日本数学会

2013年度年会

函数論分科会
講演アブストラクト

2013年3月

於　京都大学

日本数学会

2013年度年会

函数論分科会
講演アブストラクト

2013年3月

於　京都大学

函 数 論

3月22日(金)　第VIII会場

9:30〜12:00

				(分)	頁
1	西本勝之	(デカルト出版)*	N-fractional calculus of the function $f(z) = ((z-b)^2 - c)^{-3}$ and identities	(15)	1
2	内山充	(島根大総合理工)♯	直交多項式の主逆関数	(15)	3
3	白石將 早味俊夫	(近畿大理工)♯ (近畿大理工)	Coefficient estimates for Schwarz functions	(15)	5
4	早味俊夫 尾和重義	(近畿大理工)♯ (近畿大理工)	Coefficient estimates for a certain class concerned with arguments of $f'(z)$	(15)	7
5	西脇純一 尾和重義	(摂南大理工)♯ (近畿大理工)	Notes on a certain class of analytic functions	(15)	9
6	黒木和雄 尾和重義	(近畿大理工)♯ (近畿大理工)	Starlikeness of order α for certain class of analytic functions	(15)	11
7	柳沼直宏 柳下稔	(日本ラッド)♯ (千葉大理)	半空間における重調和方程式に関する第一種境界値問題について	(15)	13
8	正岡弘照 T. Kilpeläinen P. Koskela	(京都産大理)♯ (Univ. of Jyvaskyla) (Univ. of Jyvaskyla)	調和 Hardy–Orlicz 空間について	(15)	15
9	米田力生	(小樽商大)*	閉値域を持つベルグマン空間上のテープリッツ作用素とハンケル作用素	(10)	17

14:20〜15:40

10	木坂正史	(京大人間環境)♯	$J(f) \cup \{\infty\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ が Sierpiński カーペットとなる超越整函数について	(15)	19
11	柳下剛広	(早大理工)♯	タイヒミュラー空間とグランスキー作用素との関係について	(20)	21
12	四之宮佳彦	(東工大理工)♯	リーマン面の Veech 正則族の正則切断について	(15)	23
13	小森洋平	(早大教育)*	トーラス上の種数 2 のリーマン面の退化族について	(15)	25

16:00〜17:00　特別講演

	川平友規	(名大多元数理)♯	Zalcman の補題と複素力学系		27

3月23日(土)　第VIII会場

10:00〜12:00

14	上野康平	(鳥羽商船高専)*	Böttcher coordinates for polynomial skew products	(15)	39
15	篠原知子	(都立産業技術高専)♯	A construction of an invariant surface for an indeterminate point of rational mappings	(15)	41
16	本田竜広 濱田英隆 G. Kohr	(広島工大工)♯ (九州産大工) (Babeş-Bolyai Univ.)	Distortion theorems for linearly invariant families	(15)	43

14:20〜15:20 特別講演

1

N -Fractional Calculus of The Function $f(z) = ((z-b)^2 - c)^{-3}$ and Identities

Katsuyuki Nishimoto   Descartes Press Co.

Abstract

In this article the N-fractional calculus of the function in title is discussed by the calculation in the manners

$$(((z-b)^2 - c)^{-4} \cdot (z-b)^2 - c))_\gamma$$

and

$$((((z-b)^2 - c)^{-3})_1)_{\gamma-1} \ .$$

Moreover some identities derived from them are presented.

One of them is shown as follows for example,.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{[3]_k \Gamma(2k+6+\gamma)}{k!\,\Gamma(2k+6)} S^k = (1-S)G(k,\gamma,0) - 2\gamma G(k,\gamma,1) + \gamma(\gamma-1)G(k,\gamma,2)$$

where

$$G(k,\gamma,m) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[4]_k \Gamma(2k+8+\gamma-m)}{k!\,\Gamma(2k+8)} S^k \ ,$$

$$(\,|\Gamma(2k+8+\gamma-m)| < \infty\,)$$

$$S = \frac{c}{(z-b)^2}\ , \qquad |S| < 1, \quad \Gamma(\cdots);\ \text{Gamma function}$$

and

$$[\lambda]_k = \lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+k-1) = \Gamma(\lambda+k)/\Gamma(\lambda) \ \text{with}\ [\lambda]_0 = 1.$$

(Notation of Pochhammer)

直交多項式の主逆関数

内山　充　(島根大学　総合理工)

Let σ be a finite Borel measure on a (closed) interval I of the real axis, and construct orthonormal polynomials $\{p_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ with positive leading coefficients $\{\alpha_n\}$ by Gram-Schmidt method. Then the three-term recurrence formula

$$\begin{aligned} tp_n(t) &= a_n p_{n+1}(t) + b_n p_n(t) + a_{n-1} p_{n-1}(t) \quad (n = 1, 2, \cdots) \\ tp_0(t) &= a_0 p_1(t) + b_0 p_0(t) \end{aligned}$$

holds, where

$$0 < \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = a_n = \int_{-1}^{1} tp_n(t)p_{n+1}(t)d\sigma(t), \quad b_n = \int_{-1}^{1} tp_n(t)^2 d\sigma(t).$$

Each zero of $p_n(t)$ is in I and simple, and zeros of $p_n(t)$ and $p_{n+1}(t)$ interlace each other.

Let $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ be orthonormal polynomials with positive leading coefficients α_n.

Let d_n be the maximal zero of $p_n'(t)$. Then the restriction of $p_n(t)$ to $[d_n, \infty)$ is increasing. We call its inverse function the *principal inverse* of $p_n(t)$ and write $p_n^{-1}(t)$. We note that $p_n(d_n) < 0$.

The following lemma guarantees that the composite $p_{n-1} \circ p_n^{-1}$ is increasing on $[p_n(d_n), \infty)$.

Lemma 1 *$d_{n-1} < d_n$ for $n \geqq 2$.*

Definition 1 A real continuous function $f(t)$ defined on an interval I of the real axis is denoted by $f \in \mathbf{P}(I)$ if $f(t)$ admit an analytic continuation into $\Pi_+ \cup \Pi_-$ which is a Pick function (or Nevanlinna function)

Definition 2 Let $K(x, y)$ be a continuous function defined on $I \times I$. Then $K(x, y)$ is said to be a *positive semidefinite* kernel function on an interval $I \times I$ (on I for short) if

$$\iint_{I \times I} K(x, y)\phi(x)\overline{\phi(y)}dxdy \geqq 0$$

for every complex continuous function ϕ with compact support in I.

Definition 3 Let $f(t)$ be a real C^1 function on an interval I. Then the kernel function

$$K_f(t, s) := \begin{cases} \dfrac{f(t) - f(s)}{t - s} & (t \neq s) \\ f'(t) & (t = s) \end{cases}$$

is called a *Loewner kernel* of $f(t)$.

This work was supported by KAKENHI (21540181).
2010 Mathematics Subject Classification: 47A63, 47B36.
Keywords: Orthogonal polynomial, Pick function, Positive semi-definite kernel function.

Loewner : Let $f(t)$ be a real C^1 function on an interval I. Then the following are equivalent:

(1) $f(t) \in \mathbf{P}(I)$ if and only if

(2) (cf. **Koranyi**):
$K_f(t,s)$ is positive semidefinite on $I \times I$.

Theorem 1 *[1]* Let $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ be orthonormal polynomials with positive leading coefficients α_n and p_n^{-1} the principal inverse of $p_n(t)$. Then

$$p_n^{-1} \in \mathbf{P}(p_n(d_n), \infty)$$

Moreover, the holomorphic extension $p_n^{-1}(z)$ to $\mathbf{C} \setminus (-\infty, p_n(d_n)]$ is a univalent Pick function so that

$$p_n(p_n^{-1}(z)) = z \quad \text{on} \quad \mathbf{C} \setminus (-\infty, p_n(d_n)].$$

Further,

$$p_m \circ p_n^{-1} \in \mathbf{P}(p_n(d_n), \infty) \quad \text{for} \quad m = 1, \cdots, n-1.$$

Corollary 1 Let A, B be Hermitian matrices such that $A, B \geqq d_n$. Then

$$p_n(A) \leqq p_n(B) \Rightarrow p_{n-1}(A) \leqq p_{n-1}(B) \Rightarrow \cdots \Rightarrow A \leqq B$$

To show the above theorem we need the following:

Definition 4 $K(x,y)$ is said to be *conditionally (or almost) positive semidefinite* on I if

$$\iint_{I \times I} K(x,y)\phi(x)\overline{\phi(y)}dxdy \geqq 0$$

for every complex continuous function ϕ with compact support in I satisfying $\int_I \phi(x)dx = 0$.

(Fitzgerald, Horn) Let $K(x,y) > 0$ for $x, y \in I$ and suppose $-K(x,y)$ is c.p.s.d. on $I \times I$. Then $\exp(-K(x,y))$ and the reciprocal function $\frac{1}{K(x,y)}$ are positive semidefinite there.

References

References

[1] M. Uchiyama, Operator monotone function, Jacobi operator and orthogonal polynomials, (preprint).

Coefficient estimates for Schwarz functions

Hitoshi Shiraishi (Kinki University)
Toshio Hayami (Kinki University)

Let $\mathcal{B}$ be the class of functions $w(z)$ of the form

$$w(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k$$

which are analytic and $|w(z)| < 1$ in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Then we call $w(z) \in \mathcal{B}$ the Schwarz function. Also, let $\mathcal{P}$ dnote the class of functions $p(z)$ of the form

$$p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$$

which are analytic and $\mathrm{Re}\,(p(z)) > 0$ in $\mathbb{U}$.

The following results are well-known for the class $\mathcal{B}$.

Lemma . *If $w(z) \in \mathcal{B}$, then*

(1) $\quad |w_k| \leqq 1 \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots),$

(2) $\quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 \leqq 1,$

(3) $\quad |b_2| \leqq 1 - |b_1|^2.$

In the present talk, we discuss new coefficient estimates for Schwarz functions by using the following lemma.

Lemma . *If $p(z) \in \mathcal{P}$, then*

$$|c_k - c_s c_{k-s}| \leqq 2$$

for any integers k and s $(1 \leqq s < k)$.

References

[1] C. Carathéodory, *Über den Variabilititasbereich der Koeffizienten von Potenzreihem, die gegebene werte nicht annehmen*, Math. Ann. **64**(1907), 95–115.

[2] P. L. Duren, *Univalent Functions*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1983.

[3] A. W. Goodman, *Univalent Functions, Vol. I and Vol. II*, Mariner Publishing Company, Tampa, Florida (1983).

[4] T. Hayami and S. Owa, *The Fekete-Szegö problem for p-valently Janowski starlike and convex functions*, Int. J. Math. Math. Sci. **2011**, Article ID 583972, 1–11.

[5] A. E. Livingston, *The coefficients of multivalent close-to-convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **21**(1969), 545–552.

[6] Z. Nehari, *Comformal Mapping*, McGraw Hill Company, New York (1952).

[7] W. Rogosinski, *On subordinate functions*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **35**(1939), 1–26.

[8] W. Rogosinski, *On the coefficients of subordinate functions*, Proc. London Math. Soc. **48**(1943), 48–82.

[9] J. Sokół, *Coefficient estimates in a class of strongly starlike functions*, Kyungpook Math. J. **49**(2009), 349–353.

Coefficient estimates for a certain class concerned with arguments of $f'(z)$

Toshio Hayami (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}$ denote the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, and let $\mathcal{P}$ be the class of functions $p(z)$ of the form

$$p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$$

which are analytic in $\mathbb{U}$ and satisfy the condition

$$\mathrm{Re}\,(p(z)) > 0 \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

In the present talk, we discuss the coefficient estimates of functions $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfying $f'(z) = 0$ for some $z \in \mathbb{U}$. For such functions, we readily know that there are some points $z_0 \in \mathbb{U}$ such that $f'(z_0) < 0$. Therefore, we define that

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \text{ and } f'(z) < 0\}.$$

Then, we say that $f(z) \in \mathcal{R}(\delta_1, \delta_2; r)$ if $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies

$$\sup\{\arg(f'(z) + r)\} = \delta_1 \quad \text{and} \quad \inf\{\arg(f'(z) + r)\} = \delta_2 \quad (z \in \mathbb{U})$$

for some δ_1 and δ_2 $(-\pi < \delta_2 < 0 < \delta_1 < \pi)$, where

$$\min_{z \in \Omega} f'(z) = -r$$

for some real r $(r > 0)$.

For the case that $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies $f'(z) \neq 0$ for all $z \in \mathbb{U}$, we have earlier obtained the results for the class $\mathcal{R}(\delta_1, \delta_2)$ in [4].

Remark For a function $f(z) \in \mathcal{R}(\delta_1, \delta_2; r)$, supposing that

$$p(z) = \frac{e^{-i\varphi}(f'(z) + r)^{\frac{1}{\psi}} + i(1 + r)^{\frac{1}{\psi}} \sin\varphi}{(1 + r)^{\frac{1}{\psi}} \cos\varphi}$$

where $\varphi = \dfrac{(\delta_1 + \delta_2)\pi}{2(\delta_1 - \delta_2)}$ and $\psi = \dfrac{\delta_1 - \delta_2}{\pi}$, we see that $p(z)$ is a member of the class $\mathcal{P}$.

By the above-mentioned facts, we derive the following theorem.

Theorem *If $f(z) \in \mathcal{R}(\delta_1, \delta_2; r)$, then it follows that*

$$|a_n| \leqq \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n-1} \left\{ \left(\begin{array}{c} n-2 \\ m-1 \end{array} \right) \frac{2^m}{m!} \left(\prod_{j=0}^{m-1} |j - \psi| \right) (1+r) \cos^m \varphi \right\} \quad (n = 2, 3, 4, \cdots),$$

where

$$\left(\begin{array}{c} n-2 \\ m-1 \end{array} \right) = \begin{cases} 1 & (n = 2 \ \ or \ \ m = 1) \\ \dfrac{(n-2)(n-3)(n-4)\cdots(n-m)}{(m-1)!} & (n \geqq 3, \ \ m \geqq 2). \end{cases}$$

Taking $\delta_1 = \delta$ and $\delta_2 = \delta - \pi$ for some δ $(0 < \delta < \pi)$ in the theorem, we have

Corollary *If $f(z) \in \mathcal{R}_\delta(r) := \mathcal{R}(\delta, \delta - \pi; r)$, then it follows that*

$$|a_n| \leqq \frac{2}{n}(1+r) \sin \delta \quad (n = 2, 3, 4, \cdots).$$

The result is shrap for

$$f(z) = \left(e^{i2\delta}(1+r) - r\right) z - (1 - e^{i2\delta})(1+r) \log(1-z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(1+r)ie^{i\delta} \sin \delta}{n} z^n.$$

References

[1] C. Carathéodory, *Über den Variabilititasbereich der Koeffizienten von Potenzreihem, die gegebene werte nicht annehmen*, Math. Ann. **64**(1907), 95–115.

[2] P. L. Duren, *Univalent Functions*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1983.

[3] A. W. Goodman, *Univalent Functions, Vol. I and Vol. II*, Mariner Publishing Company, Tampa, Florida (1983).

[4] T. Hayami, K. Kuroki, H. Shiraishi and S. Owa, *Coefficients for certain analytic functions related to arguments of $f'(z)$*, Submitted.

Notes on a certain class of analytic functions

Junichi Nishiwaki (Setsunan University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}$ denote the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. A function $f(z) \in \mathcal{A}$ is said to be in the class of uniformly convex (or starlike) functions denoted by $\mathcal{UCV}$ (or $\mathcal{UST}$) if $f(z)$ is convex (or starlike) in $\mathbb{U}$ and maps every circle or circular arc in $\mathbb{U}$ with center at ζ in $\mathbb{U}$ onto the convex arc (or the starlike arc with respect to $f(\zeta)$). These classes were introduced by Goodman (Annal. Polon. Math. 56(1991), 87 – 92) (J. Math. Anal. Appl. 155(1991), 364 – 370). For the class $\mathcal{UCV}$, it is defined as the one variable characterization by Rønning (Proc. Amer. Math. Soc. 118(1993), 189 – 196) (Complex Variables 24(1994), 233 – 239), that is, a function $f(z) \in \mathcal{A}$ is said to be in the class $\mathcal{UCV}$ if it satisfies

$$\mathrm{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

It was independently studied by Ma and Minda (Annal. Polon. Math. 57(1992), 165 – 175). Further, a function $f(z) \in \mathcal{A}$ is said to be the corresponding class denoted by $\mathcal{S}_p$ if it satisfies

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

This class $\mathcal{S}_p$ was introduced by Rønning. We easily know that the relation $f(z) \in \mathcal{UCV}$ if and only if $zf'(z) \in \mathcal{S}_p$. In view of these classes, we introduce the subclass $\mathcal{B}$ of $\mathcal{A}$ consisting of all functions $f(z) \in \mathcal{A}$ which satisfy

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z}{f(z)}\right) > \left|\frac{z}{f(z)} - 1\right| \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

The object of the present talk is to obtain some properties of the class $\mathcal{B}$.

