日本数学会

2014年度年会

函数論分科会
講演アブストラクト

2014年3月

於　学習院大学

日本数学会

2014年度年会

函数論分科会
講演アブストラクト

2014年3月

於　学習院大学

函　数　論

3月15日(土)　　第VIII会場

9:30〜11:45			(分)	頁
1	西本勝之 (デカルト出版)*	The integral Contour of N-fractional calculus, interval of fractional integral of Riemann–Liouville and that of Weyl, and N-fractional calculus of some functions	(15)	1
2	米田力生 (小樽商大)*	可逆なテープリッツ作用素とベリジン変換	(10)	3
3	相川弘明 (北大理)	Intrinsic ultracontractivity and the boundary Harnack principle —A unified approach with capacitary width—	(15)	5
4	柴　雅和 (広島大*) 山口博史 (滋賀大*)	開リーマン面の閉リーマン面への等角的埋め込み —実現された理想境界の形状—	(15)	7
5	下村健吾 (阪大情報) 嶺山良介 (阪大理)	三角群の変形と反復関数系	(15)	9
6	金城絵利那 (東工大情報理工)	On Teichmüller metric and the length spectrums of Riemann surfaces of infinite type	(15)	11
7	井口雄紀 (東工大理工)	タイヒミュラー測地線の集積点について	(15)	13
8	四之宮佳彦 (東工大理工)	Veech 曲面の周期点について	(15)	15
14:15〜15:45				
9	本田竜広 (広島工大工) 濱田英隆 (九州産大工) G. Kohr (Babeş-Bolyai Univ.)	Growth and distortion theorems on homogeneous unit balls	(15)	17
10	M. Chuaqui (Catholic Univ. of Chile) 濱田英隆 (九州産大工) R. Hernández (Univ. Adolfo Ibáñez) G. Kohr (Babeş-Bolyai Univ.)	Pluriharmonic mappings and linearly connected domains in $\mathbb{C}^n$	(15)	19
11	I. Graham (Univ. of Toronto) 濱田英隆 (九州産大工) G. Kohr (Babeş-Bolyai Univ.) M. Kohr (Babeş-Bolyai Univ.)	Loewner differential equations in reflexive complex Banach spaces	(15)	21
12	I. Graham (Univ. of Toronto) 濱田英隆 (九州産大工) G. Kohr (Babeş-Bolyai Univ.) M. Kohr (Babeş-Bolyai Univ.)	Extremal properties associated with univalent subordination chains in $\mathbb{C}^n$	(15)	23
13	山盛厚伺 (POSTECH)*	On holomorphic automorphisms fixing the origin and the Bergman mapping	(15)	25
16:00〜17:00　特別講演				
	宮地秀樹 (阪大理)	Teichmüller 空間の幾何学の Thurston 理論		27

3月16日(日)　第VIII会場

9:30～10:45

11:00～12:00　特別講演

The Integral Contour of N-Fractional Calculus, Interval of Fractional Integral of Riemann-Liouville and that of Weyl, and N-Fractional Calculus of Some Functions

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press Co.

Abstract

In this article, the integral contour $C = \{C_-, C_+\}$ of N-fractional calculus, interval of fractional integral of Riemann–Liouville and that of Weyl are discussed applying the set theory.

Moreover, N-fractional calculus of some composite functions are shown again. We have the theorem as follows for example.

Theorem 1. We have

(i) $$(((z-b)^4 - c)^{-1})_\gamma = e^{-i\pi\gamma}(z-b)^{-4-\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(4k+4+\gamma)}{\Gamma(4k+4)}S^k$$

$$(|\Gamma(4k+4+\gamma)| < \infty)$$

(ii) $$(((z-b)^4 - c)^{-1})_n = (-1)^n (z-b)^{-4-n}\sum_{k=0}^{\infty}[4k+4]_n S^k$$

(n-th derivatives) $(n \in Z_0^+)$

where

$$(z-b)^4 - c \neq 0, \quad \text{and} \quad S = \frac{c}{(z-b)^4}, \quad |S| < 1 .$$

The invertible Toeplitz operator and the Berezin transform

Rikio Yoneda

Otaru university of commerce

Let D be the open unit disk in complex plane C. For $z, w \in D$, $0 < r < 1$, let $\rho(z,w) = \left|\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\right|$ and $D(w,r) = \Big\{z \in D, \rho(w,z) < r\Big\}$.

For $\alpha > -1$ and $p > 0$, the space $L^p\left(dA(z)\right)$ is defined to be the space of Lebesgue measurable functions f on D such that

$$\| f \|_{L^p(dA(z))} = \Big\{\int_D |f(z)|^p dA(z)\Big\}^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

where $dA(z)$ denote the area measure on D. The weighted Bergman space is defined by $L^p_a\left(dA(z)\right) = H(D) \cap L^p\left(dA(z)\right)$.

Let X, Y be Banach spaces and let T be a linear operator from X into Y. Then T is called to be bounded below from X to Y if there exists a positive constant $C > 0$ such that $\| Tf \|_Y \geq C \| f \|_X$ for all $f \in X$, where $\| * \|_X$, $\| * \|_Y$ be the norm of X, Y, respectively. For $f \in L^2_a$,

$$Pf(z) = \int_D \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^2} dA(z)$$

And $g \in L^\infty(D)$, the Toeplitz operator is defined by

$$T_g f = P(gf)$$

where $f \in L^2_a$.

In this talk, we study the invertible Toeplitz operator.

Definition . $\tilde{T_g}(z) = < T_g k_z, k_z > \ (z \in D)$ where k_z be normalized reproducing kernel.

Theorem 1. Let $g \in L^\infty(D)$ be radial. Then $T_g : L^2_a(D) \to L^2_a(D)$ is invertible if and only if there exists a constant $C > 0$ such that

$$(n+1)\left|\int_0^1 g(r) r^{2n+1} dr\right| > C$$

for all n

Theorem 2. *Let $g \in L^\infty(D)$ be radial, $g \in C(\overline{D})$ and $g \geq 0$*

Then the following are equivalent:

(1) T_g *is bounded below on* $L_a^2(D)$

(2) T_g *is invertible on* $L_a^2(D)$

(3) there exists a constant $C > 0$ such that $\frac{1}{1-x}\int_x^1 f(t)dt \geq C > 0$, for all $0 < x < 1$

(4) there exists a constant $C > 0$ such that $\tilde{T_g}(z) \geq C > 0$.for all $z \in D$

References

[1] H.Hedenmalm, B.Korenblum, K.Zhu, Theory of Bergman Spaces, in: Graduate Texts in Mathematics, vol. 199, Springer, New York, 2000.

[2] K.Zhu, Operator Theory in Function Spaces, Marcel Dekker, New York 1990.

Intrinsic ultracontractivity and the boundary Harnack principle — A unified approach with capacitary width

Hiroaki Aikawa (Hokkaido University)*

Let $p_D(t,x,y)$, $t>0$ be the Dirichlet heat kernel for $\Delta - \partial/\partial t$ on a domain $D \subset \mathbb{R}^n$, i.e., $\int_D p_D(t,x,y)f(y)dy$ is the solution to

$$\begin{cases} \left(\Delta - \dfrac{\partial}{\partial t}\right)u(t,x) = 0 & \text{in } (0,\infty)\times D, \\ u(0,x) = f(x) & \text{on } D, \\ u(t,x) = 0 & \text{on } (0,\infty)\times \partial D. \end{cases}$$

We say that $p_D(t,x,y)$ (or simply D) is intrinsically ultracontractive (IU) if

(i) $-\Delta u = \lambda u$ in D with $u = 0$ on ∂D has the first eigenvalue $\lambda_D > 0$ and the eigenfunction $\varphi_D > 0$ (ground state) normalized by $\|\varphi_D\|_2 = 1$;

(ii) if $t>0$, then $c_t\varphi_D(x)\varphi_D(y) \le p_D(t,x,y) \le C_t\varphi_D(x)\varphi_D(y)$ for all $x,y\in D$, where c_t and C_t depend on t.

Definition 1 *Define capacity by*

$$\mathrm{Cap}_U(E) = \inf\Big\{\int_U |\nabla\varphi|^2 dx : \ \varphi(x)\ge 1 \text{ on } E,\ \varphi\in C_0^\infty(U)\Big\}.$$

Let $0<\eta<1$. *Define the* capacitary width $w_\eta(D)$ *of an open set D by*

$$w_\eta(D) = \inf\left\{ r>0 : \frac{\mathrm{Cap}_{B(x,2r)}(B(x,r)\setminus D)}{\mathrm{Cap}_{B(x,2r)}(B(x,r))} \ge \eta \quad \text{for all } x\in D\right\}.$$

The following theorem gives a complete condition for IU (i)

Theorem 2 *The bottom of the spectrum of* $-\Delta$

$$\lambda_D = \inf\left\{ \frac{\int_D |\nabla\varphi|^2 dx}{\|\varphi\|_2^2} : \varphi\in C_0^\infty(D)\right\}$$

is positive if and only if $w_\eta(D)<\infty$. *Moreover* $\lambda_D \approx w_\eta(D)^{-2}$. *If* $\lim_{R\to\infty} w_\eta(D\setminus \overline{B}(0,R)) = 0$, *then* $-\Delta$ *has no essential spectrum,* λ_D *is an eigenvalue and* $\varphi_D \in L^2(D)$.

We give sufficient conditions for IU and the boundary Harnack principle in terms of capacitary width. Let $g(x) = G(x,x_0)$ be the Green function for D with pole at x_0 and write $w_\eta(g<t) = w_\eta(\{x\in D : g(x)<t\})$.

This work was supported in part by JSPS KAKENHI Grant Numbers 20244007, 25287015 and 25610017.

* e-mail: aik@math.sci.hokudai.ac.jp

Theorem 3 *Suppose* $\lim_{R\to\infty} w_\eta(D \setminus \overline{B}(0,R)) = 0.$

(i) If

$$\int_0^1 w_\eta(g < t)^2 \frac{dt}{t} < \infty, \tag{1}$$

then D is IU; and $\varphi_D(x) \approx g(x)$ *for* $x \in D$ *near* ∂D.

(ii) If

$$\int_0^1 w_\eta(g < t) \frac{dt}{t} < \infty, \tag{2}$$

then D enjoys the global boundary Harnack principle, i.e., if K is a compact set such that $K \cap D \neq \emptyset$ *and* $K \cap \partial D \neq \emptyset$, *if V is an open set such that* $K \subset V$, *and if u and v are positive superharmonic functions in D such that u and v are bounded and harmonic in* $V \cap D$ *and* $u = v = 0$ *q.e. on* $V \cap \partial D$, *then*

$$\frac{u(x)/u(y)}{v(x)/v(y)} \le A \quad \text{for } x, y \in K \cap D.$$

The proof is based on some estimates of caloric measure and harmonic measure.

Lemma 4 *Let* $P(t,x,D) = \int_D p(t,x,y)dy$. *Then*

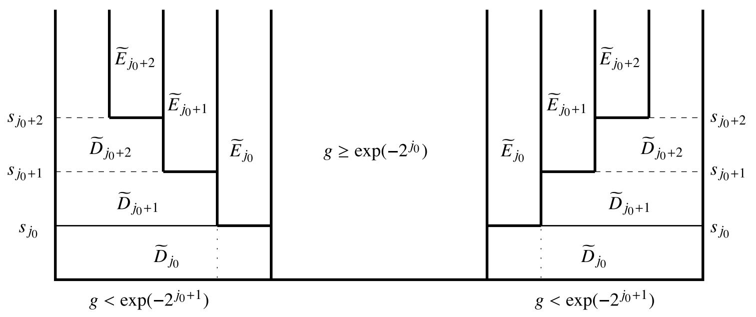
$$\sup_{x\in D} P(t,x,D) \le A_0 \exp\Big(-\frac{A_1 t}{w_\eta(D)^2}\Big) \quad \text{for } t > 0, \tag{3}$$

where $A_0, A_1 > 0$ *depend only on n and* $\eta > 0$. *By* $\omega^x(E,D)$ *we denote the harmonic measure of E in D, evaluated at x. Then*

$$\omega^x(D \cap \partial B(x,R), D \cap B(x,R)) \le A_2 \exp\Big(-\frac{A_3 R}{w_\eta(D)}\Big), \tag{4}$$

where $A_2, A_3 > 0$ *depend only on n and* $\eta > 0$.

Compare the exponents of $w_\eta(g < t)$ in (1) and (2), and those of $w_\eta(D)$ in (3) and (4). The crucial idea is a *parabolic box argument* which estimates $P(t,x,D)$ in compensation for the time $t > 0$. The parabolic box argument for the space dimension 1 is depicted below.



開リーマン面の閉リーマン面への等角的埋め込み

実現された理想境界の形状

柴　雅和　　(広島大学)[*1]
山口　博史　(滋賀大学)[*2]

1. 背景 — 極値的等角写像

古典的で分かりやすい種数が 0 の場合から，あるいはより具体的に，任意の平面領域 D から始める．基点 $\zeta \in D$ を固定する．簡単のために，$\zeta \neq \infty$ と仮定する．

ケーベの一般一意化定理あるいは等角写像論における基本定理としてよく知られているように，D は極値的な水平截線領域の上に 1 対 1 等角的に写像される．その際，写像関数 f_0 は $\zeta \in D$ において

$$f_0(z) = \frac{1}{z-\zeta} + \kappa(z-\zeta) + o(z-\zeta) \tag{1}$$

と展開されることを要請できる．しかも，極値性の定義から，(1) によって f_0 は一意的に定まる．同様に，基点 $\zeta \in D$ において展開 (1) をもち，D を極値的な垂直截線領域の上に 1 対 1 等角的に写す関数 f_1 が一意的に定まる．

f_0 や f_1 だけではなく任意の $t \in (-1, 1]$ に対して同様の f_t を考え，その "境界条件" を象徴的に

$$\mathrm{Im}\,[e^{-\frac{\pi}{2}it} df_t] = 0 \quad \text{along } \partial D \tag{2}$$

によって書き表そう．D は無限連結でもあり得るし，ましてや境界が曲線であるなどとは仮定できないのであるが，ここではその特別な場合— たとえば有限個の解析的な閉曲線で囲まれた領域 — における実体を伝えるために敢えて大雑把な表現を用いた．(リーマン面の場合にも通用する形での一般でかつ正確な定義は，Ahlfors の distinguished 微分，楠の半完全標準微分，Sario の L_0 あるいは L_1 主関数などを用いて述べられる．これらは上で大雑把に述べた境界挙動のほかに重要な性質 — 極値性 — をもつがここでは割愛する.）その名が示唆するとおり：

すべての t に対して f_t は D 上の単葉関数である．$\hat{\mathbb{C}} \setminus f_t(D)$ は，傾き（実軸となす角）が $\pi t/2$ の平行な線分（もしくは点）の合併として表される有界閉集合である．

特異性を一般な形で与えても上の関数 f_t に類似の関数は構成できるし，それらは f_t と似たよい極値性を有するが，もちろん単葉性を主張することはできない．

2. 有限種数開リーマン面の接続

さらに，開リーマン面の上では周期の存在をも許して，有理型微分あるいは有理型積分（アーベル積分）を考えるのが自然である．有限種数開リーマン面を同じ種数の閉リーマン面に等角的に埋め込む（接続する）問題を考える際にこれらが果たした重要な役割に因んで，以下では "極値的アーベル積分" と呼ぶことにしよう．

等角的埋め込みに関する結果を典型的な場合に制限して述べれば，

2010 Mathematics Subject Classification: 30Fxx, 30Cxx
キーワード：リーマン面の接続, 理想境界，極値的平行截線写像

[*1] e-mail: masaka_zu_hause@muc.biglobe.ne.jp
[*2] e-mail: h.yamaguchi@s2.dion.ne.jp

任意の実数 $t \in (-1,1]$ を1つ固定しておく．任意の有限種数開リーマン面 R 上の（非定数）1価な極値的アーベル積分 Φ_t に対して，以下に述べる性質 (a) - (c) をもった

(i) 同じ種数の閉リーマン面 S_t,

(ii) 等角写像 $i_t : R \to S_t$，および

(iii) S_t 上のアーベル積分 Ψ_t

が存在する．

(a) R 上では $i_t^*(d\Psi_t) = d\Phi_t$.

(b) $E_t := S_t \setminus i_t(R)$ の2次元測度は0.

(c) Ψ_t は E_t 上では正則でその各成分の上で "正確な意味で"

$$\mathrm{Im}\,[e^{-\frac{\pi}{2}it}\Phi_t] = \mathrm{const.} \tag{3}$$

表現 (2) が式 (3) の形で明らかにされるところに意義の一部がある．閉リーマン面 S_t は必ずしも一意的には決まらない．E_t の（一般には非可算個の）成分のうちその上で $d\Psi_t \neq 0$ であるものは有限個しかない．その具体的な個数 W_t についてはすでに幾らかの知見を得ていたが，ここではさらに詳しく個々の理想境界成分について考える．

3. 実現された理想境界の様子

R の理想境界の各成分 γ は積分 i_t を通して S_t の上に実現される．その上で正則な $d\Psi_t$ の零点の（重複度を考慮して数えた）個数を $W_t(\gamma)$ で表すと，(d) により，高々 W_t 個の γ を除いて $W_t(\gamma) = 0$ である．この性質は（t を固定する限り）S_t の多意性に依らない；γ と Φ_t だけによって決まる．

ここまでは t も Φ_t も固定して考えてきた．ここで $t \in (-1,t]$ を動かすが，すべての t を通じて Φ_t の特異性と周期が同一であるとする.（周期については，すべての輪体について要求する必要はなく，たとえばいわゆる A-周期だけが同一でありさえすればよい.）この条件を仮に "内部条件" と呼ぶことにすれば，私たちの主張は

定理. 極値的アーベル積分 Φ_t $(t \in (-1,t])$ が同一の内部条件を満たす限り，R のすべての理想境界成分 γ に対して

$$W_t(\gamma) = \mathrm{const.}, \qquad t \in (-1,1] \tag{4}$$

が成り立つ．

4. 証明の方針

$\varphi_t := d\Phi_t$ は R の理想境界の近傍には零点をもたず,

$$W_t(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma_n} d\arg\varphi_t - 1 \tag{5}$$

であることが分かっている．ここで γ_n は R の近似列 $\{R_n\}$ における R_n の境界弧の1つで，γ, γ_n がともに $R \setminus \bar{R}_n$ の1つの連結成分の（理想）境界成分であるもの．他方で

$$1 - \frac{\varphi_t}{\varphi_0} = \frac{1 - e^{\pi it}}{2} \cdot \left(1 - \frac{\varphi_1}{\varphi_0}\right) \tag{6}$$

が分かる．φ_1/φ_0 は γ_n $(n >> 1)$ 上で有界であるから，十分小さい t について $W_t(\gamma) = W_0(\gamma)$ を得る．この議論は各 t においても局所的に行えるので，自然数値関数 $W_t(\gamma)$ の局所的連続性が分かる．円周の連結性により定理が得られる．

三角群の変形と反復関数系

下村 健吾 (阪大・情報)[*1]
嶺山 良介 (阪大・理)[*2]

二種類の極限集合

三角群 $\Gamma = \langle s_0, s_1, s_2 \mid s_0^2, s_1^2, s_2^2, (s_is_j)^\infty\ \forall i,j \rangle$ を Coxeter 群としての観点から見直す. 本稿で三角群とは全てこの群を指すものとし, 述べられる結果は [2] に収録されている. Coxeter 群 W は古典的によく知られたように鏡映変換として実ベクトル空間に作用する. この作用はあるアフィン空間へ射影することによってその空間の上の連続な作用と見なすことができる [1]. 特に n 元生成 Coxeter 群に対して次節のようにして定義される二次形式 B の符号数が $(n-1,1)$ の場合は射影した作用はある距離空間 (D,d) 上の離散的な等長変換となる. 三角群 Γ はこの性質を充たす. D は集合としては $\mathbb{R}^n$ 内の楕円体の内部である. 射影した作用の極限集合 $\Lambda(W)$ は D 内の任意の点の W 軌道の Euclid 距離での集積点集合として定義され, ∂D 上に分布していることが知られている.

