2]). $0 < \alpha < N$ とし，$\Psi_\alpha(x,t) : G \times [0,\infty) \to [0,\infty]$ は次を満たすものを考える：

(Ψ_α1) $\Psi_\alpha(\,\cdot\,,t)$ は G 上可測関数で $\Psi_\alpha(x,\,\cdot\,)$ は $[0,\infty)$ 上連続関数である;

(Ψ_α2) 定数 $B_4 \geq 1$ が存在して，

$$\Psi_\alpha(x,t) \leq \Psi_\alpha(x,B_4 s) \quad (x \in G,\ 0 < t < s);$$

(Ψ_α3) 定数 $B_5 \geq 1, B_6 \geq 1, t_0 > 0$ が存在して，

$$\Psi_\alpha(x,\Gamma_\alpha(x,t)/B_5) \leq B_6 t \quad (x \in G,\ t \geq t_0).$$

G 上の非負可測関数 f は $\|f\|_{L^\Phi(G)} \leq 1$ を満たすとする．このとき，ある定数 $c_1, c_2 > 0$ が存在して，

$$\int_G \Psi_\alpha\left(x, c_1 I_\alpha f(x)\right)\,dx \leq c_2 \quad (\alpha_0 \leq \alpha < N).$$

参考文献

[1] F-Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Boundedness of maximal operators and Sobolev's inequality on Musielak-Orlicz-Morrey spaces, Bull. Sci. Math. **137** (2013), 76–96.

[2] T. Ohno and T. Shimomura, Trudinger's inequality for Riesz potentials of functions in Musielak-Orlicz spaces, Bull. Sci. Math. **138** (2014), 225–235.

特別講演

変動指数をもつ関数空間におけるソボレフ型定理

水田　義弘　(広島工大工)

最初に，通常の場合（変動指数でない）についてソボレフの定理を中心として纏め，後半では，それらが変動指数の場合にどのように発展するかを説明する。

簡単のため，G は $\mathbf{R}^n$ の有界な開集合とする．

1. 関数空間

1. ルベーグ (Lebesgue (1875–1941)) の L^p 空間は，$1 \le p \le \infty$ に対して

$$L^p(G) = \left\{ f \in L^1_{loc}(G) : \int_G |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

そのノルムは

$$\|f\|_{L^p(G)} = \left(\int_G |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \qquad (1 \le p < \infty)$$

で定められる．

2. オーリッチ (Orlicz (1903–1990)) 空間

$$L^\Phi(G) = \left\{ f \in L^1_{loc}(G) : \int_G \Phi(|f(x)|) \, dx < \infty \right\}$$

が定義される．典型的な例として，

$$\Phi(t) = t^p (\log(c+t))^q;$$

ここに，定数 c は，与えられた p, q に対して，十分大きくとる必要がある．

3. モーリー (Morrey (1907–1984)) 空間は，重み $\omega(r)$ をとり

$$M^{p,\omega}(G) = \left\{ f \in L^1_{loc}(G) : \sup_{x \in G, r>0} \omega(r) \int_{G \cap B(x,r)} |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

4. **Herz** (1875–1941) 空間：

$$H^{p,q,\omega}(G) = \bigcap_{x \in G} H^{p,q,\omega}_{\{x\}}(G); \overline{H}^{p,q,\omega}(G) = \bigcap_{x \in G} \overline{H}^{p,q,\omega}_{\{x\}}(G); \underline{H}^{p,q,\omega}(G) = \bigcap_{x \in G} \underline{H}^{p,q,\omega}_{\{x\}}(G)$$

ここに，

$$H^{p,q,\omega}_{\{x\}}(G) = \{ f \in L^1_{loc}(G) : \|f\|_{H^{p,q,\omega}_{\{x\}}(G)} = \left(\int_0^{d_G} \left(\omega(x,r) \|f\|_{L^p(G \cap B(x,r) \setminus B(x,r/2))} \right)^q dr/r \right)^{1/q} < \infty \}$$

$$\overline{H}^{p,q,\omega}_{\{x\}}(G) = \{ f \in L^1_{loc}(G) : \|f\|_{\overline{H}^{p,q,\omega}_{\{x\}}(G)} = \left(\int_0^{d_G} \left(\omega(x,r) \|f\|_{L^p(G \setminus B(x,r))} \right)^q dr/r \right)^{1/q} < \infty \}$$

$$\underline{H}^{p,q,\omega}_{\{x\}}(G) = \{ f \in L^1_{loc}(G) : \|f\|_{\underline{H}^{p,q,\omega}_{\{x\}}(G)} = \left(\int_0^{d_G} \left(\omega(x,r) \|f\|_{L^p(G \cap B(x,r))} \right)^q dr/r \right)^{1/q} < \infty \}$$

2. ソボレフの定理

ルベーグの L^p 空間を基礎とした**ソボレフ** (Sobolev (1908 – 1989)) 関数は，ポテンシャルと深く関連する： 関数 f の α 次リースポテンシャルは

$$I_\alpha f(x) = \int |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy \qquad (0 < \alpha < n)$$

によって定義される．

ソボレフ指数 $p^\sharp$ は，

$$1/p^\sharp = 1/p - \alpha/n$$

によって定められる．

定理 2.1. (1) **ソボレフの不等式**

$1 < p < n/\alpha$ のとき，

$$\|I_\alpha f\|_{L^{p^\sharp}(\mathbf{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}$$

(2) **Trudinger の不等式**

$p = n/\alpha$ のとき，

$$\int_G \exp\left(\frac{|I_\alpha f(x)|}{C_1\|f\|_{L^p(G)}}\right)^{p'} dx \leq C_2 \qquad (1/p + 1/p' = 1)$$

(3) **リプシッツ連続性**

$0 < \alpha - n/p < 1$ のとき，

$$|I_\alpha f(x) - I_\alpha f(z)| \leq C|x-z|^{\alpha-n/p} \qquad (\forall x, z \in G)$$

この定理を Morrey 空間において述べよう． $\omega(r) = r^{\nu-n}$ $(0 \leq \nu \leq n)$ のとき, Morrey 空間

$$M^{p,\nu}(G) = \{f \in L^1_{loc}(G) : \|f\|_{M^{p,\nu}(G)} < \infty\}$$

のノルムは

$$\|f\|_{M^{p,\nu}(G)} = \sup_{x\in G, r>0}\left(\frac{r^\nu}{|B(x,r)|}\int_{G\cap B(x,r)} |f(y)|^p dx\right)^{1/p}$$

によって定義されている．

ソボレフ指数は

$$1/p_\nu = 1/p - \alpha/\nu$$

と定める．

定理 2.2. (1) ソボレフの不等式

$1 < p < \nu/\alpha$ のとき，

$$\|I_\alpha f\|_{M^{p_\nu,\nu}(G)} \le C\|f\|_{M^{p,\nu}(G)}$$

(2) **Trudinger の不等式**

$p = \nu/\alpha$ のとき，各 η, $0 < \eta < \alpha$，に対して

$$\sup_{x\in G, r>0} \frac{r^\eta}{|B(x,r)|} \int_{G\cap B(x,r)} \exp\left(\frac{|I_\alpha f(x)|}{C_1\|f\|_{L^p(G)}}\right) dx \le C_2$$

(3) リプシッツ連続性

$0 < \alpha - \nu/p < 1$ のとき，

$$|I_\alpha f(x) - I_\alpha f(z)| \le C|x-z|^{\alpha-\nu/p} \qquad (\forall x, z \in G)$$

3. 極大関数

ソボレフの不等式の証明には，極大関数

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy$$

を用いた Hedberg の方法が有効である。

まず，次に注意する．

定理 3.1. $1 < p < \infty$ のとき，極大作用素 $M : f \to Mf$ は $L^p(\mathbf{R}^n)$ 上有界である．

そこで，ソボレフの定理は次のようにして示される： $\alpha p < n$，$f \ge 0$, $\|f\|_{L^p(G)} \le 1$ と仮定して，

$$\begin{aligned} \int |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy &= \int_{B(x,r)} |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy + \int_{\mathbf{R}^n\setminus B(x,r)} |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy \\ &\le Cr^\alpha Mf(x) + Cr^{\alpha-n/p} \end{aligned}$$

そこで，$r^\alpha Mf(x) = r^{\alpha-n/p}$ となる r を考えると

$$I_\alpha f(x) \le C\{Mf(x)\}^{1-\alpha p/n} = C\{Mf(x)\}^{p/p^*}$$

すなわち，

$$\{I_\alpha f(x)\}^{p^*} \le C\{Mf(x)\}^p$$

したがって，ソボレフの不等式は極大関数の L^p 有界性から示される．

4. Grand Lebesgue 空間

$f(x)=|x|^{-n/p}$ のとき，$f\notin L^p(G)$ であるが，$0<r<1$ のとき，

$$\begin{aligned}\int_{G\cap B(0,r)}|f(x)|^{p-\varepsilon}dx &= \int_{G\cap B(0,r)}|x|^{-n+n\varepsilon/p}dx\\ &\le \frac{C}{n\varepsilon/p}r^{n\varepsilon/p}\end{aligned}$$

すなわち，

$$\varepsilon\int_{G\cap B(0,r)}|f(x)|^{p-\varepsilon}dx\le C$$

そこで，**Grand Lebesgue 空間**

$$L^{p),q,\theta}(G)=\{f\in L^1_{loc}(G):\|f\|_{L^{p),q,\theta}(G)}<\infty\}$$

とノルム

$$\|f\|_{L^{p),q,\theta}(G)}=\left(\int_0^1\left(\varepsilon^\theta\int_G|f(y)|^{p-\varepsilon}dx\right)^{q/p}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{1/q}$$

が定義される．

ここで，grand Lebesgue 空間と Herz 空間の関連について述べよう．

定理 4.1. $\omega_\theta(t)=(\log(2/t))^{-\theta}$, $\theta>0$, とすると，次の定数 $C>0$ が存在する：

$$\|f\|_{L^{p),q,\theta}(G)}\le C\|f\|_{\overline{H}^{p,q,\omega_\theta}_{\{0\}}(G)}$$

定理 4.2. $\omega_\theta(t)=(\log(2/t))^{-\theta}$, $\theta>0$, とすると，次の定数 $C>0$ が存在する：

$$\|f\|_{\overline{H}^{p,q,\omega_\theta}_{\{0\}}(G)}\le C\|f\|_{L^{p),q,\theta}(G)}$$

5. Mean continuity

リースポテンシャルは連続と限らないが，それに準じた良い性質をもつ．これを論じるとき，**容量** (capacity)

$$C_{\alpha,p}(E;G)=\inf\int_G|f(y)|^p\,dy$$

は重要な役割を果たす；ここに，“ inf ” は $I_\alpha f(x)\ge 1$ $(\forall x\in E)$ となる $f\in L^p(G)$ に対して取られる．

定理 5.1. $f\in L^p(G)$ に対して，

(i) $C_{\alpha,p}(E;G)=0$;

(ii) $\displaystyle\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(z,r)}|I_\alpha f(x)-I_\alpha f(z)|^q\,dx=0\qquad(\forall x\in G\setminus E)$

となる E が存在する．

この定理は，少し弱められる．そのために，積分平均

$$u_B = \frac{1}{|B|}\int_B u(y)\ dy$$

を利用する．

定理 5.2. $\lim_{r\to 0} r^{\alpha p-n}\int_{B(z,r)} |f(y)|^p\ dy = 0$ ならば，

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(z,r)}\left|I_\alpha f(x) - (I_\alpha f)_{B(x,r)}\right|^q\ dx = 0$$

除外集合 $E_f = \{z\in \mathbf{R}^n : \limsup_{r\to 0} r^{\alpha p-n}\int_{B(z,r)} |f(y)|^p\ dy > 0\}$ について，

$$H_{n-\alpha p}(E) = 0;$$

ここに，H_m は m 次のハウスドルフ測度を表す．

6. 双対性

ルベーグの L^p $(1\le p\le\infty)$ 空間に対して，その **associate 空間** $(L^p(G))'$ は，関数 $f\in L^1_{loc}(G)$ で

$$\int_G |f(x)g(x)|\ dx < \infty \qquad (\forall g\in L^p(G))$$

となるものの全体を表す．このとき，

$$(L^p(G))' = L^{p'}(G)$$

これに関連して次の結果がある．

定理 6.1. $x_0\in G,\ a>0$ とする．$\omega(r)=r^a, \eta(r)=r^{-a}$ のとき，

$$\int_G f(x)g(x)dx \le C\|f\|_{\underline{H}^{p',q',\eta}_{\{x_0\}}(G)}\|g\|_{\overline{H}^{p,q,\omega}_{\{x_0\}}(G)} \qquad (\forall f,g\in L^1_{loc}(G))$$

となる定数 $C>0$ が存在する．

定理 6.2. 上の定理と同じ仮定のもとで，

$$\|f\|_{\underline{H}^{p',q',\eta}_{\{x_0\}}(G)} \le C\sup_g \int_G |f(x)g(x)|\ dx$$

となる定数が存在する．ここに，$\|g\|_X\le 1$ $(X=\overline{H}^{p,q,\omega}_{\{x_0\}}(G))$ とする．

系 6.3. $\left(\overline{H}^{p,q,\omega}_{\{x_0\}}(G)\right)' = \underline{H}^{p',q',\eta}_{\{x_0\}}(G)$.