Remark 1. For $f(z) \in \mathcal{B}$, we write $w(z) = \dfrac{f(z)}{z} = u + iv$. Then w lies in the domain which is the part of the complex plane which contains $w = 1$ and is bounded by a kind of teardrop-shape domain such that

$$u^4 - 2u^3 + 2u^2v^2 - 2uv^2 + v^4 + v^2 < 0.$$

Lemma 1. (Rønning). *The extremal function $f(z)$ for the class $\mathcal{S}_p$ is given by*

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = 1 + \frac{2}{\pi^2}\left(\log\left(\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right)\right)^2.$$

Lemma 2. (Ma and Minda). *The power series of $\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ for the class $\mathcal{S}_p$ is following*

$$\begin{aligned}\frac{zf'(z)}{f(z)} &= 1 + \frac{2}{\pi^2}\left(\log\left(\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right)\right)^2 \\ &= 1 + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\right)z^n.\end{aligned}$$

In view of Remark 1 and above lemmas, we discuss some properties for the class $\mathcal{B}$.

Theorem 1. *The extreme function $f(z)$ for the class $\mathcal{B}$ is given by*

$$f(z) = \frac{z}{1 + \frac{2}{\pi^2}\left(\log\left(\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right)\right)^2}.$$

Theorem 2. *The power series of the extreme function for the class $\mathcal{B}$ is given by*

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{z}{1 + \frac{2}{\pi^2}\left(\log\left(\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right)\right)^2} \\ &= z + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{p=1}^{n-1}(-1)^p\left(\frac{8}{\pi^2}\right)^p \sum_{m_1=1}^{n-p}\left(\frac{1}{m_1}\sum_{k=1}^{m_1}\frac{1}{2k-1}\right)\sum_{m_2=1}^{n+1-p-m_1}\left(\frac{1}{m_2}\sum_{k=1}^{m_2}\frac{1}{2k-1}\right)\times \\ &\quad \cdots \times \sum_{m_{p-1}=1}^{n-2-A_{p-2}}\left(\frac{1}{m_{p-1}}\sum_{k=1}^{m_{p-1}}\frac{1}{2k-1}\right)\left(\frac{1}{n-1-A_{p-1}}\sum_{k=1}^{n-1-A_{p-1}}\frac{1}{2k-1}\right)z^n,\end{aligned}$$

where $A_p = \sum_{l=1}^{p} m_l$.

Starlikeness of order α for certain class of analytic functions

Kazuo Kuroki (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}$ denote the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. The subclass of $\mathcal{A}$ consisting of all univalent functions $f(z)$ in $\mathbb{U}$ is denoted by $\mathcal{S}$.
In 1972, Ozaki and Nunokawa [1] proved a univalence criterion for $f(z) \in \mathcal{A}$ as follows.

Lemma 1 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$\left| \frac{z^2 f'(z)}{\left(f(z)\right)^2} - 1 \right| < 1 \qquad (z \in \mathbb{U}), \tag{1}$$

then $f(z) \in \mathcal{S}$.

Remark 1 The inequality (1) means that

$$\left| \frac{z}{f(z)} - z \left(\frac{z}{f(z)} \right)' - 1 \right| < 1 \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

Furthermore, let $\mathcal{T}_\lambda$ be the class of functions $f(z) \in \mathcal{A}$ which satisfy the inequality

$$\left| \frac{z}{f(z)} - \lambda z \left(\frac{z}{f(z)} \right)' - 1 \right| < 1 \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some complex number λ with $\lambda \neq 0$.

A function $f(z) \in \mathcal{A}$ is said to be starlike of order α in $\mathbb{U}$ if it satisfies

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z f'(z)}{f(z)} \right) > \alpha \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some real number α with $0 \leqq \alpha < 1$. We denote by $\mathcal{S}^*(\alpha)$ the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of all functions $f(z)$ which are starlike of order α in $\mathbb{U}$. It is well-known that $\mathcal{S}^*(\alpha) \subset \mathcal{S}$.

Let $p(z)$ and $q(z)$ be analytic in $\mathbb{U}$. Then the function $p(z)$ is said to be subordinate to $q(z)$ in $\mathbb{U}$, written by

$$p(z) \prec q(z) \qquad (z \in \mathbb{U}), \tag{2}$$

if there exists an analytic function $w(z)$ with $w(0) = 0$, $|w(z)| < 1 \quad (z \in \mathbb{U})$, and such that $p(z) = q\big(w(z)\big) \quad (z \in \mathbb{U})$. In particular, if $q(z)$ is univalent in $\mathbb{U}$, then the subordination (2) is equivalent to the conditions

$$p(0) = q(0) \quad \text{and} \quad p(\mathbb{U}) \subset q(\mathbb{U}).$$

Kuroki and Owa [3] derived some subordination relation as follows.

Lemma 2 *Let λ be a complex number with the inequality $\left|\lambda - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}$. If $p(z)$ is analytic in $\mathbb{U}$ with $p(0) = 1$, and satisfies the following subordination*

$$p(z) - \lambda z p'(z) \prec 1 + z \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

then

$$p(z) \prec 1 + \frac{1}{1+\lambda} z \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

In the present talk, by using Lemma 2, we discuss starlikeness of order α for $f(z) \in \mathcal{T}_\lambda$.

Theorem 1 *Let λ be a complex number with $\left|\lambda - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}$, and suppose that*

$$\big(|\lambda - 1| + |(1-\alpha)\lambda - 1|\big)^2 \leqq (1-\alpha)^2 |\lambda|^2 \big(|\lambda - 1|^2 - 1\big)$$

for some real number α with $0 \leqq \alpha < 1$. If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies

$$\left| \frac{z}{f(z)} - \lambda z \left(\frac{z}{f(z)} \right)' - 1 \right| < 1 \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

then $f(z) \in \mathcal{S}^*(\alpha)$.

References

[1] S. Ozaki and M. Nunokawa, *The Schwarzian derivative and univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **33** (1972), 392–394.

[2] V. Singh, *On a class of univalent functions*, Internat. J. Math. Math. Sci. **23** (2000), 855–857.

[3] K. Kuroki and S. Owa, *On the univalence conditions for certain class of analytic functions*, Hokkaido Math. J, in press.

半空間における重調和方程式に関する第一種境界値問題について

柳沼直宏　日本ラッド
柳下稔　　千葉大　理

$\mathbf{T}_{n+1}$ $(n \geq 2)$ を半空間 $\{M = (X, y) \in \mathbf{R}^{n+1} : y > 0\}$ とし, $\partial\mathbf{T}_{n+1}$ をその境界とする.

f_0 及び f_1 を $\partial\mathbf{T}_{n+1}$ 上の関数とする. $\mathbf{T}_{n+1}$ 上の関数 w が境界関数 f_0, f_1 に対する重調和方程式に関する第一種境界値問題の解であるとは, w は $\mathbf{T}_{n+1}$ 上重調和で, 境界条件

$$\lim_{M \to N,\ M \in \mathbf{T}_{n+1}} w(M) = f_0(N), \quad \lim_{M \to N,\ M \in \mathbf{T}_{n+1}} \frac{\partial w}{\partial y}(M) = f_1(N)$$

$(N \in \partial\mathbf{T}_{n+1})$ を満たすときを言う.

l を非負整数とする. $G_{l,n+1}$ により, $\partial\mathbf{T}_{n+1} = \mathbf{R}^n$ 上の局所可積分な関数 f で, ある定数 $A > 0$, $r_0 \geq 1$ が存在して

$$\int_{\mathbf{R}^n \setminus B_r^n} \frac{|f(N)|}{|N|^{n+l+1}} dN < A \quad (r \geq r_0)$$

を満たすような関数の集合を表すとする. ここで, dN は $N \in \mathbf{R}^n$ での n 次元ルベーグ測度を表すものとし, B_r^n で原点中心, 半径 r の n 次元の開球を表すとする.

Schot [1] はこの境界値問題に対して, 境界関数として十分正則な有界関数に対して特殊解を与えた. 一方, $\mathbf{T}_{n+1}$ におけるディリクレ問題において, 吉田 [2] は, 緩増加な境界関数 f に対して一般化されたポアソン積分 $H_{l,n+1}f(M)$ $(l \geq 1)$ を構成することにより解を与えた. これらの結果から, 一般化されたポアソン積分 $H_{l,n+1}f_i(M)$ $(i = 0, 1)$ を用いることにより, この重調和方程式に関する境界値問題の特殊解を与え, Schot の結果の拡張を与えることを報告する.

定理 1. l $(l \geq 1)$ を整数とし, $f_0 \in G_{l,n+1}$, $f_1 \in G_{l-1,n+1}$ とする. このとき,

$$W_{l,n+1}(f_0, f_1)(M) = H_{l,n+1}f_0(M) - y\frac{\partial}{\partial y}H_{l,n+1}f_0(M) + yH_{l-1,n+1}f_1(M)$$

$(M = (X, y) \in \mathbf{T}_{n+1})$ は $\mathbf{T}_{n+1}$ 上で重調和であり, 条件

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(y|W_{l,n+1}(f_0, f_1)|; r) &= O(r^{l+2}) \quad (r \to \infty), \\ \mathcal{M}(y^2|\frac{\partial}{\partial y}W_{l,n+1}(f_0, f_1)|; r) &= O(r^{l+2}) \quad (r \to \infty), \\ \mathcal{M}(y^3|\Delta W_{l,n+1}(f_0, f_1)|; r) &= O(r^{l+2}) \quad (r \to \infty), \end{aligned}$$

を満たす. 更に $f_0 \in G_{l,n+1} \cap C^2(\partial\mathbf{T}_{n+1})$, $f_1 \in G_{l-1,n+1} \cap C(\partial\mathbf{T}_{n+1})$ ならば, $W_{l,n+1}(f_0, f_1)(M)$ は境界関数 f_0, f_1 に対する重調和方程式に関する第一種境界値問題の解である. 但し, $\mathcal{M}(g; r)$ は原点中心, 半径 r の上半球面における g の球面平均とし, Δ をラプラス演算子とする.

また, 定理 1 の応用として別の一般化されたポアソン積分を用いることにより, 任意の境界関数 $f_0 \in C^2(\partial \mathbf{T}_{n+1})$, $f_1 \in C(\partial \mathbf{T}_{n+1})$ に対してもこの境界値問題の解を与えることも報告する.

最後に, この境界値問題に対する解のある種の一意性に関する結果を報告する.

ラプラス演算子 Δ に対して, $\Delta^j = \Delta(\Delta^{j-1})$, $\Delta^0 = 1$, $(j = 1, 2, \ldots)$ とする.

定理 2. l $(l \geq 3)$ を整数とし, $f_0 \in G_{l,n+1} \cap C^2(\partial \mathbf{T}_{n+1})$, $f_1 \in G_{l-1,n+1} \cap C(\partial \mathbf{T}_{n+1})$ とする. w は境界関数 f_0, f_1 に対する重調和方程式に関する第一種境界値問題の解で, 条件

$$\mathcal{M}(yw^+; r) = O(r^{l+2}) \quad (r \to \infty),$$
$$\mathcal{M}(y^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^-; r) = O(r^{l+2}) \quad (r \to \infty),$$
$$\mathcal{M}(y^3 (\Delta w)^+; r) = O(r^{l+2}) \quad (r \to \infty),$$

を満たすならば

$$w(X, y) = W_{l,n+1}(f_0, f_1)(X, y) + y^2 \sum_{j=0}^{[\frac{l}{2}]+1} \alpha_j y^{2j} \Delta^j P_{l-1}(X) + y^3 \sum_{j=0}^{[\frac{l}{2}]} \beta_j y^{2j} \Delta^j P_{l-2}(X)$$

$(X, y) \in \mathbf{T}_{n+1}$. ここで, $P_k(X)$ は $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ の多項式で, 次数が $k+1$ $(k = \{l-1,\ l-2\})$ よりも低いものとし,

$$\alpha_j = \begin{cases} (-1)^j \frac{2!(j+1)}{(2j+2)!} & (j = 0, 1, 2, \cdots, [\frac{l}{2}] + 1), \\ 0 & (j = [\frac{l}{2}] + 1,\ l \text{ は偶数}), \end{cases} \qquad \beta_j = (-1)^j \frac{3!(j+1)}{(2j+3)!} \ (j = 0, 1, 2, \cdots, [\frac{l}{2}]).$$

とする.

参考文献

[1] S. H. Schot, *A simple solution method for the first boundary problem of the polyharmonic equation,* Appl. Anal., **41** (1991), 145-153.

[2] H. Yoshida, *A type of uniqueness for the Dirichlet problem on a half-space with continuous data,* Pacific J. Math., **172** (1996), 591-609.

調和 Hardy-Orlicz 空間について

正岡 弘照 (京都産業大学)
Tero KILPELÄINEN (University of Jyvaskyla)
Pekka KOSKELA(University of Jyvaskyla)

$(\Omega, \mathcal{H})$ を P-Brelot 調和空間とする．Ω は可算開基をもち, $\mathcal{H}$ は定数関数を含むとする．$H(\Omega)$ を Ω 上の調和関数の集合とする．

$HP_+(\Omega) := \{h \in H(\Omega) \mid \Omega$ 上で, $h \geq 0\}$,
$HP(\Omega) := \{h_1 - h_2 \mid h_j \in HP_+(\Omega)\}$,
$HB(\Omega) := \{h \in H(\Omega) \mid h$ は Ω 上で, 有界である $\}$

$$\mathcal{N} := \left\{\Phi \mid \Phi \text{ は } [0, +\infty) \text{ で, 非負値で, 凸関数であり, 狭義単調増加であり, } \Phi(0) = 0, \text{ かつ } \lim_{t \to +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = +\infty \text{ をみたす} \right\}$$

$\Phi \in \mathcal{N}$ に対して,

$H_\Phi(\Omega) = \{h \in H(\omega) \mid \Omega$ で, ある正数 α および $u (\in HP_+(\Omega))$ が存在して, $\Phi(\alpha|h|) \leq u\}$

とおく．$H_\Phi(\Omega)$ を (Φ に関する) 調和 Hardy-Orlicz 空間という．

$\Phi, \Psi \in \mathcal{N}$ とする．このとき,

定理 1． $\displaystyle\limsup_{t \to +\infty} \frac{\Phi(\alpha t)}{\Psi(t)} = +\infty$ を仮定する．

任意の正数 α に対して, 次の 4 条件は同値である．

(i) $H_\Phi(\Omega) = H_\Psi(\Omega)$;
(ii) $\dim H_\Psi(\Omega) < +\infty$;
(iii) $\dim H_\Phi(\Omega) < +\infty$;
(iv) $\dim HB(\Omega) < +\infty$

定理 2． 次の 2 条件は同値である．

(i) $H_\Phi(\Omega) = HP(\Omega)$;
(ii) $\dim H_\Psi(\Omega) = \dim HP(\Omega) < +\infty$.

Toeplitz operators and Hankel operators on the Bergman spaces with closed range

Rikio Yoneda (Otaru University of Commerce)

Let $D = \{z \in D, |z| < 1\}$ be the open unit disk in complex plane C. For $z, w \in D$, and $0 < r < 1$, let $\varphi_w(z) = \dfrac{w-z}{1-\overline{w}z}$ and $\rho(z,w) = \left|\dfrac{w-z}{1-\overline{w}z}\right|$ and $D(w,r) = \Big\{z \in D, \rho(w,z) < r\Big\}$. Let $H(D)$ be the space of all analytic functions on D.

For $\alpha > -1$ and $p \geq 1$, the space $L^p\left((1-|z|^2)^\alpha dA(z)\right)$ is defined to be the space of Lebesgue measurable functions f on D such that

$$\left\{\int_D |f(z)|^p(\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha dA(z)\right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

where $dA(z)$ denote the area measure on D. $L^p_a\left((1-|z|^2)^\alpha dA(z)\right)$ is defined by

$$L^p_a\left((1-|z|^2)^\alpha dA(z)\right) = H(D) \cap L^p\left((1-|z|^2)^\alpha dA(z)\right).$$

For $g \in L^2(dA(z))$ and $p > 1$, the Hankel operator H_g with symbol g is defined on $L^p_a(dA(z))$ by

$$H_g f = (I-P)(gf),$$

where $P(f)(z) = \displaystyle\int_D \frac{f(w)}{(1-\overline{w}z)^2} dA(w)$.

For $g \in L^2(dA(z))$ and $p > 1$, the Toeplitz operator T_g with symbol g is defined on $L^p_a(dA(z))$ by

$$T_g f = P(gf),$$

In [2] S.Axler characterize the boundedness and the compactness of Hankel operator on the Bergman space.