一方で反復関数系は元来 $\mathbb{R}^n$ の有界集合上に定められた可微分な単射縮小写像の族 $\{f_1, \ldots, f_k\}$ の（合成によって）生成する半群を指すのであった. その極限集合は写像族の不変集合, すなわち

$$K = \bigcup_{i=1}^{k} f_i(K)$$

を充たすコンパクト集合 K として定義される. 極限集合の Hausdorff 次元が反復関数系を定義する写像族に対してどのように依存するかは一つの中心的問題である. ここでは反復関数系にさらに合成に関する規則を定めて得られる有向グラフ付き Markov 系を考える. これにも本質的に同様の方法で極限集合を定めることができる. この極限集合を J で表す. Coxeter 群 Γ は先に述べた楕円体の境界 ∂D 上にも作用する. ∂D には D の内部とは異なる距離 d_B を定めることができるが, Γ の生成集合の定義域を制限するとそれらは d_B に関する縮小写像の族となる. 特に Γ が三角群 W の場合には良い性質を充たす有向グラフ付き Markov 系を定めることがわかる.

作用の変形と極限集合の Hausdorff 次元

三角群 W は変形パラメータ付きの作用を定める. 有限表示群 W が Coxeter 群であるとは, W がある生成系 $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ によって $W = \langle\ S \mid (s_is_j)^{m_{ij}}\ \rangle$. と表示されるものを指す. ただしここで $m_{ii} = 1$ かつ $m_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \cup \infty$ であって, $(s_is_j)^\infty$ は s_is_j が位数無限であることを意味する. V を n 次元 $\mathbb{R}$ ベクトル空間で $\Delta = \{\alpha_s | s \in S\}$ を基底として持つものとする. Δ は S に対応して添字づけられたベクトルの集合である. V 上の対称二次形式 B を

$$B(\alpha_i, \alpha_j) \begin{cases} = -\cos\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right) & \text{if } m_{ij} < \infty, \\ \leq -1 & \text{if } m_{ij} = \infty \end{cases}$$

で定めると W は V 上に各 $\alpha \in \Delta$ に関する鏡映 $s_\alpha(v) = v - 2B(\alpha, v)\alpha$ で作用する.

*1 e-mail: k-shimomura@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp
*2 e-mail: r-mineyama@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

三角群 W に関してもこの方法で二次形式を定義するがこのとき相異なる $i,j=0,1,2$ に対して関係子 $(s_is_j)^\infty$ であることからこの二次形式の Gram 行列はパラメータ $t\geq 1$ を用いて

$$[B(\alpha_i,\alpha_j)]_{i,j}=\begin{bmatrix}1 & -t & -t\\ -t & 1 & -t\\ -t & -t & 1\end{bmatrix}$$

と表せる. 先に述べた空間 (D,d), $(\partial D,d')$, 極限集合 $\Lambda(W)$, J は全てこのパラメータ t に依存して定まる. よって以降添字として t をつけて表す. このとき以下が成り立つ.

定理 1 任意の $t\geq 1$ に対して (D_t,d_t) 上等長変換としての極限集合 $\Lambda_t(W)$ と $(\partial D_t,d'_t)$ 上の有向グラフ付き Markov 系としての極限集合 J_t は一致する.

パラメータの変化に関して極限集合は次の位相的性質を持つ.

定理 2 $t\in(1,\infty)$ に対して $\Lambda_t(W)$ は Cantor 集合である. $t=1$ ならば $\Lambda_t(W)=\partial D$.

この性質を用いるとパラメータ t での W の極限集合の Hausdorff 次元 $\dim_H(\Lambda_t(W))$ は射影した写像の族 $\{s_0,s_1,s_2\}$ の Lipschitz 定数によって評価されることがわかる. 有向グラフ付き Markov 系の理論で用いられる概念を少し一般化して定義しておく. このとき三角群の作用は距離空間 $(\partial D,d_t)$ ($1<t$) に対する有界歪曲性 (bounded distortion property) と開集合条件 (open set condition) と呼ばれる性質を充たすことがわかり, $\dim_H(\Lambda_t(W))$ は反復関数系の位相的圧力関数の零点と一致する. このときパラメータ t に沿った変形に関して次がわかる.

定理 3 $\dim_H(\Lambda_t(W))$ は t に関して連続であって $t\to 1$ のとき $\dim_H(\Lambda_t(W))\to 1$.

参考文献

[1] C. Hohlweg, J. Labbé, and V. Ripoll, *Asymptotical behaviour of roots of infinite Coxeter groups I*, preprint arXiv:1112.5415v2.

[2] R. Mineyama, K.Shimomura *Deformation of a triangle group and Hausdorff dimension of the limit set*, preprint.

On Teichmüller metric and the length spectrums of Riemann surfaces of infinite type

Erina KINJO (Tokyo Institute of Technology)*

1. Definitions and results

Let R_0 be a Riemann surface of infinite topological type. We consider a pair (R, f) of a Riemann surface R and a quasiconformal mapping $f : R_0 \to R$. Two such pairs (R_1, f_1) and (R_2, f_2) are called equivalent if $f_2 \circ f_1^{-1} : R_1 \to R_2$ is homotopic to some conformal mapping, where the homotopy map does not necessarily keep points of ideal boundary ∂R_0 fixed. We denote the equivalence class of (R, f) by $[R, f]$. The set of all equivalence classes is called *the Teichmüller space* of R_0; we denote it by $T(R_0)$.

The Teichmüller space $T(R_0)$ has a complete metric d_T called *the Teichmüller metric* which is defined by

$$d_T([R_1, f_1], [R_2, f_2]) = \inf_f \log K(f),$$

where the infimum is taken over all quasiconformal mappings from R_1 to R_2 that is homotopic to $f_2 \circ f_1^{-1}$ and $K(f)$ is the maximal dilatation of f.

We introduce another metric on $T(R_0)$. Let $\mathcal{C}(R_0)$ be the set of non-trivial and non-peripheral closed curves in R_0. We define *the length spectrum metric* d_L by

$$d_L([R_1, f_1], [R_2, f_2]) = \sup_{\alpha \in \mathcal{C}(R_0)} \left| \log \frac{\ell_{R_1}(f_1(\alpha))}{\ell_{R_2}(f_2(\alpha))} \right|,$$

where $\ell_{R_i}(f_i(\alpha))$ is the hyperbolic length of the closed geodesic on R_i which is freely homotopic to $f_i(\alpha)$.

In 1972, Sorvali [6] defined d_L, and showed the following.

Lemma 1.1 (Sorvali [6])**.** *For any* $[R_1, f_1], [R_2, f_2] \in T(R_0)$,

$$d_L([R_1, f_1], [R_2, f_2]) \leq d_T([R_1, f_1], [R_2, f_2])$$

holds.

Sorvali conjectured that d_L defines the same topolpgy as that of d_T on $T(R_0)$ if R_0 is a topologically finite Riemann surface. In 1986, Li [3] proved that the statement holds in the case where R_0 is a compact Riemann surface with genus ≥ 2. In 1999, Liu [4] proved that Sorvali's conjecture is true and he asked whether or not the statement holds for any Riemann surface of infinite type. To this question, Shiga [5] gave a negative answer, that is, he showed that there exists a Riemann surface R_0 of infinite type such that d_L and d_T do not define the same topology on $T(R_0)$. Also, he gave a sufficient condition for these metrics to define the same topology on $T(R_0)$ as follows.

2010 Mathematics Subject Classification: 30F60, 32G15.
Keywords: Teichmüller metric, length spectrum, Riemann surface of infinite type.
* e-mail: kinjo.e.aa@m.titech.ac.jp
web:

Theorem 1.2 (Shiga [5])**.** *Let R_0 be a Riemann surface. Assume that there exists a pants decomposition $R_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$ satisfying the following conditions.*
(1) Each connected component of ∂P_k $(k = 1, 2, 3...)$ is either a puncture or a simple closed geodesic of R_0.
(2) There exists a constant $M > 0$ such that if α is a boundary curve of some P_k then

$$0 < M^{-1} < l_{R_0}(\alpha) < M$$

holds.
Then d_L defines the same topology as that of d_T on $T(R_0)$.

In this talk, we show that the converse of Shiga's theorem is not true, that is, there exists a Riemann surface R_0 such that R_0 does not satisfy Shiga's condition, but the two metrics define the same topology on $T(R_0)$. Also we generalize the example and extend Shiga's theorem as follows.

Theorem 1.3. *Let R_0 be a Riemann surface. Assume that there exists a constant $M > 0$ and a decomposition $R_0 = S \cup (R_0 - S)$ such that*
(1) S is an open subset of R_0 whose relative boundary consists of simple closed geodesics and each connected component of S has a pants decomposition satisfying the same condition as that of Shiga's theorem for M, and
(2) $R_0 - S$ is of genus 0 and $d_{R_0}(x, S) < M$ for any $x \in R_0 - S$, where $d_{R_0}(\cdot, \cdot)$ is the hyperbolic distance in R_0.
Then d_L defines the same topology as that of d_T on $T(R_0)$.

On the other hand, we consider Riemann surfaces with bounded geometry. Here we say that a Riemann surface R_0 has bounded geometry if it satisfies the following condition: There exists a constant $M > 0$ such that any closed geodesic has the length greater than $1/M$ and for any $x \in R_0$, there exists a closed curve based on x with the length less than M.

As a corollary of Theorem 1.3, we obtain the following:

Corollary 1.4. *Suppose that R_0 is of finite genus and R_0 has bounded geometry. Then d_L define the same topology as that of d_T on $T(R_0)$.*

References

[1] E. Kinjo, *On Teichmüller metric and the length spectrums of topologically infinite Riemann surfaces*; Kodai Math. J. **34** (2011), 179-190.

[2] E. Kinjo, *On the length spectrum metric in infinite dimensional Teichmüller spaces*; Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., volume **39** (2014), number 1, to appear.

[3] Z. Li, *Teichmüller metric and length spectrums of Riemann surfaces*, Sci. Sinica (Ser. A) **29** (1986), 265-274.

[4] L. Liu, *On the length spectrums of non-compact Riemann surfaces*; Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **24**, 1999, 11-22.

[5] H. Shiga, *On a distance by the length spectrum on Teichmüller space*; Ann. Acad. Sci. Fenn. Series A, I Math. **28** (2003), 315-326.

[6] T. Sorvali, *The boundary mapping induced by an isomorphism of covering groups*; Ann. Acad. Sci. Fenn. Series A, I Math. **526** (1972), 1-31.

タイヒミュラー測地線の集積点について

井口　雄紀　(東京工業大学)*

1. はじめに

本講演では、タイヒミュラー測地線のサーストン境界における漸近的挙動を考察する．とくに、測地線の向きを定める測度付葉層と測地線の集積点に代表される測度付葉層との葉層としての位相的関係を明らかにする．

2. 準備

種数 $g \geq 2$ の標識付きリーマン面のタイヒミュラー同値類全体の集合がなすタイヒミュラー空間を T_g と表し、タイヒミュラー距離

$$d([Y_1, f_1], [Y_2, f_2]) = \log \inf_h K(h)$$

により T_g に位相を定める．ここで、$h : Y_1 \to Y_2$ は $f_2 \circ f_1^{-1}$ とホモトピックな擬等角写像全体を動き, $K(h)$ は h の最大歪曲度を表す．

曲面 X 上の単純閉曲線の自由ホモトピー類全体の集合を $\mathcal{S}$ と表す．サーストン埋め込み

$$\tilde{\ell} : T_g \ni \rho \mapsto [\alpha \mapsto \mathrm{length}_\rho(\alpha)] \in \mathcal{PR},$$

の T_g の像の $\mathcal{PR}$ における閉包はサーストンコンパクト化と呼ばれ、以下の性質を満たす．ただし、$\mathcal{PR} = ((\mathbb{R}_{\geq 0})^{\mathcal{S}} - \{0\})/\mathbb{R}_+$ である．

- 像 $\tilde{\ell}(T_g)$ は開球 $\mathbb{B}^{6g-6}$ と、$\tilde{\ell}(T_g)$ の閉包は閉球 $\mathbb{B}^{6g-6} \cup \mathbb{S}^{6g-7}$ と同相．
- 境界 $\partial\tilde{\ell}(T_g)$ は測度付き葉層の射影的同値類全体の集合 $\mathcal{PMF}$ と一致し、球面 $\mathbb{S}^{6g-7}$ と同相．

X 上の測度付葉層 F の任意の（特異でない）葉は閉じている、または、X の部分曲面（極小領域という）で稠密であるのいずれかの性質を持つ．閉じた葉 α_i とホモトピー同値な葉全体がなす円柱領域上の測度付葉層 $a_i\alpha_i$（ただし、a_i は非負実数とする）と極小領域 Ω 上の測度付葉層 F_Ω により、F は次のような極小分解を持つ:

$$F = \sum_\Omega F_\Omega + \sum_{i=1}^N a_i\alpha_i.$$

サーストンコンパクト化におけるタイヒミュラー測地線の境界挙動について、次が知られている．Masur([Ma]) は ”ほとんどすべて” の測地線はそれを定めている正則二次微分の水平測度付き葉層の射影的同値類に収束することを、Lenzhen([L]) は収束点を持たない（つまり、集積点を二つ以上もつ）測地線が存在することを示した．Masur の結果から、タイヒミュラー測地線の集積点全体の集合は測度零集合となることが分かるが、集積点集合について、その他の結果はあまり知られていない．

* 〒152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1　東京工業大学　大学院理工学研究科　数学専攻
e-mail: iguchi.y.ac@m.titech.ac.jp

3. 主結果

タイヒミュラー測地線の集積点について、以下の結果を示した.

定理 1. 種数 g の閉リーマン面上の測度付葉層 F の極小分解を

$$F=\sum_{\Omega} F_{\Omega}+\sum_{i=1}^{N} a_i \alpha_i.$$

とする. このとき、F 方向のタイヒミュラー測地線のサーストン境界における集積点 $[G]$ は

$$G=\sum_{\Omega} G_{\Omega}+\sum_{i=1}^{N} b_i \alpha_i,$$

なる極小分解をもち、次の 4 つの性質を満たす.

(1) $\sum_{\Omega} F_{\Omega}=0$ *iff* $\sum_{\Omega} G_{\Omega}=0.$

(2) 各 G_{Ω} は F_{Ω} と葉層として位相的同値であるか、$G_{\Omega}=0.$

(3) ある番号 i で $b_i>0$ ならば、すべての極小領域 Ω について、$G_{\Omega}\neq 0.$

(4) $a_i=0$ ならば $b_i=0.$

系 1. 上の定理の記号の下で、F の極小領域 Ω_0 と Ω_0 に含まれる閉測地線で F が定めるタイヒミュラー測地線に沿って*thick*なものが存在すると仮定する. このとき、$[G]$ は

$$G=\sum_{\Omega} G_{\Omega}$$

なる極小分解をもち、各 G_{Ω} は F_{Ω} と葉層として位相的同値であるか、$G_{\Omega}=0$ である. とくに、$G_{\Omega_0}\neq 0$ である.

系 2. いかなるタイヒミュラー測地線に沿っても集積できない境界点が存在する.

参考文献

[CRS] Y. Choi, K. Rafi and C. Series, Lines of minima and Teichmüller geodesics, Geom. funct. anal. **18** (2008), 698–754.

[DS] R. Diaz and C. Series, Limit points of lines of minima in Thurston's boundary of Teichmüller space, Alg. Geom. Top. **3** (2003), 207–234.

[FLP] A. Fathi, F. Laudenbach, and V. Poénaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque, Vol. **66-67**, Soc. Math. de France, (1979).

[L] A. Lenzhen, Teichmüller geodesics that do not have a limit in $\mathcal{PMF}$. Geom. and Top. **12** (2008), 177–197.

[Ma] H. Masur, Two boundaries of Teichmüller space. Duke Math. **49** (1982), 183–190.

[Mi] Y. Minsky, Extremal length estimates and product regions in Teichmüller space, Duke Math. **83** (1996), 249–286.

[Ra] K. Rafi, A characterization of short curves of a Teichmüller geodesic, Geometry and Topology **9** (2005), 179–202.

Veech曲面の周期点について

四之宮 佳彦　(東京工業大学, 学振PD)*

1. 導入

曲面 X を種数 g，n 点穴あきの向き付け可能な曲面とする．但し，$3g-3+n>0$ と仮定する．曲面 X 上の特異点付き平坦構造 u とは，$X\setminus C$ 上の座標近傍系で，変換関数が $w=\pm z+c$ の形をしているもののことである．ここで，C は X 上の有限集合である．組 (X,u) を平坦曲面と呼び，C の各点を平坦曲面 (X,u) の特異点と呼ぶ．平坦曲面 (X,u) 上ではユークリッド幾何の概念が意味を持つ．特異点集合 C を保つ X 上の自己同相写像で，平坦構造 u に関してアファイン写像となるものを平坦曲面 (X,u) のアファイン写像という．平坦曲面 (X,u) のアファイン写像全体の成す群を $\mathrm{Aff}^+(X,u)$ と表し，(X,u) のアファイン群と呼ぶ．アファイン写像 $h\in\mathrm{Aff}^+(X,u)$ の座標近傍を用いた表示

$$w\circ h\circ z^{-1}=Az+c$$

の微分 $A\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ は符号の差を除いて座標近傍の取り方に依らない．アファイン写像の微分に対応する $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ の元全体の成す群を $\Gamma(X,u)$ で表し，(X,u) の Veech 群という．Veech[Vee89] によって，Veech 群はフックス群となることが示されている．

定義. Veech 群 $\Gamma(X,u)$ が $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ の lattice である時,即ちオービフォルド $\mathbb{H}/\Gamma(X,u)$ の双曲面積が有限の時，(X,u) を Veech 曲面と呼ぶ．更に，Veech 群 $\Gamma(X,u)$ とモジュラー群 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ が通約的の時，Veech 曲面 (X,u) は算術的であるといい，そうでない時非算術的であるという．

定義. 点 $z\in X$ が Veech 曲面 (X,u) の周期点であるとは，z の $\mathrm{Aff}^+(X,u)$-軌道 $\mathrm{Aff}^+(X,u)\{z\}$ が有限集合の時にいう．

Veech 曲面の周期点について以下のことが知られている．

定理 ([GHS03]). *Veech* 曲面が算術的ならば，その周期点の集合は X で稠密である．一方，非算術的な *Veech* 曲面の周期点は有限個である．

Gutkin-Hubert-Schmidt [GHS03] は非算術的 Veech 曲面の周期点の個数を，平坦曲面のある幾何的量によって評価した．(実際にはもう少し一般の平坦曲面に対して評価している．) また，Möller[Möl06] は，コンパクトな非算術的 Veech 曲面に対して，周期点の個数を種数のみに依存する量で評価した．

2. 主結果

本講演では, 非算術的 Veech 曲面の周期点の個数を曲面 X の型 (g,n) 及び Veech 群 $\Gamma(X,u)$ の符合 $(p,k:\nu_1,\cdots,\nu_k)$ にのみ依存する量で評価した結果を報告する．

フックス群 Γ の符号が $(p,k:\nu_1,\cdots,\nu_k)$ であるとは, オービフォルド $\mathbb{H}/\Gamma$ が種数 p で k 個のコーンを持ち, それらのオーダーが $\nu_1,\cdots,\nu_k\in\{2,3,\cdots,\infty\}$ である時にいう．但し，オーダー $\nu_i=\infty$ のコーンはカスプを意味する．

本研究は JSPS 科研費 24005650 の助成を受けたものである．
* 〒152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1 東京工業大学 大学院理工学研究科 数学専攻
e-mail: shinomiya.y.aa@m.titech.ac.jp

定理． *Veech* 曲面 (X,u) が非算術的であるとする．曲面 X が (g,n) 型であり， *Veech* 群 $\Gamma(X,u)$ の符号が $(p,k:\nu_1,\cdots,\nu_k)$ である時，(X,u) の周期点の個数は高々

$$2^{-26}d^{10}\left(\lambda\mu\right)^{-34}\left(\frac{1}{2}\lambda^6\mu^6\right)^{2^{2d+3}}$$

である．ここで，$d=3g-3+n, \lambda=\exp\left(5d/e\right)$,

$$\mu=\mathrm{Area}\left(\mathbb{H}/\Gamma(X,u)\right)=2\pi\left(2p-2+\sum_{i=1}^{k}\left(1-1/\nu_i\right)\right)$$

である．また，e はネイピア数である．

参考文献

[GHS03] E. Gutkin, P. Hubert, and T. A. Schmidt. Affine diffeomorphisms of translation surfaces: periodic points, Fuchsian groups, and arithmeticity. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 36(6):847–866, 2003.