また，

$$\widetilde{H}^{p,q,\omega}(G) = \bigoplus_{x_0\in G}\overline{H}^{p,q,\omega}_{\{x_0\}}(G),$$

には quasi-norm

$$\|f\|_{\widetilde{H}^{p,q,\omega}(G)} = \inf_{|f|=\sum_j |f_j|,\{x_j\}\subset G}\sum_j \|f_j\|_{\overline{H}^{p,q,\omega}_{\{x_j\}}(G)}$$

が定義される。

系 6.4. $\left(\widetilde{H}^{p,q,\omega}(G)\right)' = H^{p',q',\eta}(G)$.

7. 変動指数をもつ関数空間

ここでは，簡単のため，G 上の可測関数 p が条件

(p0) $1 \le p(x) < \infty \qquad (\forall x \in G)$

を満たすとき，p を **変動指数** と呼ぶ．

極大作用素の有界性を論じるときには，

(p1) **(log-Hölder 連続性)**

$$|p(x) - p(y)| \le C \frac{1}{\log |x-y|^{-1}} \qquad (\forall x, y \in G; |x-y| < 1/e)$$

(p2) **(decay condition at ∞)**

$$|p(x) - p(\infty)| \le C \frac{1}{\log |x|} \qquad (\forall x \in \mathbf{R}^n; |x| > e)$$

などを仮定する．

ヘルダーの不等式は次のようになる．

定理 7.1. （ヘルダーの不等式）

可測関数 f, g に対して，

$$\int_G |f(x)g(x)| \, dx \le C_p \|f\|_{L^{p(\cdot)}(G)} \|g\|_{L^{p'(\cdot)}(G)}, \qquad 1/p(x) + 1/p'(x) = 1$$

これを示すために **ヤングの不等式**：

$$|ab| \le \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

に注意する．一般に，ヘルダーの不等式に現れる定数について，$C_p \ge 1$ であることに注意しよう．また，$p_- = \inf_G p$, $p^+ = \sup_G p$ とおくと，

$$C_p = 1 + 1/p_- - 1/p^+$$

とおくことができる．

中野モジュラー

$$\rho(f) = \int_G |f(x)|^{p(x)} \, dx$$

によって，Orlicz ノルム

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(G)} = \inf\{\lambda > 0 : \int_G \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{p(x)} \, dx \le 1\}$$

が定義される．

定理 7.2. 極大作用素は $L^{p(\cdot)}(G)$ 上有界である．

Musielak (1875–1941) は

(Φ1) 各 $t \geq 0$ について，$\Phi(\,\cdot\,, t)$ は $\mathbf{R}^N$ 上可測であり，各 $x \in \mathbf{R}^N$ について，$\Phi(x, \cdot\,)$ は区間 $[0, \infty)$ 上連続である；したがって，$\Phi(\cdot, \cdot\,)$ は $\mathbf{R}^N \times [0, \infty)$ 上可測である;

(Φ2) $\Phi(x, 0) = 0$;

(Φ3) $\exists A_1 \geq 1$ s.t. $A_1^{-1} \leq \Phi(x, 1) \leq A_1 \quad (\forall x \in \mathbf{R}^N)$；

(Φ4) 各 $x \in \mathbf{R}^N$ について，$\Phi(x, \cdot)$ は単調増加かつ凸である；

を満たす関数 $\Phi(x, t)$ を用いて, モジュラー

$$\rho(f) = \int \Phi(x, f(x))dx$$

とノルム

$$\|f\|_{L^\Phi(g)} = \inf\{\lambda > 0 : \int \Phi(x, f(x)/\lambda)\ dx \leq 1\}$$

を導入して，いわゆる Musielak-Orlicz 空間を論じた.

log-Hölder 連続性 (p1), (p2) は

(Φ5) 各 $\gamma > 0$ に対して,

$$\Phi(x, t) \leq A_\gamma \Phi(y, t) \qquad (\forall x, y \in G, t \geq 1 : |x - y| \leq \gamma t^{-1/n})$$

となる定数 $A_\gamma \geq 1$ が存在する.

(Φ6) 次の関数 $g \in L^1(\mathbf{R}^n)$ と定数 $B_\infty \geq 1$ が存在する：

(i) $0 \leq g(x) < 1$ $(\forall x \in \mathbf{R}^n)$

(ii) $B_\infty^{-1}\Phi(x, t) \leq \Phi(x', t) \leq B_\infty \Phi(x, t)$
$(\forall x, x' \in \mathbf{R}^n, 0 < t \leq 1 : |x'| \geq |x|, g(x) \leq t \leq 1)$

の形となる.

8. 参考文献

1. 書籍

- Diening, Lars; Harjulehto, Petteri; Hästö, Peter; Růžička, Michael, Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. Lecture Notes in Mathematics, 2017. Springer, Heidelberg, 2011.
- Cruz-Uribe, David V.; Fiorenza, Alberto, Variable Lebesgue spaces. Foundations and harmonic analysis. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhuser/Springer, Heidelberg, 2013.
- Mitsuo Izuki, Eiichi Nakai and Yoshihiro Sawano, Function spaces with variable exponents – an introduction –
  in press

2. 参考文献

[1] D. R. Adams and L. I. Hedberg, Function Spaces and Potential Theory, Springer, 1996.

[2] D. R. Adams and J. Xiao, Morrey spaces in harmonic analysis, Ark. Mat. **50** (2012), no. 2, 201–230.

[3] A. Almeida and D. Drihem, Maximal, potential and singular type operators on Herz spaces with variable exponents, J. Math. Anal. Appl. **394** (2012), no. 2, 781–795.

[4] A. Almeida, J. Hasanov and S. Samko, Maximal and potential operators in variable exponent Morrey spaces, Georgian Math. J. **15** (2008), 195–208.

[5] V. I. Burenkov, A. Gogatishvili, V. S. Guliyev and R. Ch. Mustafayev, Boundedness of the fractional maximal operator in local Morrey-type spaces, Complex Var. Elliptic Equ. **55** (2010), no. 8-10, 739–758.

[6] V. I. Burenkov, A. Gogatishvili, V. S. Guliyev and R. Ch. Mustafayev, Boundedness of the Riesz potential in local Morrey-type spaces, Potential Anal. **35** (2011), no. 1, 67–87.

[7] F. Chiarenza and M. Frasca, Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function, Rend. Mat. **7** (1987), 273–279.

[8] D. Cruz-Uribe and A. Fiorenza, L log L results for the maximal operator in variable Lp spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), 2631—2647.

[9] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, J. M. Martell and C. Prez, The boundedness of classical operators on variable L^p spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **31** (2006), 239—264.

[10] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza and C. J. Neugebauer, The maximal function on variable L^p spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **28** (2003), 223—238; 29 (2004), 247—249.

[11] L. Diening, Maximal functions in generalized $L^{p(\cdot)}$ spaces, Math. Inequal. Appl. **7**(2) (2004), 245–254.

[12] L. Diening, Riesz potentials and Sobolev embeddings on generalized Lebesgue and Sobolev spaces $L^{p(\cdot)}$ and $W^{k,p(\cdot)}$, Math. Nachr. **263**(1) (2004), 31–43.

[13] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, Y. Mizuta and T. Shimomura, Maximal functions in variable exponent spaces: limiting cases of the exponent, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **34** (2009), 503–522.

[14] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö and M. Růžička, Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, Lecture Notes in Mathematics, **2017**, Springer, Heidelberg, 2011.

[15] G. Di Fratta and A. Fiorenza, A direct approach to the duality of grand and small Lebesgue spaces, Nonlinear Anal. **70** (2009), no. 7, 2582–2592.

[16] T. Futamura, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Orlicz-Sobolev capacity of balls, Illinois J. Math. **55** (2011), no. 2, 543—553 (2012).

[17] A. Gogatishvili and R. Ch. Mustafayev, Dual spaces of local Morrey-type spaces, Czechoslovak Math. J. **61** (136) (2011), no. 3, 609–622.

[18] A. Gogatishvili and R. Ch. Mustafayev, New pre-dual space of Morrey space. J. Math. Anal. Appl. **397** (2013), no. 2, 678–692.

[19] V. S. Guliyev, J. J. Hasanov and S. G. Samko, Maximal, potential and singular operators in the local "complementary" variable exponent Morrey type spaces, J. Math. Anal. Appl. **401** (2013), no. 1, 72–84.

[20] C. Herz, Lipschitz spaces and Bernstein's theorem on absolutely convergent

Fourier transforms, J. Math. Mech. **18** (1968), 283–324.

[21] M. Izuki, Fractional integrals on Herz-Morrey spaces with variable exponent, Hiroshima Math. J. **40** (2010), no. 3, 343–355.

[22] O. Kováčik and J. Rákosník, On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$, Czechoslovak Math. J. **41** (1991), 592–618.

[23] F.-Y. Maeda, Y. Mizuta and T. Ohno, Approximate identities and Young type inequalities in variable Lebesgue-Orlicz spaces $L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}$, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **35** (2010), 405–420.

[24] F.-Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Boundedness of maximal operators and Sobolev's inequality on Musielak-Orlicz-Morrey spaces, Bull. Sci. Math. **137** (2013), 76–96.

[25] F.-Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Trudinger's inequality and continuity of potentials on Musielak-Orlicz-Morrey spaces, Potential Anal. **38** (2013), 515–535.

[26] F.-Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Mean continuity for potentials of functions in Musielak-Orlicz spaces, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B43** (2013), 67–86.

[27] Y. Mizuta, Potential theory in Euclidean spaces, Gakkōtosyo, Tokyo, 1996.

[28] Y. Mizuta, Function spaces with variable exponent. (Japanese) Sgaku 65 (2013), no. 3, 248—268.

[29] Y. Mizuta, Morrey capacity and vanishing integrability for Riesz potentials in Morrey spaces, Topics in finite or infinite dimensional complex analysis, 187—195, Tohoku University Press, Sendai, 2013.

[30] Y. Mizuta, E. Nakai, T. Ohno and T. Shimomura, Riesz potentials and Sobolev embeddings on Morrey spaces of variable exponent, Complex Var. Elliptic Equ. **56** (2011), 671–695.

[31] Y. Mizuta, A. Nekvinda and T. Shimomura, Hardy averaging operator on generalized Banach function spaces and duality. Z. Anal. Anwend. **32** (2013), no. 2, 233—255.

[32] Y. Mizuta and T. Ohno, Orlicz capacity of balls, Complex analysis and potential theory, 225—233, CRM Proc. Lecture Notes, 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.

[33] Y. Mizuta and T. Ohno, Sobolev's theorem and duality for Herz-Morrey spaces of variable exponent. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **39** (2014), no. 1, 389—416.

[34] Y. Mizuta and T. Ohno, Sobolev's theorem and duality for Herz-Morrey spaces of variable exponent, to appear in Complex Variables and Elliptic Equations.

[35] Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Sobolev embeddings for Riesz potential spaces of variable exponents near 1 and Sobolev's exponent, Bull. Sci. Math. **134** (2010), 12–36.

[36] Y. Mizuta and T. Shimomura, Sobolev embeddings for Riesz potentials of functions in Morrey spaces of variable exponent, J. Math. Soc. Japan **60** (2008), 583–602.

[37] Y. Mizuta and T. Shimomura, Sobolev's inequality for Riesz potentials of functions in Morrey spaces of integral form, Math. Nachr. **283** (2010), 1336–1352.

[38] Y. Mizuta and T. Shimomura, Exponential integrability of Riesz potentials of Orlicz functions, Illinois J. Math. **56** (2012), no. 2, 507—520.

[39] C. B. Morrey, On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. **43** (1938), 126–166.

[40] J. Musielak, Orlicz Spaces and Modular Spaces, Lecture Notes in Math. **1034**, Springer-Verlag, 1983.

[41] E. Nakai, Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces, Math. Nachr. **166** (1994), 95–103.

[42] E. Nakai, Generalized fractional integrals on generalized Morrey spaces. Math. Nachr. **287** (2014), no. 2-3, 339—351.

[43] J. Peetre, On the theory of $L_{p,\lambda}$ spaces, J. Funct. Anal. **4** (1969), 71–87.

[44] M. Růžička, Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
37.S. Samko, On a progress in the theory of Lebesgue spaces with variable exponent: maximal and singular operators, Integral Transforms Spec. Funct., 16 (2005), 461—482.

[45] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.