Theorem. *Let $g \in L^2_a(dA(z))$. Then $H_{\overline{g}}$ is bounded (compact)if and only if $g \in \mathcal{B}$ ($g \in \mathcal{B}_0$), respectively.*

In this research, we study the Hankel operators on the Bergman spaces with the closed range :

Theorem. *Let* $g \in \mathcal{B}$, $p > 2$ *and* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, *and that* $0 < \delta < \frac{1}{1+\sqrt{\frac{2}{q}}}(< 1)$. $H_{\overline{g}}$ *is bounded below on* $L_a^p(dA(z))$ *if and only if there is* $\epsilon > 0$ *such that for any* $w \in D$ *there is* $z_w \in D$ *such that* $z_w \in D(w, \frac{\delta}{8})$ *and* $(1 - |z_w|^2)|g'(z_w)| \geq \epsilon$.

And we will talk about Toeplitz operators on the Bergman spaces with closed range.

References

[1] A.Aleman and A.G.Siskakis, Integration operators on Bergman spaces, indiana Univ.Math.J.46(1997),337-356.

[2] S.Axler, The Bergman space, the Bloch space, and commutators of multiplication operators, Duke Math.J.53(1986),315-331.

[3] Paul S.Bourdon, Similarity of parts to the whole for certain multiplication opera tors, Proc.Amer.Math.Soc.99(1987),563-567.

[4] J.Bonet, P.Domanski, M.Lindstrom, Pointwise multiplication operators on weighted Banach spaces of analytic function, Studia Math. 137(1999),177-194.

[5] L.Carleson, An interpolation problem for bounded analytic functions, Amr.J.Math. 80(1958),921-930.

[6] P.Duren, A.Schuster , Bergman Spaces, American Mathematical Society, Provi dence, 2004.

[7] P.Ghatage and D.Zheng and Nina Zorboska, Sampling sets and closed range composition operators on the Bloch space, Proceedings of the Amer.Math.Soc.133, 5(2004), 1371-1377.

[8] J.B.Garnett and D.Marshall, Harmonic Measure, Cambridge University Press, 2005.

[9] J.Bonet, P.Domanski, M.Lindstrom, Pointwise multiplication operators on weighted Banach spaces of analytic function, Studia Math. 137(1999),177-194.

[10] H.Hedenmalm and B.Korenblum and K.Zhu, Theory of Bergman Spaces, Springer -Verlag, New York.

[11] D.Leucking, Inequalities on Bergman spaces, Illinois J.Math.25(1981), 1-11.

[12] G.McDonald and C.Sundberg, Toeplitz operators on the disc, indiana Univ.Math.J. 28(1979),595-611.

[13] S.C.Power, Hankel operators on Hilbert space, Pitman Advanced Publishing Program.

[14] K.Zhu, Operator Theory in Function Spaces, American Mathematical Society, Providence, 2007.

$J(f)\cup\{\infty\}\subset\widehat{\mathbb{C}}$ がSierpińskiカーペットとなる超越整函数について

木坂　正史　(京都大学大学院 人間・環境学研究科)*

f を超越整函数とし，f^n で f の n 回合成を表す．f の**Fatou**集合 $F(f)$ と**Julia**集合 $J(f)$ は次で定義される．

$$\begin{aligned} F(f) &:= \{z\in\mathbb{C}\mid \{f^n\}_{n=1}^{\infty} \text{ は } z \text{ のある近傍で正規族}\},\\ J(f) &:= \mathbb{C}\setminus F(f). \end{aligned}$$

また f の臨界値と漸近値，およびそれらの集積値全体の集合を $\mathrm{sing}(f^{-1})$ とし，

$$P(f) := \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\mathrm{sing}(f^{-1}))}$$

をポスト特異集合という．

Proposition A. *f が非有界なFatou成分を持てば $J(f)\cup\{\infty\}\subset\widehat{\mathbb{C}}$，$J(f)\subset\mathbb{C}$ は局所連結ではない．*

よって $J(f)$ が局所連結になるときは任意のFatou成分は有界となっている．

Definition 0.1. コンパクト集合 $X\subset\widehat{\mathbb{C}}$ が**Sierpiński**カーペットであるとは，X が連結，局所連結，全疎（nowhere dense）であって，X^c の各成分の境界が互いに交わらないJordan閉曲線になっていることをいう．

$J(f)\cup\{\infty\}\subset\widehat{\mathbb{C}}$ がSierpińskiカーペットとなるような例は次のように知られている．

Example 0.1 ([Mo], p.272, Theorem 7)**.** *$g_a(z) := ae^a\{z-(1-a)\}e^z$ $(a>1)$ とすると $J(g_a)\cup\{\infty\}\subset\widehat{\mathbb{C}}$ はSierpińskiカーペットである．*

一般には次が成り立つ．

Theorem B. *超越整函数 f が次を満たすとする．*
(a) 任意のFatou成分 U は有界かつ $P(f)\cap\partial U=\emptyset$ を満たす．
(b) f は遊走領域を持たない．
(c) $F(f)$ 内の周期サイクルはある吸引不動点に対する吸引領域 B ただ 1 つ．
このとき $J(f)\cup\{\infty\}\subset\widehat{\mathbb{C}}$ はSierpińskiカーペットである．特に $J(f)\cup\{\infty\}\subset\widehat{\mathbb{C}}$，$J(f)\subset\mathbb{C}$ は局所連結である．

上記の例はTheorem Bの仮定を満たしている．更に次のようにこのような例はたくさんある．

Proposition C. *任意に遅い増大度をもつ超越整函数 f で $J(f)\cup\{\infty\}\subset\widehat{\mathbb{C}}$ がSierpińskiカーペットとなるようなものが存在する．即ち，任意の単調増加函数 $\varphi(r)>0$ $(r>0)$ で $\lim_{r\to\infty}\varphi(r)=+\infty$ を満たすものに対し，超越整函数 f で*

$$\log M(r,f) < \varphi(r)\log r, \quad r > {}^{\exists}r_0$$

を満たし，$J(f)\cup\{\infty\}\subset\widehat{\mathbb{C}}$ がSierpińskiカーペットとなるものが存在する．

* 〒606-8501 京都市左京区吉田二本松町　京都大学大学院 人間・環境学研究科
e-mail: kisaka@math.h.kyoto-u.ac.jp

参考文献

[Ba] I. N. Baker, Dynamics of slowly growing entire functions, *Bull. Austral. Math. Soc.* **63** (2001), no. 3, 367–377.

[Bo] D. A. Boyd, An entire function with slow growth and simple dynamics, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **22** (2002), no. 2, 317–322.

[Ki1] M. Kisaka, On the local connectivity of the boundary of unbounded periodic Fatou components of transcendental functions, *Complex dynamical systems and related areas (Kyoto, 1996). RIMS Ko-kyu-roku* **988** (1997), 113–119.

[Ki2] M. Kisaka, On the connectivity of Julia sets of transcendental entire functions, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **18** (1998), no. 1, 189–205.

[Mo] S. Morosawa, Local connectedness of Julia sets for transcendental entire functions, *Nonlinear analysis and convex analysis (Niigata, 1998)*, World Sci. Publ., River Edge, (1999), 266–273.

タイヒミュラー空間とグランスキー作用素との関係について

柳下　剛広　(早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻)*

タイヒミュラー空間とは、1つの曲面に導入できる、標識付きの複素構造全体を表している空間である。特に、曲面が複素平面 $\mathbb{C}$ 内の単位円板 $\Delta = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ のときは普遍タイヒミュラー空間と呼ばれ、以下のように定義される。

複素平面 $\mathbb{C}$ 上の自己擬等角写像で、 $\Delta^* = \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}$ 上では等角写像となるものを考える。そのような擬等角写像 f で $\lim_{z\to\infty} f(z) - z = 0$ をみたすもの全体の集合を QC とする。 $f, g \in \mathrm{QC}$ に対して、 $f|_{\Delta^*} = g|_{\Delta^*}$ が成り立つとき、 f と g はタイヒミュラー同値であるという。この同値関係による QC の商空間を**普遍タイヒミュラー空間**といい T で表す。 $f \in \mathrm{QC}$ で表されるタイヒミュラー同値類を $[f]$ と表す。また、 Δ 上のベルトラミ係数全体の集合 B と QC には1対1対応があるため、 T はその集合の商空間とも見なせる。 $\mu \in B$ を代表元とするタイヒミュラー同値類を $[\mu]$ で表す。また、 μ を Δ^* 上で 0 として $\mathbb{C}$ 上に拡張したとき、 μ をベルトラミ係数とする $\mathbb{C}$ 上の擬等角写像を $f_\mu \in \mathrm{QC}$ とおく。

$\tau \in T$ に対して、$k([\mu]) = \inf\{\|\nu\|_\infty | \nu \in [\mu]\}$ と定める。 $k([\mu])$ を $[\mu]$ の *maximal dilatation* と呼ぶ。 $k([\mu])$ は Δ と $f_\mu(\Delta)$ との標識付きの複素構造の変形度を表している。また、 $\mu \in B$ に対し $h^*(\mu) = \inf\{\|\mu|_{\Delta\setminus E}\|_\infty | E \text{は}\Delta\text{のコンパクト部分集合}\}$ とおき、 $h([\mu]) = \inf\{h^*(\nu) | \nu \in [\mu]\}$ と定める。 $h([\mu])$ を $[\mu]$ の *boundary dilatation* と呼ぶ。定義から $h([\mu]) \leq k([\mu])$ となる。$h([\mu]) < k([\mu])$ となるとき、$[\mu]$ を *Strebel point* という。 T の Strebel point 全体の集合 S は T の稠密な部分集合となることが知られている（[4] 参照)。任意の $\tau \in T$ に対して、 $k(\tau) = \|\mu\|_\infty$ となる $\mu \in \tau$ が存在する。これを**極値ベルトラミ係数**という。一般に、極値ベルトラミ係数を求めるのは難しいが、 $\tau \in T$ が Strebel point のとき、ある Δ 上の正則関数 ϕ が存在して、その極値ベルトラミ係数は $k(\tau)\overline{\phi}/|\phi|$ と一意的に定まる（Strebel's frame mapping theorem, [1] p.97 参照)。このように、 Strebel point であることから強い結果が得られるが、ここから**Strebel point はどう特徴付けられるか**という問題が自然に出てくる。今回、部分的にではあるが、それを**グランスキー作用素の性質で特徴付けられる**ことを示すことに成功した。

さて、 $[\mu] \in T$ に対して、

$$\log \frac{f_\mu(z) - f_\mu(\zeta)}{z - \zeta} = -\sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_{mn}([\mu]) z^{-m} \zeta^{-n} \qquad (z, \zeta \in \Delta^*)$$

と無限級数展開できる。$\alpha_{mn}([\mu])$ を $[\mu]$ のグランスキー係数という。任意の $x = \{x_m\} \in l^2$ に対して、グランスキー不等式と呼ばれる以下の不等式

$$\left| \sum_{m,n=1}^{\infty} \sqrt{mn}\,\alpha_{mn}([\mu]) x_m x_n \right| \leq k([\mu]) \sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^2$$

* 早稲田大学大学院基幹理工学研究科：〒169-8555 東京都新宿区大久保3-4-1
e-mail: m-yanagishita@asagi.waseda.jp

が成り立つ。したがって、

$$G([\mu]):\{x_m\}\mapsto\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{mn}\alpha_{mn}([\mu])x_n\right\}$$

とおけば、$G([\mu])$ は l^2 からそれ自身の中への有界線形作用素となる。これを $[\mu]$ に対する**グランスキー作用素**という。$G([\mu])$ の作用素ノルムを $\|G([\mu])\|$ とおけば、グランスキー不等式から、任意の $\tau\in T$ に対して、$\|G(\tau)\|\leq k(\tau)$ が成り立つ。

Strebel point と同様な概念がグランスキー作用素に対しても定まる。l^2 内の単位球面を l_1^2 とおく。$\tau\in T$ に対して、$\beta(\tau)=\sup_{\{x^{(n)}\}}\limsup_{n\to\infty}\|G(\tau)x^{(n)}\|_2$ と定める。ここで、上限は l_1^2 内のすべての退化列について取っている。定義から、$\beta(\tau)\leq\|G(\tau)\|$ が成り立つ。しかも、$\beta(\tau)<\|G(\tau)\|$ が成り立つとき、ある $x\in l_1^2$ が存在して、$\|G(\tau)x\|_2=\|G(\tau)\|$ が成り立つことがわかる ([5] 参照)。また、グランスキー作用素ノルムと maximal dilatation の関係と同様に、任意の $\tau\in T$ に対して、$\beta(\tau)\leq h(\tau)$ が成り立つ。

主定理 $\mathbf{G_e}=\{\tau\in T|\|G(\tau)\|=k(\tau)\}$ とおく。このとき、任意の $\tau\in\mathbf{G_e}$ に対して、以下の２条件は同値である。

(1) τ は Strebel point

(2) $\beta(\tau)<\|G(\tau)\|$

$\tau\in G_e$ に対して条件 (2) をみたすとき、ある $x=\{x_m\}\in l_1^2$ が存在して、τ 内の極値ベルトラミ係数は $k(\tau)\overline{\phi_x}/|\phi_x|$ と一意的に定まる（[5]）。ここで、

$$\phi_x(z)=\frac{1}{\pi}\sum_{m,n=1}^{\infty}\sqrt{mn}x_mx_nz^{m+n-2}\qquad(z\in\Delta)$$

である。これは主定理の証明にも用いられる。他にも証明のために以下の Krushkal の結果を用いる。

命題 ([3]) $S\cap\mathbf{G_e}$ は $\mathbf{G_e}$ の稠密な部分集合となる。

命題 ([2]) $\tau\in T$ とする。$\tau\in\mathbf{G_e}$ となる必要十分条件は、τ 内のある極値ベルトラミ係数 μ が存在し、

$$\sup_{x\in l_1^2}\left|\iint_{\Delta}\mu(z)\phi_x(z)dxdy\right|=\|\mu\|_\infty$$

参考文献

[1] F. P. Gardiner and N. Lakic, *Quasiconformal Teichmüller theory*, Amer. Math. Soc., 2000.

[2] S. L. Krushkal, *The Grunsky coefficient conditions*, Siberian Mathematical Journal, **28**, 1987, 104-110.

[3] S. L. Krushkal, *Density of Specific Strebel points and its consequences*, Journal D'analyse Mathématique, **110**, 2010, 271-295.

[4] N. Lakic, *Strebel Points*, Contemp. Math., **211**, 1997, 417-431.

[5] Y. Shen, *On Grunsky inequalities and the exact domain of variability of the Grunsky functional*, Israel Journal of Mathematics, **183**, 2011, 399-416.

リーマン面のVeech正則族の正則切断について

四之宮佳彦　(東京工業大学，学振PD)*

1. 準備

X を (g,n) 型リーマン面とする $(3g-3+n>0)$．リーマン面 X 上の平坦構造 u とは，有限個の特異点を持つ X 上のアトラスで，変換関数が $w=\pm z+c$ の形をしているもののことであり，組 (X,u) を平坦曲面と呼ぶ．平坦曲面 (X,u) の自己アファイン写像全体の成す群を $\mathrm{Aff}^+(X,u)$ と表し，アファイン群いう．平坦曲面の変換関数の形から，各アファイン写像に対応する行列は符号の差を除き一意に定まり，微分写像 $D:\mathrm{Aff}^+(X,u)\to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ が定義できる．微分写像の像を $\Gamma(X,u)$ と書いて，(X,u) のVeech群と呼ぶ．平坦曲面 (X,u) には $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ が作用し，その軌道はタイヒミュラー空間内に正則等長に埋め込まれた双曲平面となる．これをタイヒミュラー円板という．タイヒミュラー円板への写像類群の作用の上半平面への引き戻しは，Veech群 $\Gamma(X,u)$ と反正則なフックス群 $\overline{\Gamma}(X,u)$ で表される (c.f. [HS07])．よって，オービフォルド $\mathbb{H}/\overline{\Gamma}(X,u)$ から (g,n) 型リーマン面のモジュライ空間 $M(g,n)$ への正則かつ局所等長な埋め込み Φ が存在する．本講演で扱うリーマン面のVeech正則族 (M,π,B) とはこのような正則かつ局所等長な埋め込み Φ から以下のように構成されるリーマン面の正則族である：

$$\begin{aligned} B &= \mathbb{H}^*/\overline{\Gamma}(X,u), \\ M &= \{(t,z): t\in B, z\in X_t=\Phi(t)\}, \\ \pi &: M\to B, \pi(t,z)=t. \end{aligned}$$

但し，$\mathbb{H}^*$ は $\mathbb{H}$ から $\overline{\Gamma}(X,u)$ の楕円型元の固定点を全て除いたものである．以下では，$\mathbb{H}/\overline{\Gamma}(X,u)$ の双曲面積が有限であると仮定する．

リーマン面の正則族 (M,π,B) の底空間 B とファイバーが解析的有限な双曲型リーマン面の場合，(M,π,B) の正則切断の個数は有限個であることがManin[Man63] により示された.（Maninの証明には不完全な点があったがColeman[Col90] により修正された.）また，Grauert[Gra65] も別証明を与えている．本講演では，リーマン面のVeech正則族 (M,π,B) の正則切断の個数を，底空間の型 (p,k) とファイバーの型 (g,n) にのみ依存する量で評価する．リーマン面のVeech正則族の正則切断に関して，論文 [Shi12a] で次を示した．

定理. 平坦曲面 (X,u) から構成されるリーマン面のVeech正則族 (M,π,B) の正則切断は条件 (1) を満たす平坦曲面 (X,u) 上の点 a をタイヒミュラー変形によって動かしたものとして表される．

$$\mathrm{Aff}^+(X,u)\{a\}=\mathrm{Ker}(D)\{a\} \tag{1}$$

したがって，条件 (1) を満たす点の個数を評価すれば，それが正則切断の個数評価となる．

本研究は本研究はJSPS科研費24005650の助成を受けたものである．

* 〒152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1 東京工業大学 大学院理工学研究科 数学専攻
e-mail: shinomiya.y.aa@m.titech.ac.jp

2. 主結果

定理 ([Shi12b])**.** *リーマン面の Veech 正則族 (M,π,B) の正則切断の個数は高々*

$$32\pi(2p-2+k)(3g-3+n)^2\left\{2(3g-3+n)+3\exp\left(\frac{5}{e}(3g-3+n)\right)\right\}$$

個である.