[Möl06] M. Möller. Periodic points on Veech surfaces and the Mordell-Weil group over a Teichmüller curve. *Invent. Math.*, 165(3):633–649, 2006.

[Vee89] W. A. Veech. Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards. *Invent. Math.*, 97(3):553–583, 1989.

[Vee91] W. A. Veech. Erratum: "Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards". *Invent. Math.*, 103(2):447, 1991.

9

Growth and distortion theorems on homogeneous unit balls

Tatsuhiro HONDA (Hiroshima Institute of Technology, Japan)*1
Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University, Japan)*2
Gabriela KOHR (Babeş-Bolyai University, Romania)*3

The notion of a linearly invariant family (L.I.F.) was introduced by Pommerenke [25]. He obtained various properties of L.I.F.s on the unit disc, including growth, distortion and coefficient bounds of L.I.F.s, which are generalizations of related results in the theory of univalent functions. Generalizations of this notion to higher dimensions were obtained by Barnard, FitzGerald and Gong [1], Pfaltzgraff [21], Pfaltzgraff and Suffridge [22, 23, 24], Gong (see [10] and the references therein), Godula, Liczberski and Starkov [9], Hamada and Kohr [16, 17], and the authors (see [13] and [14]). Pfaltzgraff and Suffridge [24] proved a number of interesting results concerning the norm-order of L.I.F.s on the Euclidean unit ball in $\mathbb{C}^n$ and connections with univalence (starlikeness, convexity).

Recently, Duren, Hamada and Kohr [8] extended the notion of linear invariance on the Euclidean unit ball B^n in $\mathbb{C}^n$ to the case of affine and linearly invariant families (A.L.I.F.s) of pluriharmonic mappings of B^n into $\mathbb{C}^n$. To this end, they obtained various results concerning two-point distortion theorems for A.L.I.F.s of harmonic functions on the unit disc U and of pluriharmonic mappings of B^n into $\mathbb{C}^n$. We mention that A.L.I.F.s of harmonic functions on the unit disc U were first introduced by Sheil-Small [26]. Other results about L.I.F.s in $\mathbb{C}^n$ may be found in [10] and [11] and the references therein. Also, recent results related to two-point distortion results for harmonic mappings of the unit disc and necessary and sufficient conditions for univalence of pluriharmonic mappings of the Euclidean unit ball B^n in $\mathbb{C}^n$ may be found in [4] and [5].

In this talk ([15]), we continue the above work on L.I.F.s and we obtain growth and distortion theorems for L.I.F.s $\mathcal{F}$ of locally biholomorphic mappings on the homogeneous unit ball B of an n-dimensional complex Banach space X with finite norm-order $\|\mathrm{ord}\|_{e,1}\mathcal{F}$, where

$$\|\,\mathrm{ord}\,\|_{e,1}\mathcal{F} = \sup_{f\in\mathcal{F}} \sup_{\|w\|_X=1} \left\{ \frac{1}{2}\|D^2 f(0)(w,\cdot)\|_{X,e} \right\}$$

and

$$\|A\|_{X,e} = \sup\{\|Az\|_e : \|z\|_X = 1\}, \quad A \in L(\mathbb{C}^n).$$

Note that the reason for which we use the Euclidean norm $\|\cdot\|_e$ for the target space instead of the norm on X is that we are able to obtain lower bounds in the two-point distortion theorems for L.I.F.s on any homogeneous unit ball in $\mathbb{C}^n$. Next, we obtain similar results for A.L.I.F.s of pluriharmonic mappings of the unit ball B into $\mathbb{C}^n$.

This work has been supported by JSPS KAKENHI Grant Number 25400151.
2000 Mathematics Subject Classification: 32H02, 30C45.
Keywords: distortion theorem, growth theorem, linearly invariant family, two-point distortion.

*1 e-mail: thonda@cc.it-hiroshima.ac.jp
*2 e-mail: h.hamada@ip.kyusan-u.ac.jp
*3 e-mail: gkohr@math.ubbcluj.ro

References

[1] R.W. Barnard, C.H. FitzGerald, S. Gong, A distortion theorem for biholomorphic mappings in $\mathbb{C}^2$, Trans. Amer. Math. Soc. 344 (1994) 907–924.

[2] C.-H. Chu, H. Hamada, T. Honda, G. Kohr, Distortion theorems for convex mappings on homogeneous balls, J. Math. Anal. Appl. 369 (2010) 437–442.

[3] C-H. Chu, P. Mellon, Jordan structures in Banach spaces and symmetric manifolds, Exposition. Math. 16 (1998) 157–180.

[4] M. Chuaqui, P. Duren, B. Osgood, Two-point distortion theorems for harmonic mappings, Illinois J. Math. 53 (2009) 1061–1075.

[5] M. Chuaqui, H. Hamada, R. Hernández, G. Kohr, Pluriharmonic mappings and linearly connected domains in $\mathbb{C}^n$, Israel J. Math., to appear.

[6] J. Clunie, T. Sheil-Small, Harmonic univalent functions, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. Math. 9 (1984) 3–25.

[7] P. Duren, Harmonic mappings in the plane, Cambridge Univ. Press, 2004.

[8] P. Duren, H. Hamada, G. Kohr, Two-point distortion theorems for harmonic and pluriharmonic mappings, Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011) 6197–6218.

[9] J. Godula, P. Liczberski, V. Starkov, Order of linearly invariant family of mappings in $\mathbb{C}^n$, Complex Variables Theory Appl. 42 (2000) 89–96.

[10] S. Gong, Convex and starlike mappings in several complex variables, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.

[11] I. Graham, G. Kohr, Geometric function theory in one and higher dimensions, Marcel Dekker Inc., New York, 2003.

[12] I. Graham, G. Kohr, J. Pfaltzgraff, Growth and two-point distortion for biholomorphic mappings of the ball, Complex Var. Elliptic Equ. 52 (2007) 211–223.

[13] H. Hamada, T. Honda, G. Kohr, Linear invariance of locally biholomorphic mappings in the unit ball of a JB*-triple, J. Math. Anal. Appl. 385 (2012) 326–339.

[14] H. Hamada, T. Honda, G. Kohr, Trace-order and a distortion theorem for linearly invariant families on the unit ball of a finite dimensional JB*-triple, J. Math. Anal. Appl. 396 (2012) 829–843.

[15] H. Hamada, T. Honda, G. Kohr, Growth and distortion theorems for linearly invariant families on homogeneous unit balls in $\mathbb{C}^n$, J. Math. Anal. Appl., 407 (2013) 398 – 412.

[16] H. Hamada, G. Kohr, Linear invariance of locally biholomorphic mappings in Hilbert spaces, Complex Var. Theory Appl. 47 (2002) 277–289.

[17] H. Hamada, G. Kohr, Linear invariant families on the unit polydisc, Mathematica (Cluj) 44(67) (2002) 153–170.

[18] L. Hörmander, On a theorem of Grace, Math. Scand. 2 (1954) 55–64.

[19] W. Kaup, A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces, Math. Z. 183 (1983) 503–529.

[20] O. Loos, Bounded symmetric domains and Jordan pairs, University of California, Irvine, 1977.

[21] J.A. Pfaltzgraff, Distortion of locally biholomorphic maps of the n-ball, Complex Variables Theory Appl. 33 (1997) 239–253.

[22] J.A. Pfaltzgraff, T.J. Suffridge, An extension theorem and linear invariant families generated by starlike maps, Ann. Univ. Mariae Curie Sklodowska, Sect.A 53 (1999) 193–207.

[23] J.A. Pfaltzgraff, T.J. Suffridge, Linear invariance, order and convex maps in $\mathbb{C}^n$, Complex Variables Theory Appl. 40 (1999) 35–50.

[24] J.A. Pfaltzgraff, T.J. Suffridge, Norm order and geometric properties of holomorphic mappings in $\mathbf{C}^n$, J. Anal. Math. 82 (2000) 285–313.

[25] Ch. Pommerenke, Linear-invariante Familien analytischer Funktionen I, Math. Ann. 155 (1964) 108–154.

[26] T. Sheil-Small, Constants for planar harmonic mappings, J. London Math. Soc. 42 (1990) 237–248.

Pluriharmonic mappings and linearly connected domains in $\mathbb{C}^n$

Martin CHUAQUI (Catholic University of Chile)
Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University)*1
Rodrigo HERNÁNDEZ (Universidad Adolfo Ibáñez)
Gabriela KOHR (Babeş-Bolyai University)

This talk is an announcement of [3]. Let $\mathbb{C}^n$ denote the space of n complex variables $z = (z_1, \ldots, z_n)$ with the Euclidean inner product $\langle z, w\rangle = \sum_{j=1}^n z_j \overline{w}_j$ and the Euclidean norm $\|z\| = \langle z, z\rangle^{1/2}$. The open unit ball $\{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < 1\}$ is denoted by $\mathbb{B}^n$. In the case $n = 1$, $\mathbb{B}^1 = \mathbb{U}$ is the unit disc in $\mathbb{C}$.

Let $L(\mathbb{C}^n)$ denote the space of linear operators from $\mathbb{C}^n$ into itself with the standard operator norm. Also, let I_n be the identity in $L(\mathbb{C}^n)$. Let $H(\mathbb{B}^n)$ be the set of holomorphic mappings from $\mathbb{B}^n$ into $\mathbb{C}^n$. If $f \in H(\mathbb{U})$, we say that f is normalized if $f(0) = 0$ and $f'(0) = 1$. Let S denote the usual family of normalized univalent functions on $\mathbb{U}$. If $f \in H(\mathbb{B}^n)$, we say that f is locally biholomorphic on $\mathbb{B}^n$ if $\det Df(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{B}^n$, where $Df(z)$ is the complex Jacobian matrix of f at z.

A complex-valued function f of class C^2 on $\mathbb{B}^n$ is said to be pluriharmonic if its restriction to every complex line is harmonic, which is equivalent to the fact that

$$\frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} f(z) = 0, \quad \forall\, z \in \mathbb{B}^n, \quad \forall\, j, k = 1, 2 \ldots, n.$$

Every pluriharmonic mapping $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}^n$ can be written as $f = h + \overline{g}$, where $g, h \in H(\mathbb{B}^n)$, and this representation is unique if $g(0) = 0$.

If $f = h + \overline{g} : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}^n$ is a pluriharmonic mapping such that h is locally biholomorphic on $\mathbb{B}^n$, we denote by J_f the real Jacobian of f and $\omega_f(z) = Dg(z)[Dh(z)]^{-1}$ for $z \in \mathbb{B}^n$. Then

$$\begin{aligned} J_f(z) &= \det \begin{pmatrix} Dh(z) & \overline{Dg(z)} \\ Dg(z) & \overline{Dh(z)} \end{pmatrix}, \\ &= |\det Dh(z)|^2 \det(I_n - \omega_f(z)\overline{\omega_f(z)}), \quad z \in \mathbb{B}^n. \end{aligned}$$

Hence f (with h locally biholomorphic on $\mathbb{B}^n$) is sense-preserving, i.e., $J_f(z) > 0$ for $z \in \mathbb{B}^n$, if and only if $\det(I_n - \omega_f(z)\overline{\omega_f(z)}) > 0$, for all $z \in \mathbb{B}^n$. In the case $n = 1$, $\omega_f = g'/h'$ is the dilatation of f. It is known that $f = h + \overline{g}$ is locally univalent and sense-preserving on $\mathbb{U}$ if and only if $|g'(z)| < |h'(z)|$ for $z \in \mathbb{U}$, i.e., h is locally univalent on $\mathbb{U}$ and $|\omega_f(z)| < 1$ for $z \in \mathbb{U}$. In dimension $n \geq 2$, if $f = h + \overline{g} : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}^n$ is a pluriharmonic mapping such that h is locally biholomorphic on $\mathbb{B}^n$ and $\|\omega_f(z)\| < 1$ for $z \in \mathbb{B}^n$, then f is a sense-preserving locally univalent mapping on $\mathbb{B}^n$ [7].

Definition 1 (see e.g. Pommerenke [15], for $n = 1$) A domain $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ is said to be linearly connected if there is a constant $M > 0$ such that any two points v_1, $v_2 \in \Omega$ can be connected by a smooth curve $\gamma \subset \Omega$ with length $\ell(\gamma) \leq M\|v_1 - v_2\|$.

Partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number 25400151
*1 e-mail: `h.hamada@ip.kyusan-u.ac.jp`
web: `http://www.ip.kyusan-u.ac.jp/J/kougaku/tb/hamada/`

Remark 2 It is clear that $M \geq 1$ in Definition 1 and that any convex domain is linearly connected with constant $M = 1$. On the other hand, if $\Omega_j \subseteq \mathbb{C}$ is a linearly connected domain with constant $M_j > 0$ for $j = 1, 2, \ldots, n$, then it is easy to see that $\Omega = \prod_{j=1}^{n} \Omega_j$ is a linearly connected domain in $\mathbb{C}^n$ with constant $M = \sqrt{n} \max_{j=1,\ldots,n} M_j$.

In the case of one complex variable, every bounded linearly connected domain Ω is a Jordan domain [15]. Chuaqui and Hernández [4] proved that if $h \in H(\mathbb{U})$ is a univalent function, then there is a constant $c \in (0, 1]$ such that each harmonic function $f = h + \overline{g}$ with $|\omega_f| < c$ is univalent on $\mathbb{U}$ if and only if $h(\mathbb{U})$ is linearly connected.

In this talk, we investigate linear connectivity and its role in the study of certain sufficient conditions for univalence of pluriharmonic mappings on $\mathbb{B}^n$, thereby finding n-dimensional analogues of the results in [4]. Other necessary and sufficient conditions for univalence of harmonic or pluriharmonic mappings may be found in [2], [7] and [11].

References

[1] J.M. Anderson, J. Becker and J. Gevirtz, *First-order univalence criteria, interior chord-arc conditions, and quasidisks*, Michigan Math. J. **56** (2008), 623–636.

[2] M. Chuaqui, P. Duren and B. Osgood, *Two-point distortion theorems for harmonic mappings*, Illinois J. Math. **53** (2009), 1061–1075.

[3] M. Chuaqui, H. Hamada, R. Hernández and G. Kohr, Pluriharmonic mappings and linearly connected domains in $\mathbb{C}^n$, Israel J. Math., to appear.

[4] M. Chuaqui and R. Hernández, *Univalent harmonic mappings and linearly connected domains*, J. Math. Anal. Appl. **332** (2007), 1189-1194.

[5] J. Clunie and T. Sheil-Small, *Harmonic univalent functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I **9** (1984), 3–25.

[6] P. Duren, *Harmonic mappings in the plane*, Cambridge Univ. Press., 2004.

[7] P. Duren, H. Hamada and G. Kohr, *Two-point distortion theorems for harmonic and pluriharmonic mappings*, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), 6197–6218.

[8] I. Graham, H. Hamada and G. Kohr, *Radius problems for holomorphic mappings on the unit ball in* $\mathbf{C}^n$, Math. Nachr., **279** (2006), 1474–1490.

[9] I. Graham and G. Kohr, *Geometric function theory in one and higher dimensions*, Marcel Dekker Inc., New York, 2003.

[10] R. C. Gunning, *Introduction to holomorphic functions of several variables. Vol. I. Function theory.* Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1990.

[11] H. Hamada, T. Honda and G. Kohr, *Growth and distortion theorems for linearly invariant families on homogeneous unit balls in* $\mathbb{C}^n$, J. Math. Anal. Appl., **407** (2013), 398–412.

[12] R. Hernández and M.J. Martín, *Stable geometric properties of analytic and harmonic functions*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **155** (2013), 343–359.

[13] D. Kalaj, *Quasiconformal harmonic mappings and close-to-convex domains*, Filomat **24** (2010), 63–68.

[14] P.T. Mocanu, *Sufficient conditions of univalency for complex functions in the class* C^1, J. Anal. Numer. Theor. Approx. **10** (1981), 75–79.

[15] Ch. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps*, Springer-Verlag, 1992.

[16] T.J. Suffridge, *Starlikeness, convexity and other geometric properties of holomorphic maps in higher dimensions*, Lecture Notes Math. **599** (1977), 146–159, Springer-Verlag, New York.

Loewner differential equations in reflexive complex Banach spaces

Ian GRAHAM (University of Toronto)
Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University)*1
Gabriela KOHR (Babeş-Bolyai University)
Mirela KOHR (Babeş-Bolyai University)

The aim of this talk is to generalize certain results in Loewner theory from $\mathbb{C}^n$ to the case of reflexive complex Banach spaces [5].

On a domain in $\mathbb{C}^n$, any univalent (holomorphic and injective) mapping into $\mathbb{C}^n$ is also biholomorphic. However, this result is no longer true in infinite dimensional complex Banach spaces. For example, if $f : \ell_2 \to \ell_2$ is given by $f(x) = (x_1^2, x_1^3, x_2^2, x_2^3, \ldots)$ for $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$, then f is univalent on the unit ball of ℓ_2, but is not biholomorphic, since $Df(0) = \mathbf{0}$ (see [11]). In particular, on a domain in $\mathbb{C}^n$ any univalent mapping is open. Heath and Suffridge [7] gave an example of a univalent mapping on the unit ball B of a complex Banach space which is not biholomorphic, $f(B)$ contains an open set, but $f(B)$ is not open. Moreover, there exist biholomorphic mappings on the unit ball B of an infinite dimensional complex Banach space X which are not bounded on the closed ball $\overline{B}_r$ for $r \in (0,1)$ (see [5]). In this talk we shall consider to what extent such phenomena require changes in the development of Loewner theory.

Pfaltzgraff [10] first generalized to $\mathbb{C}^n$ the Loewner differential equation and developed existence and uniqueness theorems for its solutions. The existence and regularity theory (including changes in normalization such as those considered in this talk) has been considered by several authors (see [1], [2], [4], [5], [6] and the references therein).

The main results of this talk can be summarized as follows.