[46] W. P. Ziemer, Weakly differentiable functions. Sobolev spaces and functions of bounded variation. Graduate Texts in Mathematics, 120. Springer-Verlag, New York, 1989.

Department of Mechanical Systems Engineering
Hiroshima Institute of Technology
2-1-1 Miyake Saeki-ku Hiroshima 731-5193, Japan
E-mail : y.mizuta.5x@it-hiroshima.ac.jp

$\mathbf{C}^2$ から $\mathbf{C}^2$ への非退化超越正則写像のジュリアの方向について

足立　幸信*

1. 背景

ジュリアは1919年に正規族に関するモンテルの定理を使って、ピカールの小定理について1つの改良を行った。即ち

定理　$f(z)$ を超越整関数とすると、ある方向（ジュリアの方向と言う）$J(\theta) = \{z = t\exp(i\theta); 0 \le t < \infty\}$ があって、$Z = 0$ を頂点とし $J(\theta)$ を含むどんな細い角領域においても、高々1つの除外値を除く全ての値を無限回取る。

Z-H. Tu は [5] において、$\mathbf{P}^n$ への超越的曲線で漸近値を持つものに対して、1つの一般化を行っている。

2. 主結果

我々は次の別の一般化を行った。

定理 ([1])　$F = (f(x,y), G(x,y))$ を $\mathbf{C}^2$ から $\mathbf{C}^2$ への非退化（像が開集合を含む）正則写像で f, g は整関数で f は超越的とする。そうすると放射線を $J(\theta) = \{(x,y) = (t\exp(i\theta), kt\exp(i\theta)(0 \le t < \infty)\}$, ここに k はあるルベーグ測度0の集合を除く任意の固定された複素数、θ は k に依存するある実数、とすると、$F(x,y)$ は (0,0) を頂点とし $J(\theta)$ を含む任意に細い錐領域で、一般な位置にある3本の既約な代数曲線を除外することはない。

3. 状況説明と補題的なもの

$\mathbf{C}^2$ の3本の既約アフィン代数曲線の和 A が一般な位置にあるということであるが、$M = \mathbf{C}^2 - A$ が概双曲的、つまり M の小林擬距離が退化する集合が高々代数曲線に含まれている（このとき退化集合は擬凹集合である（足立ー鈴木、1991) ので空集合か代数曲線である）時を言う。そういう M は対数的一般型であることが知られている（足立、2008)。どういう時に A が一般な位置にあるかということであるが、[2] においてほぼ確定的な条件が与えられている。例えば1つの既約成分の種数 > 0 とか A の特異点が高々正規交叉している場合とかはそうである。

また次のピカール型の定理がある。

2000 Mathematics Subject Classification: 32H02, 32H30, 32H25, 32Q45
キーワード：ジュリアの方向、非退化超越正則写像、ピカールの小定理、モンテルの定理

*
e-mail: fwjh5864@nifty.com
web: http://homepage3.nifty.com/kyousei/kenkyuu.html/

定理 ([2])　F を上の定理と同じもの、A が一般な位置にあり、F は A を除外するなら、F は退化する。

また次のモンテル型の定理がある。

定理 ([3])　A が一般な位置にあり、$M = \mathbf{C}^2 - A$ とすると、M に対し M の小林擬距離の退化集合である代数曲線 S があれば次の (a),(b) のいずれかが成立する。退化集合が無ければ (a) のみが起こる。つまり任意の $\{F_{j=1,2,\dots}\} \subset Hol(\Delta^2, M)$ に対し：

(a)　$\{F_{j=1,2,\dots}\}$ は $Hol(\Delta^2, M)$ のコンパクト開位相で収束する部分列を持つ;

(b)　$\{F_{j=1,2,\dots}\}$ は Δ^2 の任意のコンパクト集合上で $S \cup L_\infty$ に発散する。

ここに Δ は単位円、$\Delta^2 = \Delta \times \Delta$、$L_\infty$ は無限遠直線である。また $Hol(\Delta^2, M)$ は Δ^2 から M への正則写像全体にコンパクト開位相をいれた空間である。

注意　H として一般な位置にある（通常の意味で）4 本の $\mathbf{C}^2$ の複素直線とする。すると主結果と同様のジュリアの方向の存在がいえる。

参考文献

[1] Y. Adachi, On the Julia Directions of the Value Distribution of Nondegenerate Transendental Holomorphic Maps of $\mathbf{C}^2$ to $\mathbf{C}^2$, j. M. R., 5, 8-10 (2013).

[2] Y. Adachi, A generalization of the big Picard theorem, Kodai Math. J., 18, 408-424 (1995).

[3] Y. Adachi, On the relation between tautly imbedded space modulo an analytic subset S and hyperbolically imbedded space modulo S, RIMS, Kyoto Univ. 33, 385-392 (1997).

[4] S. Kobayashi, Hyperbolic complex spaces, Grundlehlen der mathmatishen Wissenschaften 318. Berlin, Heiderberg, Springer-Verlag (1998).

[5] Tu. Z.-H, On the Julia directions of the value distribution oh holomorphic curaves in $\mathbf{P}^n$, Kodai Math. J., 19, 1-6 (1996).

高次元のリーマンの除去可能定理について

足立　幸信*

1. 背景

M を (連結) 複素多様体、E を容量ゼロの閉集合（定義は後述)、X を小林双曲的なコンパクト (連結) 複素空間、f を $M-E$ から X への正則写像とする。E を孤立点としたら、常に正則的に除去可能である。なぜなら、もしそうでないとすると、f の E における集積値集合は X の小林擬距離の退化集合の点を含む (西野ー鈴木 (1980), 足立 (1995)) がこの場合は空集合であるので。（X が種数 2 以上のコンパクト・リーマン面なら X は小林双曲的である）

そこで E が一般な容量ゼロの閉集合の時が除去可能かどうかが問題になる。$\dim M = \dim X = 1$ の時西野 [4] がアールフォルスの被覆面の理論の方法で、鈴木 [6] が微分幾何的方法で、いずれもセルバーグ (1937) の結果を基礎に置いて示している。また鈴木 [7] は $\dim M, \dim X$ が任意の多様体で X はその普遍被覆多様体が複素ユークリッド空間の多項式凸状有界領域であって、$M-E$ の像領域が X の相対コンパクト集合の場合に示している。

我々が示すのは次の定理である。

主定理　M は任意の複素多様体、X は小林双曲的なコンパクト複素空間でその普遍被覆空間がスタインである時、E は $M-E$ から X への正則写像 f の除去可能集合である。

方法は藤本 [2] の結果と鈴木 [7] の方法を使って、小林双曲幾何の方法 [3] による。

2. 準備と簡単に言えること

ここでは M を任意次元の (連結) 正規複素空間とする。([5],pp. 212,267 参照のこと）

定義 **2.1**　$u \in PSH(M)$ とは、(1) u は M で上半連続で恒等的に $-\infty$ でない実数値関数で、(2) 複素平面上の任意の開集合 W と任意の正則写像 $\varphi : W \to M$ に対し、$u \circ \varphi$ は W の通常の意味で劣調和関数か、恒等的に $-\infty$ であるときを言う。

定義 **2.2([2])**　M の集合 E が多重極集合とは, 任意の点 $p \in E$ に対しある $u_p \in PSH(U_p)$ があって $E \cap U_p \subset \{p \in U_p; u_p = -\infty\}$ となるときを言う。ここに U_p は p の近傍である。そして E' が容量ゼロの集合とは $E' = \bigcup_\nu E_\nu$ なる高々可算個の多重極集合 E_ν がある時を言う。

命題 **2.3([2])**　E は正規複素空間 M の容量ゼロの閉集合で $f \in \mathcal{O}(M-E)$ が E の全ての点で局所有界とすると、$f \in \mathcal{O}(M)$ である。

系 **2.4([2])**　E を上の命題と同じものとすると、D を M の任意の領域とすると $D-E$ は連結である。

2000 Mathematics Subject Classification: 32H02, 32Q45
キーワード：正則写像の除去可能な特異点、容量ゼロの集合、小林双曲的コンパクト空間

*
e-mail: fwjh5864@nifty.com
web: http://homepage3.nifty.com/kyousei/kenkyuu.html/

定理**2.5**　E は正規複素空間 M の容量ゼロの閉集合、f は $M-E$ から複素空間 X (開またはコンパクトの) への正則写像とする。任意の点 $p\in E$ に対し、p の近傍 U_p とある X のスタイン部分領域 X_0 があって $f(U_p-E)$ は X_0 の完全内部 (X_0 は U_p-E に依存してよい）にあるなら、E は f の除去可能集合である。

系**2.6**　M,E は上の定理と同じとし、f は $M-E$ から開またはコンパクトな種数 g のリーマン面 R $(0\le g\le\infty)$ の完全内部への正則写像とすると、E は f の除去可能集合である。

鈴木 [7] の方法は書画カメラで説明する予定である。

3. 主定理までとそれから

補題**3.1**　Δ を複素平面上の単位円板、e は Δ の対数容量ゼロのコンパクト集合とする。X は開またはコンパクトな小林双曲的複素空間で X の完全内部に含まれる任意の連結コンパクト集合 K に対しそのある近傍に正則分離可能な関数が存在するとする。すると f が $\Delta-e$ から X への正則写像で、$f(\Delta-e)$ は X で相対コンパクト集合（X がコンパクトならいつでもそう）なら、e は f の除去可能集合である。

系**3.2**　Δ,e は上の命題と同じとする。X はコンパクトな小林双曲的複素空間で、その普遍被覆空間 $\tilde{X}$ はスタイン空間とする。f を $\Delta-e$ から X への正則写像とすると、e は除去可能集合である。

Δ は少しゆがんでもいいことと、E の点の近くの E 外の点でのブローアップの方法より補題3.1 と系3.2 の定義域の次元を上げて M,E とすることができる。従って主定理がいえる。

系**3.3**　M は複素多様体、E は M の容量ゼロの閉集合とする。f が $M-E$ から種数２以上のコンパクトリーマン面 R への正則写像なら、E は f の除去可能集合である。

系**3.4**　M,E は上と同じとし、f は $M-E$ からコンパクト小林双曲的複素空間 X への 1 − 1 正則写像とすると、E は f の除去可能集合である。

定理 **3.5**　X はコンパクト小林双曲的複素空間、E は X の容量ゼロの閉集合、$f\in Aut(X-E)$ とするなら、$f\in Aut(X)$ である。

参考文献

[1] Y. Adachi, On a high dimensional Riemann's removability theorem, to appear in J. M. R., 6, (2014).

[2] H. Fujimoto, Riemann domains with boundary of capacity zero, Nagoya Math. J. 44, 1-15 (1971).

[3] S. Kobayashi, Hyperbolic complex spaces, Grundlehlen der mathmatishen Wissenschaften 318. Berlin, Heiderberg, Springer-Verlag (1998).

[4] T. Nishino, Prolongments analytiques au sens de Rieman, Bull. Soc. math. France, 107, 97-112 (1979).

[5] T. Nishino, Function Theory in Several Complex Variables, Translations of Mathmatical Monographs, 193, Amer. Math. Soc. Providence, RI (2001).

[6] Masakazu Suzuki, Comportement des applications holomorphes autour d'une ensemble polaire, C. R. Acad. Sc. Paris, 304, 191-194 (1987).

[7] Masakazu Suzuki, Comportement des applications holomorphes autour d'une ensemble polaire II, C. R. Acad. Sc. Paris, 306, 535-538 (1988).