Veech 群 $\Gamma(X,u)$ の有限指数部分群 Γ をとり，$\overline{\Gamma}$ を Γ と反正則なフックス群とする．被覆写像 $\rho:\mathbb{H}/\overline{\Gamma}\to\mathbb{H}/\overline{\Gamma}(X,u)$ と (X,u) の定める局所等長な埋め込み $\Phi:\mathbb{H}/\overline{\Gamma}(X,u)\to M(g,n)$ との合成 $\Phi\circ\rho$ は正則かつ局所等長な写像となる．リーマン面の Veech 正則族と同様にして $\Phi\circ\rho$ から構成されるリーマン面の正則族を (M',π',B') とする．

系 ([Shi12b])**.** *フックス群 Γ が $(p',k':\nu'_1,\cdots,\nu'_{k'})$ 型フックス群であると仮定する．リーマン面の正則族 (M',π',B') の正則切断の個数は高々*

$$32\pi(2p'-2+k')(3g-3+n)^2\left\{2(3g-3+n)+3\exp\left(\frac{5}{e}(3g-3+n)\right)\right\}$$

個である.

定理の証明には (X,u) が有限個の円柱に分解されるという事実を用いる．オービフォルド $\mathbb{H}/\overline{\Gamma}(X,u)$ の双曲面積が有限であるという仮定の下で，(X,u) が θ 方向の閉測地線を持つとき，(X,u) は θ 方向の閉測地線から成る円柱に分解されることが Veech[Vee89] によって示されている．このような方向 θ を Jenkins-Strebel 方向と呼ぶ．平坦曲面の Jenkins-Strebel 方向による円柱分解に関連して次を示した．

定理 ([Shi12b])**.** *平坦曲面 (X,u) が Jenkins-Strebel 方向によって円柱 $R_1,\cdots,R_m$ に分解されたとする．このとき，次の不等式が任意の $i,j\in\{1,\cdots,m\}$ に対して成り立つ：*

$$\left(\frac{\mathrm{mod}(R_i)}{\mathrm{mod}(R_j)}\right)^{\frac{1}{2}}<2\exp\left(\frac{5}{e}(3g-3+n)\right)\mathrm{Area}(\mathbb{H}/\Gamma(X,u)).$$

但し，$\mathrm{mod}(R_i)$ は円柱 R_i の円周と高さの比である.

参考文献

[Col90] R. F. Coleman. Manin's proof of the Mordell conjecture over function fields. *Enseign. Math. (2)*, 36(3-4):393–427, 1990.

[Gra65] Hans Grauert. Mordells Vermutung über rationale Punkte auf algebraischen Kurven und Funktionenkörper. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 25:131–149, 1965.

[HS07] F. Herrlich and G. Schmithüsen. On the boundary of Teichmüller disks in Teichmüller and in Schottky space. In *Handbook of Teichmüller theory. Vol. I*, volume 11 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 293–349. Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.

[Man63] Ju. I. Manin. Rational points on algebraic curves over function fields. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 27:1395–1440, 1963.

[Shi12a] Y. Shinomiya. Veech holomorphic families of Riemann surfaces, holomorphic sections, and Diophantine problems. *arXiv:1202.5002*, 2012.

[Shi12b] Y. Shinomiya. On holomorphic sections of veech holomorphic families of riemann surfaces. *arXiv :1211.3504*, 2012.

[Vee89] W. A. Veech. Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards. *Invent. Math.*, 97(3):553–583, 1989.

トーラス上の種数２のリーマン面の退化族について

小森　洋平　(早大教育)*

上半平面の点 τ に対し、格子群 $\Omega_\tau := \mathbf{Z}\cdot 1 + \mathbf{Z}\cdot\tau$ を考える。格子群の直積 $\Omega_\tau \times \Omega_\tau$ の３次元複素ベクトル空間 $\mathbf{C}_z \times \mathbf{C}_u \times \mathbf{C}_\zeta$ への次のような作用を考える。$(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_\tau \times \Omega_\tau$ と $(z, u, \zeta) \in \mathbf{C}_z \times \mathbf{C}_u \times \mathbf{C}_\zeta$ に対し

$$(\omega_1, \omega_2)\cdot(z, u, \zeta) := (z + \omega_1, u + \omega_2, f(u, \omega_2) f(u - 2z, \omega_2 - 2\omega_1)\zeta).$$

ここで $f(u, \omega)$ は Weierstrass の σ 関数の乗法因子とする。すなわち

$$\sigma(u + \omega) = f(u, \omega)\sigma(u).$$

この作用から２つのトーラス $R := \mathbf{C}_z/\Omega_\tau$ と $T := \mathbf{C}_u/\Omega_\tau$ の直積 $R \times T$ 上に正則直線バンドル $\pi_1 : L_1 \to R \times T$ が定まり、次の写像 $\sigma_1 : R \times T \to L_1$ は $\pi_1 : L_1 \to R \times T$ の正則切断になる。

$$\sigma_1(\overline{z}, \overline{u}) := \overline{(z, u, \sigma(u)\sigma(u - 2z))}.$$

さらに $\Omega_\tau \times \Omega_\tau$ の $\mathbf{C}_z \times \mathbf{C}_u \times \mathbf{C}_\zeta$ への別の作用

$$(\omega_1, \omega_2)\cdot(z, u, \zeta) := (z + \omega_1, u + \omega_2, f(z, \omega_1) f(u - z, \omega_2 - \omega_1)\zeta)$$

から定まる $R \times T$ 上の正則直線バンドルを $\pi_2 : L_2 \to R \times T$ とすると、$L_1 \simeq L_2^{\otimes 2}$ となり、写像 $\Psi : L_2 \to L_1$ を $\Psi(\overline{(z, u, \zeta)}) := \overline{(z, u, \zeta^2)}$ と定義すると、$\Psi : L_2 \to L_1$ は L_1 の零切断で分岐する２重被覆になる。このとき $\Psi^{-1}(\sigma_1(R \times T))$ は４点で A_1 型特異点を持つ複素解析曲面になり、その特異点解消を M とすると

$$\pi : M \to \Psi^{-1}(\sigma_1(R \times T)) \to R \times T \to R$$

はトーラス R 上の種数２のリーマン面の退化族になる。本講演ではこの退化族 $\pi : M \to R$ について、（１）特異ファイバー（２）正則切断（３）モジュライ写像のそれぞれについて考察する。

References

[1] Y. Imayoshi, Y. Komori and T. Nogi *Holomorphic sections of a holomorphic family of Riemann surfaces induced by a certain Kodaira surface, Kodai Math. J. Vol.32, No.3(2009), 450-470.*

[2] Y. Imayoshi, Y. Komori and T. Nogi *On holomorphic sections of a certain Kodaira surface revisited, Riemann Surfaces, Harmonic Maps and Visualization, OCAMI Studies Volume 3 (2009), 151-162.*

* e-mail: ykomori@waseda.jp

特別講演

Zalcmanの補題と複素力学系

川平　友規　(名古屋大学大学院多元数理科学研究科)*

概　要

Zalcman の補題は，複素平面上の領域で定義された正則関数族が正規族と「ならない」ための必要十分条件を与えるものである．本講演では，1次元複素力学系理論にこの補題を適用し，その効果と新たな応用について概説する．

1. Zalcmanの補題

D を複素平面 $\mathbb{C}$ 内の領域とし，$\mathcal{F}$ を D 上で定義された正則関数族とする．Zalcman の補題は，$\mathcal{F}$ がある点の任意の近傍で正規族でないことの必要十分条件を与える：

□ 補題 **1.1 (Zalcmanの補題[Za])** 関数族 $\mathcal{F}$ が $z_0 \in D$ で正規族をなさないことは，次と同値：ある関数列 $\{F_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$，$\rho_k \to 0$ を満たす列 $\{\rho_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^*$，および $z_k \to z_0$ を満たす列 $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset D$ が存在して，関数 $\psi_k(w) = F_k(z_k + \rho_k w)$ が定数でない有理形関数 $\psi : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ に $\mathbb{C}$ 上コンパクト一様収束する． □

ここで，実際は $\rho_k > 0$ とできるのだが，後の応用に備えて複素数のままにしておくことにする．また任意の $w \in \mathbb{C}$ について，$k \gg 0$ であれば $z_k + \rho_k w \in D$ とできるので，$\psi_k(w)$ の収束性が意味をもつ．

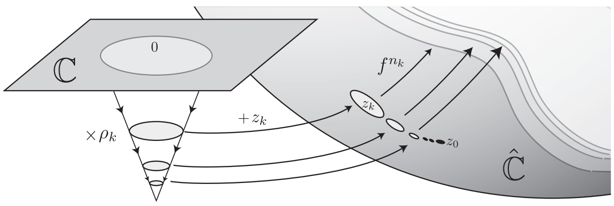


図 1: Zalcmanの補題を $\mathcal{F} = \{f^n\}$ （f は有理関数）に適用したイメージ図.

本講演では，このZalcmanの補題を1次元複素力学系理論に適用し，従来のMontelの定理を用いた古典的な手法がどのように置き換わるのか，また，Zalcmanの補題が生成する有理形関数族の性質について，その応用などをお話させていただく予定である．

参考文献について． Zalcman の補題に関する L. Zalcman 自身による解説は [Za2] を，複素力学系全般の参考文献としては [Mi], [UTM] をあげておく．また，本稿で扱えなかった Zalcman の補題の複素力学系への応用として，[BM]，[Ha]，[Ka]，[MM]，[St] を挙げておく．

本研究は住友財団および科研費 (課題番号:24740103) の助成を受けたものである。
キーワード：複素力学系，有理関数，正規族，Zalcman の補題，Julia 集合，Mandelbrot 集合
* 〒464-8602 名古屋市千種区不老町　名古屋大学 大学院多元数理科学研究科
e-mail: `kawahira@math.nagoya-u.ac.jp`
web: `http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira`

2. 1次元複素力学系

以下，$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ はRiemann球面に球面距離を入れたものとする．次数2以上の有理関数 $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ をひとつ固定するとき，これによって生成される力学系

$$\cdots \xrightarrow{f} \widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \cdots$$

を複素力学系(complex dynamics)と呼ぶことにする．これは正則関数族 $\{f^n\}_{n\geq 0}$ を考えることと同等である.（ただし，f^n は f を n 回合成したもの.）いま $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ を固定したとき，力学系の中でその軌道(orbit)

$$z_0 \overset{f}{\longmapsto} z_1 \overset{f}{\longmapsto} z_2 \overset{f}{\longmapsto} z_3 \overset{f}{\longmapsto} \cdots$$

が定まる．力学系の最も素朴な問題意識は,「軌道が（初期値の誤差に対して）安定であるか」ということである．よって「軌道が安定である初期値の集合」として，**Fatou** 集合を

$$\begin{aligned} F(f) &:= \left\{ z_0 \in \widehat{\mathbb{C}} : \ z_0 \text{ のある近傍 } U \text{ 上で } \{f^n|U\}_{n\geq 0} \text{ は } \underline{\text{同程度連続}} \right\} \\ &= \left\{ z_0 \in \widehat{\mathbb{C}} : \ z_0 \text{ のある近傍 } U \text{ 上で } \{f^n|U\}_{n\geq 0} \text{ は } \underline{\text{正規族}} \right\} \end{aligned}$$

と定義する．同程度連続性は「 z_0 に生じる誤差を一定以下に抑えれば，その後の z_n の誤差も一様に抑えられる」ことを意味する.「同程度連続」と「正規族」の置き換えは $\widehat{\mathbb{C}}$ のコンパクト性とAscoli-Arzelàの定理よる.

一方，力学系の不安定部分（いわゆるカオス部分，$F(f)$ の補集合）は

$$J(f) := \left\{ z_0 \in \widehat{\mathbb{C}} : z_0 \text{ の任意の近傍 } U \text{ 上で } \{f^n|U\}_{n\geq 0} \text{ は } \underline{\text{正規族でない}} \right\}$$

と定義される．これを f の **Julia** 集合と呼ぶ．したがって上述のZalcmanの補題は $\mathcal{F} := \{f^n\}_{n\geq 0}$ に対してJulia集合上の点を特徴づける必要十分条件となっている.（$J(f)$ が無限遠点 ∞ を含むときは，適当なMöbius共役をとって考えればよい.）

ここでJulia集合 $J(f)$ の基本的な性質を列挙しておく：

- $J(f)$ は空でないコンパクト集合.
- $J(f)$ は孤立点をもたない非可算無限集合.
- $f(J(f)) = J(f) = f^{-1}(J(f))$ (完全不変性).
- U が $U \cap J(f) \neq \emptyset$ を満たす開集合 $\implies \exists\, m \in \mathbb{N},\ J(f) \subset \bigcup_{j=1}^m f^j(U)$.

3. 「反発周期点はJulia集合内で稠密」

Zalcmanの補題が複素力学系に応用された最初の例と思われるのが，Scwhick [Sch] による表題の主張の証明である.