Theorem 1 *Let X be a reflexive complex Banach space and let $h = h(z,t) : B \times [0,\infty) \to X$ be a generating vector field such that $Dh(0,t) = A$, $t \geq 0$, where $A \in L(X)$ is such that $k_+(A) < 2m(A)$. Then the following statements hold:*

(i) For each $s \geq 0$ and $z \in B$, the initial value problem

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -h(v,t) \quad a.e. \quad t \geq s, \quad v(z,s,s) = z,$$

has a unique solution $v = v(z,s,t)$ such that $v(\cdot,s,t)$ is a univalent Schwarz mapping. Also, there exists the limit

$$\lim_{t\to\infty} e^{tA} v(z,s,t) = f(z,s) \tag{1}$$

uniformly on each closed ball $\overline{B}_r$ for $r \in (0,1)$ and $s \geq 0$. Moreover, $f(z,t)$ is an A-normalized univalent subordination chain. In addition, assume that $\frac{\partial f}{\partial t}(z,t)$ exists for $t \in [0,\infty) \setminus N$ and $z \in B_\delta$, for some $\delta \in (0,1)$, where $N \subset [0,\infty)$ (independent of z) has measure zero. Then $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot,t)$ exists and is holomorphic on B for $t \in [0,\infty) \setminus N$, and for each $z \in B$ there exists a set N_z with $N \subset N_z \subset [0,\infty)$ of measure 0 such that

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = Df(z,t)h(z,t), \quad t \in [0,\infty) \setminus N_z.$$

Partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number 25400151
*1 e-mail: h.hamada@ip.kyusan-u.ac.jp
web: http://www.ip.kyusan-u.ac.jp/J/kougaku/tb/hamada/

(ii) Conversely, assume that there exists a standard solution $f(z,t)=e^{tA}z+\cdots$ *of the generalized Loewner differential equation*

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t)=Df(z,t)h(z,t),\quad t\in[0,\infty)\setminus N,\quad \forall z\in B, \tag{2}$$

where N *is a subset of* $[0,\infty)$ *of measure zero. Also, assume that for each* $r\in(0,1)$, *there is* $M=M(r,A)>0$ *such that* $\|e^{-tA}f(z,t)\|\leq M(r,A)$ *for* $\|z\|\leq r$ *and* $t\geq 0$. *Then* $f(z,t)$ *is an* A*-normalized univalent subordination chain and* (1) *holds.*

(iii) Let $f(z,t)$ *be the* A*-normalized univalent subordination chain given by* (1). *Assume that* $f(\cdot,t)$ *is biholomorphic on* B *for* $t\geq 0$, *and that there exists a standard solution* $g(z,t)$ *of* (2). *If for each* $r\in(0,1)$ *and* $T>0$, *there exists* $K=K(r,T)>0$ *such that* $\|g(z,t)\|\leq K(r,T)$ *for* $\|z\|\leq r$, $t\in[0,T]$, *then* $g(z,t)$ *is a subordination chain and there exists a holomorphic mapping* $\Phi:\bigcup_{t\geq 0}f(B,t)\to X$ *such that* $g(z,t)=\Phi(f(z,t))$ *for* $z\in B$ *and* $t\geq 0$. *In addition, if* $g(\cdot,t)$ *is biholomorphic on* B *for* $t\geq 0$, *then* Φ *is a biholomorphic mapping of* $\bigcup_{t\geq 0}f(B,t)$ *onto* $\bigcup_{t\geq 0}g(B,t)$.

References

[1] L. Arosio, F. Bracci, H. Hamada and G. Kohr, *An abstract approach to Loewner chains*, J. Anal. Math., **119** (2013), 89–114.

[2] P. Duren, I. Graham, H. Hamada and G. Kohr, *Solutions for the generalized Loewner differential equation in several complex variables*, Math. Ann., **347** (2010), 411–435.

[3] I. Graham, H. Hamada, T. Honda, G. Kohr and K. H. Shon, *Growth, distortion and coefficient bounds for Carathéodory families in* $\mathbb{C}^n$ *and complex Banach spaces*, submitted.

[4] I. Graham, H. Hamada and G. Kohr, *Parametric representation of univalent mappings in several complex variables*, Canadian J. Math. **54** (2002), 324–351.

[5] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, and M. Kohr, *Univalent subordination chains in reflexive complex Banach spaces*, Complex Analysis and Dynamical Systems V, Contemporary Mathematics **591** (2013), 83–111.

[6] H. Hamada, *Polynomially bounded solutions to the Loewner differential equation in several complex variables*, J. Math. Anal. Appl., **381** (2011), 179–186.

[7] L.F. Heath and T.J. Suffridge, *Starlike, convex, close-to-convex, spirallike and* Φ*-like maps in a commutative Banach algebra with identity*, Trans. Amer. Math. Soc., **250** (1979), 195–212.

[8] E. Hille and R.S. Phillips, *Functional Analysis and Semigroups*, Amer. Math. Soc., **31**, Providence, R.I., 1957.

[9] Y. Komura, *Nonlinear semi-groups in Hilbert space.* J. Math. Soc. Japan, **19** (1967), 493–507.

[10] J.A. Pfaltzgraff, *Subordination chains and univalence of holomorphic mappings in* $\mathbb{C}^n$, Math. Ann., **210** (1974), 55–68.

[11] T.J. Suffridge, *Starlikeness, convexity and other geometric properties of holomorphic maps in higher dimensions*, Lecture Notes in Math., **599**, 146–159, Springer-Verlag, 1977.

Extremal properties associated with univalent subordination chains in $\mathbb{C}^n$

Ian GRAHAM (University of Toronto)
Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University)*1
Gabriela KOHR (Babeş-Bolyai University)
Mirela KOHR (Babeş-Bolyai University)

For a linear operator $A \in L(\mathbb{C}^n)$, let $k_+(A)$ be the upper exponential index of A and let $m(A) = \min\{\Re\langle A(z), z\rangle : \|z\| = 1\}$. Under the assumption $k_+(A) < 2m(A)$, we consider the family $S_A^0(B^n)$ of mappings which have A-parametric representation on the Euclidean unit ball B^n in $\mathbb{C}^n$, i.e. $f \in S_A^0(B^n)$ if and only if there exists an A-normalized univalent subordination chain $f(z,t)$ such that $f = f(\cdot, 0)$ and $\{e^{-tA} f(\cdot, t)\}_{t\geq 0}$ is a normal family on B^n.

If $f, g \in H(B^n)$, we say that f is subordinate to g ($f \prec g$) if there exists a Schwarz mapping v (i.e. $v \in H(B^n)$ and $\|v(z)\| \leq \|z\|$, $z \in B^n$) such that $f = g \circ v$.

Definition 1 *A mapping $f : B^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ is called a univalent subordination chain if $f(\cdot, t)$ is biholomorphic on B^n, $f(0,t) = 0$ for $t \geq 0$, and $f(\cdot, s) \prec f(\cdot, t)$, $0 \leq s \leq t < \infty$. A univalent subordination chain is said to be A-normalized if $Df(0,t) = e^{tA}$ for $t \geq 0$, where $A \in L(\mathbb{C}^n)$ with $m(A) > 0$. We say that $f(z,t)$ is a Loewner chain (or a normalized univalent subordination chain) if $f(z,t)$ is I_n-normalized.*

The above subordination condition is equivalent to the existence of a unique Schwarz mapping $v = v(z,s,t)$, called the transition mapping associated with $f(z,t)$, such that $f(z,s) = f(v(z,s,t),t)$ for $z \in B^n$ and $t \geq s \geq 0$.

For various results on subordination chains in several complex varables, see [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13] and the references therein.

Let X be a locally convex linear space over $\mathbb{C}$ and let $E \subseteq X$. Let $\mathrm{ex}\, E$ and $\mathrm{supp}\, E$ be the sets of extreme points of E and support points of E respectively. By the Krein-Milman theorem, it is known that if E is a nonempty compact subset of X then $\mathrm{ex}\, E$ is a nonempty subset of E. Also, it is known that if E is a compact subset of X which has at least two distinct points, then $\mathrm{supp}\, E$ is a nonempty subset of E. We shall consider $X = H(B^n)$.

It is well known that no bounded mapping in $S = S_{I_1}^0(B^1)$ is an extreme or support point of S. Indeed, if $f \in \mathrm{ex}\, S$ or $f \in \mathrm{supp}\, S$, then f maps the unit disc U onto the complement of a continuous arc tending to ∞ with increasing modulus (see e.g. [14]). In higher dimensions, we have the following theorem [8].

Theorem 1 *Let $A \in L(\mathbb{C}^n)$ be such that $k_+(A) < 2m(A)$. Also, let $f(z,t)$ be an A-normalized univalent subordination chain such that $\{e^{-tA} f(\cdot,t)\}_{t\geq 0}$ is a normal family on B^n. Let $v_{s,t}(z) = v(z,s,t)$ be the transition mapping associated with $f(z,t)$. Also, let $v_t(z) = v(z,t) = v_{0,t}(z)$ for $z \in B^n$ and $t \geq 0$. Then $e^{tA} v(\cdot,t) \in S_A^0(B^n) \setminus (\mathrm{ex} S_A^0(B^n) \cup \mathrm{supp} S_A^0(B^n))$ for any $t \geq 0$. In particular, the identity mapping $\mathrm{id}_{B^n} \in S_A^0(B^n) \setminus (\mathrm{ex} S_A^0(B^n) \cup \mathrm{supp} S_A^0(B^n))$.*

We also have the following theorem [8].

Partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number 25400151
*1 e-mail: `h.hamada@ip.kyusan-u.ac.jp`
web: `http://www.ip.kyusan-u.ac.jp/J/kougaku/tb/hamada/`

Theorem 2 *Let A and $f(z,t)$ be as in Theorem 1. Then the following results hold.*

(*i*) *If $f = f(\cdot, 0) \in \operatorname{ex} S_A^0(B^n)$, then $e^{-tA} f(\cdot, t) \in \operatorname{ex} S_A^0(B^n)$ for $t \geq 0$.*

(*ii*) *If $f \in \operatorname{supp} S_A^0(B^n)$, then $e^{-tA} f(\cdot, t) \in \operatorname{supp} S_A^0(B^n)$ for $t \geq 0$.*

Note that Theorem 2 is a generalization to higher dimensions of related results due to Pell [15] and Kirwan [14].

We also consider extremal problems related to bounded mappings in $S_A^0(B^n)$.

References

[1] Bracci, F., Graham, I., Hamada, H., Kohr, G.: Variation of Loewner chains, extreme and support points in the class S^0 in higher dimensions, in preparation.

[2] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G.: On subordination chains with normalization given by a time-dependent linear operator, Complex Anal. Oper. Theory, **5**, 787-797 (2011)

[3] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G.: Extension operators and subordination chains, J. Math. Anal. Appl., **386**, 278–289 (2012)

[4] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G., Kohr, M.: Asymptotically spirallike mappings in several complex variables, J. Anal. Math., **105**, 267–302 (2008)

[5] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G., Kohr, M.: Spirallike mappings and univalent subordination chains in $\mathbb{C}^n$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa-Cl. Sci., **7**, 717–740 (2008)

[6] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G., Kohr, M.: Extreme points, support points and the Loewner variation in several complex variables, Sci. China Math., **55**, 1353–1366 (2012)

[7] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G., Kohr, M.: Asymptotically spirallike mappings in reflexive complex Banach spaces, Complex Anal. Oper. Theory , **7**, 1909–1927 (2013)

[8] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G., Kohr, M.: Extremal properties associated with univalent subordination chains in $\mathbb{C}^n$, Math. Ann., to appear.

[9] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G., Pfaltzgraff, J. A.: Convex subordination chains in several complex variables, Canad. J. Math. **61** , 566–582 (2009)

[10] Hamada, H.: Approximation properties on spirallike domains of $\mathbb{C}^n$, submitted.

[11] Hamada, H., Kohr, G.: Univalence criterion and quasiconformal extension of holomorphic mappings, Manuscripta Math., **141**, 195–209 (2013)

[12] Hamada, H., Kohr, G. Mocanu, P. T., Şerb, I.: Convex subordination chains and injective mappings in $\mathbb{C}^n$, J. Math. Anal. Appl., **364**, 32–40 (2010)

[13] Hamada, H., Kohr, G., Muir, J.R. Jr.: Extensions of L^d-Loewner chains to higher dimensions, J. Anal. Math., **120**, 357–392 (2013)

[14] Kirwan, W.E.: Extremal properties of slit conformal mappings. In: Brannan, D., Clunie, J. (eds.) Aspects of Contemporary Complex Analysis, pp. 439–449, Academic Press, London-New York (1980)

[15] Pell, R.: Support point functions and the Loewner variation, Pacific J. Math., **86**, 561–564 (1980)

[16] Schleissinger, S.: On support points of the class $S^0(B^n)$, Proc. Amer. Math. Soc., to appear

On holomorphic automorphisms fixing the origin and the Bergman mapping

山盛 厚伺 (POSTECH)*

1. 導入

以下, 領域は常に原点を含むと仮定する. 有界な円型領域 (circular domain) ではカルタンによる次の定理が良く知られている.

定理 1. 有界円型領域 D の原点を保存する正則自己同型写像は線型写像である.

本講演では円型領域を含む領域のクラスである m-円型 (quasi-circular) 領域を考察する. ここで領域 $D \subset \mathbb{C}^n$ が m-円型領域であるとは, D が写像 $f_{\theta,m} : D \to \mathbb{C}^n, z \mapsto (e^{\sqrt{-1}m_1\theta}z_1, \ldots, e^{\sqrt{-1}m_n\theta}z_n)$ で不変 (即ち $f_{\theta,m}(D) \in \mathrm{Aut}(D)$) であることと定義される (各 m_i は正整数). また正整数の組 $m = (m_1, \ldots, m_n)$ をウェイトと呼ぶ.

m-円型領域に対してもカルタンの定理の類似が成立する [1]:

定理 2. 有界 m-円型領域 D の原点を保存する正則自己同型写像は多項式写像である.

ここで自然な問題として以下が考えられる.

問題 1. m-円型領域 D のウェイトと原点を保存する正則自己同型写像の次数がどの様に関係しているか?

本講演ではこの問題について得られた結果を報告する.

2. 主結果

主結果を述べる前に m-円型領域 D のウェイト m に関して正規性という概念を導入する. 以下, 一般性を失わずウェイト $m = (m_1, \ldots, m_n)$ は $m_1 \leq \cdots \leq m_n$ を満たすと仮定できる.

定義 1. m-円型領域 D はウェイト m が次の条件を満たすとき正規であるという:

(a) $m_1 \geq 2$,

(b) $m_i \neq m_j$ であるとき $\gcd(m_i, m_j) = 1$ が成立する.

例えば, 以下の $D_{2,3}$ はウェイトが $(2,3)$ であるので正規である. 一方 $D_{3,4,6}$ はウェイトが $(3,4,6)$ となるので正規ではない.

$$D_{2,3} = \{z \in \mathbb{B}^2 : |z_1^3 + z_2^2| < 1\}, \quad D_{3,4,6} = \{z \in \mathbb{B}^3 : |z_1^4 + z_2^3 + z_3^2| < 1\}.$$

以下が主結果である.

定理 3 ([3])**.** 有界な正規 m-円型領域 D の原点を保存する正則自己同型写像は線型写像である.

また, D_1, D_2 を正規な m-円型領域とし, g が D_1 から D_2 への原点を保存する双正則写像と仮定すると g が線型写像になることも証明される.

* e-mail: yamamori@postech.ac.kr, ats.yamamori@gmail.com

3. 証明の概略

伊師氏, 甲斐氏は論文 [2] にて Bergman 写像

$$\sigma_0^D(z) := T_D(0,0)^{-1/2}\mathrm{grad}_{\overline{w}} \log \frac{K_D(z,w)}{K_D(0,w)}\bigg|_{w=0}$$

を用いてカルタンの定理の別証明を与えた．その証明において鍵となったのは以下の事実である (ここで $T_D(z,w) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \overline{w_i}\partial z_j} \log K_D(z,w)\right)_{i,j=1,\ldots,n}$).

(1) $K_D(z,0) \equiv K_D(0,0)$ が成立する．

(2) $T_D(z,0) \equiv T_D(0,0)$ が成立する．

論文 [2] の手法は円型領域に限らず, (1), (2) が成立するような任意の領域に対して適用することが出来る．これらの性質が m-円型領域でも成立するかが問題となる．(1) は (正規とは限らない) 任意の m-円型領域で成立する, 一方 (2) については一般の m-円型領域でそうなることは言えず, 正規性の下であれば成立することが示される．Bergman 写像 σ_0^D のヤコビ行列 $J(\sigma_0^D, z)$ は $T_D(0,0)^{-1/2}T(z,0)$ に等しく, また $\sigma_0^D(0) = 0$ であるため, (2) より正規 m-円型領域における Bergman 写像 σ_0^D は線型写像となることが示される．写像 f を D の正則自己同型写像かつ $f(0) = 0$ を満たすものとする．このときあるユニタリ行列 $L(f,0)$ が存在して以下の図式が可換となる:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f", "\sim"'] \arrow[d, "\sigma_0^D"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D \arrow[d, "\sigma_0^D"] \\ \mathbb{C}^n \arrow[r, "{L(f,0)}"] & \mathbb{C}^n. \end{tikzcd}$$

従い, $f = (\sigma_0^D)^{-1} \circ L(f,0) \circ \sigma_0^D$ となる．Bergman 写像 σ_0^D と $L(f,0)$ は共に線型であるから, f も線型である．

注意 1. 上記の議論は非有界でも, Bergman 核が存在し, かつ条件 (1), (2) を満たす任意の正規 m-円型領域に対して成立する．いかなる有界領域とも正則同値とならない非有界円型領域で (1), (2) を満たす領域の具体例は論文 [4] で得られた．

注意 2. 正規性の定義において $m_1 \geq 2$ であることを要請したが, この条件を外すと主結果に反例が存在する．実際, P. Zapałowski は論文 [5] においてウェイトが $m = (1,2)$ であるような m-円型領域の正則自己同型群を決定した．そこには非線型であるが原点を保存する自己同型写像が現れる．

参考文献

[1] W. Kaup, Über das Randverhalten von holomorphen Automorphismen beschränkter Gebiete, Manuscripta Math. 3 (1970) 257–270.

[2] H. Ishi, C. Kai, The representative domain of a homogeneous bounded domain, Kyushu J. Math. 64, (2010), 35–47.

[3] A. Yamamori, Automorphisms of normal quasi-circular domains, Bull. Sci. Math, to appear, doi:10.1016/j.bulsci.2013.10.002.

[4] H. Kim, V. T. Nihn and A. Yamamori, The automorphism group of a certain unbounded non-hyperbolic domain, J. Math. Anal. Appl. 409 (2014), 637–642.

[5] P. Zapałowski, Proper holomorphic mappings between symmetrized ellipsoids, Arch. Math. (Basel) 97 (2011), no. 4, 373–384.