高次元のリーマンの写像定理について

足立　幸信*

1. 背景

ヒルベルトの第２２問題である古典的な高次元の一意化問題は Griffith (1971), Bers (1976) の大きな研究があるが、多様体においてすら完全な解決には至っていない。その特別な場合として、ファイバー空間の一意化の問題は西野によって1969年に円板上のファイバーが $\mathbf{C}$ タイプの被覆リーマン面より成る正則スタイン族が $\mathbf{C}^1$ 束になることが示された。その後、山口 [4] (1976) がロバンー山口関数を導入して証明を簡単で見通しの良いものにするとともに結果を少しく一般化し、米谷ー山口 [3](2004) によって別の原理による簡明な証明が得られた。

ただファイバーが単位円型の場合は特別な場合 (Browder-山口,1994) を除いて研究が無かった。ここでは多様体 D がファイバー空間 $D=(D,\pi,\Gamma)$ で $\Gamma\times\mathbf{P}^1$ 上のリーマン域で、ある単葉な分枝を持ち、Γ ((0) を中心とする多重円板) の点上のファイバーは P^1 上の単連結分岐被覆リーマン面とすると、完全ハルトグス領域に双正則になることを解説する。その問題は高次元のリーマンの写像定理に帰着される。

2. 準備

命題 2.1　D は原点を含む複素平面上の単連結領域とすると、D から $\{|w|<R\}$ への等角写像 φ で $\varphi(0)=0, \varphi'(0)=1$ なるものは $R\leq\infty$ を決めると唯一存在する。

命題 2.2　D を $\mathbf{C}_z$ の Jordan 曲線で囲まれた原点を含む有界単連結領域とする。φ を上の命題と同じとする。すると $\log R$ は D の原点に極を持つグリーン関数のロバン定数であり、$\varphi=R\cdot z\cdot\exp(-k(z))$ ここに $k(z)$ は D のある正則関数で $k(0)=\log R$ と書ける。

定義 2.3　領域 $H:=\{(t,w);0<|w|<R_t\leq\infty, t\in\Delta(\rho)\}$ ここに $\Delta(\rho)$ は原点中心、半径 $\rho(0<\rho\leq\infty)$ の円板であるとき、H は完全ハルトグス領域と呼ぶ。$H(R)$ は $R_t\equiv R$ の時とする。パラメータ (t) が原点中心の多重円板の時も同じように呼ぶが、得られた結果はパラメータがこの時なのであるが、ハルトグスの定理で容易に t は高次元化できるので、この時の説明は省く。

命題 2.4(Hartogs)　完全ハルトグス領域 H がスタインであるための必十条件は $-\log R_t$ が $\Delta(\rho)$ で劣調和または恒等的に $-\infty$ であることである。

命題 2.5　H は $-\log R_t>-\infty$ で C^2 級なる完全ハルトグス領域とする。$\Phi:H\to H(1), \Phi(t,z)=(t,w), \Phi(t,0)=(t,0)$ なる双正則な Φ が存在する必十条件は $\log R_t$ が $\Delta(\rho)$ で調和であること。

定義 2.6　D は $\Delta(\rho)\times\mathbf{C}_z$ の領域とし、D_t を $t\in\Delta(\rho)$ のファイバーとし、有界単連結領域で C^2 級の単一曲線で囲まれているとする。そして $D_t\ni 0$ かつ $\bigcup_{t\in\Delta(\rho)}\partial D_t=\{\psi(t,z)=0\}$ は $\Delta(\rho)\times\mathbf{C}_z$ の C^2 級実多様体と考えられ、$\bigcup_{t\in\Delta(\rho)}\partial D_t$ の近傍 $\mathcal{V}$ におい

2000 Mathematics Subject Classification: 32H02, 32U05
キーワード：リーマンの写像定理、ロバンー山口関数、完全ハルトグス領域、ファイバー空間の一意化

*
e-mail: fwjh5864@nifty.com
web: http://homepage3.nifty.com/kyousei/kenkyuu.html/

て ψ は C^2 級実数値関数で $D \cap \mathcal{V} = \{\psi < 0\}$ かつ $\mathcal{V} \cap \bigcup_{t \in \Delta(\rho)} (\bar{D}_t)^c = \{\psi > 0\}$ であるとき、D はクラス (A) と言う。$k_2(t,z) = (\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial \bar{t}} |\frac{\partial \psi}{\partial z}|^2 - 2Re\{\frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{t} \partial z} \frac{\psi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}\} + |\frac{\partial \psi}{\partial t}|^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial \bar{z}}) / |\frac{\partial \psi}{\partial z}|^3$ と置くと定義関数 ψ の取り方によらず値が決まる。

今 $\Phi : D \to H : t = t, w = \varphi(t,z)$ ここに等角写像 $\varphi(t,z)$ は $D_t \to \{|w| < R_t\} : \varphi(t,0) = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial z}(t,0) = 1$ を考える。

命題 2.7([3])　$D \in (A)$ とする。すると 0 に極を持つ D_t のグリーン関数、特にロバン関数はパラメータ t に関し C^2 級に変動する。

$\log R_t$ の変分公式と k_2 はレビ曲率であることから

命題 2.8([3])　$D \in (A)$ がスタインならば $\log R_t$ は優調和関数で H は完全ハルトグス・スタイン領域である。

命題 2.9　D はスタインで $D \in (A)$ で $\log R_t$ が調和関数ならば、D はレビ平坦で $\Phi_0 : D \to H(1), \Phi_0(t,0) = (t,0), \Phi_0(t,z) = (t,w)$ なる 双正則写像があることが必十条件である。

3. 主定理と応用

補題 3.1　D は $\Delta(\rho) \times \mathbf{C}_z$ の領域とし、D_t を $t \in \Delta(\rho)$ のファイバーとし、単連結領域で $D_t \supset \{|z| \leq \varepsilon\}$ (ε は t に無関係）とする。$\Phi : D \to H, t = t, w = \varphi(t,z)$ で t を固定した時 φ は D_t から $\{|w| < R_t \leq \infty\}$ への等角写像で正規化条件 $\varphi(t,0) = 0, \frac{\partial}{\partial z}\varphi(t,0) = 1$ をみたすとする。すると t に関係しない定数 $0 < \delta < R_t$ が存在して $\Phi^{-1}(H(\delta)) = D^0$ はクラス (A) の領域で $\varphi(t,z)$ は D^0 で正則である。

ハルトグスの定理より

定理 3.2　上の補題と同じ状況で Φ は双正則である。

系 3.3　D は上の補題と同じとする。D がスタインであるためには $-\log R_t$ が劣調和または恒等的に $-\infty$ であることが必十条件である。

定理 3.4　$D = (D, \pi, \Gamma)$ は $\Gamma \times \mathbf{P}^1$ 上の分岐リーマン領域である開または閉の多様体とする。ここに Γ は (0) 中心の多重円板で π は D から Γ への自然な射影とする。更に D は $\Gamma \times \{|z| \leq \varepsilon\}$ 上に単葉な分枝を持つとする。ただし $\varepsilon > 0$。$(t) \in \Gamma$ に対し、ファイバー $D_(t)$ は既約な分岐リーマン面とし、全ての (t) に対し位相タイプ一定とする。即ち種数 g と境界成分数 n が同じ $(0 \leq g \leq \infty, 0 \leq n \leq \infty)$ とする。すると D は一意化可能である。即ち D または D の (0) を基点とする普遍被覆多様体 $\tilde{D}$ は $g = n = 0$ の時を除き H に、$g = n = 0$ の時 $\Gamma \times \mathbf{P}^1$ に双正則となる。

参考文献

[1] Y. Adachi, On a high dimensional Riemann's mapping theorem, to appear in J. M. R., 6, (2014).

[2] Y. Adachi, Condition for global exsistence of holomorphic solutions of a certain differential equation on a Stein domain of $\mathbf{C}^{n+1}$ and its applications, J. Math. Soc. Japan, 53, 633-644 (2001).

[3] F. Maitani and H. Yamaguchi, Variation of Bergman metrics on Riemann surfaces, Math. Ann. 330, 477-489 (2004).

[4] H. Yamaguchi, Parabolicité d'une fonction entière, J. Math. Kyoto Univ., 16, 71-92 (1976).

[5] H. Yamaguchi, Famille holomorphe de surfaces de Riemann ouverts, qui est une variété de Stein, Ibid. 16, 497-530 (1976).

2 次元次数付き特異点、および星型特異点の極大イデアルサイクルと基本サイクルについて

日本大学・文理学部　泊　昌孝
群馬大学・医学部　　都丸　正

(V,p) を正規 2 次元複素特異点、$\psi : (\tilde{V}, A) \to (V,p)$ を特異点解消とし、例外集合を $A = \cup_{j=1}^m A_j$ と既約分解する。基本サイクルとは、$Z_\psi = \min\{D \in \bigoplus_{j=1}^m \mathbf{Z}A_j \mid D \cdot A_j \leq 0\ (\forall j),\ D \neq 0\}$ である。$\bigoplus_{j=1}^m \mathbf{Z}A_j$ の 非ゼロ元で ψ に対して antinef(数値的に反正値) である元としては、O_V の真のイデアル I から次のように定まる $D(I,\psi)$ がある。$D(I,\psi) = \sum_{j=1}^m \left\{\inf_{f\in I}\{\ \mathrm{ord}_{A_j}(\psi^*(f))\}\right\} A_j$, I が m-準素の時は、reflexive hull をとって、$(I \cdot O_{\tilde{V}})^{**} = O_{\tilde{V}}(-D(I,\psi))$ となるものである。$I = m$ のとき、極大イデアルサイクルと呼び、$D(m,\psi) = M_\psi$ と表す。　同一視 $M_\psi = Z_\psi$ ができる特異点の研究は、有理特異点、最小楕円型特異点などの分類論、そして Karras の 変形理論、そして、都丸の pencil 種数、分岐被覆と基本種数の一連の研究などがある。都丸の計算技術 [7] を利用し、最近、今野-長島 [1]、そしてこれを拡張する形で、Meng-奥間 [2] は、特異点が Brieskorn 完全交叉として得られる次数付き特異点について、同一視 $M_\psi = Z_\psi$ に関して完全な判定条件を与えている。私達は、その最近の発展に触発され、2 次元次数付き特異点、更に一般に星型特異点について考え、一部の結果を拡張することができたので、以下で報告する。

星型特異点 [**4**]. 以下、(V,p) の最小良特異点解消において A の双対グラフが中心曲線 X をもつ星型であるとする。$F^k = \psi_*(O_{\tilde{V}}(-kX)) \subset O_V$ として filtration を定めると、付随する次数付き環 $G = \bigoplus_{n\geq 0} F^n/F^{n+1}$　は、孤立特異点を持つ整域になる。正規化 $\bar{G}$ は、星型グラフから Pikham の定め方 [3] で X 上の正有理因子 D を与えると、$\bar{G} = R(X,D)$ となる。 V が $\mathbf{C}^*$-作用を持つ場合、$G = R(X,D)$ であり、O_V と G の完備化が一致し、星型特異点は、$\mathbf{C}^*$-作用を持つ場合の自然な拡張になっている。この状況で、$\{F^k\}$ による filtered blowing-up $\phi : V' \to V$ すると、V' は巡回特異点をのみをもち、ϕ の例外集合は、$X = Proj(G)$ ひとつである。$\tau : \tilde{V} \to V'$ は、V' の巡回特異点の最小特異点解消になり、$\psi = \phi \circ \tau$ と分解する。

Lemma 1. $\tilde{I} = \oplus_{n\geq 0}(I \cap F^n)/(I \cap F^{n+1})$ の非ゼロな最小次数を α とする。
条件 (*) 最小次数部分 $\tilde{I}_\alpha$ に G の被約 (reduced) 元が存在する
と仮定する。すると、$D(I,\psi) \in \bigoplus_{j=1}^m \mathbf{Z}A_j$ は、X の係数が α になるような、τ に関して antinef になる最小のサイクルになる。

特に、αX となる部分を経由する数値的な計算列によって、$D(I,\psi)$ を決定できる。イデアルとしては、$\tau^{-1}(O_{V'}(-\alpha X)) = O_{\tilde{V}}(-D(I,\psi))$ となる。基本サイクルについては、同じ形式の命題がすでに知られていた。

Lemma 2.[6] Z_ψ の中心曲線での係数を ϵ とすると、$\tau^{-1}(O_{V'}(-\epsilon X)) = O_{\tilde{V}}(-Z_\psi)$ である。

定理 3. (V,p) を星型特異点解消を持つ特異点とし、極大イデアル m が、 Lemma 1 の条件 (*) を満たすとする。($\tilde{m} = G_+$ になる。) このとき、$Z_\psi = M_\psi$ となるためには、中心曲線 X 上での Z_ψ と M_ψ の係数が一致することである。

注意 4. ここで、$G_k \subset R(X,D)_k = H^0(X, O_X([\alpha D]))$ であるが、両サイクルの中心曲線での係数については、次が成り立つ : Z_ψの X における係数 $= \min\{\alpha > 0 \mid \deg[\alpha D] \geq 0\} \leq M_\psi$の X における係数 $= \min\{\alpha > 0 \mid G_k \neq 0\}$

[1][2] で扱われた Brieskorn 完全交叉得点について、定理 3 の条件 (*) が成り立つことが、[5] を用いて示される。

定理 5. R を正規次数付き特異点であって、ゼロ次部分 R_0 が、体であるとする。R が Brieskorn 多項式の完全交叉として与えられるなら、極大イデアル $R_+ = (z_1, \ldots, z_s)$ を homogeneous 元で表すとき、生成元を全て reduced にとることができる。(特に、(*) が極大イデアルについて成立する。)

Ref. [1] Konno, K. Nagashima,D: Maximal ideal cycles over normal surface singularities of Brieskorn type. Osaka J. Math. **49**(1) (2012),225-245 [2] Meng,F.-N. Okuma,T: The maximal ideal cycles over complete intersection surface singularities of Brieskorn type. Kyushu J. Math. **68** (2014),121-137 [3] Pinkham, H.: Normal surface singularities with $\mathbf{C}^*$-action, Math. Ann., **227** (1977),183-193. [4] Tomari, M., Watanabe, Kei-ichi: Filtered rings, filtered blowing-ups and normal two-dimensional singularities with "star-shaped "resolution. Publ. Res. Inst. Math. Sci, Kyoto Univ., **25**(1989), 681-740 [5] Tomari, M., Watanabe, Kei-ichi: Cyclic covers of normal graded rings. Kodai Mathematical Journal, **24** (2001) 436–457 [6] Tomaru, T. : On Gorenstein surface singularities with fundamental genus $p_f \geq 2$ which satisfy some minimality condtions. Pacific J. Math. **170**(1) (1995),271-295 [7] Tomaru, T. : On Kodaira singularities defined by $z^n = f(x,y)$. Math. Z, **236**(1) (2001), 133-149.