3.1. 反発的周期点

周期点とは，方程式 $f^n(z) = z$ $(n \in \mathbb{N})$ の解のことである．ある周期点 z に対し，$f^n(z) = z$ となる n の最小値 p をその周期と呼ぶ．また，そこでの微分係数 $(f^p)'(z)$ を乗数(multiplier)と呼ぶことにする．乗数の絶対値が1より大きいとき，その周期点は反発的周期点(repelling periodic point)と呼ばれる．z 中心の十分小さな円板は f^p の作用で $|(f^p)'(z)|$ 倍程度に拡大され，自分自身を覆うわけである．このような拡大的な作用のため，関数族 $\{f^n\}$ は z の近傍で正規族となれない．すなわち，$z \in J(f)$ である．

反発的周期点に関しては，次の古典的な定理（1910年代）が知られている：

□ **定理 3.1 (Fatou, Julia)** 反発的周期点全体の集合は $J(f)$ の中で稠密である． □

FatouとJuliaの証明はそれぞれ異なっているが（Milnorの教科書[Mi]を参照），どちらも有理関数特有の性質を用いており，たとえば整関数や有理形関数による力学系でそのまま通用するような議論ではない．これに対し，Schwick [Sch]が与えたZalcmanの補題を用いる証明は，若干の変更で整関数や有理形関数の力学系にも適用できるものであった．([UTM, 定理2.25]も参照．) また，それをさらに改良した証明が，Bargmann [Ba]およびBerteloot-Duval [BD]により与えられている．講演では，その概要を紹介する予定である．

3.2. パラメータ空間への応用

Schwickのアイディアは関数族のパラメーター空間にも適用できる．後に触れるMandelbrot集合とJulia集合の類似性について調べる際も，ここでのアイディアが重要な役割を果たす.（本講演の以降の内容は [Ka] に基づく.）

複素平面内の単位円板を $\mathbb{D}$ で表し，正則写像 $f : \mathbb{D} \times \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$, $f : (t, z) \mapsto f_t(z)$ を考えよう．ただし，それぞれの $f_t : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ は一定次数 $d \geq 2$ の有理関数である. すなわち，f は $\mathbb{D}$ でパラメトライズされた有理関数の族，ということになる．

アクティブ部分. 以下，ある正則写像 $c : \mathbb{D} \to \widehat{\mathbb{C}}$ が存在して，$c(t) = c_t$ が f_t の分岐点となっていると仮定する．ペア (f, c) を考えるとき，分岐点 c_t は f_t の標識つき分岐点(marked critical point)と呼ばれる．この c_t が $t = t_0$ においてアクティブであるとは，関数族 $\{t \mapsto f_t^n(c_t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ が t_0 のすべての近傍で正規族とならないことをいう. アクティブな c_t を与えるパラメーター全体の集合を $A(f, c) \subset \mathbb{D}$ で表し，アクティブ部分(activeness locus)と呼ぶ．この集合は，いわゆる分岐部分(bifurcation locus) の部分集合である．

例. 典型的なのは，2次多項式族 $f : (t, z) \mapsto z^2 + 3t,\ c_t = 0$ の場合である．このとき，$A(f, 0)$ は後述するマンデルブロー集合 $\mathbb{M}$ の「境界部分」に相当する．

Schwickの議論をうまく適用すると，たとえば次の定理が証明できる：

□ **定理 3.2 (前反発的な分岐点の分布)** $A(f, c)$ は空でないとする．このとき，任意の $t_0 \in A(f, c)$ に対し，$A(f, c)$ 内の収束列 $t_k \to t_0$ で各 c_{t_k} の f_{t_k} による軌道はある時点から反発的周期点となるものが存在する． □

講演では（時間の許す範囲で）Montelの定理を用いた古典的な証明と，Shcwickの議論をもちいた証明を比較してみたいと思う．

4. Zalcman関数とLyubich-Minsky ラミネーション

4.1. Zalcman 関数

$f:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ を次数2以上の有理関数とし，写像族 $\mathcal{F}:=\{f^n\}$ にZalcmanの補題を適用する．Julia集合 $J=J(f)$ の元 $z_0\neq\infty$ に対し，Zalcmanの補題のようにして得られる極限関数 ψ を f の z_0 における**Zalcman**関数と呼ぶ（Steinmetz [St]）．またその全体を $\mathcal{Z}(z_0)=\mathcal{Z}_f(z_0)$ で表す．もし J が無限遠点を含むときは，$\mathcal{Z}(\infty):=\{1/\phi\ :\ \phi\in\mathcal{Z}_F(0)\}$ と定義する．ただし，F は $F(z)=1/f(1/z)$ として得られる有理関数である．さらに f のZalcman関数の全体 $\mathcal{Z}$ を

$$\mathcal{Z}\ :=\ \bigcup_{z_0\in J}\mathcal{Z}(z_0)$$

と定義する．

さて $\mathbb{C}$ 全体で定義された定数でない有理形関数全体の集合を $\mathcal{U}$ と表す．また，複素アファイン写像全体を Aff で表す．このとき有理関数 f について $f\circ\mathcal{U}\subset\mathcal{U}$，かつ $\mathcal{U}\circ\mathrm{Aff}\ =\ \mathcal{U}$ が成り立つことは容易にわかるが，$\mathcal{U}$ の部分集合であるZalcman関数族 $\mathcal{Z}(z_0)$ および $\mathcal{Z}$ は，さらによい「不変性」をもつのである：

□ **命題 4.1 (Z関数族の不変性)** 任意の $z_0\in J$ に対し，関数族 $\mathcal{Z}(z_0)$ は

$$f\circ\mathcal{Z}(z_0)\ =\ \mathcal{Z}(z_0)\ =\ \mathcal{Z}(z_0)\circ\mathrm{Aff}$$

を満たす．すなわち，

(1) $\psi\in\mathcal{Z}(z_0)$ ならば，$f\circ\psi\in\mathcal{Z}(z_0)$．また，ある $\psi_1\in\mathcal{Z}(z_0)$ が存在して，$\psi=f\circ\psi_1$.

(2) $\delta:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を複素アファイン写像とする．このとき，$\psi\in\mathcal{Z}(z_0)$ ならば $\psi\circ\delta\in\mathcal{Z}(z_0)$.

したがって次も成り立つ：$f\circ\mathcal{Z}\ =\ \mathcal{Z}\ =\ \mathcal{Z}\circ\mathrm{Aff}$. □

4.2. Zalcman関数の応用：Lyubich-Minsky ラミネーションの構成

複素力学系を研究するうえでのひとつの指針として，**Sullivan**の辞書というものがある．80年代，D. Sullivanが提唱したこの「辞書」は，古典的な正則力学系のひとつであるKlein群論と複素力学系との類似性に着目し，方法論を共有すべし，というひとつのドグマを掲げたものである.（その成功は，たとえば[UTM]に詳しい.）

ここでKlein群 Γ とは，リーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ にMöbius変換群として作用する $PSL(2,\mathbb{C})$ の離散部分群のことである．一方，$PSL(2,\mathbb{C})$ は3次元双曲空間 $\mathbb{H}^3$ に等長変換群として作用するため，商空間 $\mathbb{H}^3/\Gamma$ は3次元双曲的多様体（一般には軌道体）となる．すなわち，Klein群論とは3次元双曲多様体論に他ならない.

一方，複素力学系の作用は $\mathbb{H}^3$ への性質のよい拡張ができないことが知られており，その意味でKlein群のような「双曲幾何的実現」として自明なものをもたない．そこで90年代に登場したのが，M. LyuibichとY. Minskyによるラミネーション理論[LM]である．彼らは複素力学系に対し,「双曲幾何的実現」として**3**次元双曲ラミネーションが取れることを主張し，さらにその幾何学的剛性から半双曲と呼ばれるクラスの有理関数の力学系に関する剛性定理を証明した.

この3次元双曲ラミネーションに用いられるのは，有理関数 f から生成される，ある有理形関数の族 $\mathcal{LM} \subset \mathcal{U}$ である．この関数族は「不変性」

$$f \circ \mathcal{LM} \;=\; \mathcal{LM} \;=\; \mathcal{LM} \circ \mathrm{Aff}$$

をみたしており，この性質からまず，リーマン面ラミネーション $\mathcal{A}^{\mathcal{LM}}$ が構成される．この $\mathcal{A}^{\mathcal{LM}}$ の「スケーリング束」をとり，さらに力学系の自然な作用により商空間をとったものがLyubich-Minskyの3次元双曲ラミネーションである．(詳しくは [LM] を参照.)

さてZalcman関数の全体 $\mathcal{Z}$ も「不変性」

$$f \circ \mathcal{Z} \;=\; \mathcal{Z} \;=\; \mathcal{Z} \circ \mathrm{Aff}$$

を満たすことから，同様のレシピによりリーマン面ラミネーション $\mathcal{A}^{\mathcal{Z}}$ が構成できることがわかる．実はかなり広いクラスの有理関数について，$\mathcal{LM} = \mathcal{Z}$ が成り立ち，リーマン面ラミネーション $\mathcal{A}^{\mathcal{LM}}$ と $\mathcal{A}^{\mathcal{Z}}$ は一致するのである：

□ **定理 4.2** (ラミネーションの一致, [**Ka**]) *f は次を満たすとする：*

> $(*)$ *任意の $z_0 \in J(f)$ に対し，$z_0' \in UGO(z_0) - \{z_0\}$ かつ $z_0 \notin P(f)$ となるものが存在する.*

このとき $\mathcal{Z}$ と $\mathcal{LM}$ は一致する: とくに，$\mathcal{A}^{\mathcal{LM}}$ と $\mathcal{A}^{\mathcal{Z}}$ も一致する □

ただし，条件 $(*)$ 内の $UGO(z_0)$, $P(f)$ は次のように定義する：まず $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対し，全軌道(grand orbit) $GO(z_0)$ とは，ある $m, n \in \mathbb{N}$ が存在して $f^m(z_0) = f^n(\zeta)$ とできるような $\zeta \in \widehat{\mathbb{C}}$ の全体である．その中でも，$(f^m)'(z_0) \neq 0$ かつ $(f^n)'(\zeta) \neq 0$ とできるような ζ 全体が$UGO(z_0)$ である．また $P(f)$ はいわゆる f の分岐後集合 (post-critical set)であり，

$$P(f) \;:=\; \overline{\{f^n(c) \,:\, n \in \mathbb{N}, f'(c) = 0\}}$$

と定義する．

たとえば，双曲的な有理関数は $(*)$ を満たす．もうすこし一般に，放物的な（i.e. J が分岐点をもたない）有理関数であれば良い．さらに，f が無限回くりこみ可能な2次多項式であっても $(*)$ を満たす．一方，$(*)$ が成り立たない例として $f(z) = z^2 - 2$ における $z_0 = 2$ などがある．$J = P$ となる場合も成り立たない．

5. パラメーター空間におけるZalcman関数

§3では，標識つき分岐点 $c : \mathbb{D} \to \widehat{\mathbb{C}}$ をもつ有理関数族 $f : \mathbb{D} \times \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ を考えた．そのアクティブ部分は関数族 $\{t \mapsto f_t^n(c_t)\}_{n \geq 0}$ が正規でないパラメーター $t \in \mathbb{D}$ の全体と定義したから，Zalcmanの補題が適用でき，かつそれに対応する有理形関数族を考えることができる．また，パラメーター自体は $\mathbb{D}$ でなく $\mathbb{C}$ で考えてもよい．

以下では話を単純にするために，2次関数族

$$\left\{ f_c(z) = z^2 + c \,:\, c \in \mathbb{C} \right\}$$

について考えよう．各 $f_c : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ （ただし $f_c(\infty) = \infty$ ）は原点と無限遠点を分岐点にもつが，無限遠点は c によらず安定な固定点であるから，原点 $z = 0$ を標識つき分岐点としてアクティブ部分を考えることができる．

じつは c を固定して分岐点の軌道 $\{f_c^n(0)\}_{n \geq 0}$ を考えるとき，

(a) すべての $n \geq 0$ について $|f_c^n(0)| \leq 2$.

(b) $f_c^n(0) \to \infty$ $(n \to \infty)$.

のいずれかであることが（三角不等式だけの簡単な計算で）わかる．分岐点軌道が(a)のタイプとなるような $c \in \mathbb{C}$ 全体を**Mandelbrot 集合** とよび，$\mathbb{M}$ で表す．すなわち，

$$\mathbb{M} \ := \ \{c \in \mathbb{C} : |f_c^n(0)| \leq 2 \ (\forall n \in \mathbb{N})\}.$$

原点を標識付き分岐点とみなすと，この関数族のアクティブ部分は $\partial\mathbb{M}$ となることがわかる．すなわち，$F_n(c) := f_c^n(0)$ $(n \geq 0)$ とおくとき，

$$\partial\mathbb{M} \ = \ \left\{c_0 \in \mathbb{C} \ : \ c_0 \text{ の任意の近傍 } U \text{ 上で} \{F_n|U\}_{n\geq 0} \text{ は} \underline{\text{正規族でない}}\right\}$$

ここで $c_0 \in \partial\mathbb{M}$ のとき Zalcman の補題を適用すれば，$n_k \to \infty$，$\rho_k \to 0$, $c_k \to c_0$ が存在して，

$$F_{n_k}(c_k + \rho_k w) \to \Phi(w)$$

となる $\Phi \in \mathcal{U}$ が存在する．この形の Φ を c_0 における**パラメトリック Zalcman 関数**（もしくは para-Zalcman 関数）とよび，その全体を $\mathcal{C}(c_0)$ で表す．さらに

$$\mathcal{C} := \bigcup_{c_0 \in \partial\mathbb{M}} \mathcal{C}(c_0)$$

とおく．パラメトリック Zalcman 関数族は，次の意味で「不変性」をもつ：

□ **命題 5.1 (パラメトリック Z 関数の不変性)** 任意の $c_0 \in \partial\mathbb{M}$ に対し，関数族 $\mathcal{C}(c_0) \subset \mathcal{U}$ は

$$f_{c_0} \circ \mathcal{C}(c_0) \ = \ \mathcal{C}(c_0) \ = \ \mathcal{C}(c_0) \circ \mathrm{Aff}$$

を満たす．とくに，$\mathcal{C} := \bigcup_{c_0 \in \partial\mathbb{M}} \mathcal{C}(c_0)$ は $\mathcal{C} \ = \ \mathcal{C} \circ \mathrm{Aff}$ を満たす． □

$\mathcal{Z}$ と $\mathcal{C}$ の「交差」． パラメーター $c \in \mathbb{C}$ に対し，f_c が生成する $z \in J(f_c)$ における Zalcman 関数を $\mathcal{Z}_c(z)$，Zalcman 関数の全体を $\mathcal{Z}_c$ と表すことにする．このとき，次が成り立つ：

□ **定理 5.2** $\partial\mathbb{M}$ の稠密な部分集合 SH が存在して，$c \in SH$ のとき $\mathcal{Z}_c \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$. より正確には，次が成り立つ：

$$c \in SH \implies c \in J(f_c) \quad \text{かつ} \quad \mathcal{Z}_c(c) \cap \mathcal{C}(c) \neq \emptyset.$$

□

じつは $\mathrm{H.dim}(SH) = 2$ （ハウスドルフ次元）が成り立つ．この SH が何かは，7節で明らかにしよう．

6. Poincaré関数とその一般化

ここでも話を2次関数族 $\{f_c(z) = z^2 + c : c \in \mathbb{C}\}$ に限るが，一般の有理関数族にもそのまま通用する議論である．

Zalcman関数のなかでも古典的によく知られた例として，次のものがある：

□ **定理 6.1 (Poincaré関数, Kœnigs)** a_0 を $f = f_c$ $(c \in \mathbb{C})$ の周期 p の反発的周期点とし，その乗数を $\lambda := (f^p)'(a_0)$ とする．このとき，関数列

$$w \longmapsto f^{kp}\Big(a_0 + \frac{w}{\lambda^k}\Big) \qquad (k \in \mathbb{N})$$

はある有理形関数 $\psi \in \mathcal{U}$ に $\mathbb{C}$ 上コンパクト一様収束し，

$$f^p \circ \psi(w) = \psi(\lambda w), \quad \psi(0) = a_0, \quad \psi'(0) = 1$$

を満たす．とくに，$\psi \in \mathcal{Z}(a_0)$. □

等式 $f^p \circ \psi(w) = \psi(\lambda w)$ は，$\mathbb{C}$ 上の力学系 $w \mapsto \lambda w$ を $\psi : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ という「レンズ」を通して眺めることで，f^p による $\widehat{\mathbb{C}}$ の力学系（ただし ψ の除外値は除く）が得られることを意味する．このような ψ は**Poincaré**関数と呼ばれる．

これを一般化してみよう．

定義（双曲的集合）． コンパクト集合 $X \subset \mathbb{C}$ が $f = f_c$ の双曲的集合 (hyperbolic set) であるとは，$f(X) \subset X$ かつある $\kappa, \eta > 0$ が存在して任意の $x \in X$ に対し $|(f^n)'(x)| \geq \kappa(1+\eta)^n$ が成り立つときをいう．

定義より，$X \subset J(f)$ でなくてはならない．典型的な例は上のような反発的周期点 $X = \{a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}\}$（ただし $f(a_i) = a_{i+1}, a_0 = a_p$）である．このとき，$1+\eta = |\lambda|^{1/p}$ とし，$\kappa > 0$ をうまく選べば双曲的集合の定義を満たすことがわかる．

ちなみに $J(f)$ 自体が双曲的集合になるとき，f は双曲的と呼ばれる．

□ **定理 6.2 (一般化Poincaré関数の存在, [Ka])** X を $f = f_c$ の双曲的集合とし，$a_0 \in X$ を任意にとる．さらに $m \in \mathbb{N}$ に対し $a_m := f^m(a_0)$, $\lambda_m := (f^m)(a_0)$, $T_m(w) := a_0 + w/\lambda_m$ とおく．

このとき，数列 $\{m(k)\}_{k\geq 0} \subset \mathbb{N}$ が存在して，関数列

$$w \longmapsto f^{m(k)}\left(a_0 + \frac{w}{\lambda_{m(k)}}\right) \qquad (k \in \mathbb{N})$$

はある有理形関数 $\psi \in \mathcal{U}$ に $\mathbb{C}$ 上コンパクト一様収束し，$\psi(0) \in X$, $\psi'(0) = 1$ を満たす．とくに，$\psi \in \mathcal{Z}(a_0)$. □

この定理の証明においては，Kœnigsの古典的な議論（周期点であることをフル活用する）が一切使えないため，別の方法（単葉関数論と正規族をもちいる）が必要となる．ちなみに $a_0 \in X$ が双曲的であることは本質的ではなく，$\limsup |\lambda_m| = \infty$ であれば上の定理は成り立つ．

安定性. 双曲的集合については，次の「力学系的安定性」が知られている：

□ 命題 **6.3** (双曲的集合の力学系的安定性, [**Shi**]) X_0 を f_{c_0} の双曲的集合とする．このとき，ある c_0 の近傍 $U \subset \mathbb{C}$ が存在して，次の「力学系的正則運動」が存在する：すなわちある写像 $\chi : X_0 \times U \to \mathbb{C}$: が存在し，

- 任意の $x \in X_0$ に対し, $\chi(x, c_0) = x$;
- 任意の $x \in X_0$ を固定したとき，写像 $\chi^x : c \mapsto \chi(x, c)$ は正則.
- 任意の $c \in U$ を固定したとき，写像 $\chi_c : x \mapsto \chi(x, c)$ は「擬等角写像」であり，X_0 上 $f_c \circ \chi_c = \chi_c \circ f_{c_0}$ を満たす. □

上で言う「擬等角写像」とは，ある $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への擬等角写像を X_0 に制限したものと考えてよい（拡張λ補題）.