特別講演

Teichmüller 空間の幾何学の Thurston 理論

宮地　秀樹　(大阪大学)*

この講演では Thurston 理論の一端である交点数関数による幾何構造の空間の幾何学について論じる．以下，S は Euler 数が負であるような向き付け可能なコンパクト曲面とする．

■ **謝辞**．　函数論分科会の委員を始め関係者の皆様には，この度，特別講演のような貴重な機会を与えていただきましたことに感謝いたします．ありがとうございます．

1. 背景と動機

1.1. 背景：Teichmüller 空間の Thurston コンパクト化と写像類群の分類

1.1.1. 測度付き葉層構造の空間

曲面 S 上の非自明かつ ∂S の成分とホモトピックでない単純閉曲線のホモトピー類のなす集合を $\mathcal{S}$ と書く．$\alpha, \beta \in \mathcal{S}$ に対して α と β の **（幾何学的）交点数**を

$$i(\alpha,\beta) = \min\{^{\#}(\alpha' \cap \beta') \mid \alpha' \in \alpha, \beta' \in \beta\} \tag{1.1}$$

と定義する．ここで**重み付き単純閉曲線**の集合として形式的な積の全体 $\mathcal{WS} = \{t\alpha \mid t \geq 0, \alpha \in \mathcal{S}\}$ を考える．そして交点数関数を

$$i\colon \mathcal{WS} \times \mathcal{WS} \ni (t\alpha, s\beta) \mapsto i(t\alpha, s\beta) := ts\, i(\alpha,\beta) \in [0,\infty) \tag{1.2}$$

と定義して $\mathcal{WS}$ 上に拡張する．この交点数関数を用いると

$$\mathcal{WS} \ni t\alpha \mapsto [\mathcal{S} \ni \beta \mapsto i(\beta, t\alpha)] \in \mathcal{R} := [0,\infty)^{\mathcal{S}} \tag{1.3}$$

なる埋め込みを考えることが出来る．$\mathcal{R}$ には各点収束位相（弱位相）を入れる．$\mathcal{WS}$ の像の閉包 $\mathcal{MF}$ を**測度付き葉層構造の空間**という．射影

$$\mathrm{proj}\colon \mathcal{R} - \{0\} \to \mathcal{PR} := (\mathcal{R} - \{0\})/\mathbb{R}_{>0}$$

による $\mathcal{MF} - \{0\}$ の像を $\mathcal{PMF}$ と書き，**射影的測度付き葉層構造の空間**という．$\mathcal{WS}$ 上の幾何学的交点数関数 (1.2) は $\mathcal{MF}$ 上に連続に拡張する．

1.1.2. Thurston コンパクト化と写像類群の元の分類

S の Teichmüller 空間 $T(S)$ の点 $y = (Y, f) \in T(S)$ と単純閉曲線 $\alpha \in \mathcal{S}$ に対して Y 上の $f(\alpha)$ 内の双曲計量に関する測地線の長さを $\ell_y(\alpha)$ と書く．このとき Teichmüller 空間の埋め込み（**Thurston 埋め込み**）を写像

$$\tilde{\Phi}_{Th}\colon T(S) \ni y \mapsto [\mathcal{S} \ni \beta \mapsto \ell_y(\beta)] \in \mathcal{R} \tag{1.4}$$

本研究は科研費 (課題番号:21540177) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 30F60, 32G15, 37F30, 51M10, 32Q45, 54E40
キーワード：Teichmüller space, Teichmüller distance, Extremal length, Mapping class group
* 〒560-0043 豊中市待兼山町 1-1 大阪大学大学院理学研究科
e-mail: miyachi@math.sci.osaka-u.ac.jp
web: http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~miyachi/index.html

と射影の合成 $\Phi_{Th} = \mathrm{proj} \circ \tilde{\Phi}_{Th} \colon T(S) \to \mathcal{PR}$ として定義する．像の閉包を $\mathrm{cl}_{Th}(T(S))$ はコンパクトとなる．それを Teichmüller 空間の **Thurston コンパクト化**と呼ぶ．Thurston は $\mathrm{cl}_{Th}(T(S))$ が集合としては $\Phi_{Th}(T(S)) \cup \mathcal{PMF}$ と一致して，$6g-6+2n$ 次元の閉球 $\mathbb{B}^{6g-6+2n}$ と同相になることを示した．測地カレント（Liouville カレント）を用いると双曲的長さ $\ell_y(\alpha)$ はタイヒミュラー空間の点 y との交点数と考えられる（[1], [2], [4]）．そのため，$\tilde{\Phi}_{Th}(y)$ を y の一つの実体化（$\mathcal{S}$ 上の関数としての実体化）と考えて，

$$i(\tilde{\Phi}_{Th}(y), \alpha) = \ell_y(\alpha) \tag{1.5}$$

と $\tilde{\Phi}_{Th}(y)$ と α の交点数を定義する．この表記により，写像 (1.4) は

$$T(S) \ni y \mapsto [\mathcal{S} \ni \beta \mapsto i(\tilde{\Phi}_{Th}(y), \beta)] \in \mathcal{R} \tag{1.6}$$

のように書くことも出来る．

曲面 S 上の向きを保つ同相写像のホモトピー類のなす群を写像類群といい $\mathrm{MCG}(S)$ と書く．$\mathrm{MCG}(S)$ の各元は Thurston コンパクト化 $\mathrm{cl}_{Th}(T(S))$ に自然に同相写像として作用する．Brouwer の不動点定理から $[f]$ の作用は Thurston コンパクト化 $\mathrm{cl}_{Th}(T(S))$ に固定点を持つ．W. Thurston はその固定点となる測度付き葉層構造の与える幾何学的性質を用いて写像類群 $[f] \in \mathrm{MCG}(S)$ の元を分類した（[4], [18]）．

1.1.3. まとめ

上記のように，ここでいう Thurston 理論は「**交点数関数を用いた幾何構造の空間の幾何学**」である．つまり，Thurston 埋め込みでは標識付きリーマン面を双曲的長さを用いて交点数関数上の関数と考えて，その全体を完備化した空間を用いて理論を展開している．ここでは紙数の関係でその詳細を書くことが出来ないが，空間 $\mathcal{MF}$ や $\mathcal{PMF}$ は同相写像の分類だけではなく，クライン群論などさまざまな研究で現れる基本的かつ重要な空間であることは注意しておく．

1.2. 一つの動機：Teichmüller 空間の幾何構造と Thurston 理論

本研究の動機の一つに，このような「交点数関数を用いた幾何構造の空間の幾何学」を用いて，Teichmüller 空間上の Teichmüller 距離に関する幾何を展開することを考えてみたい，ということがある．つまり，(2.1) に与えるように Teichmüller 空間上の Teichmüller 距離は擬等角写像から定まる解析学的な対象であり，上記の完備化 $\mathcal{MF}$ は位相幾何学的な対象である．大げさに言うと，擬等角写像（擬等角変形）のような解析的対象（連続的対象）と単純閉曲線のような位相幾何学的対象（離散的対象）を橋渡しが出来るような『関係』を定式化すれば，両者の理論の発展に寄与できるのではないかと期待する，ということである．

1.3. 様々な幾何構造における Thurston 理論

このような考え方は Thurston 以降では例えば次のようなものがある．

(1) S 上の測地カレントの空間の交点数関数を用いた $\mathcal{R}$ への写像（Bonahon, Otal, Duchin-Leiningher-Rafi）：特に Teichmüller 空間は Liouville カレントを用いて測地カレントの空間内に実現されて，この写像との合成を考えることにより Thurston 埋め込みが復元される．

(2) S 上の特異平坦構造空間の$\mathcal{C}(S)$への埋め込みを通した実現（Duchin-Leiningher-Rafi）．この場合境界は，部分的平坦構造と部分的測度付き葉層構造のなす混合構造の空間となる．この埋め込みは特異平坦構造空間の測地カレントの空間への埋め込みと，(1) に与えた測地カレントからの写像を合成することにより与えられる．

(3) 極値的長さを用いた Teichmüller 空間の実現（Kerckhoff, Gardiner-Masur）．このコンパクト化は**Gardiner-Masur コンパクト化**と呼ぶ．このコンパクト化については後に触れる．

(4) 単純閉曲線がピンチした階層への Weil-Petersson 距離を考えることによる埋め込み（山田，大鹿-山田-宮地，藤原）：この埋め込みは Weil-Petersson 幾何学においてTeichmüller空間を凸集合として実現し，ある意味で「Teichmüller 空間を外側」から見る幾何学である．

上記の (1) と (2) では，幾何学的対象に対して**交点数**が定義されて Thurston 理論が展開されている．実際，このような交点数は測地カレントの交点数関数から定まっている．後述するように，(3) に与えた極値的長さを用いた Teichmüller 空間の実現においても交点数関数が定義される．(4) の埋め込みにおいての交点数関数については（私が知る限り）何も知られていない．

2. 極値的長さの幾何の Thurston 理論

2.1. 準備

2.1.1. Teichmüller 空間と Teichmüller 距離

以下，S はコンパクトな向きづけられた曲面とする．S の **Teichmüller 空間** $T(S)$ とは標識付きリーマン面 (Y, f) の Teichmüller 同値類のなす空間である．ここで Y は解析的有限なリーマン面であり $f\colon \mathrm{Int}(S) \to Y$ は向きを保つ同相写像である．２つの標識付きリーマン面 (Y_1, f_1)，(Y_2, f_2) が **Teichmüller 同値**であるとは，$f_2 \circ f_1^{-1}$ とホモトピックな Y_1 から Y_2 への等角写像が存在することである．２つのリーマン面間の向きを保つ同相写像 $f\colon Y_1 \to Y_2$ に対して

$$K^*(f) = \inf\{K(g) \mid g\colon Y_1 \to Y_2 \text{ は } f \text{ とホモトピックな擬等角写像}\}$$

と定義する．このとき **Teichmüller 距離** d_T は

$$d_T(y_1, y_2) = \frac{1}{2}\log K^*(f_2 \circ f_1^{-1}) \tag{2.1}$$

により定義される Teichmüller 空間上の完備な距離である．

2.1.2. 極値的長さと Kerckhoff の公式

$\alpha \in \mathcal{S}$ と $y = (Y, f) \in T(S)$ に対して

$$\mathrm{Ext}_y(\alpha) = \inf_A\{1/\mathrm{Mod}(A)\} \tag{2.2}$$

として，これを **y 上の α の極値的長さ**と呼ぶ．但し，(2.2) の下限は $f(\alpha)$ とホモトピックな Y 上の円環 A を動き，$\mathrm{Mod}(A)$ は円環 A もモジュラスである．このとき，次の

Kerckhoffの公式が成立する．

$$d_T(y_1, y_2) = \frac{1}{2}\log\sup_{\alpha\in\mathcal{S}}\frac{\mathrm{Ext}_{y_1}(\alpha)}{\mathrm{Ext}_{y_2}(\alpha)} \tag{2.3}$$

この公式により，Teichmüller距離に関する幾何学を**極値的長さの幾何学（extremal length geometry）**と呼ばれる．

2.2. 極値的長さの幾何のThurston理論

極値的長さを用いて前章の意味のThurston理論を展開する．埋め込みは

$$\tilde{\Phi}_{GM}\colon T(S)\ni y\mapsto [\mathcal{S}\ni\alpha\mapsto \mathrm{Ext}_y(\alpha)^{1/2}]\in\mathcal{R} \tag{2.4}$$

の射影化 $\Phi_{GM}=\mathrm{proj}\circ\tilde{\Phi}_{GM}\colon T(S)\to\mathcal{PR}$ である．写像 Φ_{GM} は埋め込みであり，像は相対コンパクトである（Gardiner-Masur）．この埋め込み Φ_{GM} を**Gardiner-Masur埋め込み**と呼び，このコンパクト化 $\mathrm{cl}_{GM}(T(S))$ を**Gardiner-Masurコンパクト化**と呼び，境界 $\partial_{GM}T(S)=\mathrm{cl}_{GM}(T(S))-\Phi_{GM}(T(S))$ を**Gardiner-Masur境界**と呼ぶ．GardinerとMasurは $\mathcal{PMF}\subset\partial_{GM}T(S)$ を示した．このとき

$$\mathcal{C}_{GM}=\mathrm{proj}^{-1}(\mathrm{cl}_{GM}(T(S)))\cup\{0\}\subset\mathcal{R}$$

とする．定義より写像(2.4)の像は $\mathcal{C}_{GM}$ に含まれている．また $\mathcal{PMF}\subset\partial_{GM}T(S)$ より $\mathcal{MF}\subset\mathcal{C}_{GM}$ である．

定理 1 (統一定理([14]))**.** 次を満たす連続写像

$$i\colon\mathcal{C}_{GM}\times\mathcal{C}_{GM}\to[0,\infty)$$

が一意的に存在する．

(i) 任意の $y\in T(S)$ に対して

$$i(\tilde{\Phi}_{GM}(y),\alpha)=\mathrm{Ext}_y(\alpha)^{1/2} \tag{2.5}$$

が任意の $\alpha\in\mathcal{S}$ に対して成立する．

(ii) $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\in\mathcal{C}_{GM}$ に対して $i(\mathfrak{a},\mathfrak{b})=i(\mathfrak{b},\mathfrak{a})$ が成立する．

(iii) $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\in\mathcal{C}_{GM}$ と $t,s\geq 0$ に対して $i(t\mathfrak{a},s\mathfrak{b})=ts\,i(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ が成立する．

(iv) $y,z\in T(S)$ に対して，

$$i(\tilde{\Phi}_{GM}(y),\tilde{\Phi}_{GM}(z))=\exp(d_T(y,z)).$$

である．特に $y\in T(S)$ に対して，$i(\tilde{\Phi}_{GM}(y),\tilde{\Phi}_{GM}(y))=1$ が成立する．

(v) 測度付き葉層構造 $F,G\in\mathcal{MF}\subset\mathcal{C}_{GM}$ に対して，値 $i(F,G)$ は通常の幾何学的交点数と一致する．

このように，極値的長さの幾何学に関するThurston理論を展開することが出来ることがわかる．ここで(1.4)と(2.4)，および(1.5)と(2.5)はThurston埋め込みとGardiner埋めこみの間で比較される性質である．

2.3. Teichmüller 空間上の Gromov 積

定理 1 の性質 (i) より埋め込み $\tilde{\Phi}_{GM}$ は無限遠点で発散してしまうため，実際に Teichmüller 空間上で交点数関数に関する幾何を展開するためには，埋め込み $\tilde{\Phi}_{GM}$ の代わりに無限遠において安定した $\mathcal{C}_{GM}$ への埋め込みを考える必要がある．

点 $x_0 \in T(S)$ を固定する．このとき

$$\Psi_{GM} \colon T(S) \ni y \mapsto [\mathcal{S} \ni \alpha \mapsto K_y^{-1/2}\mathrm{Ext}_y(\alpha)^{1/2}] \in \mathcal{R} \tag{2.6}$$

と定義する．ここで $x_0 = (X, f_0)$ および $y = (Y, f)$ とするとき

$$K_y = \exp(2d_T(x_0, y)) = K^*(f \circ f_0^{-1})$$

である．このとき x_0 **を基点とする交点数関数** i_{x_0} を

$$i_{x_0}(y_1, y_2) = i(\Psi_{GM}(y_1), \Psi_{GM}(y_2)) \quad (y_1, y_2 \in T(S))$$

と定義する．計算により，

$$\begin{aligned} i_{x_0}(y_1, y_2) &= i\left(K_{y_1}^{-1/2}\tilde{\Phi}_{GM}(y_1), K_{y_2}^{-1/2}\tilde{\Phi}_{GM}(y_2)\right) \\ &= \exp(d_T(y_1, y_2) - d_T(x_0, y_1) - d_T(x_0, y_2)) \\ &= \exp(-2\langle y_1 \,|\, y_2\rangle_{x_0}) \end{aligned}$$

が成立する．ここで

$$\langle y_1 \,|\, y_2\rangle_{x_0} = \frac{1}{2}\left(d_T(x_0, y_1) + d_T(x_0, y_2) - d_T(y_1, y_2)\right)$$

は x_0 を基点とする $(T(S), d_T)$ 上の **Gromov 積**である．

定理 2 (交点数関数と Gromov 積 ([14]))．埋め込み Ψ_{GM} は *Gardiner-Masur* コンパクト化から $\mathcal{C}_{GM}$ の中への同相写像に拡張する．特に，x_0 を基点とする交点数関数 i_{x_0} は *Gardiner-Masur* コンパクト化に連続拡張する．さらに任意の $[F], [G] \in \mathcal{PMF} \subset \partial_{GM}T(S)$ に対して

$$i_{x_0}([F], [G]) = \frac{i(F, G)}{\mathrm{Ext}_{x_0}(F)^{1/2}\mathrm{Ext}_{x_0}(G)^{1/2}}$$

が成立する．

■ **無限遠での関係．** 解析的対象である Teichmüller 距離（擬等角写像論）と位相幾何学的対象である交点数関数が Teichmüller 距離の Gromov 積を通して無限遠で関係していることがわかる．実際，$x_n = (X_n, f_n)$，$y_m = (Y_m, g_m)$ 及び $[F], [G] \in \mathcal{PMF}$ に対して $x_n \to [F]$, $y_m \to [G]$（$n, m \to \infty$）とするとき，

$$\frac{K^*(g_m \circ f_n^{-1})}{K^*(f_n \circ f_0^{-1})K^*(g_m \circ f_0^{-1})} = \exp\left(-4\langle x_n \,|\, y_m\rangle_{x_0}\right) \to \frac{i(F, G)^2}{\mathrm{Ext}_{x_0}(F)\mathrm{Ext}_{x_0}(G)}$$

（$n, m \to \infty$）が成立する．

3. Teichmüller空間の等長変換の無限遠での振る舞い

有限個の例外を除き，Teichmüller 空間の Teichmüller 距離に関する等長変換群は拡張された写像類群 $\mathrm{MCG}^*(S)$（向きを反対にする同相写像を含む）である（下記の定理4参照）．そのため Thurston 理論，つまり，擬等角写像の退化を用いて位相幾何学への応用を考えた場合，Teichmüller 空間の無限遠において等長同型を特徴付けるような，等長写像の『“程よい” 離散化（粗化）』が必要となると考えられる．ここでは，『程よい離散化』を構成することを目標にして，Teichmüller 空間に作用する粗い（連続でない）写像について議論する．

3.1. 無限に収束する点列と漸近的に区別できない点列

(X, d_X) を距離空間とする．基点 $x_0 \in X$ を固定し $\langle x_2 \,|\, x_2 \rangle_{x_0}$ を (X, d_X) での Gromov 積とする．点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ が

$$\langle x_n \,|\, x_m \rangle_{x_0} \to \infty \quad (n, m \to \infty)$$

を満たす時，**無限遠に収束する**という．以下特に断らなければ点列は無限遠に収束するものとする．２つの点列 $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \mathbf{y} = \{y_m\}_{m=1}^{\infty} \subset X$ が

$$\langle x_n \,|\, y_m \rangle_{x_0} \to \infty \quad (n, m \to \infty)$$

を満たす時，**漸近的に区別できない (visually indistinguishable)** という．このとき $\mathbf{x} \sim_{vi} \mathbf{y}$ と書き，

$$\mathsf{Vis}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{y} \text{ は } \mathbf{y} \sim_{vi} \mathbf{x} \text{ を満たす点列}\}$$

とする．よく知られるように, (X, d_X) が Gromov 双曲空間の場合には関係「漸近的に区別できない」は無限遠に収束する点列の全体に同値関係を与える．実際，その商集合が Gromov 境界となり $\mathsf{Vis}(\mathbf{x})$ は境界点を表す．

■ **Teichmüller空間の非Gromov双曲性．**　この記法を用いると，S が 1 つ穴あきトーラスもしくは 4 つ穴あき球面ではない場合，S の Teichmüller 空間が Teichmüller 距離に関して Gromov 双曲的でないことを説明することは容易である．この場合，$(T(S), d_T)$ 上では関係「漸近的に区別できない」は無限遠に収束する点列の全体に同値関係にならないからである．

　実際，$\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{S}$ を $i(\alpha, \beta) = i(\beta, \gamma) = 0$, $i(\alpha, \gamma) \neq 0$ を満たすようにとる．このとき $[\alpha], [\beta], [\gamma] \in \mathcal{PMF} \subset \partial_{GM} T(S)$ に収束する点列をそれぞれ $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ とすれば，定理 2 により，$\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ はそれぞれ無限遠に収束する点列であり，$\mathbf{x} \sim_{vi} \mathbf{y}$，$\mathbf{y} \sim_{vi} \mathbf{z}$ であるが，$\mathbf{x} \sim_{vi} \mathbf{z}$ ではない．