Growth and distortion theorems for pluriharmonic mappings

Tatsuhiro HONDA (Hiroshima Institute of Technology, Japan)*1
Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University, Japan)*2
Gabriela KOHR (Babeş-Bolyai University, Romania)*3

Let B be the unit ball of a finite dimensional complex Banach space $X = \mathbb{C}^n$. A complex-valued function f of class C^2 on B is said to be pluriharmonic if its restriction to every complex line is harmonic. This happens if and only if $\frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \overline{z_k}} f(z) \equiv 0$ in B for all $j, k = 1, 2 \ldots, n$. A real-valued function f of class C^2 on B is pluriharmonic if and only if it is the real part of some holomorphic function on B. Every real-valued harmonic function on the unit disc U is the real part of a holomorphic function on U, but this is no longer true for harmonic functions on B. Thus, in dimension $n \geq 2$, the family of all pluriharmonic functions is a proper subclass of the family of all harmonic functions on B. Every pluriharmonic mapping $f : B \to X$ can be written as $f = h + \overline{g}$, where g and h are holomorphic mappings of B into X, $\overline{g}$ is the usual complex conjugate of g in $X = \mathbb{C}^n$, and this representation is unique if $g(0) = 0$.

Let $S_H(B)$ be the family of all univalent pluriharmonic mappings $f = h + \overline{g}$ on B, where $h, g \in \mathcal{H}(B)$, $g(0) = 0$, and $h \in \mathcal{L}S(B)$. We remark that a mapping $f \in S_H(B)$ is not necessarily sense-preserving; that is, its real Jacobian (when f is regarded as a mapping from $\mathbb{R}^{2n}$ to $\mathbb{R}^{2n}$) need not be positive. Let $S_H^0(B)$ be the subfamily of mappings $f = h + \overline{g} \in S_H(B)$ such that $Dg(0) = 0$. Also, let $\mathcal{L}S_H(B)$ be the family of all pluriharmonic mappings $f = h + \overline{g}$ on B with $h \in \mathcal{L}S(B)$ and $g(0) = 0$. In the case of one complex variable, the family $S_H(U)$ is a normal family, while $S_H^0(U)$ is compact (see [7] and [8]). However, if B is the n-dimensional Euclidean unit ball with $n \geq 2$, the family $S_H(B)$ is not normal (see [9]).

Recently, Duren, Hamada and Kohr [9] extended the notion of linear invariance on the Euclidean unit ball B^n in $\mathbb{C}^n$ to the case of affine and linearly invariant families (A.L.I.F.s) of pluriharmonic mappings of B^n into $\mathbb{C}^n$. To this end, they obtained various results concerning two-point distortion theorems for A.L.I.F.s of harmonic functions on the unit disc U and of pluriharmonic mappings of B^n into $\mathbb{C}^n$. We mention that A.L.I.F.s of harmonic functions on the unit disc U were first introduced by Sheil-Small [27]. Also, recent results related to two-point distortion results for harmonic mappings of the unit disc and necessary and sufficient conditions for univalence of pluriharmonic mappings of the Euclidean unit ball B^n in $\mathbb{C}^n$ may be found in [5] and [6].

In this talk ([16]), we give growth and distortion theorems for A.L.I.F.s of pluriharmonic mappings of the unit ball B into $\mathbb{C}^n$.

This work has been supported by JSPS KAKENHI Grant Number 25400151.
2000 Mathematics Subject Classification: 32H02, 30C45.
Keywords: distortion theorem, growth theorem, linearly invariant family, two-point distortion.
*1 e-mail: thonda@cc.it-hiroshima.ac.jp
*2 e-mail: h.hamada@ip.kyusan-u.ac.jp
*3 e-mail: gkohr@math.ubbcluj.ro

References

[1] R.W. Barnard, C.H. FitzGerald, S. Gong, A distortion theorem for biholomorphic mappings in $\mathbb{C}^2$, Trans. Amer. Math. Soc. 344 (1994) 907–924.

[2] C.-H. Chu, Jordan structures in geometry and analysis, Cambridge Tracts in Mathematics, 190, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[3] C.-H. Chu, H. Hamada, T. Honda, G. Kohr, Distortion theorems for convex mappings on homogeneous balls, J. Math. Anal. Appl. 369 (2010) 437–442.

[4] C-H. Chu, P. Mellon, Jordan structures in Banach spaces and symmetric manifolds, Exposition. Math. 16 (1998) 157–180.

[5] M. Chuaqui, P. Duren, B. Osgood, Two-point distortion theorems for harmonic mappings, Illinois J. Math. 53 (2009) 1061–1075.

[6] M. Chuaqui, H. Hamada, R. Hernández, G. Kohr, Pluriharmonic mappings and linearly connected domains in $\mathbb{C}^n$, Israel J. Math., to appear.

[7] J. Clunie, T. Sheil-Small, Harmonic univalent functions, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. Math. 9 (1984) 3–25.

[8] P. Duren, Harmonic mappings in the plane, Cambridge Univ. Press, 2004.

[9] P. Duren, H. Hamada, G. Kohr, Two-point distortion theorems for harmonic and pluriharmonic mappings, Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011) 6197–6218.

[10] J. Godula, P. Liczberski, V. Starkov, Order of linearly invariant family of mappings in $\mathbb{C}^n$, Complex Variables Theory Appl. 42 (2000) 89–96.

[11] S. Gong, Convex and starlike mappings in several complex variables, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.

[12] I. Graham, G. Kohr, Geometric function theory in one and higher dimensions, Marcel Dekker Inc., New York, 2003.

[13] I. Graham, G. Kohr, J. Pfaltzgraff, Growth and two-point distortion for biholomorphic mappings of the ball, Complex Var. Elliptic Equ. 52 (2007) 211–223.

[14] H. Hamada, T. Honda, G. Kohr, Linear invariance of locally biholomorphic mappings in the unit ball of a JB*-triple, J. Math. Anal. Appl. 385 (2012) 326–339.

[15] H. Hamada, T. Honda, G. Kohr, Trace-order and a distortion theorem for linearly invariant families on the unit ball of a finite dimensional JB*-triple, J. Math. Anal. Appl. 396 (2012) 829–843.

[16] H. Hamada, T. Honda, G. Kohr, Growth and distortion theorems for linearly invariant families on homogeneous unit balls in $\mathbb{C}^n$, J. Math. Anal. Appl., 407 (2013) 398 – 412.

[17] H. Hamada, G. Kohr, Linear invariance of locally biholomorphic mappings in Hilbert spaces, Complex Var. Theory Appl. 47 (2002) 277–289.

[18] H. Hamada, G. Kohr, Linear invariant families on the unit polydisc, Mathematica (Cluj) 44(67) (2002) 153–170.

[19] L. Hörmander, On a theorem of Grace, Math. Scand. 2 (1954) 55–64.

[20] W. Kaup, A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces, Math. Z. 183 (1983) 503–529.

[21] O. Loos, Bounded symmetric domains and Jordan pairs, University of California, Irvine, 1977.

[22] J.A. Pfaltzgraff, Distortion of locally biholomorphic maps of the n-ball, Complex Variables Theory Appl. 33 (1997) 239–253.

[23] J.A. Pfaltzgraff, T.J. Suffridge, An extension theorem and linear invariant families generated by starlike maps, Ann. Univ. Mariae Curie Sklodowska, Sect.A 53 (1999) 193–207.

[24] J.A. Pfaltzgraff, T.J. Suffridge, Linear invariance, order and convex maps in $\mathbb{C}^n$, Complex Variables Theory Appl. 40 (1999) 35–50.

[25] J.A. Pfaltzgraff, T.J. Suffridge, Norm order and geometric properties of holomorphic mappings in $\mathbf{C}^n$, J. Anal. Math. 82 (2000) 285–313.

[26] Ch. Pommerenke, Linear-invariante Familien analytischer Funktionen I, Math. Ann. 155 (1964) 108–154.

[27] T. Sheil-Small, Constants for planar harmonic mappings, J. London Math. Soc. 42 (1990) 237–248.

Strongly Starlike Mappings in Several Complex Variables

Tatsuhiro HONDA (Hiroshima Institute of Technology, Japan)*1
Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University, Japan)*2
Gabriela KOHR (Babeş-Bolyai University, Romania)*3
Kwang Ho SHON (Pusan National University, Korea)*4

Let $\mathbb{C}^n$ denote the space of n complex variables $z = (z_1, \ldots, z_n)$ with the Euclidean inner product $\langle z, w\rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j\overline{w_j}$ and the norm $\|z\| = \langle z, z\rangle^{1/2}$. The open unit ball $\{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < 1\}$ is denoted by $\mathbb{B}^n$. In the case of one complex variable, $\mathbb{B}^1$ is denoted by U.

If Ω is a domain in $\mathbb{C}^n$, let $H(\Omega)$ be the set of holomorphic mappings from Ω into $\mathbb{C}^n$. If Ω is a domain in $\mathbb{C}^n$ which contains the origin and $f \in H(\Omega)$, we say that f is normalized if $f(0) = 0$ and $Df(0) = I_n$, where I_n is the identity matrix.

Kohr and Liczberski [8] introduced the following definition of strongly starlike mappings of order α on $\mathbb{B}^n$.

Definition 1. *Let $0 < \alpha \le 1$. A normalized locally biholomorphic mapping $f \in H(\mathbb{B}^n)$ is said to be strongly starlike of order α if*

$$|\arg\langle [Df(z)]^{-1} f(z), z\rangle| < \alpha\frac{\pi}{2},\ z \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}. \tag{1}$$

Obviously, if f is strongly starlike of order α, then f is also starlike, and if $\alpha = 1$ in (1), we obtain the usual notion of starlikeness on the unit ball $\mathbb{B}^n$.

Using this definition, Hamada and Honda [4], Hamada and Kohr [7], Liczberski [9], Liu and Li [11] obtained various results for strongly starlike mappings of order α in several complex variables.

Recently, Liczberski and Starkov [10] gave another definition of strongly starlike mappings of order α on the Euclidean unit ball $\mathbb{B}^n$ in $\mathbb{C}^n$, where $\alpha \in (0, 1]$. Their definition is as follows:

Definition 2. *Let $0 < \alpha \le 1$. A normalized locally biholomorphic mapping $f \in H(\mathbb{B}^n)$ is said to be strongly starlike of order α (in the sense of Liczberski and Starkov) if*

$$\Re\langle [Df(z)]^{-1} f(z), z\rangle \ge \|([Df(z)]^{-1})^* z\| \cdot \|f(z)\| \sin\left((1-\alpha)\frac{\pi}{2}\right),\ z \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}. \tag{2}$$

In the case $n = 1$, it is obvious that both notions of strongly starlikeness of order α are equivalent. Thus, the following natural question arises in dimension $n \ge 2$:

This work has been supported by JSPS KAKENHI Grant Number 25400151.
2000 Mathematics Subject Classification: 32H02, 30C45.
Keywords: biholomorphic mapping, strongly starlike mapping of order α. .
*1 e-mail: thonda@cc.it-hiroshima.ac.jp
*2 e-mail: h.hamada@ip.kyusan-u.ac.jp
*3 e-mail: gkohr@math.ubbcluj.ro
*4 e-mail: khshon@pusan.ac.kr

Question 3. *Let $\alpha \in (0,1)$. Is there any relation between the above two definitions of strong starlikeness of order α?*

Let f be a normalized biholomorphic mapping on the Euclidean unit ball $\mathbb{B}^n$ in $\mathbb{C}^n$ and let $\alpha \in (0,1)$. In this talk, we will show that if f is strongly starlike of order α in the sense of Definition 2, then it is also strongly starlike of order α in the sense of Definition 1. As a corollary, the results obtained in [4], [7], [9], [11] for strongly starlike mappings of order α in the sense of Definition 1 also hold for strongly starlike mappings of order α in the sense of Definition 2. We also give an example which shows that the converse of the above result does not hold in dimension $n \geq 2$.

References

[1] D. A. Brannan and W. E. Kirwan, On some classes of bounded univalent functions, J. London Math. Soc. (2) 1 (1969), 431–443.

[2] S. Gong, Convex and Starlike Mappings in Several Complex Variables, Kluwer, Dordrecht, 1998.