このの U が十分小さければ，$X_c := \chi_c(X_0)$ も（c に関して）一様な拡大性をもつ双曲的集合であることがわかる．このことから，定理 6.2 で得られる一般化された Poincaré 関数は c に対し正則に依存することがわかる:

□ 命題 **6.4** (パラメーターに関する正則依存性) $\psi_{c_0}(w) = f_{c_0}^{m(k)}\left(a_0 + \frac{w}{\lambda_{m(k)}}\right)$ を 定理 6.2 の一般化 Poincaré 関数とする．さらに $a_0(c) := \chi_c(a_0)$, $\lambda_{m(k)}(c) := f_c^{m(k)}(a_0(c))$ $(c \in U)$ とおくとき，$f_c^{m(k)}\left(a_0(c) + \frac{w}{\lambda_{m(k)}(c)}\right)$ も同様の一般化 Poincaré 関数 $\psi_c \in \mathcal{Z}_c(a_0(c))$ に収束する．また，任意の $w \in \mathbb{C}$ に対し，$U \ni c \mapsto \psi_c(w)$ は正則.

7. 半双曲的パラメーター, 横断性, $\mathbb{M}$ と $\boldsymbol{J}$ の類似性

以上の結果を用いて，Tan Lei, Rivera-Letelier による Julia 集合と Mandelbrot 集合の類似性に関する結果を（若干の一般化とともに）Zalcman 関数の言葉で表現することができる.

Mandelbrot 集合と半双曲的パラメーター. 集合 $\mathbb{M}$ の定義を思い出しておこう：

$$\mathbb{M} \ := \ \{c \in \mathbb{C} : |f_c^n(0)| \le 2 \ (\forall n \in \mathbb{N})\}.$$

もし $c \in \mathbb{M}$ であれば，f_c の Julia 集合は次のように特徴づけることができる：

$$\begin{aligned} K(f_c) \ &:= \ \{z \in \mathbb{C} : |f_c^n(z)| \le 2 \ (\forall n \in \mathbb{N})\} \\ J(f_c) \ &= \ \partial K(f_c). \end{aligned}$$

定義（半双曲的パラメーター）. $c_0 \in \partial\mathbb{M}$ が半双曲的 (semi-hyperbolic) であるとは，f_{c_0} の力学系において，分岐点 $z = 0$ が再帰的でないことをいう．すなわち，分岐点 $z = 0$ の軌道の集積点全体 X_0 が $z = 0$ 自身を含まないことをいう.（$z = 0$ が周期点となる場合は $c \in \mathbb{M}^\circ$ なので除外されている.）また，$\partial\mathbb{M}$ 内の半双曲的パラメーター全体の集合を SH で表す.

ここで $f_{c_0}(0) = c_0$ （分岐値）であるから，X_0 はパラメーターと同じ $z = c_0$ 自身の軌道の集積点全体に他ならない．半双曲的パラメーターは次の性質を満たす.

□ 命題 **7.1** $c_0 \in SH$ のとき，

1. X_0 は f_{c_0} の双曲的集合である（[CJY]）．

2. ある $l \in \mathbb{N}$ が存在して，$f_{c_0}^l(c_0) \in X_0$.

3. $c_0 \in J(f_{c_0})$ かつ $J(f_{c_0}) = K(f_{c_0})$. とくに，K_{c_0} は内点をもたない. □

例（Misiurewicz 点）． 次の性質を持つ $c_0 \in \partial\mathbb{M}$ は **Misiurewicz 点**と呼ばれる：「ある $l, p \in \mathbb{N}$ が存在して，$a_0 = f_{c_0}^l(c_0)$ は周期 p の反発的期点」．これは SH の元の典型例である．とくに，定理 3.2 より，

□ **命題 7.2** *Misiurewicz*点は $c_0 \in \partial\mathbb{M}$ 内で稠密．したがって SH も $\partial\mathbb{M}$ 内で稠密. □

ちなみに Misiurewicz 点は定義より可算集合であるが，SH は下で述べるように非可算となる．

横断性（Transversality）． いま $c_0 \in SH$, その集積点全体からなる双曲的集合を X_0，$a_0 := f_{c_0}^l(c_0) \in X_0$ とする（命題 7.1）．このとき，c_0 の十分小さな近傍 U が存在して，正則運動 $\chi : X_0 \times U \to \mathbb{C}$ が存在するのであった（命題 6.3）よって正則関数 $a(c) := \chi_c(a_0) \in \chi_c(X_0)$ が U 上存在する．

さて $b(c) := f_c^l(c)$ とおくと，これは c について正則であり，$b(c_0) = a(c_0)$ を満たす．このとき，次が知られている：

□ **命題 7.3 (**横断性，**[RL, vS])** 正則関数 $b(c)$ と $a(c)$ は c_0 で接しない．すなわち，ある $B_0 \neq 0$ が存在して，$c \to c_0$ のとき $b(c) - a(c) = B_0(c - c_0) + o(c - c_0)$. □

参考（Hausdorff 次元について）． 双曲的パラメーターに関しては，宍倉氏による次の重要な結果 [Shi] がある：任意の $\epsilon > 0$ に対しある $c_0 \in SH$ と $r > 0$ が存在して，

$$\begin{aligned} \mathrm{H.dim}(\partial\mathbb{M}) &\geq \mathrm{H.dim}(\{c \in SH \,:\, b(c) \in \chi_c(X_0)\}) \\ &\geq \mathrm{H.dim}(X_0 \cap \mathbb{D}(r, c_0)) - \epsilon/2 > 2 - \epsilon. \end{aligned}$$

すなわち $\mathrm{H.dim}(\partial\mathbb{M}) = \mathrm{H.dim}(SH) = 2$.

$\mathcal{Z}$ と $\mathcal{C}$ の「交差」（再）．さて以上の結果を合わせることで，次の定理を得る．これは 5 節で述べた定理 5.2 の詳細版である：

□ **定理 7.4 ([Ka])** $c_0 \in SH$ とするとき，

(1) 数列 $n_k \to \infty$ と $\rho_k \to 0$ $(k \to \infty)$ が存在して，関数列

$$\phi_k(w) \;=\; f_{c_0}^{n_k}(c_0 + \rho_k w)$$

はある *Zalcman*関数 $\phi \in \mathcal{Z}_{c_0}(c_0)$ に収束する．

(2) ある定数 $Q \neq 0$ が存在して，関数列

$$\Phi_k(w) \;:=\; f_{c_0 + Q\rho_k w}^{n_k}(c_0 + Q\rho_k w)$$

も上と同じ関数 ϕ に収束する．とくに，$\phi \in \mathcal{C}(c_0)$. □

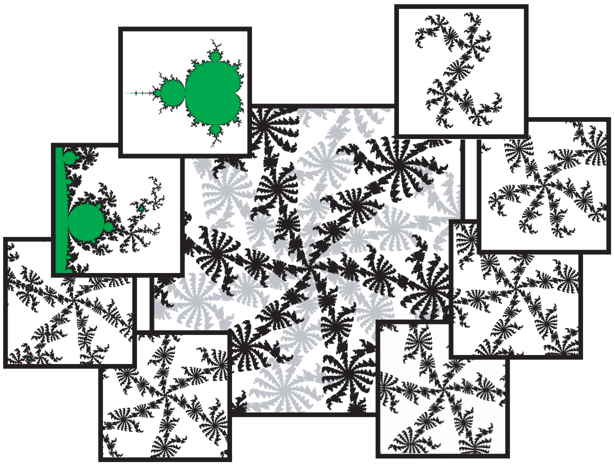


図 2: 中央の絵は，ある Misiurewicz 点 c_0 の周りでマンデルブロー集合（グレー）と Julia 集合 J_{c_0}（黒）を同じ座標系で描いたもの．それぞれの描画領域を広げていくと，一方は Mandelbrot 集合（左 4 枚）に，一方は Julia 集合（右 4 枚）になる．

証明には横断性が重要な役割を果たす．

Mandelbrot 集合と Julia 集合の類似性． 最後に $c_0 \in \partial\mathbb{M}$ における $\mathbb{M}$ と $J(f_{c_0})$ の類似性について述べる．

Hausdorff 収束． まず，集合が「似ている」ことを厳密に表現するための設定を行おう．$\mathbb{C}$ 上の（空でない）コンパクト集合全体を $\mathrm{Comp}^*(\mathbb{C})$ で表す．そこでの列 $\{K_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Comp}^*(\mathbb{C})$ について，K_k が $k \to \infty$ のとき $K \in \mathrm{Comp}^*(\mathbb{C})$ に **Hausdorff 収束する**とは，任意の $\epsilon > 0$ に対しある $k_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，$k \geq k_0$ のとき $K \subset \mathrm{N}_\epsilon(K_k)$ かつ $K_k \subset \mathrm{N}_\epsilon(K)$ が成り立つこととする．ただし，$\mathrm{N}_\epsilon(\cdot)$ は $\mathbb{C}$ 内での ϵ-開近傍である．

さて原点中心半径 $r > 0$ の開円板を $\mathbb{D}_r$ で表そう．閉集合 $K \subset \mathbb{C}$ に対し，記号 $[K]_r$ で集合 $(K \cap \mathbb{D}_r) \cup \partial\mathbb{D}_r \in \mathrm{Comp}^*(\mathbb{C})$ を表すことにする．また，$a \in \mathbb{C}^*$ および $b \in \mathbb{C}$ に対し，記号 $a(K - b)$ で集合 $\{a(z - b) : z \in K\} \in \mathrm{Comp}^*(\mathbb{C})$ を表すことにする．

以上で，定理を述べる準備が整った：

□ **定理 7.5** ($\mathbb{M}$ と J **の類似性, Cf. [TL], [RL], [Ka]**) ある $c_0 \in \partial\mathbb{M}$ が $c_0 \in J = J(f_{c_0})$ を満たすとする．また，数列 $n_k \to \infty$, $\rho_k \to 0$, $c_k \to c_0$ $(k \to \infty)$，定数 $Q \neq 0$ が存在し，ふたつの関数列

$$\phi_k(w) = f_{c_0}^{n_k}(c_k + \rho_k w), \qquad \Phi_k(w) = f_{c_k + Q\rho_k w}^{n_k}(c_k + Q\rho_k w)$$

が同一の定数でない関数 $\phi \in \mathcal{U}$ にコンパクト一様収束するとする．いま $\mathcal{J} := \phi^{-1}(J) \subset \mathbb{C}$ とするとき，任意に大きな $r > 0$ について次が Hausdorff 収束の意味で成り立つ：

(a) $\left[\rho_k^{-1}(J - c_k)\right]_r \to [\mathcal{J}]_r \quad (k \to \infty)$

(b) $\left[Q^{-1}\rho_k^{-1}(\mathbb{M} - c_k)\right]_r \to [\mathcal{J}]_r \quad (k \to \infty)$

とくに $c_0 \in SH$ の場合，$c_k \equiv c_0$ について上が成り立つ． □

ちなみに，いわゆる「放物的パラメーター」は $c_0 \in J(f_{c_0})$ という条件によって除外されている．関数列 ϕ_k, Φ_k の収束条件を弱めて，たとえば「$\mathbb{D}$ 上の正則関数全体の空間」での収束に置き換えても同様の結果が得られる．この場合は $0 < r < 1$ である．

参考文献

[Ba] D. Bargmann. Simple proofs of some fundamental properties of the Julia sets. *Ergodic Th. Dynam. Systems.* **19**(1999), 553–558.

[BD] F. Berteloot and J. Duval. Une démonstration directe de la densité des cycles répulsifs dans l'ensemble de Julia. *Progress in Mathematics.* **188**(2000), 221–222.

[BM] F. Berteloot and V.Mayer. *Rudiments de dynamique holomorphe.* Cours Spécialisés, 7. Société Mathématique de France, 2001.

[CJY] L. Carleson, P.W. Jones, and J.-C. Yoccoz. Julia and John. *Bol. Soc. Bras. Mat.* **25**(1994), 1–30.

[Ha] P. Haïssinsky. Rigidity and expansion for rational maps. *J. London Math. Soc.* (2), **63**(2001), 128 – 140.

[Ka] T. Kawahira. Quatre applications du lemme de Zalcman à la dynamique complexe. *Preprint.* （著者の web page にあります．）

[Ka2] T. Kawahira. Similarity between the Mandelbrot set and the Julia sets: a simplified proof. *Preprint*.（著者の web page にあります．タイトル変更の可能性あり．）

[LM] M. Lyubich and Y. Minsky. Laminations in holomorphic dynamics. *J. Diff. Geom.* **49**(1997), 17 – 94.

[Mc1] C.T. McMullen. *Renormalization and complex dynamics.* Ann. of Math. Studies **135**, Princeton University Press, 1994.

[Mc2] C.T. McMullen. The Mandelbrot set is universal. *The Mandelbrot set, theme and variations.* London Math. Soc. Lecture Note Series (No. 274), Cambridge Univ. Press, 2000.

[Mi] J. Milnor. *Dynamics in one complex variable. (3rd edition).* Ann. of Math. Studies **160**, Princeton University Press, 2006.

[MM] G.J. Martin and V. Mayer. Rigidity in holomorphic dynamics and quasiregular dynamics. *Trans. Amer. Math. Soc.* **355**(2003) No. 11, 4349 – 4363.

[RL] J.E. Rivera-Letelier. On the continuity of Hausdorff dimension of Julia sets and similarity between the Mandelbrot set and Julia sets. *Fund. Math.* **170**(2001) 287 – 317.

[Sch] N. Schwick. Repelling periodic points in the Julia set. *Bull. London Math. Soc.* **29**(1997), no. 3, 314–316 .

[Shi] M. Shishikura. The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets. *Ann. Math.* **147**(1998), no. 2, 225–267 .

[St] N. Steinmetz. Zalcman functions and rational dynamics. *New Zealand J. Math.* **32**(2003), no. 1, 91–104.

[TL] Tan L. Similarity between the Mandelbrot set and Julia sets. *Comm. Math. Phys.* **134**(1990), 587 – 617

[UTM] 上田 哲生・谷口 雅彦・諸澤 俊介．複素力学系序説．培風館，1995.

[vS] S. van Strien. Misiurewicz maps unfold generally (even if they are critically non-finite) *Fund. Math.* **163**(2000) 39 – 57.

[Za] L. Zalcman. A heuristic principle in function theory. *Amer. Math. Monthly.* **82**(1975), 813 – 817.

[Za2] L. Zalcman. Normal families: new perspectives. *Bull. Amer. Math. Soc.* **35**(1998), 215 – 230.

Böttcher coordinates for polynomial skew products

Kohei Ueno (Toba National College of Maritime Technology)

Abstract

We generalize the Böttcher's theorem to polynomial skew products: under one condition a polynomial skew product is analytically conjugate to the associated monomial map on some region near infinity.

1. Introduction

Let p be a monic polynomial on $\mathbb{C}$ of degree $\delta \geq 2$. Because the ratio of $p(z)$ and z^δ tends to 1 as z tends to infinity, the polynomial p looks like z^δ near infinity. Indeed, the Böttcher's theorem implies that there is a conformal function defined near infinity that conjugates p to z^δ. This conformal function is called a Böttcher coordinate and given by the limit of the conformal functions $\sqrt[\delta^n]{p^n}$, where p^n denotes the n-th iterate of p and a branch of the δ^n-th root is taken as $\sqrt[\delta^n]{z^{\delta^n}} = z$.

In this talk, we generalize this result for polynomials to that for polynomial skew products. A polynomial skew product is a polynomial map on $\mathbb{C}^2$ of the form $f(z,w) = (p(z), q(z,w))$. Let $p(z) = z^\delta + O(z^{\delta-1})$, $q(z,w) = b(z)w^d + O_z(w^{d-1})$ and $b(z) = z^l + O(z^{l-1})$. We assume that $\delta \geq 2$ and $d \geq 2$.