3.2. 漸近的に保守的な写像のなすモノイドと商群

引き続き (X, d_X) を距離空間とする．このとき距離空間の間の写像 $\omega\colon X \to Y$ が，『任意の無限遠に収束する点列 $\mathbf{x}$ 及び $\mathbf{y}$ に対して $\mathbf{x} \sim_{vi} \mathbf{y}$ であることと $\omega(\mathbf{x}) \sim_{vi} \omega(\mathbf{y})$ が同値である』が成立する時，**漸近的に保守的である（Asymptotically conservative）**という ([15])．定義により漸近的に保守的である写像は無限遠に収束する点列を無限遠に収束する点列に写す．

　漸近的に保守的である写像に２つの漸近的保守的な写像 ω_1, ω_2 について『２つの点列 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ について $\mathsf{Vis}(\mathbf{x}) = \mathsf{Vis}(\mathbf{y})$ であれば，$\mathsf{Vis}(\omega_1(\mathbf{x})) = \mathsf{Vis}(\omega_2(\mathbf{y}))$ である』が成立す

る時，それらの写像は**無限遠で近い**という．漸近的に保守的である写像$\omega\colon X \to Y$について，$\omega \circ \omega'$および$\omega' \circ \omega$が恒等写像と無限遠で近くなるような 漸近的に保守的である写像$\omega'\colon Y \to X$が存在する時に，ωは**可逆**であるという．このときω'を**漸近的逆写像**と呼ぶ．距離空間の間の等長同型写像は可逆な漸近的に保守的な写像である．

X上の可逆な漸近的に保守的である写像の全体を$\mathrm{AC}_{\mathrm{inv}}(X)$と書く．$\mathrm{AC}_{\mathrm{inv}}(X)$は写像の合成に関してモノイドとなる．そして$\mathrm{AC}_{\mathrm{inv}}(X)$上において，関係『無限遠で近い』は半群合同になり，その合同類集合$\mathfrak{AC}(X)$は自然に群となる．特にωの合同類の逆元はωの漸近的逆写像の合同類である（[15, §2]）．

3.3. Teichmüller 空間上の漸近的に保守的な写像

■ **等長写像の無限遠での剛性．** 次が成立する．

定理 3 (剛性定理 ([15]))**.** Sが一つ穴あきトーラスもしくは4つ穴あき球面でないとする．$\mathbb{X}(S)$をSの曲線複体とする．このとき，全射準同型

$$\Xi\colon \mathrm{AC}_{\mathrm{inv}}(T(S)) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{X}(S))$$

で準同型

$$\mathfrak{AC}(T(S)) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{X}(S))$$

を誘導し，かつ次の可換図式をみたすものが存在する：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{MCG}^*(S) \arrow[r, "\mathcal{I}_0"] & \mathrm{Isom}(T(S)) \arrow[r, "\mathcal{I}"] \arrow[dr, "group\ iso"] & \mathrm{AC}_{\mathrm{inv}}(T(S)) \arrow[d, "proj"] \arrow[dr, "\Xi"] & \\
& & \mathfrak{AC}(T(S)) \arrow[r, "group\ iso"] & \mathrm{Aut}(\mathbb{X}(S))
\end{tikzcd}$$

ここで$\mathrm{Aut}(\mathbb{X}(S))$は$\mathbb{X}(S)$の自己同型群，$I_0\colon \mathrm{MCG}^*(S) \to \mathrm{Isom}(T(S))$は自然な準同型，そして$\mathcal{I}\colon \mathrm{Isom}(T(S)) \to \mathrm{AC}_{\mathrm{inv}}(T(S))$は包含写像である．

ここで，Sが2つ穴あきトーラス以外のときには$\mathrm{MCG}^*(S)$はその自然な作用で$\mathrm{Aut}(\mathbb{X}(S))$と同型であることが知られている (Ivanov [8], Korkmaz [11], Luo [12])．故に，特に次の定理の別証明を得る（cf. [19], [5], [9], [13]）

定理 4 (Royden, Earle-Kra, Ivanov, Markovic)**.** Sが一つ穴あきトーラス，2つ穴あきトーラスもしくは4つ穴あき球面でないとする．このとき自然な作用による準同型$\mathrm{MCG}^*(S) \to \mathrm{Isom}(T(S))$は同型である．

■ **概相似写像．** 距離空間の間の写像$\omega\colon X \to Y$が

$$|d_Y(\omega(x_1), \omega(x_2)) - K d_X(x_1, x_2)| \le D \quad (x_1, x_2 \in X)$$

を満たす時(K, D)**-概相似写像**と呼ぶ．概相似写像は漸近的に保守的である．

定理 5 (概相似写像の非存在 ([15]))**.** $K \neq 1$に対して，*Teichmüller*空間上に漸近的逆写像をを持つような(K, D)-概相似写像は存在しない．

この定理から Teichmüller 空間はユークリッド空間的ではないことがわかる．

参考文献

[1] F. Bonahon, Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3, Ann. of Math. **124** (1986), no. 1, 71–158.

[2] F. Bonahon, The geometry of Teichmller space via geodesic currents, Invent. Math. **92** (1988), no. 1, 139–162.

[3] M. Duchin, C. Leininger, and K. Rafi, Length spectra and degeneration of flat metrics, Invent. Math. **182** (2010), no. 2, 231–277.

[4] A. Douady, A. Fathi, D. Fried, F. Laudenbach, V. Poénaru, and M. Shub, *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Séminaire Orsay (seconde édition). Astérisque No. 66-67, Société Mathématique de France, Paris (1991).

[5] C. Earle and I. Kra, On isometries between Teichmüller spaces. Duke Math. J. **41**, 583–591 (1974).

[6] K. Fujiwara, Geometry of the Funk metric on Weil-Petersson spaces, Math. Z. **274**, 647–665 (2013).

[7] F. Gardiner and H. Masur, Extremal length geometry of Teichmüller space. Complex Variables Theory Appl. **16**, 209–237 (1991).

[8] N. Ivanov, Automorphisms of complexes of curves and of Teichmüller spaces, International Mathematics Research Notices, **14**, 651-666 (1997).

[9] N. Ivanov, Isometries of Teichmüller spaces from the point of view of Mostow rigidity, *Topology, Ergodic Theory, Real Algebraic Geometry* (eds.Turaev, V., Vershik, A.), pp. 131–149, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol **202**, American Mathematical Society (2001)

[10] S. Kerckhoff, The asymptotic geometry of Teichmüller space, Topology **19**, 23–41 (1980).

[11] M. Korkmaz, Automorphisms of complexes of curves on punctured spheres and punctured tori, Topology and its Applications **95**, 85–111 (1999).

[12] F. Luo, Automorphisms of the complexes and curves, Topology **39**, 283–298 (2000).

[13] V. Markovic, Biholomorphic maps between Teichmüller spaces, Duke Math. **120**, 405–431 (2003).

[14] H. Miyachi, Unification of the extremal length geometry on Teichmüller space via intersection number, To appear in Math. Z.

[15] H. Miyachi, Mappings which are conservative with the Gromov product at infinity, Math Arxiv: `http://arxiv.org/abs/1306.1424`.

[16] K. Ohshika, S. Yamada, and H. Miyachi, Weil-Petersson Funk metric on Teichmüller space, To appear in Handbook of Hilbert/Funk geometry

[17] J. Otal, Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative, Ann. of Math. **131** (1990), 151–162.

[18] W. Thurston, On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces, Bulletion of AMS **19** (1988), 417–431

[19] H. Royden, Automorphisms and isometries of Teichmüller space, *Advances in the Theory of Riemann Surfaces* (Proc. Conf., Stony Brook, N.Y., 1969), Ann. of Math. Studies, No. **66**. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., pp. 369–383 (1971).

半完全正則微分のなす空間の再生核の多変数的変動

濱野 佐知子　(福島大学)*

1. 序

$\mathbb{C}_z$ 上の滑らかな閉曲線 $C_1, \ldots, C_\nu$ で囲まれた領域 D での L^2 正則関数のなすヒルベルト空間 $A(D)$ の Bergman 核関数を $K(z,\zeta)$ および Bergman 核を $K(\zeta,\zeta)$ とおく.

補題 1 ([4], [5]) D の点 ζ を極とするグリーン関数 $g(z,\zeta)$ およびロバン定数 $\lambda(\zeta)$ を用いて再生核 K の具体的表現を得る:

$$K(z,\zeta) = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 g(z,\zeta)}{\partial z \partial \bar{\zeta}} \text{ (by M. Schiffer)}, \quad K(\zeta,\zeta) = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial^2 \lambda(\zeta)}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \text{ (by N. Suita)}.$$

D には Bergman 核関数を用いて, D の任意の双正則変換により不変な Bergman 計量 $K(\zeta,\zeta)|d\zeta|^2$ が導入される.

複素パラメータ $t \in B = \{|t| < \rho\} \subset \mathbb{C}$ を止めるごとに $\mathbb{C}_z$ 上の有界領域 $D(t)$ を考える. $t \in B$ および $D(t)$ の点 ζ を固定し, 空間 $A(D(t))$ の Bergman 核を $K(t,\zeta,\zeta)$ とおく.

定理 1 ([米谷-山口, 2004]) $\mathcal{D} = \cup_{t\in B}(t, D(t))$ が $B \times \mathbb{C}_z$ での 2 次元擬凸状領域ならば, $\log K(t,\zeta,\zeta)$ は $\mathcal{D}$ 上多重劣調和関数である.

$A(D)$ のうち積分が 1 価である関数のなす部分ヒルベルト空間, すなわち完全正則微分のなす空間を $S(D)$ とおき, その再生核関数を $\widetilde{K}(z,\zeta)$ とする. このとき, 直交分解 $A(D) = S(D) \oplus S(D)^\perp$ を考えると, $\widetilde{K}(z,\zeta)$ は $K(z,\zeta)$ の $S(D)$ への直交射影である.

補題 2 ([2]) 2 点 $\{0,\zeta\} \subset D$ で $z^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} B_n(z-\zeta)^n$ を満たし, D を円弧截線領域に写す写像を $Q_1(z,\zeta)$, 放射截線領域に写す写像を $Q_0(z,\zeta)$ とする. このとき, L_i-主関数 $q_i(z,\zeta) := \log|Q_i|$ $(i = 1, 0)$ は 2 定点 $\{0,\zeta\}$ で極 $-\log|z|$, $\log|z-\zeta|$ をもち, 境界で L_i-条件を満たす調和関数である. L_i-定数 $\beta_i(\zeta) := \log|\frac{dQ_i}{dz}(\zeta,\zeta)|$ の差 $h(\zeta) := \beta_1(\zeta) - \beta_0(\zeta)$ を $(D, 0, \zeta)$ に関する調和スパンとよぶ. このとき,

$$\widetilde{K}(z,\zeta) = \frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 q_1(z,\zeta)}{\partial z \partial \bar{\zeta}} = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 q_0(z,\zeta)}{\partial z \partial \bar{\zeta}}, \qquad \widetilde{K}(\zeta,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2 h(\zeta)}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} = s(\zeta).$$

ここで, $s(\zeta)$ は 1 点 ζ で極 $\mathrm{Re}\,\frac{1}{z-\zeta}$ をもつ主関数から誘導される (D,ζ) に関する Schiffer スパンである.

[2] では $\widetilde{K}(\zeta,\zeta)|d\zeta|^2$ は平面領域 D の各点で負の曲率をもつ完備な計量であることを示した. [Zarankiewicz, 1934] は円環領域において $\widetilde{K}(\zeta,\zeta)|d\zeta|^2$ の曲率を計算している.

定理 2 ([2]) $\mathcal{D} = \cup_{t\in B}(t, D(t))$ が $B \times \mathbb{C}_z$ での 2 次元擬凸状領域ならば, $\log \widetilde{K}(t,\zeta,\zeta)$ は $\mathcal{D}$ 上多重劣調和関数である.

本研究は科研費 若手研究 (B)(課題番号:23740098) の助成を受けたものです.
2010 Mathematics Subject Classification: 32U05, 32F45, 30F30, 30C40
キーワード：擬凸状領域, 再生核, 計量, スパン
* 〒960-1296　福島市金谷川 1 番地 福島大学 人間発達文化学類
e-mail: hamano@educ.fukushima-u.ac.jp

定理1はファイバー$D(t)$が有限種数の境界つきリーマン面$(g\geq 0)$からなるスタイン多様体まで拡張できる．しかし, 定理2はプラナーリーマン面$(g=0)$に制限した結果であった．それは$g=0$の場合は完全正則微分のなす空間の再生核$\widetilde{K}(\zeta,\zeta)$ はSchifferスパンに等しく, その幾何学的性質[1] を使ったこと, および, 証明の際に利用したL_0-主関数$q_0(t,z)$および調和スパン$h(t)$ の2階変分公式が種数によるためであった:

補題 3 ([3]) $R(t)$は種数$g(\geq 0)$のリーマン面で, $R(t)\supset\{0,\zeta(t)\}$, $z=\zeta(t)$はBで正則とし, $R(t)$の標準基底$\{A_k(t),B_k(t)\}_{k=1}^g$ はB上連続と仮定する．このとき,

$$\frac{\partial^2 h(t)}{\partial t\partial\bar{t}}=\frac{1}{\pi}\int_{\partial R(t)}k_2(t,z)\left(\left|\frac{\partial q_1}{\partial z}\right|^2+\left|\frac{\partial q_0}{\partial z}\right|^2\right)ds_z+\frac{4}{\pi}\iint_{R(t)}\left(\left|\frac{\partial^2 q_1}{\partial z\partial\bar{t}}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 q_0}{\partial z\partial\bar{t}}\right|^2\right)dxdy$$
$$+\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Im}\left\{\sum_{k=1}^{g}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{A_k(t)}*dq_0(t,z)\right)\frac{\partial}{\partial\bar{t}}\left(\int_{B_k(t)}*dq_0(t,z)\right)\right\}.$$

ここで, $k_2(t,z)$は境界$\partial\mathcal{R}$のレビ形式$L(\varphi)$から生じる関数 $k_2(t,z):=L(\varphi)/|\frac{\partial\varphi}{\partial z}|^3$.

2. 今回の結果： 種数正のリーマン面への拡張

有限種数の滑らかな境界$(C_1,\ldots,C_\nu)$ をもつリーマン面R 上のL^2 正則微分$\omega=f(z)dz$のなすヒルベルト空間を$A(R)$とおく．$A(R)$のうち半完全正則微分のなす空間$S(R)$を考える．$S(R)$は$A(R)$の閉部分空間であるから, $S(R)$の再生核関数$\widetilde{K}(z,\zeta)dzd\bar{\zeta}$および再生核$\widetilde{K}(\zeta,\zeta)|d\zeta|^2$が存在する．

補題 4 上述の再生核関数および再生核$\widetilde{K}$の具体的表現は

$$\widetilde{K}(z,\zeta)=\frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 q_1(z,\zeta)}{\partial z\partial\bar{\zeta}},\qquad \widetilde{K}(\zeta,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2\beta_1(\zeta)}{\partial\zeta\partial\bar{\zeta}}.$$

ここで, $q_1(z,\zeta)$ は$(R,0,\zeta)$に関するL_1-主関数, $\beta_1(\zeta)$はL_1-定数である．

境界つきリーマン面$R(t)$, $t\in B$は2点$\{0,\zeta(t)\}$を含み, $z=\zeta(t)$はBで正則と仮定する．$t\in B$および$R(t)$の点ζを固定し, 空間$S(R(t))$の再生核を$\widetilde{K}(t,\zeta,\zeta)$とおく．

定理 3 $\mathcal{R}=\cup_{t\in B}(t,R(t))$が滑らかな変動からなる$B\times\mathbb{C}_z$ 上の2次元擬凸状領域ならば, $\log\widetilde{K}(t,\zeta,\zeta)$ は$\mathcal{R}$上多重劣調和関数である．

次は吹田計量$e^{-\lambda(\zeta)}|d\zeta|^2$にあたる計量$e^{-\beta_1(\zeta)}|d\zeta|^2$の円環における性質を調べます．(cf. [BŁocki])

参考文献

[1] S. Hamano, *Uniformity of holomorphic families of non-homeomorphic planar Riemann surfaces*, Annales Polonici Mathematici (to appear).

[2] S. Hamano, *Log-plurisubharmonicity of metric deformations induced by Schiffer and harmonic spans* (submitted).

[3] S. Hamano, F. Maitani and H. Yamaguchi, *Variation formulas for principal functions (II) Applications to variation for the harmonic spans*, Nagoya M. J. **204** (2011), 19–56.

[4] M. Schiffer, *The kernel function of an orthonormal system*, Duke Math. J. **13** No.4 (1946), 529–540.

[5] N. Suita, *Capacities and kernels on Riemann surfaces*, Arch.Rat.Mech.Anal. **46** (1972), 212–217.

パラメータ付き局所コホモロジーを利用した対数的ベクトル場の計算について

鍋島克輔　(徳島大学)[*1]
田島慎一　(筑波大学)[*2]

$\mathbb{C}^n$ の原点 O の近傍 X において正則な函数 $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が定める超局面を $S = \{x \in X | f(x) = 0\}$ とする．また，超局面 S は原点に孤立特異点を持つとする．X 上の正則函数のなす層を $\mathcal{O}_X$ で表す．

目的：本講演では，パラメータ付き代数的局所コホモロジーを用いて，S に沿った (パラメータ付き) 対数的ベクトル場の計算方法を紹介する．

1. 記号および基礎理論

定義 **1.** 正則ベクトル場

$$v = a_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + a_2(x)\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + a_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}, \quad a_i(x) \in \mathcal{O}_X, \quad i = 1, \ldots, n$$

が S に沿って対数的とは，$v(f) \in \langle f \rangle$ を満たすときにいう．ここで，$\langle f \rangle$ は f によって生成される $\mathcal{O}_X$ のイデアルである。

X 上で S に沿った対数的ベクトル場のなす層を $\mathcal{D}er_X(-\log S)$ で表す．

超平面 S の polar variety Γ_f を $\Gamma_f = \left\{ x \in X \,\middle|\, \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_3} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \right\}$ と定義する．また，原点 O に台を持つ代数的局所コホモロジーを $\mathcal{H}^n_{\{O\}}(\mathcal{O}_X)$ とし，次の代数的局所コホモロジー類を考える

$$H_{T_f} = \left\{ \psi \in \mathcal{H}^n_{\{O\}}(\mathcal{O}_X) \,\middle|\, f\psi = \frac{\partial f}{\partial x_1}\psi = \frac{\partial f}{\partial x_2}\psi = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}\psi = 0 \right\}$$

$$H_{\Gamma_f} = \left\{ \psi \in \mathcal{H}^n_{\{O\}}(\mathcal{O}_X) \,\middle|\, f\psi = \frac{\partial f}{\partial x_2}\psi = \frac{\partial f}{\partial x_3}\psi = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}\psi = 0 \right\}.$$

H_{Γ_f} を $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ 倍した集合を $H_{\Phi_f} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(H_{\Gamma_f}\right)$ とすると，$0 \to H_{T_f} \to H_{\Gamma_f} \xrightarrow{\frac{\partial f}{\partial x_1}} H_{\Phi_f} \to 0$ は完全列となる [3]．また， $H_{T_f}, H_{\Gamma_f}, H_{\Phi_f}$ のゼロ化イデアルは

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_X}(H_{T_f}) = \left\langle f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle, \ \mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_X}(H_{\Gamma_f}) = \left\langle f, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle,$$

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_X}(H_{\Phi_f}) = \left\{ a(x) \in \mathcal{O}_{X,O} \,\middle|\, a(x)\frac{\partial f}{\partial x_1} \in \left\langle f, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle \right\}$$

2010 Mathematics Subject Classification: 14B15, 14F10
キーワード：algebraic local cohomology, qusihomogeneous singularities, logarithmic vector fields
[*1] 〒770-8502　徳島市南常三島町 1-1 徳島大学総合科学部
e-mail: nabeshima@tokushima-u.ac.jp
[*2] 〒305-8571　つくば市天王台 1-1-1 筑波大学大学院数理物質系数学域
e-mail: tajima@math.tsukuba.ac.jp

である．このとき，$a(x) \in \mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_X}(H_{\Phi_f})$ ならば, $v(f) = \langle f \rangle$ となる，正則ベクトル場 $v = a(x)\dfrac{\partial}{\partial x_1} + a_2(x)\dfrac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + a_n(x)\dfrac{\partial}{\partial x_n}$ が存在する [3]．ここで，もし $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_X}(H_{\Phi_f})$ のスタンダード基底が分かっているならば，$a(x)$ は，そのスタンダード基底で割られる．この事実は計算アルゴリズムを構成するうえで重要となる．

2. 計算アルゴリズム

特異点の定義方程式の係数にパラメータを含む場合を考える．このとき，対数的ベクトル場は，パラメータの値によって性質が異なり場合分けが必要である．この場合分けは，パラメータ付き代数的局所コホモロジー類の効率的な計算アルゴリズム [1, 2] が既に知られていることより，性質による “良い” 場合分けが可能である．この計算法を使うことによりパラメータ付き対数的ベクトル場を求める．

半擬斉次多項式を $f_t := f_0 + g_t$ と表す．ただし, f_0 は擬斉次部であり係数にパラメーは含まず原点に孤立特異点を持つ，g_t は upper monomial からなる多項式で係数にパラメータ $t = (t_1, \ldots, t_l)$ を含むとする。以下に, $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_X}(H_{\Phi_f})$ のスタンダード基底と，対数的ベクトル場 $\mathcal{D}er_{X,O}(-\log S)$ を計算するアルゴリズムの概略を紹介する。

アルゴリズム

入力： f_t は原点に孤立特異点を持ち係数にパラメータを含む半擬斉次多項式,

出力： パラメータ空間の各 strata に対応する $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_X}(H_{\Phi_f})$ のスタンダード基底と，対数的ベクトル場 $\mathcal{D}er_{X,O}(-\log S)$（スタンダード基底）.