[3] K.R. Gurganus, Φ-like holomorphic functions in $\mathbb{C}^n$ and Banach spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 205 (1975), 389–406.

[4] H. Hamada and T. Honda, Sharp growth theorems and coefficient bounds for starlike mappings in several complex variables, Chin. Ann. Math. Ser. B 29 (2008), no. 4, 353–368.

[5] H. Hamada, T. Honda, G. Kohr and K.H. Shon, A note on strongly starlike mappings in several complex variables, Abstr. Appl. Anal. 2014, Art. ID 265718, 4 pp.

[6] H. Hamada and G. Kohr, Φ-like and convex mappings in infinite dimensional spaces, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 47 (2002), 315–328.

[7] H. Hamada and G. Kohr, On some classes of bounded univalent mappings in several complex variables, Manuscripta Math. 131 (2010), no. 3-4, 487–502.

[8] G. Kohr and P. Liczberski, On strongly starlikeness of order alpha in several complex variables, Glas. Mat. Ser. III 33(53) (1998), no. 2, 185–198.

[9] P. Liczberski, A geometric characterization of some biholomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$, J. Math. Anal. Appl. 375 (2011), no. 2, 538–542.

[10] P. Liczberski and V. V. Starkov, Domains in $\mathbb{R}^n$ with conically accessible boundary, J. Math. Anal. Appl. 408 (2013), no. 2, 547–560.

[11] H. Liu and X. Li, The growth theorem for strongly starlike mappings of order α on bounded starlike circular domains (English, Chinese summary), Chinese Quart. J. Math. 15 (2000), no. 3, 28–33.

[12] W. Ma and D. Minda, An internal geometric characterization of strongly starlike functions, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A 45 (1991), 89–97.

[13] J. Stankiewicz, Quelques problèmes extrémaux dans les classes des fonctions α-angulairement étoilées (French), Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A 20 (1966), 59–75.

[14] T.J. Suffridge, Starlike and convex maps in Banach spaces, Pacific J. Math. 46 (1973), 575–589.

[15] T.J. Suffridge, Starlikeness, convexity and other geometric properties of holomorphic maps in higher dimensions. In: Lecture Notes in Math. 599, 146–159, Springer, Berlin, 1977.

[16] T. Sugawa, A self-duality of strong starlikeness, Kodai Math. J. 28 (2005), no. 2, 382–389.

特別講演

Analytic study of singular curves

Yukitaka ABE (University of Toyama)*

Summary
We study singular curves from analytic point of view. We reformulate the Serre duality, a generalized Abel's theorem etc. in quite natural way from our view point, and give completely analytic proofs of them. We also reconsider Picard varieties, Albanese varieties and generalized Jacobi varieties of singular curves analytically. We call an Albanese variety considered as a complex Lie group an analytic Albanese variety. We investigate them in detail and construct several examples. We think that an analytic Albanese variety is suitable for a generalized Jacobi variety because it has similar properties to those of the Jacobi variety for a compact Riemann surface.

1. Singular Curves

1.1. Construction of singular curves

Let X be an irreducible non-singular complex projective algebraic curve (i.e. a compact Riemann surface). We denote by $\mathcal{O}_X$ the structure sheaf on X. Let S be a finite subset of X. We give an equivalence relation R on S. We define the quotient set $\overline{S} := S/R$ of S by R. We set

$$\overline{X} := (X \setminus S) \cup \overline{S}.$$

We induce to $\overline{X}$ the quotient topology by the canonical projection $\rho : X \longrightarrow \overline{X}$. Then $\overline{X}$ is a compact Hausdorff space. We define a modulus with support S, according to Serre([S]).

Definition 1.1 *A modulus $\mathfrak{m}$ with support S is the data of an integer $\mathfrak{m}(P) > 0$ for each point $P \in S$.*

A modulus $\mathfrak{m}$ with support S is also considered as a positive divisor on X.We use the same notation

$$\mathfrak{m} = \sum_{P \in S} \mathfrak{m}(P)P.$$

We may assume deg $\mathfrak{m} \geq 2$.

Let $\mathrm{Mer}(X)$ be the field of meromorphic functions on X. For any $f \in \mathrm{Mer}(X)$ and any $P \in X$, we denote by $\mathrm{ord}_P(f)$ the order of f at P.

Definition 1.2 *Let $f, g \in \mathrm{Mer}(X)$. We write*

$$f \equiv g \mod \mathfrak{m}$$

if $\mathrm{ord}_P(f-g) \geq \mathfrak{m}(P)$ *for any* $P \in S$.

Let $\rho_*\mathcal{O}_X$ be the direct image of $\mathcal{O}_X$ by the projection $\rho : X \longrightarrow \overline{X}$. For any $Q \in \overline{X}$ we denote by $\mathcal{I}_Q$ the ideal of $(\rho_*\mathcal{O}_X)_Q$ formed by the function f with $f \equiv 0 \mod \mathfrak{m}$. We define a sheaf $\mathcal{O}_\mathfrak{m}$ on $\overline{X}$ by

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{m},Q} := \begin{cases} (\rho_*\mathcal{O}_X)_Q = \mathcal{O}_{X,Q} & \text{if } Q \in X \setminus S \\ \mathbb{C} + \mathcal{I}_Q & \text{if } Q \in \overline{S}. \end{cases}$$

2000 Mathematics Subject Classification: 30F10, 32G20.
Keywords: singular curves, generalized Jacobi varieties.
*e-mail: abe@sci.u-toyama.ac.jp

We denote by $X_{\mathfrak{m}}$ a 1-dimensional compact reduced complex space $(\overline{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{m}})$.

Conversely, any reduced and irreducible singular curve is obtained as above.

1.2. Riemann-Roch Theorem (first version)

Theorem 1.3 *Let $X, S, \mathfrak{m}, X_{\mathfrak{m}}$ be as above. Let $D \in \mathrm{Div}(X_{\mathfrak{m}})$. Then, $H^0(X_{\mathfrak{m}}, \mathcal{L}_{\mathfrak{m}}(D))$ and $H^1(X_{\mathfrak{m}}, \mathcal{L}_{\mathfrak{m}}(D))$ are finite dimensional, and we have*

$$\dim H^0(X_{\mathfrak{m}}, \mathcal{L}_{\mathfrak{m}}(D)) - \dim H^1(X_{\mathfrak{m}}, \mathcal{L}_{\mathfrak{m}}(D)) = \deg D + 1 - \pi.$$

2. Analytic Proof of the Serre Duality

2.1. Sheaf $\Omega_{\mathfrak{m}}$

Let $U \subset X_{\mathfrak{m}}$ be an open set. We define

$\Omega_{\mathfrak{m}}(U) := \{$a meromorphic 1-form ω on $\rho^{-1}(U)$ satisfying the following condition $(*)\}$.

The condition $(*)$:
For any $Q \in U$ and any $f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{m},Q}$, we have

$$\sum_{P \in \rho^{-1}(Q)} \mathrm{Res}_P(\rho^* f \omega) = 0.$$

Then a presheaf $\{\Omega_{\mathfrak{m}}(U), r_V^U\}$ defines a sheaf $\Omega_{\mathfrak{m}}$ on $X_{\mathfrak{m}}$, where r_V^U is the restriction map. This sheaf $\Omega_{\mathfrak{m}}$ is called the duality sheaf on $X_{\mathfrak{m}}$ in general.

Let Ω be the sheaf of germs of holomorphic 1-forms on X. The direct image $\rho_*\Omega$ of Ω is considered as an $\mathcal{O}_{\mathfrak{m}}$-submodule of $\Omega_{\mathfrak{m}}$. Let $D \in \mathrm{Div}(X_{\mathfrak{m}}) \subset \mathrm{Div}(X)$. For any open subset W of X we define

$$\Omega(D)(W) := \{ \text{ a meromorphic 1-form } \eta \text{ on } W \text{ with } (\eta) \geq -D \text{ on } W\}.$$

Then a presheaf $\{\Omega(D)(W), r_{W'}^W\}$ gives a sheaf $\Omega(D)$ on X. We define a sheaf $\Omega_{\mathfrak{m}}(D)$ on $X_{\mathfrak{m}}$ by

$$\Omega_{\mathfrak{m}}(D)_Q := \begin{cases} \Omega_{\mathfrak{m},Q} & \text{if } Q \in \overline{S} \\ \Omega(D)_Q & \text{if } Q \in X \setminus S. \end{cases}$$

It is obvious that $\Omega_{\mathfrak{m}}(0) = \Omega_{\mathfrak{m}}$.

The Serre duality is represented as follows.

Theorem 2.1 (Serre duality) *For any $D \in \mathrm{Div}(X_{\mathfrak{m}})$ we have*

$$H^0(X_{\mathfrak{m}}, \Omega_{\mathfrak{m}}(-D)) \cong H^1(X_{\mathfrak{m}}, \mathcal{L}_{\mathfrak{m}}(D))^*,$$

where $H^1(X_{\mathfrak{m}}, \mathcal{L}_{\mathfrak{m}}(D))^*$ is the dual space of $H^1(X_{\mathfrak{m}}, \mathcal{L}_{\mathfrak{m}}(D))$.

The purpose of this chapter is to give a completely analytic proof of it.

3. Generalized Abel's Theorem

3.1. Introduction

A generalized Abel's theorem was first formulated and proved algebraically in [R]. After that, Jambois [J] tried to treat it analytically. However, it seems to us that his argument is not correct. Furthermore, we think that the condition $f \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}$ in the statement of the above generalized Abel's theorem is unusual. We should consider the principal divisors which are defined by meromorphic functions on $X_{\mathfrak{m}}$.

We use the same notations as in the preceding chapters. We assign a non-zero constant c_Q to each point Q in $\overline{S}$. We call

$$c(\overline{S}) := (c_Q)_{Q\in\overline{S}}$$

a multiconstant on $\overline{S}$.

Definition 3.1 *Let $f \in \mathrm{Mer}(X)$, and let $c(\overline{S})$ be a multiconstant on $\overline{S}$. We write*

$$f \equiv c(\overline{S}) \bmod \mathfrak{m}$$

if $\mathrm{ord}_P(f - c_Q) \geq \mathfrak{m}(P)$ for any $P \in S$ with $\rho(P) = Q$ at any $Q \in \overline{S}$.

Our formulation of a generalized Abel's theorem is the following.

Theorem 3.2 *Let $D \in \mathrm{Div}(X_{\mathfrak{m}})$ with $\deg D = 0$. Then there exists a meromorphic function f on X with $f \equiv c(\overline{S}) \bmod \mathfrak{m}$ for some multiconstant $c(\overline{S})$ such that $D = (f)$ if and only if there exists a 1-chain $c \in C_1(X \setminus S)$ with $\partial c = D$ such that*

$$\int_c \rho^*\omega = 0$$

for any $\omega \in H^0(X_{\mathfrak{m}}, \Omega_{\mathfrak{m}})$.

4. Varieties Associated to Singular Curves

4.1. Albanese varieties

In this section we consider Albanese varieties for singular curves. Let $X_{\mathfrak{m}}$ be a singular curve of genus $\pi = g + \delta$ as in Chapter 1, where g is the genus of X. Take a basis $\{\omega_1, \ldots, \omega_\pi\}$ of $H^0(X_{\mathfrak{m}}, \Omega_{\mathfrak{m}})$. We fix a canonical homology basis $\{\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_g, \beta_g\}$ of X. Let $S = \{P_1, \ldots, P_s\}$. We denote by γ_j a small circle centered at P_j with anticlockwise direction for $j = 1, \ldots, s$. Then the set $\{\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_g, \beta_g, \gamma_1, \ldots, \gamma_s\}$ forms a basis of $H_1(X \setminus S, \mathbb{Z}) = H_1(X_{\mathfrak{m}} \setminus \overline{S}, \mathbb{Z})$. Let $H^0(X_{\mathfrak{m}}, \Omega_{\mathfrak{m}})^*$ be the dual space of $H^0(X_{\mathfrak{m}}, \Omega_{\mathfrak{m}})$. We set

$$A := H^0(X_{\mathfrak{m}}, \Omega_{\mathfrak{m}})^*/H_1(X_{\mathfrak{m}} \setminus \overline{S}, \mathbb{Z}).$$

In [R] it is stated that A has the unique algebraic structure in which the following exact sequence is algebraic:

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow A \longrightarrow \mathrm{Alb}(X) \longrightarrow 0,$$

where H is an affine algebraic group. Rosenlicht [R] called it the generalized Jacobi variety of $X_{\mathfrak{m}}$. However, this is one of structures which can be induced to A. In [A2], we called A with the above algebraic structure the algebraic Albanese variety of $X_{\mathfrak{m}}$, and wrote it $\mathrm{Alb}^{alg}(X_{\mathfrak{m}})$.