2. Preliminaries

We need some definitions to state our claims, and a lemma to prove the claims. We define the rational number α as

$$\inf \left\{ a \in \mathbb{Q} \;\middle|\; \begin{array}{l} l + ad \geq a\delta \text{ and } l + ad \geq n_j + am_j \text{ for any integers } n_j \text{ and } m_j \\ \text{such that } z^{n_j} w^{m_j} \text{ is a term in } q \text{ with a nonzero coefficient} \end{array} \right\},$$

which can be minus infinity if $\delta \geq d$. It may not be well-defined for the case $\delta > d$. For the cases $\delta \leq d$, the rational number α is always well-defined. Let $W_R = \{|z| > R, |w| > R|z|^\alpha\}$ if $l \neq 0$ and $W_R = \{|w| > R^{1+\alpha}, |w| > R|z|^\alpha\}$ if $l = 0$. The lemma below follows from definition.

Lemma 1 ([5, 6]). *If α is well-defined, then the ratio of q and $z^l w^d$ tends to 1 on W_R as R tends to infinity.*

3. Results

Now, we are ready to describe our results.

Theorem 1. *If α is well-defined, then there is a biholomorphic map ϕ defined on W_R that conjugates f to the monomial map $(z^\delta, z^l w^d)$.*

Let $f_0(z,w) = (z^\delta, z^l w^d)$. Then ϕ is given by the limit of the compositions of f_0^{-n} and f^n, where a branch of f_0^{-n} is appropriately taken.

Let $A_f = \bigcup_{n=0}^\infty f^{-n}(W_R)$. As the case of polynomials, we can define the Green function of f on A_f, which is associated with ϕ, and the family of the equipotential curves in A_f, which is invariant under f if $\delta \neq d$. Moreover, we can extend the inverse map ϕ^{-1} from W_R to A_{f_0} until it meets the critical points of f.

Taking another limit map, we obtain the following conjugation.

Corollary 1. *If α is well-defined, then there is a biholomorphic map defined on W_R that conjugates f to $(p(z), b(z)w^d)$.*

We end this report with some remarks. The Böttcher's theorem is originally stated for a holomorphic function with a superattracting fixed point; any polynomial has the superattracting fixed point at infinity (see [3]). Many authors have studied the Böttcher coordinate of a holomorphic map with a superattracting fixed point (e.g. [2], [7], [4] and [1]). On the other hand, a polynomial skew product f extends to the rational map on a weighted projective space, and it has the indeterminacy point at infinity if $l \neq 0$ or $\delta > d$, which is superattracting in some sense. It has the superattracting fixed point at infinity if $l = 0$ and $\delta \leq d$. The set A_f is included in the attracting basin of the point.

References

[1] X. Buff, A. L. Epstein and S. Koch, *Böttcher coordinates*, preprint.

[2] J. H. Hubbard and P. Papadopol, *Superattractive fixed points in $\mathbb{C}^n$*, Indiana Univ. Math. J. **43** (1994), 321-365.

[3] J. Milnor, *Dynamics in one complex variable*, Annals of Mathematics Studies, **160**, Princeton University Press, 2006.

[4] T. Ueda, *Complex dynamical systems on projective spaces*, Adv. Ser. Dynam. Systems, **13**, 120-138, World Scientific, 1993.

[5] K. Ueno, *Weighted Green functions of nondegenerate polynomial skew products on $\mathbb{C}^2$*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **31** (2011), 985-996.

[6] K. Ueno, *Green functions and weights of polynomial skew products on $\mathbb{C}^2$*, preprint.

[7] S. Ushiki, *Böttcher's theorem and super-stable manifolds for multidimensional complex dynamical systems*, preprint.

A construction of an invariant surface for an indeterminate point of rational mappings

篠原 知子　(東京都立産業技術高等専門学校)*

1. 序

この講演では，複素 n 次元射影空間 $\mathbf{P}^n$ 上の有理写像 F の不定点集合 I における局所的な力学系構造について報告する．一般に $\mathbf{P}^n$ を有限回 blow up することで，F の不定性を解消し，リフト写像 $\tilde{F} : X \to \mathbf{P}^n$ がregularとなるようにできることが知られている．これまでに $n = 2, 3$ の場合について，blow up の列を用いて不変集合 V を構成する方法を検討してきた．今回はこれらを一般化し，不定点集合 I の次元が $n-2$ の場合についての結果を報告する．

2. 準備

F を $\mathbf{P}^n$ 上で定義された有理写像とし，I を F の不定点集合とする．一般に不定点 $p \in I$ に対して $\bigcap_{U_p} \overline{F(U_p \setminus \{p\})}$ は一点にならない．但し U_p は点 p の全ての開近傍とする．よって，写像 F は点 p で定義できない．不定点 p に対し $p \in \bigcap_{U_p} \overline{F(U_p \setminus \{p\})}$ が成り立つとき，固定的不定点と呼ぶことにする．定義からわかるように固定的不定点は、不動点の場合と同じ回帰的な性質を持っているので，局所的な力学系構造を構成することができる．実際これまでに $n = 2$ の場合について，カントールブーケ（非加算無限個の局所安定多様体からなる族）が存在することなどが示されている ([1], [2], [3]).
この講演では，簡単のため有理写像 F を，ある座標近傍 $\mathbf{C}^n$ に制限し

$$I := \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{C}^n \mid x_{n-1} = 0,\ x_n = 0\},\ p := (0, \cdots, 0)$$

であるとする．また $\mathbf{C}^n \times \mathbf{P}^1$ の部分集合 X_1 を次のように定義する．

$$X_1 := \Big\{(x_1, \cdots, x_n) \times [l_{n-1} : l_n] \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{P}^1 \mid x_n l_{n-1} - x_{n-1} l_n = 0\Big\}.$$

X_1 の部分集合 $U_j := \{l_j \neq 0\}$ と以下の写像 μ_1^j による座標近傍系 $\{(U_1^j, \mu_1^j)\}_{j=n-1,n}$ を与えることで X_1 は $\mathbf{C}^n \times \mathbf{P}^1$ の部分多様体であることがわかる．

$$\mu_1^{n-1} : U_1^{n-1} \to \mathbf{C}^n, (x_1, \cdots, x_n) \times [l_{n-1} : l_n] \mapsto (x_1, \cdots, x_{n-1}, l_n/l_{n-1}),$$

$$\mu_1^n : U_1^n \to \mathbf{C}^n, (x_1, \cdots, x_n) \times [l_{n-1} : l_n] \mapsto (x_1, \cdots, l_{n-1}/l_n, x_n).$$

Definition 1. 第一成分への射影 $\mathbf{C}^n \times \mathbf{P}^1 \to \mathbf{C}^n$ を X_1 に制限した写像 $\pi_1 : X_1 \to \mathbf{C}^n$ を I に沿った $\mathbf{C}^n$ の *blow up* と定義する．また $E_1 := \pi^{-1}(I)$ を除外因子と呼ぶ.

定義より $\pi_1 : X_1 \setminus E_1 \to \mathbf{C}^n \setminus \{I\}$ は双正則写像である．また U_1^{n-1} の局所座標を $(z_1, \cdots, z_n)$ とすると

$$\pi_1|_{U_1^{n-1}}(z_1, \cdots, z_n) = (z_1, \cdots, z_{n-1},\ z_n z_{n-1}),\ U_1^{n-1} \cap E_1 = \{z_{n-1} = 0\}$$

本研究は科研費 (基盤研究 (C), 課題番号:24540225) の助成を受けたものである．
2010 Mathematics Subject Classification: 32H50
キーワード：複素力学系，不定点，不変集合
* 〒140-0011 東京都品川区東大井 1-10-40　東京都立産業技術高等専門学校
e-mail: sinohara@s.metro-cit.ac.jp

であることに注意する．F のリフト写像 $\tilde{F}_1$ を $\tilde{F}_1 := F \circ \pi_1 : X_1 \to \mathbf{C}^n$ と定義する．主定理を得るため $\tilde{F}_1$ が次の条件を満たすと仮定する．

$$(A.1)\begin{cases}(1)\ \tilde{F}_1 \text{ は } E_1 \text{ の各点で正則であるとし，} p \in \tilde{F}_1(E_1) \text{ であるとする．}\\ (2)\ \tilde{F}_1^{-1}(p) \text{ は一点 } p_1 \text{ からなるとし，} p_1 \in E_1 \cap U_1^{n-1},\ \pi_1(p_1) = p \\ \text{であるとする．} p_1 \text{ の座標を } p_1 = (0, \cdots,\ 0, a_1) \in U_1^{n-1} \text{ とおく．}\\ (3)\ \text{点 } p_1 \text{ のある近傍 } N_1 \text{ が存在し } \tilde{F}_1|_{N_1} : N_1 \to \tilde{F}_1(N_1) \text{ が双正則写像とする．}\\ (4)\ I_1 := \tilde{F}_1^{-1}\left(I \cap \tilde{F}_1(N_1)\right) \text{ とおくとき } I_1 \subset E_1 \cap U_1^{n-1} \text{ であるとする．また}\\ \Delta_{\epsilon_1}\text{上の正則関数 } \psi_1 \text{ が存在し } I_1 \text{ が } p_1 \text{ の近傍で次のように表されるとする．}\\ I_1 = \left\{(z_1, \cdots, z_n) \in U_1^{n-1} \mid z_{n-1} = 0,\ z_n = \psi_1(z_1, \cdots z_{n-2})\right\}.\end{cases}$$

但し $\Delta_{\epsilon_1} := \{(z_1, \cdots, z_n) \in U_1^{n-1} \mid |z_1|,\ \cdots, |z_{n-2}| < \epsilon_1\}$ とする．$N_1 \times \mathbf{P}^1$ の部分集合 X_2 を次の様に定義する．

$$X_2 := \left\{(z_1, \cdots, z_n) \times [l_{n-1} : l_n] \in N_1 \times \mathbf{P}^1 \mid z_{n-1} l_n = (z_n - \psi_1(z_1, \cdots z_{n-2})) l_{n-1}\right\}.$$

X_1 の場合と同様にして，I_1 に沿った N_1 の blow up 写像$\pi_2 : X_2 \to N_1$，$\tilde{F}_1$ のリフト写像$F_1 := \pi_1^{-1} \circ \tilde{F}_1 : N_1 \to X_1$ と F_1 のリフト写像$\tilde{F}_2 := F_1 \circ \pi_2 : X_2 \to X_1$ を定義する．この $\tilde{F}_2$ に対して, $(A.1)$ と同様の主張が成り立つことが証明できる．この過程を帰納的に繰り返して，点列 p_m と次の集合列 I_m を定義することができる．

$$I_m = \left\{(u_1, \cdots, u_n) \in U_m^{n-1} \mid u_{n-1} = 0,\ y_m = \psi_m(u_1, \cdots, u_{n-2})\right\}.$$

但し，ψ_m は Δ_{ϵ_m} で定義された正則関数とする．ψ_m の原点でのべき級数展開を

$$\psi_m(u_1, \cdots, u_{n-2}) = \sum a_{i_1 \cdots i_{n-2} m} u_1^{i_1} \cdots u_{n-2}^{i_{n-2}}$$

とおく．これらを用いて次の結果を得る．

3. 結果

Theorem A. 任意の $m \in \mathbf{N}$ に対し，点 p のある近傍 N_m と点 p_m のある近傍 N_{p_m} が存在し，次が成り立つ．

$$\bigcap_{k \geq 1}^{\infty} F^{-k}(N_m) \cap N_m \subset \pi \circ \cdots \pi_m(N_{p_m}).$$

形式的べき級数 $\varphi(x_1, \cdots, x_{n-1})$ で定義された次のような集合 V を考える．

$$V = \left\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{C}^n \mid x_n = \varphi(x_1, \cdots, x_{n-1}) := \sum b_{i_1 \cdots i_{n-1}} x_1^{i_1} \cdots x_{n-1}^{i_{n-1}}\right\}.$$

Theorem B. φ の収束半径が正であり，任意の $i_1, \cdots, i_{n-1}, m \in \mathbf{N}$ に対して $b_{i_1 \cdots i_{n-1}} = a_{i_1 \cdots i_{n-2} m}$ が成り立つときV は不変な曲面である．逆も成り立つ．

参考文献

[1] Y. Yamagishi, *Cantor bouquet of holomorphic stable manifolds for a periodic indeterminate point*, Nonlinearity, 14 (2001), 113–120.

[2] T. Shinohara, *Another construction of a Cantor bouquet at a fixed indeterminate point*, Kyoto J. Math. 50(2010), no.1, 205–224.

[3] T. Shinohara, *Some family of center manifolds of a fixed indeterminate point*, submitting.

Distortion theorems for linearly invariant families

Tatsuhiro HONDA (Hiroshima Institute of Technology, Japan)[*1]
Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University, Japan)[*2]
Gabriela KOHR (Babeş-Bolyai University, Romania)[*3]

Pommerenke [15, 16] introduced a linear invariance for extending many ideas of univalent function theory to the study of locally univalent functions on the unit disc. Many mathematicians have studied linearly invariant families in several complex variables. Pfaltzgraff [13] proved the following distortion theorem on the Euclidean unit ball of $\mathbb{C}^n$ (cf.[2]).

Theorem 1 *Let $\mathcal{F}$ be a linearly invariant family on the Euclidean unit ball B^n. Let* $\operatorname{ord}\mathcal{F}$ *denote the trace-order of $\mathcal{F}$. If* $\operatorname{ord}\mathcal{F} = \alpha < \infty$, *then*

$$\frac{(1-\|x\|)^{\alpha-(n+1)/2}}{(1+\|x\|)^{\alpha+(n+1)/2}} \leq |\det Df(x)| \leq \frac{(1+\|x\|)^{\alpha-(n+1)/2}}{(1-\|x\|)^{\alpha+(n+1)/2}}, \quad x \in B^n$$

for all $f \in \mathcal{F}$.

Pfaltzgraff and Suffridge [14] proved the following distortion theorem on the unit polydisc of $\mathbb{C}^n$.

Theorem 2 *Let $\mathcal{F}$ be a linearly invariant family on the unit polydisc U^n. If* $\operatorname{ord}\mathcal{F} = \alpha < \infty$, *then*

$$\frac{(1-\|x\|)^{\alpha-n}}{(1+\|x\|)^{\alpha+n}} \leq |\det Df(x)| \leq \frac{(1+\|x\|)^{\alpha}}{(1-\|x\|)^{\alpha}} \prod_{j=1}^{n} (1-|x_j|^2)^{-1}$$

for all $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U^n$ and $f \in \mathcal{F}$.

We remark that, in the above theorems, the bounds depend on n. The following natural questions arise.

Question 3 *Can we give an explanation for the reason why the exponents in the distortion bounds in Theorems 1 and 2 are different ?*

Question 4 *Can we give a distortion theorem for linearly invariant families on other bounded symmetric domains by using the trace-order ?*

In this talk, we study the linearly invariant families on a homogeneous unit ball B of a finite dimensional complex Banach space X and give affirmative answers to the above questions.

We give a distortion theorem for linearly invariant families on a finite dimensional homogeneous unit ball. The exponents in the distortion bounds depend on the Bergman metric at 0. Our result is a generalization of Theorems 1 and 2 to a finite dimensional

This work has been supported by JSPS KAKENHI Grant Number 22540213.
2000 Mathematics Subject Classification: 32H02, 30C45.
Keywords: Bergman metric, distortion theorem, linearly invariant family, trace-order.
[*1] e-mail: thonda@cc.it-hiroshima.ac.jp
[*2] e-mail: h.hamada@ip.kyusan-u.ac.jp
[*3] e-mail: gkohr@math.ubbcluj.ro

homogeneous unit ball. Further, we introduce a new definition for the trace-order of a linearly invariant family on B, based on a Jacobian argument. We also construct an example of a linearly invariant family on B which has minimum trace-order and is not a subset of the normalized convex mappings of B for $\dim X \geq 2$. These results are generalizations of those in [2, 7] to a finite dimensional homogeneous unit ball. Finally, we prove a regularity theorem for linearly invariant families on B. We have a setting in which a large number of bounded symmetric homogeneous domains may be studied simultaneously.

References

[1] C-H. Chu, H. Hamada, T. Honda, G. Kohr, Distortion theorems for convex mappings on homogeneous balls, J. Math. Anal. Appl. 369 (2010) 437–442.

[2] J. Godula, P. Liczberski, V. Starkov, Order of linearly invariant family of mappings in $\mathbb{C}^n$, Complex Var. Theory Appl. 42 (2000) 89–96.

[3] I. Graham, G. Kohr, Geometric function theory in one and higher dimensions, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 255. Marcel Dekker, Inc., New York, 2003.

[4] H. Hamada, T. Honda, G. Kohr, Bohr's theorem for holomorphic mappings with values in homogeneous balls, Israel J. Math. 173 (2009) 177–187.