1. H_{Γ_f} のパラメータ付き基底代数的局所コホモロジーを計算する．[1, 2, 4]
2. 1 で得られた各 strata において，$H_{\Phi_f} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(H_{\Gamma_f}\right)$ を計算する．
3. 各 strata において，ベクトル空間 H_{Φ_f} の基底を掃き出し法で計算する．
4. 各 strata において，3 で得られた基底から $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_X}(H_{\Phi_f})$ のスタンダード基底を計算する．
5. 各 strata において，4 で得られたスタンダード基底を利用し対数的ベクトル場 $\mathcal{D}er_{X,O}(-\log S)$ を計算する．すなわち，$b_1(x)a(x)\frac{\partial f}{\partial x_1} + b_2(x)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + b_n(x)\frac{\partial f}{\partial x_n} + b_{n+1}f = 0$ となるパラメータ付き syzygy $(b_1(x)a(x), b_2(x), \ldots, b_n(x))$ を計算する。ただし, $a(x)$ は 4 で得られたスタンダード基底の 1 つの元である．スタンダード基底のすべての元に対してこの計算を行うと対数的ベクトル場を得ることができる．

参考文献

[1] 鍋島克輔, 田島慎一, パラメータ付き代数的局所コホモロジーの計算について–半擬斉次孤立特異点の場合–, 数理解析研究所講究録 **1784**, pp. 111–122, (2012).

[2] K. Nabeshima and S. Tajima, On the computation of algebraic local cohomology classes associated with semi-quasihomogeneous singularities, to appear in Advanced Studies in Pure Mathematics.

[3] S. Tajima, On polar varieties, logarithmic vector fields and holonomic D-modules, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B40**, pp. 41–51, (2013).

[4] S. Tajima, Parametric local cohomology classes and Tjurina stratifications for μ-constant deformations of quasi-homogeneous singularities, to appear.

一般化された擬楕円体に対するgap定理

林本　厚志　(長野工業高等専門学校)*

1. 球に対するgap定理

B_n で n 次元球をあらわす. 典型的なgap定理は次である.

定理 1.1 [H99] $f : B_n \to B_N$ を境界まで C^2 級に拡張できる固有正則写像で, $n > 1, N < 2n-1$ とする. このとき B_n と B_N の自己同型写像の差を省くと $f(z_1, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, z_n, 0, \ldots, 0)$ である.

他に, 上の記号で $n = 2, N = 3$ の場合は4種の写像に分類できる (Faran[F77]), $N = 2n-1$ のときには線形埋め込みか, ホイットニー写像のどちらかに分類できる (Huang-Ji[HJ01]) 等がある. また, 境界までの滑らかさを C^3 級までにすれば, $4 \le n \le N \le 3n-4$ のときに, 定義域と値域の自己同型写像の差を省くと $f = (z_1, \ldots z_{n-1}, z_n \cos\theta, z_1 z_n \sin\theta, \ldots, z_{n-1} z_n \sin\theta, (z_n)^2 \sin\theta, 0, \ldots, 0)$ にできる, という定理もある (Huang-Ji-Xu). gap定理の不思議なところは, ある一定の次元までは同じ写像に0を加えて自明に次元を増やすだけの写像しか出ないのに, ある特定の次元を超えると突然に連続濃度の写像が出てくるところにある. この講演ではこの定理を一般化された擬楕円体の場合に考えてみる.

2. 一般化された擬楕円体に対するgap定理

2.1. 主定理

$$\begin{aligned} &E(m; m_1, \ldots, m_L; \alpha_1, \ldots, \alpha_L) \\ &= \{(z, w_1, \ldots, w_L) \in \mathbf{C} \times \cdots \times \mathbf{C}^{m_1} \times \mathbf{C}^{m_L} : |z|^2 + ||w_1||^{2\alpha_1} + \ldots ||w_L||^{2\alpha_L} < 1\} \quad (1) \end{aligned}$$

とする. ここで $\alpha_1, \ldots, \alpha_L \in \mathbf{N}, w_j = (w_j^1, \ldots, w_j^{m_j}), ||w_j||^2 = |w_j^1|^2 + \cdots + |w_j^{m_j}|^2, m = m_1 + \cdots + m_L,$ とする. $||w||$ の個数を「ブロックの個数」という. この領域を一般化された擬楕円体という. ここで発表する定理は次である.

定理 2.1 $(F, G_1, \ldots, G_L) : E(m; m_1, \ldots, m_L; \alpha_1, \ldots, \alpha_L) \to E(n; n_1, \ldots, n_L; \beta_1, \ldots, \beta_L)$ を固有正則写像で, 境界まで正則的に拡張できるとする. $m_j > 1, n_j < 2m_j - 1$ を仮定する. このとき L 次の置換 σ が存在して $\alpha_j = \beta_{\sigma(j)}$ である. さらに定義域と値域の自己同型写像の差を省いて $(F, G_1, \ldots, G_L) = (z, w_1, 0, \ldots, 0, w_2, 0, \ldots, 0, w_3, 0, \ldots, w_L, 0, \ldots, 0)$ とできる.

注意 1 この定理はすべての m_j, n_j が1の場合 (擬楕円体という) はEbenfelt-Son[ES12] により示されている.

2.2. 証明

2つの一般化された擬楕円体を双正則変換により非有界表現 $\{\mathrm{Im} z < ||w_1||^{2\alpha_1} + \ldots ||w_L||^{2\alpha_L}\}$ で表す. さらに写像を境界まで正則的に拡張し, それを境界に制限して実解析的CR写

* 〒381- 長野市徳間716
e-mail: `atsushi@nagano-nct.ac.jp`

像を得るが, それも元々の写像と同じ記号 $(F, G_1, \dots, G_L)$ で表す. 証明は次に示すように3つのStepsで示される.

Step1 w のブロックが1つの場合に示す. 先ず α と β の関係を求める. $\alpha > \beta$ のとき, α は β の倍数でないとすると写像の最初の成分 F が定数になることが分かり矛盾, よって $\alpha = M\beta$ である. 次に $\alpha \leq \beta$ と仮定したときに $\alpha < \beta$ なら同じく F が定数になることが分かり矛盾. どちらにしても $\alpha = M\beta$ である. さらに $M \neq 1$ であれば, 未定係数法により写像の2つ目の成分について $G = 0$ であることが分かるので, 結局 $\alpha = \beta$ を得る. F, G を斉次式多項式の和に展開して $\mathrm{Im}z = ||w||^{2\alpha}$ のときに $\mathrm{Im}F = ||G||^{2\alpha}$ という式で各次数ごとの比較を行うと, G の斉次1次式のみ残り, それに球のgap定理を適用すると定理 2.1, $L = 1$ の場合が証明される.

Step2 ブロックの個数が一般の時に α_j と β_j の関係を得るために, L 次の置換 σ が存在して任意の $j = 1, \dots, L$ に対して $G_j|_{w_{\sigma(j)=0}} = 0$ であることを示す. 一般化された擬楕円体の境界でレビ形式が退化する集合の考察により, 任意の j に対してある $K(j)$ が存在して $G_j|_{w_{K(j)}} = 0$ であるが, 固有正則写像であることを利用すると K が単射であることが分かり, 置換の存在が言える. これが示されたら, w_j 以外の w_k をゼロにすることでブロックが一つの場合に帰着させることができて, ある L 次の置換 σ が存在して $\alpha_j = \beta_{\sigma(j)}$ を得る.

Step3 ブロックの個数が一般の場合に F, G_j を斉次多項式の和に展開して斉次1次以外の斉次多項式についての関係式を得る. その関係式をみたす斉次式はゼロに限ることを示し, 斉次1次式のみが残ることを示す. 残った斉次1次式に対して球のgap定理を適用してその形を特定する.

参考文献

[F77] Faran. J.,*Maps from the two-ball to the three-ball*, Invent. Matt. 68, 441–475, (1982)

[H99] Huang. X.,*On a linearity problem for proper holomorphic maps between balls in complex spaces of different dimensions*, J. Differential Geom. 51, 13–33, (1999)

[HJ01] Huang. X., Ji. S., *Mapping* B^n *into* B^{2n-1}, Invent. Matt. 145, 219–250, (2001)

[ES12] Ebenfelt. P., Son. D. N. ,*Holomorphic mappings between pseudoellipsoids in different dimension*, arXiv:1210.4434v1[math.CV]

Levi 平坦面の囲む領域における Diederich–Fornaess 指数の局所的な表示公式

足立真訓　(名大・多元数理)*

概　要

複素多様体内の Levi 平坦面の解析において, その囲む領域の弱擬凸性の程度, Levi 葉層の力学系の複雑さの程度は重要な情報である. Brunella [2] は, Levi 平坦面の囲む領域の武内 1 擬凸性と Levi 葉層の法束の正値性の対応を示唆した. この対応の定量化として, Levi 平坦面の囲む領域において武内 1 擬凸な境界距離が与えられた時に, その Diederich–Fornaess 指数と, Levi 葉層の法束に誘導される Hermite 計量の曲率を関連付ける公式を得たので報告する.

1. 背景

X を複素多様体とし, $\mathcal{C}^2$ 級実超曲面 M で囲まれた相対コンパクト領域 Ω を考える. M が **Levi 平坦面**であるとは, M の定義函数 ρ に対し定まる Levi 形式 $i\partial\overline{\partial}\rho|T^{1,0}M$ が M 上恒等的に消えることをいう. これは $T^{1,0}M$ の定める分布の可積分性と同値であり, M は X の非退化複素超曲面による葉層構造 (**Levi 葉層**) を持つことになる.

Levi 平坦面のもっとも基本的な例は, $X = \mathbb{C}^n$, $M = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$ $(n > 1)$ である. コンパクトな X に対して, その中の Levi 平坦面は多くは知られていない. 否定的な場合の先行研究としては, $X = \mathbb{CP}^n$ $(n > 2)$ における Levi 平坦面の非存在定理 (Lins Neto (1999), Siu (2000)) が代表的である. $X = \mathbb{CP}^2$ に対しても Levi 平坦面の非存在が予想されている. この種の問題を考える場合には, Levi 平坦面の囲む領域の弱擬凸性の程度, あるいは, Levi 葉層の力学系の複雑さの程度が重要な情報になると考えられる.

Brunella [2] によれば, この 2 種類の性質の間に, 次の定性的な対応が成り立つ.

定理 (Brunella [2]). M が $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ 級であり, M の Levi 葉層が M の近傍上の正則葉層に拡張すること (例えば, M が実解析的であれば自動的である) を仮定する. この時, M の法束 $N^{1,0} := T^{1,0}X/T^{1,0}M$ の Hermite 計量で曲率形式 ($T^{1,0}M$ 方向について考える) が正となるものが存在すれば, Ω は 1 擬凸である.

[2] では, $N^{1,0}$ の Hermite 計量から Ω 上の 1 擬凸な皆既函数を構成するが, その構成を見ると, より強く Ω の武内 1 擬凸性が従うことが分かる. ここで, Ω の**武内 1 擬凸性**とは, M の定義函数 ρ が存在し, 皆既函数 $\varphi := -\log(-\rho)$ に対して, $i\partial\overline{\partial}\varphi \geq \omega$ (ω は X の Hermite 計量) が Ω 上, あるコンパクト集合を除いて成立することをいう. このとき, $\delta := -\rho$ を**武内 1 擬凸な境界距離**と呼ぶ.

2. 問題と主結果

$\mathcal{C}^3$ 級 Levi 平坦境界 M の領域 Ω において, 武内 1 擬凸な境界距離 δ が与えられた時, Brunella の構成の逆をたどると, δ を境界 M 上で (内部) 法方向に微分した値が法束 $N^{1,0}$ の Hermite 計量 h を定め, その曲率が正となることが分かる.

2010 Mathematics Subject Classification: 32T27; 32V15.
キーワード：Levi 平坦面, Diederich–Fornaess 指数, 法束, 葉層の横断構造.
*e-mail: m08002z@math.nagoya-u.ac.jp
web: http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~m08002z/

この対応の定量化を考えたい．そのために, 次の量を導入する．

定義 (Diederich–Fornaess 指数). 複素多様体 X 内の $\mathcal{C}^2$ 級実超曲面 M で囲まれた相対コンパクト領域 Ω 上の境界距離 δ を考える．各点 $p \in M$ における δ の局所 **Diederich–Fornaess** 指数 $\varepsilon_{DF}(\delta, p)$ を, 点 p のある近傍 U に対し, $-\delta^\varepsilon$ が $\Omega \cap U$ 上 1 擬凸となるような $\varepsilon \in (0,1)$ の上限として定める．そのような ε が存在しない場合は, $\varepsilon_{DF}(\delta, p) := 0$ と定める．また, δ の Diederich–Fornaess 指数 $\varepsilon_{DF}(\delta)$ を $\varepsilon_{DF}(\delta) := \inf_{p \in M} \varepsilon_{DF}(\delta, p)$ で定める．

大沢–Sibony [4] によれば, 境界距離 δ が武内 1 擬凸であることは, δ の Diederich–Fornaess 指数が正であることと同値である．そこで次の形で定量化を考える．

問題. 武内 1 擬凸性と法束の正値性の対応を, 武内 1 擬凸な境界距離の Diederich–Fornaess 指数と, 法束に誘導される Hermite 計量の曲率の対応として定量化できるか？

その答えは肯定的であるが, 表示は予期したより複雑になる．h の通常の曲率以外に, 葉層の力学系理論で使われる別のある種の曲率も必要とする．我々の得た公式は, 次の通りである．

主結果. 複素多様体 X 内の $\mathcal{C}^3$ 級 Levi 平坦面 M で囲まれた相対コンパクト領域 Ω を考える．Ω の武内 1 擬凸な境界距離 δ をとり, それから誘導される法束 $N^{1,0}$ の Hermite 計量 h を考える．この時, 点 $p \in M$ における δ の局所 Diederich–Fornaess 指数は,

$$\varepsilon_{DF}(\delta, p) = \sup\{\varepsilon \in (0,1) \mid i\Theta_h(p) - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} A_h(p) > 0\}$$

と表される．ここで $i\Theta_h := -i\partial_b\overline{\partial}_b \log h$ は, h の葉に沿った ($T^{1,0}M$ 方向の) 曲率形式であり, $A_h := \partial_b \log h \wedge \overline{\partial}_b \log h$ は Frankel [3] の作用積分の被積分項の一般化にあたる．$\partial_b, \overline{\partial}_b$ は $T^{1,0}M$ 方向の正則, 反正則微分作用素を表す．

とくに, $\dim X = 2$ のとき,

$$\varepsilon_{DF}(\delta, p) = \left(1 + \frac{A_h(p)}{i\Theta_h(p)}\right)^{-1}$$

であり, 局所 Diederich–Fornaess 指数が, 2 種類の曲率の比と実質的に等価であることが分かる．

参考文献

[1] M. Adachi, *On several exponents related to Levi-flat real hypersurfaces*, in preparation.

[2] M. Brunella, *On the dynamics of codimension one holomorphic foliations with ample normal bundle*, Indiana Univ. Math. J. **57** (2008), no. 7, 3101–3113.

[3] S. Frankel, *Harmonic analysis of surface group representations to Diff(S^1) and Milnor type inequalities*, Prépublication de l'École Polytechnique **1125** (1995).

[4] T. Ohsawa and N. Sibony, *Bounded p.s.h. functions and pseudoconvexity in Kähler manifold*, Nagoya Math J. **149** (1998), 1–8.

On minimal singular metrics of certain class of line bundles whose section ring is not finitely generated

小池 貴之　(東京大学)*

X を射影的で滑らかな複素代数多様体, L を X 上の (擬有効) 正則直線束とする. $h_{\min,L}$ を L の最小特異計量 (曲率カレントが半正なる特異エルミート計量の内最も発散が緩やかなもの [DPS]) とすると, L がネフかつ巨大である時にルロン数のレヴェルでは $h_{\min,L}$ の発散は検出されないことが Boucksom によって知られている.

定理 1. *([B, 3.2])* L *がネフかつ巨大ならば, 各* $x \in X$ *について* $\nu(\varphi_{\min,L}, x) = 0$ *である.* □

ここで ν はルロン数を表し, $\varphi_{\min,L}$ を x まわりでの $h_{\min,L}$ の局所 weight ($h_{\min,L} = e^{-\varphi_{\min,L}}$ なるもの) である多重劣調和函数としている.

一方で [BEGZ, 5.4] ではネフかつ巨大でありながら $\{\varphi_{\min,L} = -\infty\} \neq \emptyset$ なる (X, L) が $\dim X = 3$ で構成されている. つまり L のネフかつ巨大という仮定は, 少なくとも 3 次元以上では有界な最小特異計量の存在を含意はしない. では Zariski による次の例ではどうであろうか?

例 2. (Zariski の例, [L, 2.3.A]) C を $\mathbb{P}^2$ の滑らかな 3 次曲線とする. C 中一般の位置にある 12 点 $p_1, p_2, \cdots, p_{12}$ を中心とする $\mathbb{P}^2$ の爆発 $\pi\colon X \to \mathbb{P}^2$ を考える. C の π による強変換を D, $\mathbb{P}^2$ の直線の π による引き戻しを H とする. このとき直線束 $L = \mathcal{O}(D + H)$ は次を満たす. つまり, 任意の $m \geq 1$ に対して線形系 $|L^{\otimes m}|$ は D を含み, かつ $|L^{\otimes m} \otimes \mathcal{O}(-D)|$ は大域切断で生成される. □

この Zariski の例では L はネフかつ巨大であるが, 半豊富ではない. また切断環 $R(X, L)$ は明らかに非有限生成であるため, 最小特異計量の発散は $R(X, L)$ の情報だけからは決定できない ([BEGZ, 6.5]). 今回の主結果は次である.