We are interested in their analytic structure. We begin by considering A explicitly. We may assume that $\{\rho^*\omega_1, \ldots, \rho^*\omega_g\}$ is a basis of $H^0(X, \Omega)$. Consider $2g + s$ vectors

$$\left(\int_{\alpha_i} \rho^*\omega_1, \ldots, \int_{\alpha_i} \rho^*\omega_\pi\right), \quad i = 1, \ldots, g,$$

$$\left(\int_{\beta_i} \rho^*\omega_1, \ldots, \int_{\beta_i} \rho^*\omega_\pi\right), \quad i = 1, \ldots, g$$

and

$$\left(\int_{\gamma_j} \rho^*\omega_1, \dots, \int_{\gamma_j} \rho^*\omega_\pi\right), \quad j = 1, \dots, s$$

in $\mathbb{C}^\pi$. Let Γ be a subgroup of $\mathbb{C}^\pi$ generated by these vectors over $\mathbb{Z}$. We have the following lemma as in the non-singular case.

Lemma 4.1 *There exist $a_1, \dots, a_\pi \in X \setminus S$ such that if*

$$\rho^*\omega(a_1) = \cdots = \rho^*\omega(a_\pi) = 0,$$

then $\omega = 0$ for $\omega \in H^0(X_{\mathfrak{m}}, \Omega_{\mathfrak{m}})$.

Proposition 4.2 *Γ is a discrete subgroup of $\mathbb{C}^\pi$.*

By the above proposition we have

$$A = H^0(X_{\mathfrak{m}}, \Omega_{\mathfrak{m}})^*/H_1(X \setminus S, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{C}^\pi/\Gamma$$

as a complex Lie group. We call A with the structure as a complex Lie group the analytic Albanese variety of $X_{\mathfrak{m}}$, and write it as $\mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}})$. We shall study its properties in detail in the following sections.

4.2. Toroidal groups and quasi-abelian varieties

A connected complex Lie group G is said to be a toroidal group if $H^0(G, \mathcal{O}_G) = \mathbb{C}$, where $\mathcal{O}_G$ is the structure sheaf on G. It is well-known that a toroidal group G is commutative. Then we have $G \cong \mathbb{C}^n/\Lambda$ as a complex Lie group, where $n = \dim G$ and Λ is a discrete subgroup of $\mathbb{C}^n$ with rank $\Lambda = n + m$ $(1 \le m \le n)$. Let $\lambda_1 = (\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1n}), \dots, \lambda_{n+m} = (\lambda_{n+m,1}, \dots, \lambda_{n+m,n}) \in \mathbb{C}^n$ be generators of Λ. Then the matrix

$$P = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{n+m,1} \\ \lambda_{12} & \dots & \lambda_{n+m,2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{1n} & \dots & \lambda_{n+m,n} \end{pmatrix}$$

is called a period matrix of G. By a suitable change of variables and generators we have the following normal form of P

$$P = \begin{pmatrix} 0 & I_m & T \\ I_{n-m} & R_1 & R_2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

where I_k is the unit matrix of degree k, the matrix $(I_m \;\; T)$ is a period matrix of an m-dimensional complex torus and $(R_1 \;\; R_2)$ is a real matrix. We call the coordinates in (1) toroidal coordinates of G and write them as follows:

$$z = (z', z'') = (z_1, \dots z_m; z_{m+1}, \dots z_n).$$

The projection $z \mapsto z'$ in these coordinates makes G a fibre bundle $\sigma : G \longrightarrow \mathbb{T}$ over an m-dimensional complex torus $\mathbb{T}$ with fibres $(\mathbb{C}^*)^{n-m}$.

Let $\mathbb{R}^{n+m}_\Lambda$ be the real linear subspace of $\mathbb{C}^n$ spanned by Λ. We denote by $\mathbb{C}^m_\Lambda$ the maximal complex linear subspace contained in $\mathbb{R}^{n+m}_\Lambda$. It is well-known that $\dim \mathbb{C}^m_\Lambda = m$.

Definition 4.3 *A toroidal group $G = \mathbb{C}^n/\Lambda$ is a quasi-abelian variety if there exists a hermitian form $\mathcal{H}$ on $\mathbb{C}^n$ such that*
(a) $\mathcal{H}$ is positive definite on $\mathbb{C}^m_\Lambda$,
(b) the imaginary part $\mathcal{A} := \mathrm{Im}\,\mathcal{H}$ of $\mathcal{H}$ is $\mathbb{Z}$-valued on $\Lambda \times \Lambda$.
A hermitian form $\mathcal{H}$ satisfying the above conditions (a) and (b) is said to be an ample Riemann form for G. We set $\mathcal{A}_\Lambda := \mathcal{A}|_{\mathbb{R}^{n+m}_\Lambda \times \mathbb{R}^{n+m}_\Lambda}$ for an ample Riemann form $\mathcal{H}$. Since $\mathcal{A}_\Lambda$ is an alternating form, we have

$$\mathrm{rank}\ \mathcal{A}_\Lambda = 2(m+k), \quad 0 \leq 2k \leq n-m.$$

In this case we say that an ample Riemann form $\mathcal{H}$ is of kind k.

If a quasi-abelian variety G has an ample Riemann form of kind k, then it also has an ample Riemann form of kind k' for any k' with $2k \leq 2k' \leq n-m$ ([A-U]). Then we defined the kind of a quasi-abelian variety in [A-U].

Definition 4.4 *The kind of a quasi-abelian variety G is the smallest integer k with $0 \leq 2k \leq n-m$ such that there exists an ample Riemann form of kind k for G.*

If $G = \mathbb{C}^n/\Lambda$ is a quasi-abelian variety of kind 0, then the matrix $(I_m \ \ T)$ in (1) is a period matrix of an m-dimensional abelian variety $\mathbb{A}$. Therefore G has the structure of a fibre bundle $\sigma : G \longrightarrow \mathbb{A}$ over $\mathbb{A}$ with fibres $(\mathbb{C}^*)^{n-m}$. Replacing fibres $(\mathbb{C}^*)^{n-m}$ with $(\mathbb{P}^1)^{n-m}$, we obtain the associated bundle $\overline{\sigma} : \overline{G} \longrightarrow \mathbb{A}$ over $\mathbb{A}$ with fibres $(\mathbb{P}^1)^{n-m}$. We say that $\overline{G}$ is the standard compactification of a quasi-abelian variety G of kind 0.

Conversely, if the matrix $(I_m \ \ T)$ in (1) is a period matrix of an m-dimensional abelian variety, then G is a quasi-abelian variety of kind 0.

We refer to [A-K] for further properties of toroidal groups.

4.3. Canonical form of analytic Albanese varieties

By Proposition 4.2 we have

$$A = H^0(X_{\mathfrak{m}}, \Omega_{\mathfrak{m}})^*/H_1(X \setminus S, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{C}^\pi/\Gamma$$

as a complex Lie group. The theorem of Remmert-Morimoto says that

$$A \cong \mathbb{C}^\pi/\Gamma \cong \mathbb{C}^p \times (\mathbb{C}^*)^q \times G,$$

where G is a toroidal group of dimension r and $p+q+r = \pi$.

Proposition 4.5 *G is a quasi-abelian variety of kind* 0.

By the above proposition, A has the following representation as a complex Lie group

$$A \cong \mathbb{C}^p \times (\mathbb{C}^*)^q \times \mathfrak{Q},$$

where $\mathfrak{Q}$ is a quasi-abelian variety of kind 0. We call this representation the canonical form of the analytic Albanese variety of $X_{\mathfrak{m}}$ and write

$$\mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}}) = \mathbb{C}^p \times (\mathbb{C}^*)^q \times \mathfrak{Q}.$$

4.4. Analytic Albanese varieties

Let $\omega_1, \dots, \omega_\pi$ be a basis of $H^0(X_{\mathfrak{m}}, \Omega_{\mathfrak{m}})$. We define a period map φ with base point $P_0 \in X \setminus S$ by

$$\varphi : X \setminus S \longrightarrow \mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}}), \quad P \longmapsto \left[\left(\int_{P_0}^{P} \rho^* \omega_1, \dots, \int_{P_0}^{P} \rho^* \omega_\pi \right) \right].$$

Consider a commutative complex Lie group G. Any holomorphic map $\psi : X \setminus S \longrightarrow G$ can be extended to a homomorphism on $\mathrm{Div}(X_{\mathfrak{m}})$ by

$$\psi(D) := \sum_{P \in X \setminus S} D(P) \psi(P)$$

for $D = \sum_{P \in X \setminus S} D(P)P \in \mathrm{Div}(X_{\mathfrak{m}})$. If g is a meromorphic function on X with $g \equiv c(\overline{S}) \bmod \mathfrak{m}$ for some multiconstant $c(\overline{S})$, then

$$\psi((g)) := \sum_{P \in X \setminus S} \mathrm{ord}_P(g) \psi(P)$$

is well-defined.

Definition 4.6 *We say that a holomorphic map $\psi : X \setminus S \longrightarrow G$ admits $\mathfrak{m}$ for a modulus if $\psi((f)) = 0$ for any meromorphic function f on X satisfying $f \equiv c(\overline{S}) \bmod \mathfrak{m}$ with multiconstant $c(\overline{S})$.*

Proposition 4.7 *The period map $\varphi : X \setminus S \longrightarrow \mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}})$ defined above admits $\mathfrak{m}$ for a modulus. Furthermore, it is a holomorphic embedding if $g \geq 1$.*

For a complex manifold M, we denote by $M^{(r)}$ its symmetric product of degree r. We can extend $\varphi : X \setminus S \longrightarrow \mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}})$ to a holomorphic map $\varphi : (X \setminus S)^{(r)} \longrightarrow \mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}})$.

Theorem 4.8 *The map $\varphi : (X \setminus S)^{(\pi)} \longrightarrow \mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}})$ is surjective.*

Remark 4.9 *It follows from the above theorem that $\varphi(X \setminus S)$ generates $\mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}})$.*

Corollary 4.10 *We have an isomorphism $\overline{\mathrm{Div}^0(X_{\mathfrak{m}})} \cong \mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}})$ as groups.*

Theorem 4.11 *The map $\varphi : (X \setminus S)^{(\pi)} \longrightarrow \mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}})$ is bimeromorphic.*

As in Section 4.3 we write

$$\mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}}) = \mathbb{C}^p \times (\mathbb{C}^*)^q \times \mathfrak{Q},$$

where $\mathfrak{Q}$ is an r-dimensional quasi-abelian variety of kind 0 and $p + q + r = \pi$. Let $\mathfrak{Q} = \mathbb{C}^r / \Gamma_0$, where Γ_0 is a discrete subgroup of $\mathbb{C}^r$ with rank $\Gamma_0 = r + s$. Then $\mathfrak{Q}$ is a fibre bundle over an s-dimensional abelian variety A_0 with fibres $(\mathbb{C}^*)^{r-s}$. Let $\overline{\mathfrak{Q}}$ be the standard compactification of $\mathfrak{Q}$. Compactifying $\mathbb{C}^p \times (\mathbb{C}^*)^q$ by $(\mathbb{P}^1)^{p+q}$, we obtain a compactification

$$\overline{\mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}})} := (\mathbb{P}^1)^{p+q} \times \overline{\mathfrak{Q}}$$

of $\mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}})$. We call it the standard compacification of $\mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}})$.

Proposition 4.12 *The map $\varphi : X \setminus S \longrightarrow \mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}})$ extends to a holomorphic map $\overline{\varphi} : X \longrightarrow \overline{\mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}})}$. However, the map $\varphi : (X \setminus S)^{(r)} \longrightarrow \mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}})$ cannot extend to a proper map from $X^{(r)}$ to $\overline{\mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}})}$ if $r \geq 2$.*

4.5. The universality of analytic Albanese varieties

Theorem 4.13 (Universality Property) *Let G be a commutative complex Lie group, and let P_0 be the base point of the map $\varphi : X \setminus S \longrightarrow \mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}})$. Then, for any holomorphic map $\psi : X \setminus S \longrightarrow G$ which admits $\mathfrak{m}$ for a modulus there exists uniquely a homomorphism $\Psi : \mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}}) \longrightarrow G$ between complex Lie groups such that $\psi = \Psi \circ \varphi + g_0$, where $g_0 = \psi(P_0)$.*

5. Further Properties of Analytic Albanese Varieties

5.1. Curves with general singularities

We extend the method developed in [A2] to the general setting. Let X be a compact Riemann surface of genus g, and let $S = \{P_1, \dots, P_s\}$ be a finite subset of X. Considering an equivalence relation R on S, we set $\overline{S} = S/R$. Let $\mathfrak{m}$ be a modulus with support S. Then we obtain a singular curve $X_{\mathfrak{m}} = (X \setminus S) \cup \overline{S}$ with the projection $\rho : X \longrightarrow X_{\mathfrak{m}}$. The genus of $X_{\mathfrak{m}}$ is $\pi = \dim H^0(X_{\mathfrak{m}}, \Omega_{\mathfrak{m}})$. Let $\pi = g + \delta$. We take a homology basis $\{\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g\}$ of X and small circles $\{\gamma_1, \dots \gamma_s\}$ as in Fig.1.