定理 3. *Zariski の例* (X, L) *に於いて,* L *の最小特異計量は連続にとれる. つまり,* L *には連続エルミート計量で半正な曲率を持つものが存在する.* □

より一般に, 次が言える.

定理 4. X *を滑らかな射影複素多様体,* D *をその余次元 1 の滑らかな部分多様体,* L *を* X *上の擬有効直線束とする. ここで* D *が* X *の中で複素管状近傍を持つことと, 直線束* $L \otimes \mathcal{O}(-D)$ *が滑らかなエルミート計量で曲率が半正なるものを持つことを仮定する. このとき* L *の最小特異計量* $h_{\min,L}$ *は,* $L|_D$ *が擬有効であるときとそのときに限り* $h_{\min,L}|_D \not\equiv \infty$ *であり, このとき* $h_{\min,L}|_D$ *は* $L|_D$ *の最小特異計量である.* □

ただしここで「D が X の中で複素管状近傍を持つ」とは, X 中での D のある近傍 U と $N_{D/X}$ 中での 0-切断のある近傍 U' が存在して, U と U' が双正則となることを意味している. 定理 4 から定理 3 が従うことは, 次の定理から分かる.

本研究は科研費 (課題番号:25-2869) 及び博士課程教育リーディングプログラムの助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 32J25; 14C20.
キーワード：minimal singular metrics, tubular neighborhoods, Zariski example.
* 〒153-8914　東京都目黒区駒場 3-8-1　東京大学 大学院数理科学研究科
e-mail: tkoike@ms.u-tokyo.ac.jp

定理 5. *([G, Satz 7]) X を滑らかな複素曲面, D を X に埋め込まれた滑らかで種数が g なる閉リーマン面とする. D の自己交点数 (D^2) が $\min\{0, 4-4g\}$ より小さければ D は X の中で複素管状近傍を持つ.* □

定理4は次のようにして示される. $L|_D$ が擬有効でないときには明らかに $h_{\min,L}|_D \equiv \infty$ なので, 以下では $L|_D$ が擬有効とする. 始めに D 上のみで消える $H^0(X, \mathcal{O}(D))$ の元 f_D と, $A = L \otimes \mathcal{O}(-D)$ の滑らかなエルミート計量で曲率が半正なるもの $h_A = e^{-\varphi_A}$ をとる. このとき $\log|f_D|^2 + \varphi_A$ を局所 weight とする L の半正曲率を持つ計量が定まるが, これは D で発散してしまっている. そこでこの計量を D の周りで次のように加工する. まず, X 中での D のある近傍 U と $N_{D/X}$ 中での 0-切断のある近傍 U' として, U と U' が双正則となるものをとる. 次にこの U' を複素多様体 $X' := \mathbb{P}(L|_D \oplus A|_D)$ 中での部分多様体 $D' := \mathbb{P}(L|_D)$ の近傍とみなす (X' は $N_{D/X}$ のコンパクト化であり, D' は $N_{D/X}$ の 0-切断に対応することに注意する). このとき X' 上の相対超平面束 $L' = \mathcal{O}_{X'/D'}(1)$ の U' への制限 $L'|_{U'}$ は, 双正則射 $i\colon U \to U'$ を介して $L|_U$ と C^∞ 同形である. 以下簡単のため $A|_D$ が豊富であるとして証明を進める (一般には $A|_D$ は半豊富までしか言えないが, 定理の証明にはこれで十分である). この時は L' の最小特異計量が次のように D 上の $\mathbb{R}$-直線束の equilibrium 計量を用いて具体的に構成できる.

定理 6. *D の局所座標 x, $L^{-1}|_D$ の局所自明化 s_L^*, $A^{-1}|_D$ の局所自明化 s_A^* を用いて X' の局所座標 (z,x) を $(z,x) = [zs_A^*(x) + s_L^*(x)] \in X'$ で定める. 滑らかな $L|_D$ のエルミート計量 $h' = e^{-\varphi'}$ に対して $\varphi_{L'}(z,x) = \log\max_{t\in[0,1]}|z|^{2t}e^{(t\varphi_A|_D+(1-t)\varphi')_e(x)}$ を局所 weight とする L' の計量は最小特異計量である.* □

ここで $(\psi)_e = \psi + \sup\{\chi\colon D \to [-\infty, 0]; \psi-\mathrm{psh}\}$ は $e^{-\psi}$ に対応する equilibrium 計量の局所 weight である. $\varphi_{L'}(0,x) = (\varphi')_e(x)$ は $L|_D$ の最小特異計量の局所 weight であることに注意する. 定理の $\varphi_{L'}$ と双正則射 $i\colon U \to U'$ を用いて, U 上 $L|_U$ の計量で局所 weight が $i^*\varphi_{L'}$ + (滑らかな調和関数) と書けるものが構成できる. これを $\psi_{L'}$ と書く. このとき U の外での局所 weight が $\log|f_D|^2 + \varphi_A$ であり, D の周りでの局所 weight が $\max\{\psi_{L'} - C, \log|f_D|^2 + \varphi_A\}$ である L の計量は最小特異計量であることが分かる (ただし C は十分大なる正の定数). つまり $L|_D$ の最小特異計量が L の最小特異計量に拡張できたので主張が示されたことになる.

尚以上の議論により, 定理4の状況 (でさらに $A|_D$ が豊富なとき) では, L の最小特異計量の発散の様子が D 上の $\mathbb{R}$-直線束の equilibrium 計量を用いて (定理6のように) 具体的に記述できていることが分かる.

参考文献

[B] S. Boucksom, Divisorial Zariski decompositions on compact complex manifolds, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **37**(1) (2004), 45–76.

[BEGZ] S. Boucksom, P. Eyssidieux, V. Guedj, A. Zeriahi, Monge-Ampère equations in big cohomology classes. Acta Math. **205** (2010), 199–262.

[DPS] J.-P. Demailly, T. Peternell, M. Schneider, Pseudo-effective line bundles on compact Kähler manifolds, Internat. J. Math. **12**(6) (2001), 689–741.

[G] H. Grauert, Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, Math. Ann. **146**(4) (1962), 331-368.

[L] R. Lazarsfeld, Positivity in algebraic geometry. I, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

複素空間の有理型凸性と Stein 性

阿部 誠

本稿において，複素空間はつねに被約かつ第 2 可算と仮定する．また，領域の連結性は仮定しない．

多変数関数論の研究を方向付けた源流のひとつに Julia［27］の予想があり，それは「正則関数族の正規性領域は正則領域であろう」というものであった．この予想を解決するために，Cartan・Thullen［18］により正則凸性の概念が導入された．一般に，複素多様体 X 上の正則関数族 $\mathscr{F}$ の Fatou 集合（正規性領域）は擬凸であり（Barth［16］），したがって，X が Stein 多様体のときは，岡［32］の定理を一般化した Docquier・Grauert［24］の定理により，$\mathscr{F}$ の Fatou 集合は Stein である．

複素空間 X のコンパクト集合 K に対し，集合

$$_{H}K_X = \tilde{K}_X := \{x \in X \mid \text{任意の } f \in \mathscr{O}(X) \text{ に対し } f(x) \in f(K)\}$$

を K の X における**有理型凸被**という[注1]．複素空間 X の任意のコンパクト集合 K に対し $_{H}K_X$ がコンパクトであるとき，X は**有理型凸**であるという．

複素空間 X の領域 D について，D 内の任意のコンパクト集合 K に対し集合 $_{H}K_X \cap D$ がコンパクトであるとき，D は**有理型 $\mathscr{O}(X)$-凸**であるという[注2]．Stein 空間 X の領域 D について，D が有理型 $\mathscr{O}(X)$-凸であることは，D 内の任意のコンパクト集合 K に対し $_{H}K_X \subset D$ が成り立つことと同値であり，また，有理型 $\mathscr{O}(X)$-凸な領域 D で正則な関数について，有理型近似定理[注3]が成り立つ（阿部［5］）．

X が Stein 多様体のとき，X 上の正則関数族 $\mathscr{F}$ の Fatou 集合は，単に Stein であるという以上に，もっと詳しく，有理型 $\mathscr{O}(X)$-凸である（阿部・古島［14］，

[注1] コンパクト集合 K の複素空間 X における有理型凸被とよばれるものに，別に $_{h}K_X$ があり，$_{h}K_X$ と $_{H}K_X$ は一般には等しくない（Hirschowitz［26］，Colţoiu［21］）．したがって，「有理型」を冠した術語には，その都度，慎重でなければならない．

[注2] $X = \mathbb{C}^n$ のとき，D が有理型 $\mathscr{O}(\mathbb{C}^n)$-凸であることは，$D$ が岡［31］の意味で有理凸であることと同値である．強い有理型近似定理の考察も含めて，阿部［4, 7］を参照．

[注3] Hirschowitz［26］による別の有理型近似定理もある．阿部［9, 10］は Picard 群の部分半群に関する一般化された有理型凸被を考察し，Stein 空間において，ふたつの有理型近似定理を一般化した形で統合した．

阿部［2］）．逆に，Stein 空間 X の領域 D が有理型 $\mathscr{O}(X)$-凸ならば，X 上の正則関数族 $\mathscr{F}$ が存在して，D は $\mathscr{F}$ の Fatou 集合である（阿部［2, 5］）．

また，Stein 多様体 X の領域 D が単連結かつ有理型 $\mathscr{O}(X)$-凸であれば，D は強い円板的性質をもち，このことから，例えば，西野［30］の領域は，$\mathbb{C}^n$ の領域 D の多項式凸性が任意の複素直線 L と D の共通部分 $D \cap L$ が単連結であるという性質によって特徴付けられるかどうかを問う Bremermann［17］の問題の反例であることがわかる（阿部［6］）．

これらの結果は，Stein 空間 X の領域に対する有理型凸性，有理型 $\mathscr{O}(X)$-凸性の概念の有用性を認識させる．しかしながら，一般の Stein 空間に対しては，Levi の問題（Colţoiu［19, 20, 22］，Diederich［23］，阿部［11］参照），およびそれに関連する事柄について，満足すべき結果が得られていないために，有理型 $\mathscr{O}(X)$-凸領域，および正則関数族の Fatou 集合の特徴付けの問題も，一般の Stein 空間では不十分なままであり，次の問題の考察が必要である．

問題 1 Stein 空間 X のコンパクト集合 K について，K の X における有理型凸被の内部 $({}_H K_X)^\circ$ は X において有理型 $\mathscr{O}(X)$-凸か？

問題 2 Stein 空間 X の領域 D について，有理型凸ならば Stein か？

問題 3 Stein 空間 X の領域 D について，標準写像 $H^1(D, \mathscr{O}) \to H^1(D, \mathscr{M})$ が零写像であれば，他の付加的な条件の下で，D は Stein か？

X が Stein 多様体のとき，問題 1，2 は肯定的である．もし問題 1 が肯定的であれば，Stein 空間における正則関数族の Fatou 集合の状況は，Stein 多様体の場合と同じである．また，D が Stein 領域の増大列の極限であるという条件の下で，もし問題 3 が肯定的であれば，問題 2 も肯定的である．

Stein 空間 X の領域 D に対し，$H^1(D, \mathscr{O}) \to H^1(D, \mathscr{M})$ が零写像という仮定よりも強く，$H^1(D, \mathscr{O}) = 0$ を仮定する，あるいはこれと類似の仮定をおくとき，他の付加的な条件の下で，D の Stein 性を導くという種類の論文が 1965〜1985 年ぐらいの期間に多く書かれている．例えば，D が Stein 領域の増大列の極限であり，かつ $H^1(D, \mathscr{O})$ が Hausdorff ならば，D は Stein である（Markoe［29］，Silva［33］）．

複素空間は，そのすべての特異点が商特異点であるとき，**（複素）軌道体**とよばれる．軌道体は Cohen・Macaulay かつ正規である．Stein 軌道体 X の領域 D について，D が任意の $p \in \partial D \setminus \mathrm{Sing}(X)$ において局所 Stein であり，かつ D が $\mathrm{Sing}(X)$ に沿って除去可能な境界点をもたなければ，D は任意の $p \in \partial D$ において局所 Stein である（阿部［1］，阿部・濱田［15］）．その証明において，Grauert・Remmert［25］（上田［34］）の補題を用いる．

問題3に関連して，n 次元 Stein 軌道体 X の領域 D が条件 $H^k(D,\mathscr{O})=0$（$2 \leqq k \leqq n-1$）をみたし，かつ正の次元の複素 Lie 群 G が存在して，標準写像 $H^1(D,\mathscr{O}^G) \to H^1(D,(\mathscr{E}^\infty)^G)$ が準単射ならば，D は任意の $p \in \partial D$ において局所 Stein である（阿部［11, 12］）．これは2次元 Stein 多様体の領域の Stein 性を岡の原理によって特徴付けた梶原・西原［28］の定理の一般化である．

また，すべての特異点が離散的であるような n 次元 Stein 軌道体 X の領域 D が条件 $H^k(D,\mathscr{O})=0$（$2 \leqq k \leqq n-1$）をみたし，かつ標準写像 $\mathrm{Div}(D) \to \mathrm{Pic}(D)$ が全射[注4]ならば，D は Stein である（阿部［3, 8, 13］）．ただし，$\mathrm{Div}(D)$ は D の Cartier 因子群，$\mathrm{Pic}(D)=H^1(D,\mathscr{O}^*)$ は D の Picard 群である．

これらの結果は，問題2，3の解決を模索する過程で得られたものである．X が2次元 Stein 軌道体の場合に限定すれば，阿部［13］と類似の方法により，問題3は付加的な条件なしに肯定的であり，したがって，問題2も肯定的である．

参考文献

[1] Abe, M.: Domains in a two dimensional Stein space with quotient singularities. 大島商船高等専門学校紀要 **21**, 103–110 (1988)

[2] Abe, M.: Meromorphic convexity of normality domains. In: Masumoto, M. (ed.) Complex Analysis and Related Topics. Proceedings of the Japan-Korea Joint Workshop in Mathematics 2001, Yamaguchi, Japan, 22–24 July 2001, pp. 1–6. Yamaguchi Univ., Yamaguchi (2002)

[3] Abe, M.: Holomorphic line bundles on a domain of a two-dimensional Stein manifold. Ann. Polon. Math. **83**, 269–272 (2004)

[4] Abe, M.: A note on the meromorphic $\mathscr{O}(X)$-convexity. Kumamoto J. Math. **18**, 17–23 (2005).

[5] Abe, M.: Meromorphic approximation theorem in a Stein space. Ann. Mat. Pura Appl. (4) **184**, 263–274 (2005)

[6] Abe, M.: Polynomial convexity and strong disk property. J. Math. Anal. Appl. **321**, 32–36 (2006)

[7] Abe, M.: Open sets satisfying the strong meromorphic approximation property. Toyama Math. J. **29**, 7–23 (2006)

[8] Abe, M.: Holomorphic line bundles and divisors on a domain of a Stein manifold. Ann. Scuola Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **6**, 323–330 (2007)

注4 この条件は標準写像 $H^1(D,\mathscr{O}^*) \to H^1(D,\mathscr{M}^*)$ が零写像ということと同値.

[9] Abe, M.: Meromorphic approximation in a Stein space. In: Le, H.S., Tutschke, W. (eds.) Function Spaces in Complex and Clifford Analysis, pp. 100–105. National Univ. Publishers Hanoi, Hanoi (2008)

[10] Abe, M.: Meromorphic approximation theorem with respect to a semigroup of holomorphic line bundles in a Stein space. Toyama Math. J. **32**, 41–57 (2009)

[11] 阿部誠 : Stein 空間内の岡・Grauert の原理をみたす領域. In : 第 54 回函数論シンポジウム講演アブストラクト, pp. 59–68. 千葉大学（2011）

[12] Abe, M.: Open sets which satisfy the Oka-Grauert principle in a Stein space. Ann. Mat. Pura Appl. (4) **190**, 703–723 (2011)

[13] Abe, M.: Holomorphic line bundles and Cartier divisors on domains in a Stein orbifold with discrete singularities. Preprint

[14] Abe, M., Furushima, M.: On the meromorphic convexity of normality domains in a Stein manifold. Manuscripta Math. **103**, 447–453 (2000)

[15] Abe, M., Hamada, H.: On the complete Kählerity of complex spaces. 九州共立大学工学部研究報告 **20**, 17–23 (1996).

[16] Barth, T.J.: Normality domains for families of holomorphic maps. Math. Ann. **190**, 293–297 (1971)

[17] Bremermann, H.J.: Die Charakterisierung Rungescher Gebiete durch plurisubharmonische Funktionen. Math. Ann. **136**, 173–186 (1958)

[18] Cartan, H., Thullen, P.: Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen. Regularitäts- und Konvergenzbereiche. Math. Ann. **106**, 617–647 (1932)

[19] Colţoiu, M.: Some open problems concerning Stein spaces. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **36**, 225–229 (1991)

[20] Colţoiu, M.: Stein spaces. A survey. In: S. Coen (ed.) Seminari di Geometria, 1994–1995, pp. 71–79. Universita degli Studi di Bologna, Dipartimento di Matematica, Bologna (1996)

[21] Colţoiu, M.: On hulls of meromorphy and a class of Stein manifolds. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **28**, 405–412 (1999)

[22] Colţoiu, M.: The Levi problem on Stein spaces with singularities. A survey. Rend. Mat. Appl. (7) **29**, 341–353 (2009)

[23] Diederich, K.: Some aspects of the Levi problem: recent developments. In: Geometric complex analysis, Hayama, 1995, pp. 163–181. World Sci. Publ., River Edge (1996)

[24] Docquier, F., Grauert, H.: Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. **140**, 94–123 (1960)

[25] Grauert, H., Remmert, R.: Konvexität in der komplexen Analysis. Nicht-holomorph-konvexe Holomorphiegebiete und Anwendungen auf die Abbildungstheorie. Comment. Math. Helv. **31**, 152–183 (1956)

[26] Hirschowitz, A.: Sur l'approximation des hypersurfaces. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **25**, 47–58 (1971)

[27] Julia, G.: Sur les familles de fonctions analytiques de plusieurs variables. Acta Math. **47**, 53–115 (1926)

[28] Kajiwara, J., Nishihara, M.: Charakterisierung der Steinschen Teilgebieten durch Okasches Prinzip in zwei-dimensionaler Steinscher Mannigfaltigkeit. Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A. Math. **33**, 71–76 (1979)

[29] Markoe, A.: Runge families and inductive limits of Stein spaces. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **27**, 117–127 (1977)

[30] 西野利雄：単連結で有理凸状であるが多項式凸状ではない例．In：函数論分科会講演アブストラクト，日本数学会 2003 年度年会，pp. 67–68．東京大学（2003）

[31] Oka, K.: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. IV – Domaines d'holomorphie et domaines rationellment convexes. Japan. J. Math. **17**, 517–521 (1941)

[32] Oka, K.: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. IX – Domaines finis sans point critique intérieur. Japan. J. Math. **27**, 97–155 (1953)

[33] Silva, A.: Rungescher Satz and a condition for Steinness for the limit of an increasing sequence of Stein spaces. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **28**, 187–200 (1978)

[34] Ueda, T.: Domains of holomorphy in Segre cones. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **22**, 561–569 (1986)

阿部 誠（Abe, Makoto）
〒739-8521 東広島市鏡山 1-7-1 広島大学総合科学部数理情報科学教室
e-mail：abem@hiroshima-u.ac.jp