Then the set $\{\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g, \gamma_1, \dots, \gamma_s\}$ forms a basis of $H_1(X \setminus S, \mathbb{Z}) = H_1(X_{\mathfrak{m}} \setminus \overline{S}, \mathbb{Z})$. Let $\{\omega_1, \dots, \omega_\pi\}$ be a basis of $H^0(X_{\mathfrak{m}}, \Omega_{\mathfrak{m}})$ such that $\{\rho^*\omega_1, \dots, \rho^*\omega_g\}$ is a basis of $H^0(X, \Omega)$ and satisfies

$$\int_{\alpha_j} \rho^*\omega_i = \delta_{ij}, \quad \tau = \left(\int_{\beta_j} \rho^*\omega_i \right)_{1 \le i,j \le g} \in \mathfrak{S}_g.$$

Each $\rho^*\omega_{g+i}$ is a meromorphic differential on X which is holomorphic on $X \setminus S$ and satisfies

$$\mathrm{ord}_P(\rho^*\omega_{g+i}) \ge -\mathfrak{m}(P) \quad \text{for any } P \in S$$

and

$$\sum_{P \in \rho^{-1}(Q)} \mathrm{Res}_P(\rho^*(f\omega_{g+i})) = 0$$

for any $Q \in \overline{S}$ and any $f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{m},Q}$. We may assume that $\rho^*\omega_1, \dots, \rho^*\omega_\pi$ are further normalized as follows:

$$\left(\left(\int_{\alpha_j} \rho^*\omega_i \right) \;\; \left(\int_{\gamma_j} \rho^*\omega_i \right) \right) = \begin{pmatrix} I_g & 0 \\ 0 & 2\pi\sqrt{-1} \begin{pmatrix} I_k & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

where $k \le \delta$ and $C = (C_{ij})_{i=1,\dots,k; j=1,\dots,s-k}$ with $1 + \sum_{j=1}^{s-k} C_{ij} = 0$ for $i = 1, \dots, k$. Let

$$B := \left(\int_{\beta_j} \rho^*\omega_{g+i} \right)_{i=1,\dots,\delta; j=1,\dots,g}.$$

Then we have a period matrix of $\mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}})$ as follows:

$$\begin{pmatrix} I_g & \tau & 0 \\ 0 & B & 2\pi\sqrt{-1} \begin{pmatrix} I_k & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

We consider a simply connected domain D obtained by cutting X open along $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g$. Let D_0 be the subdomain surrounded by ∂D and $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ (see Fig.2).

Theorem 5.1 *Let $X_{\mathfrak{m}}$ be as above. Then we have a period matrix of* $\mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}})$ *as follows*

$$\begin{pmatrix} I_g & \tau & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} H_k(S) \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} I_k & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

5.2. Curves with nodes, the case $\pi = 2$

Let $\mathcal{M}_g$ be the moduli space of non-singular curves of genus g. The compactification $\widehat{\mathcal{M}_g}$ of $\mathcal{M}_g$ is obtained by adding stable curves of genus g ([D-M], [B]). An irreducible stable curve is a curve with only nodes as singularities. In order to see the difference between algebraic Albanese varieties and analytic Albanese varieties, we should investigate curves with nodes in detail. We have a result for curves with nodes of general genus in [A2]. We consider the case $\pi = 2$ in this section. We also study Torelli type problem for curves of $\pi = 2$ with nodes.

Let X be a compact Riemann surface of genus 1. Taking distinct points P_1 and P_2 in X, we set $S = \{P_1, P_2\}$. Let $\mathfrak{m}$ be a modulus with support S defined by $\mathfrak{m}(P_1) = \mathfrak{m}(P_2) = 1$. We identify P_1 with P_2 and put $\overline{S} = \{Q\}$. Then we obtain a singular curve $X_{\mathfrak{m}} = (X \setminus S) \cup \overline{S}$ with the only node Q. Let $\{\alpha, \beta\}$ and $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ be a homology basis of X and small circles as in Fig.1 in the preceding section. We take a basis $\{\omega, \eta\}$ of $H^0(X_{\mathfrak{m}}, \Omega_{\mathfrak{m}})$ such that $\rho^*\omega$ generates $H^0(X, \Omega)$, where $\rho : X \longrightarrow X_{\mathfrak{m}}$ is the projection. Let $\mathcal{H}$ be the upper half plane. We may assume that ω is normalized as

$$\int_\alpha \rho^*\omega = 1 \quad \text{and} \quad \int_\beta \rho^*\omega = \tau \in \mathcal{H}.$$

Furthermore we can take η satisfying

$$\int_\alpha \rho^*\eta = 0 \quad \text{and} \quad \mathrm{Res}_{P_1}(\rho^*\eta) = 1.$$

Then we necessarily have $\mathrm{Res}_{P_2}(\rho^*\eta) = -1$. In this case we have

$$\begin{pmatrix} \int_\alpha \rho^*\omega & \int_{\gamma_1} \rho^*\omega & \int_{\gamma_2} \rho^*\omega \\ \int_\alpha \rho^*\eta & \int_{\gamma_1} \rho^*\eta & \int_{\gamma_2} \rho^*\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\pi\sqrt{-1} & -2\pi\sqrt{-1} \end{pmatrix}.$$

Let D and D_0 be as in the preceding section. We fix $P_0 \in D_0$. Define

$$h(z) := \int_{P_0}^{z} \rho^*\omega$$

for any $z \in D$. We set

$$H(S) := h(P_1) - h(P_2).$$

By Theorem 5.1, a period matrix of $\mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}})$ is

$$\begin{pmatrix} 1 & \tau & 0 & 0 \\ 0 & H(S) & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

and then

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \tau \\ 1 & 0 & H(S) \end{pmatrix}.$$

This means that the structure of $\mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}})$ is determined by the relation of P_1 and P_2. The analytic Albanese variety $\mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}})$ is one of the following cases:

(i) $\mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}}) = J(X) \times \mathbb{C}^*$;
(ii) $\mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}})$ is a 2-dimensional non-compact quasi-abelian variety.

We consider the isomorphic classes of $\{\mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}})\}$. We identify X with $\mathbb{T}_\tau := \mathbb{C}/\Gamma_\tau$, where $\Gamma_\tau = \mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$. Let z be a coordinate of $\mathbb{C}$. We denote by $[z]$ the equivalence class of z modulo Γ_τ. From this identification it follows that $\rho^*\omega = dz$. Let $\mathcal{F} = \{a = s + t\tau; 0 \le s, t < 1\}$ be the fundamental parallelogram of $X = \mathbb{T}_\tau$. We can take $z_1, z_2 \in \mathcal{F}$ such that $P_1 = [z_1]$ and $P_2 = [z_2]$. Then we have

$$H(S) = z_1 - z_2.$$

For any $a \in \mathcal{F} \setminus \{0\}$ there exist $P_1 = [z_1]$ and $P_2 = [z_2]$ with $P_1 \neq P_2$ such that $z_1 - z_2 = a$. Then we can take a period matrix of each $\mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}})$ as follows

$$P_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \tau \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathcal{F} \setminus \{0\}.$$

We denote by Γ_a a discrete subgroup of $\mathbb{C}^2$ with period matrix P_a. Let $G_a := \mathbb{C}^2/\Gamma_a$.

Lemma 5.2 *The quotient group G_a is not toroidal if and only if*

$$a = r + q\tau, \quad r, q \in \mathbb{Q} \quad \textit{and} \quad 0 \le r, q < 1.$$

Next we consider the biholomorphic equivalence on $\{X_{\mathfrak{m}}\}$. Let $S' = \{P_1', P_2'\}$ be another set of distinct two points in X. Using S', we construct a singular curve $X_{\mathfrak{m}'}$ of genus 2 as above. Let $\rho' : X \longrightarrow X_{\mathfrak{m}'}$ be the projection.

Lemma 5.3 *A map $f : X_{\mathfrak{m}} \longrightarrow X_{\mathfrak{m}'}$ is biholomorphic if and only if there exists an automorphism $\widetilde{f} : X \longrightarrow X$ with $\widetilde{f}(S) = S'$ such that $f \circ \rho = \rho' \circ \widetilde{f}$.*

The following proposition is well-known (for example, see Chapter III, Section 1, Proposition 1.12 in [M]).

Proposition 5.4 *Any automorphism $\varphi : X \longrightarrow X$ is induced from a linear function $\Phi(z) = \gamma z + z_0$, where $z_0 \in \mathbb{C}$ and*

$$\gamma = \begin{cases} \text{a } 4^{th} \text{ root of unity} & \text{if } \Gamma_\tau \text{ is square,} \\ \text{a } 6^{th} \text{ root of unity} & \text{if } \Gamma_\tau \text{ is hexagonal,} \\ \pm 1 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2}$$

Proposition 5.5 *Let $X = \mathbb{T}_\tau$. Consider two singular curves $X_{\mathfrak{m}}$ and $X_{\mathfrak{m}'}$ of genus 2 with a node constructed from X. We assume that the supports of $\mathfrak{m}$ and $\mathfrak{m}'$ are $S = \{P_1 = [z_1], P_2 = [z_2]\}$ and $S' = \{P_1' = [z_1'], P_2' = [z_2']\}$ respectively. Then, $X_{\mathfrak{m}}$ and $X_{\mathfrak{m}'}$ are biholomorphic if and only if*

$$z_1' - z_2' \equiv \gamma(z_1 - z_2) \mod \Gamma_\tau,$$

where γ is a complex number possessing the property (2) in Proposition 5.4.

5.3. Curves with cusps

Theorem 5.6 *Let $X_{\mathfrak{m}}$ be a singular curve whose singularity is the only cusp. If X is the normalization of $X_{\mathfrak{m}}$, then we have*

$$\mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}}) \cong J(X) \times \mathbb{C}.$$

Remark 5.7 *If the genus of X is 1, then for any two points P and P' in X there exists an automorphism $f : X \longrightarrow X$ with $f(P) = P'$. Let $X_{\mathfrak{m}}$ and $X_{\mathfrak{m}'}$ be singular curves with the only cusp constructed from P and P' respectively. Then $X_{\mathfrak{m}} \cong X_{\mathfrak{m}'}$.*

Next we assume that X is a compact Riemann surface of genus $g \geq 2$. Then the number of automorphisms of X is at most $84(g-1)$ by Hurwitz' theorem. Fix a singular curve $X_{\mathfrak{m}}$ with the only cusp constructed from $P \in X$. Then, there exist infinitely many $X_{\mathfrak{m}'}$ whose singularity is the only cusp Q' such that $X_{\mathfrak{m}} \not\cong X_{\mathfrak{m}'}$. However we have $\mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}}) \cong \mathrm{Alb}^{an}(X_{\mathfrak{m}'})$ by the above theorem.

References

[A1] Y. Abe, *A statement of Weierstrass on meromorphic functions which admit an algebraic addition theorem*, J. Math. Soc. Japan **57** (2005), 709–723.

[A2] Y. Abe, *Quasi-abelian functions and varieties in the sense of Severi, III, Generalized Jacobi varieties*, Toyama Math. J. **31** (2008), 17–32.

[A3] Y. Abe, *Explicit representation of degenerate abelian functions and related topics*, Far East J. Math. Sci. **70** (2012), 321–336.

[A-K] Y. Abe and K. Kopfermann, *Toroidal Groups*, LNM 1759, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 2001.

[A-U] Y. Abe and T. Umeno, *On quasi-abelian varieties of kind k*, Kyushu J. Math. **60** (2006), 305–316.

[B] L. Bers, *Spaces of degenerating Riemann surfaces*, Ann. of Math. Studies **79** (1974), 43–55.

[D-M] P. Deligne and D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, IHES Publ. Math. **36** (1969), 75–109.

[F-K] H. M. Farkas and I. Kra, *Riemann Surfaces*, GTM 71, Springer-Verlag, New York, 1992.

[F] O. Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, GTM 81, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1981.

[I] K. Iwasawa, *Algebraic Function Theory (in Japanese)*, Iwanami Shoten, Tokyo, 1973.

[M] R. Miranda, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, Graduate Studies in Mathematics Vol. 5, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[N] M. Namba, *Inversion of abelian integrals (in Japanese)*, Proceedings of the 15th Number Theory Summer School in 2007, 191–198.

[R] M. Rosenlicht, *Generalized jacobian varieties*, Ann. of Math. **59** (1954), 505–530.

[J] T. Jambois, *The theorem of Torelli for singular curves*, Trans. Amer. Math. Soc. **239** (1978), 123–146.

[S] J.-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann, Paris, 1959.