[5] H. Hamada, T. Honda, G. Kohr, Linear invariance of locally biholomorphic mappings in the unit ball of a JB*-triple, J. Math. Anal. Appl. 385 (2012) 326–339.

[6] H. Hamada, T. Honda, G. Kohr, Trace-order and a distortion theorem for linearly invariant families on the unit ball of a finite dimensional JB*-triple, J. Math. Anal. Appl. 396 (2012), 829 –843.

[7] H. Hamada, G. Kohr, Order of linear invariant families on the ball and polydisc of $\mathbb{C}^n$, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 48 (2003) 143–151.

[8] L. A. Harris, Bounded symmetric homogeneous domains in infinite dimensional spaces, in: T.L. Hayden, T.J. Suffridge(Eds.), Proceedings on Infinite Dimensional Holomorphy, Internat. Conf., Univ. Kentucky, Lexington, KY, 1973, in: Lecture Notes in Mathematics, Vol. 364, Springer, Berlin, 1974, pp. 13–40,

[9] L. K. Hua, Harmonic analysis of functions of several complex variables in the classical domains, Translations of Mathematical Monographs, vol. 6, American Mathematical Society, Providence, RI, 1963.

[10] W. Kaup, A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in Banach spaces, Math. Z. 183 (1983) 503–529.

[11] W. Kaup, H. Upmeier, Jordan algebras and symmetric Siegel domains in complex Banach spaces, Math. Z. 157 (1977) 179–200.

[12] O. Loos, Bounded symmetric domains and Jordan pairs, University of California, Irvine, 1977.

[13] J.A. Pfaltzgraff, Distortion of locally biholomorphic maps of the n-ball, Complex Var. Theory Appl. 33 (1997) 239–253.

[14] J.A. Pfaltzgraff, T.J. Suffridge, Linear invariance, order and convex maps in $\mathbb{C}^n$, Complex Var. Theory Appl. 40 (1999) 35–50.

[15] C. Pommerenke, Linear-invariante familien analytischer funktionen I, Math. Ann. 155 (1964) 108–154.

[16] C. Pommerenke, Linear-invariante familien analytischer funktionen II, Math. Ann. 156 (1964) 226–262.

[17] G. Roos, Jordan triple systems, pp.425–534, in J. Faraut, S. Kaneyuki, A. Koranyi, Q.-k. Lu, G. Roos, Analysis and geometry on complex homogeneous domains. Progress in Mathematics, 185. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 2000.

The maximal ideal cycles over complete intersection surface singularities of Brieskorn type

Fan-Ning Meng (Yamagata University)
Tomohiro Okuma (Yamagata University)

1. Introduction

Let (V, o) be a germ of a normal complex surface singularity and $f : X \longrightarrow V$ a good resolution with exceptional divisor E. It is known that the topology of the singularity is determined by the weighted dual graph Γ_E of E. A divisor on X supported in E is called a cycle. The fundamental cycle Z_E is by definition the smallest one among the cycles $F > 0$ satisfying $F \cdot E_i \leq 0$ for every irreducible component E_i of E. The fundamental cycle is a topological invariant; in fact, it is determined by Γ_E. Let $\mathfrak{m}$ be the maximal ideal of the local ring $\mathcal{O}_{V,o}$. For a non-zero function $h \in \mathfrak{m}$, let $(h)_E$ denote the exceptional part of the zero divisor $\mathrm{div}_X(h)$. Then the smallest one among the cycles $(h)_E$, $h \in \mathfrak{m}\backslash\{0\}$, is called the maximal ideal cycle, denoted by $Z_{\mathfrak{m}}$. This cycle is an analytic invariant and cannot be determined by Γ_E in general. By the definition of these cycles, we have $Z_E \leq Z_{\mathfrak{m}}$. Then one can ask the question when the equality $Z_E = Z_{\mathfrak{m}}$ hold. The difficulty is how to identify the maximal ideal cycle.

In this talk, we consider a germ $(V, o) \subset (\mathbb{C}^m, o)$ of an isolated complete intersection singularity of Brieskorn type defined by

$$V = \{(x_i) \in \mathbb{C}^m | q_{j1}x_1^{a_1} + \cdots + q_{jm}x_m^{a_m} = 0, \quad j = 3, \ldots, m\},$$

where $a_i \geq 2$ are integers. By Serre's criterion for normality, we know that (V, o) is a normal surface singularity. Neumann [7] proved that the universal abelian cover of a weighted homogeneous normal surface singularity with rational homology sphere link is of this type. It is known that the minimal good resolution graph of a weighted homogeneous surface singularity can be recovered from the Seifert invariants of the link and the Seifert invariant of the link of (V, o) is in fact obtained in [5, §7] ([6] for hypersurface case); however the construction of the good resolution is needed for the computation of the maximal ideal cycle.

In [2], Konno and Nagashima constructed a good resolution of the Brieskorn hypersurface singularity $\{x_1^{a_1} + x_2^{a_2} = x_3^{a_3}\}$ with $2 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$ using a covering method due to Tomaru ([3], [4]) and Fujiki ([1]). We employ their method to construct a good resolution of (V, o) and the aim is to identify the maximal ideal cycle on the minimal good resolution of (V, o). We give concrete descriptions of the maximal ideal cycle and the fundamental cycle, a condition for the coincidence of these cycles.

Definition. Let n, μ be relatively prime integers with $0 < \mu < n$. Let ϵ_n denote the primitive n-th root of unity $\exp(2\pi\sqrt{-1}/n)$. Then the singularity of the quotient $\mathbb{C}^2 \Big/ \left\langle \begin{pmatrix} \epsilon_n & 0 \\ 0 & \epsilon_n^{\mu} \end{pmatrix} \right\rangle$ is called the cyclic quotient singularity of type $C_{n,\mu}$.

For any $x \in \mathbb{R}$, we write $\lceil x \rceil = \min\{t \in \mathbb{Z} | x \leq t\}$, and for integers $c_i \geq 2$, $1 \leq i \leq r$, we put $[[c_1, \ldots, c_r]] := c_1 - 1/(c_2 - 1/(c_3 - 1/(\cdots)))$ (continued fraction).

For $1 \leq i \leq m$, we define positive integers d_{im}, n_{im}, e_{im} as follows:

The second author is partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number 23540068.
2000 Mathematics Subject Classification: 32S25, 14J17, 14B05.
Keywords: Surface singularities, weighted homogeneous singularities, Brieskorn complete intersections, maximal ideal cycles.

$d_{im} := \mathrm{lcm}(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m),\ n_{im} := a_i/\gcd(a_i, d_{im}),\ e_{im} := d_{im}/\gcd(a_i, d_{im})$.
In addition, we define integers μ_{im} by the condition:

$$e_{im}\mu_{im} + 1 \equiv 0 \pmod{n_{im}},\ 0 \leq \mu_{im} < n_{im}.$$

We also define integers: $\hat{g}_i := a_1 \cdots a_{i-1}a_{i+1} \cdots a_m/d_{im},\ \alpha_i := n_{im},\ \beta_i := \mu_{im}$.

2. Results

Suppose that $f : X \longrightarrow V$ is the minimal good resolution and E is not a chain of rational curve. Then the weighted dual graph of E is star-shaped with $\hat{g}_w$ branches of type C_{α_w,β_w} $(w = 1, \dots, m)$ starting from a unique vertex. This vertex corresponds to an irreducible component of E, which is called the central curve and denoted by E_0. Let $\alpha_w/\beta_w = [[c_{w,1}, \dots, c_{w,s_w}]]$. The irreducible components corresponding to the vertices of the ξ-th branch of type C_{α_w,β_w} are denoted by $E_{w,\nu,\xi}$, where $1 \leq \xi \leq \hat{g}_w$ and $1 \leq \nu \leq s_w$. Then the self-intersection number of $E_{w,\nu,\xi}$ is $-c_{w,\nu}$. Let $\epsilon_{w,\nu} = [[c_{w,\nu}, \dots, c_{w,s_w}]]$ if $s_w > 0$, and let $Z^{(i)} = (x_i)_E$.

Theorem 2.1. Let $Z^{(i)} = \lambda_0^{(i)} E_0 + \sum_{w=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{s_w} \sum_{\xi=1}^{\hat{g}_w} \lambda_{w,\nu,\xi}^{(i)} E_{w,\nu,\xi}$ $(1 \leq i \leq m)$. Then $\lambda_0^{(i)}$ and $\{\lambda_{w,\nu,\xi}^{(i)}\}$ are determined by the following:

$$\lambda_{w,0,\xi}^{(i)} := \lambda_0^{(i)} := e_{im},\ \lambda_{w,s_w+1,\xi}^{(i)} := \begin{cases} 1 & if\ w = i \\ 0 & if\ w \neq i, \end{cases} \quad \lambda_{w,\nu-1,\xi}^{(i)} = \lambda_{w,\nu,\xi}^{(i)} c_{w,\nu} - \lambda_{w,\nu+1,\xi}^{(i)}.$$

Assume that $a_1 \leq \cdots \leq a_m$. Then we have the following results:

Theorem 2.2. Let $Z_E = \theta_0 E_0 + \sum_{w=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{s_w} \sum_{\xi=1}^{\hat{g}_w} \theta_{w,\nu,\xi} E_{w,\nu,\xi}$ be the fundamental cycle on E. Then θ_0 and the sequence $\{\theta_{w,\nu,\xi}\}$ are determined by the following:

$$\theta_{w,0,\xi} := \theta_0 := \min(e_{mm}, \alpha_1 \cdots \alpha_m),\ \theta_{w,\nu,\xi} = \lceil \theta_{w,\nu-1,\xi}/\epsilon_{w,\nu} \rceil\ (1 \leq \nu \leq s_w).$$

Theorem 2.3. We have $Z^{(m)} \leq \cdots \leq Z^{(1)}$ and $Z^{(m)}$ is the maximal ideal cycle on X. Furthermore, $Z_{\mathfrak{m}} = Z_E$ if and only if $e_{mm} \leq \alpha_1 \cdots \alpha_m$.

References

[1] A. Fujiki, *On resolutions of cyclic quotient singularities*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **10** (1974/1975), no. 1, 105-115.

[2] K. Konno and D. Nagashima, *Maximal ideal cycles over normal surface singularities of brieskorn type*, Osaka J. Math. **49** (2012), no. 1, 225–245.

[3] T. Tomaru, $\mathbb{C}^*$*-equivariant degenerations of curves and normal surface singularities with* $\mathbb{C}^*$*-action*, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[4] T. Tomaru, *Pinkham-Demazure construction for two dimensional cyclic quotient singularities*, Tsukuba J. Math. **25** (2001), no. 1, 75-83.

[5] M. Jankins and W.D. Neumann, *Lectures on Seifert manifolds*, Brandeis Lecture Notes, vol. 2, Brandeis University, Waltham, MA, 1983.

[6] P. Orlik and P. Wagreich, *Isolated singularities of algebraic surface with* C^* *action*, **93** (1971), 205-228.

[7] W.D. Neumann, *Abelian covers of quasihomogeneous surface singularities*, Singularities, Part 2 (Arcata, Calif., 1981), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 40, Amer. Math. Soc., Providence, RI. 1983, pp. 233-243.

クンマー曲面の部屋上の二重積分とヒルベルトモジュラー関数

永野中行 (早稲田大学)

昨年度の講演ではパラメータ (X,Y) をもつ $K3$ 曲面族 $\mathcal{F}=\{S(X,Y)\}$

$$S(X,Y): z^2 = x^3 - 4y^2(4y-5)x^2 + 20Xy^3x + Yy^4. \tag{0.1}$$

を考えた。この曲面族の周期写像は $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ に値を取る多価解析写像であり 逆対応 $(z_1,z_2)\mapsto(X,Y)$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の Hilbert モジュラー関数の組を与える事を示した。

さて、そもそも Hilbert モジュラー関数は実乗法をもつ主偏極 Abel 曲面のモジュライと深く関係するものであった 今回はその対応を考える。

1 判別式 5 の Humbert 曲面上の Kummer 曲面

1.1 Humbert 曲面 $(\Delta=5)$ についての結果

一般に Kummer 曲面は $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の 6 本の直線

$$\begin{cases} \zeta_2=0, \quad \zeta_2+2\zeta_1+\zeta_0=0, \quad \zeta_0=0, \\ \zeta_2+2\lambda_1\zeta_1+\lambda_1^2\zeta_0=0, \quad \zeta_2+2\lambda_2\zeta_1+\lambda_2^2\zeta_0=0, \quad \zeta_2+2\lambda_3\zeta_1+\lambda_3^2\zeta_0=0. \end{cases} \tag{1.1}$$

で分岐する二重被覆として実現される。

ここで $\mathbb{Q}(\sqrt{5})\subset \mathrm{End}^0(A)\otimes\mathbb{Q}$ なる主偏極 Abel 曲面 A のモジュライ空間は Humbert 曲面 $\mathcal{H}_5$ である。これは $\mathfrak{S}_2/Sp(4,\mathbb{Z})$ の余次元 1 の部分空間である。$\mathcal{H}_5$ は対称 Hilbert モジュラー空間 $(\mathbb{H}\times\mathbb{H})/\langle PSL(2,\mathcal{O}),\tau\rangle$ と双有理同値である。

$\Omega\in\mathcal{H}_5$ のとき、$\mathrm{Kum}(A_\Omega)$ の分岐直線の 3 つのパラメータ $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ は次の関係式を満たすことが Humbert [H] によって知られている。

$$\begin{aligned} &4(\lambda_1^2\lambda_3-\lambda_2^2+\lambda_3^2(1-\lambda_1)+\lambda_2^2\lambda_3)(\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3-\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3) \\ &=(\lambda_1^2(\lambda_2+1)\lambda_3-\lambda_2^2(\lambda_1+\lambda_3)+(1-\lambda_1)\lambda_2\lambda_3^2+\lambda_1(\lambda_2-\lambda_3))^2. \end{aligned} \tag{1.2}$$

またこのパラメータ $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ はレベル 2 のモジュラー構造をもつ

1.2 塩田猪瀬構造

同じクンマー曲面族の別の明快な定義方程式を得る事を考える。則ち、$K3$ 曲面族 $\mathcal{F}$ を利用する。

X を代数的 $K3$ 曲面、ι を X 上のシンプレクティックインヴォリューションとする。このとき、X/ι の特異点解消はやはり $K3$ 曲面となる。

Definition 1.1. 特異点解消 $Y=\overline{X/\iota}$ が *Kummer* 曲面となる時、X は塩田猪瀬構造を持つという。

自然に出現する有理写像を $\chi: X\to Y$ とする。このとき、χ_* は Hodge 等距離写像 $\mathrm{Tr}(X)(2)\simeq\mathrm{Tr}(Y)$ を与える。

Theorem 1.1. 我々の $K3$ 曲面族 $\mathcal{F}$ のメンバーには塩田猪瀬構造が入る 対応する *Kummer* 曲面を $K(X,Y)$ とすると、具体的な定義方程式は

$$K(X,Y): v^2=(u^2-2y^5)(u-(5y^2-10Xy+Y)). \tag{1.3}$$

Kummer 曲面族 $\mathcal{K}=\{K(X,Y)\}$ の周期写像 $\Phi_K:(X,Y)\mapsto\left(\int_{\Delta_1}\omega_K:\cdots:\int_{\Delta_4}\omega_K\right)$ (ω_K は $K(X,Y)$ の正則 2 形式 $\Delta_1,\cdots,\Delta_4$ は適切な 2 サイクル) の逆対応は、やはり Hilbert モジュラー関数を与える。

2 Kummer 曲面の部屋上の二重積分

(X, Y) が $\mathbb{R}^2$ の上の U_0 を動くとする。ただし、図における複雑な曲線は、Klein の正二十面体方程式

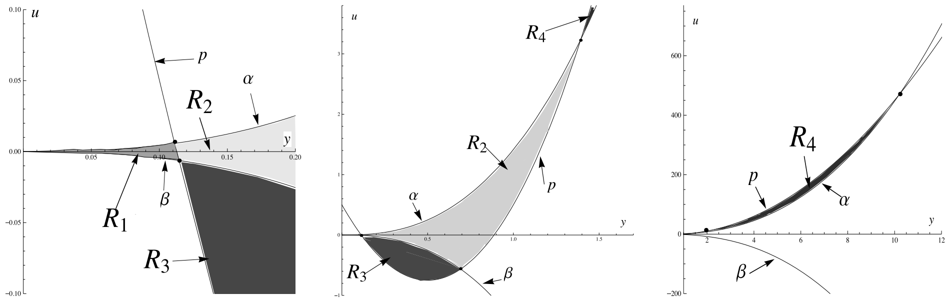
$1728X^5 - 720X^3Y + 80XY^2 - 64(5X^2 - Y)^2 - Y^3 = 0$ である (これは多価周期写像の branch locus を与える)。

以下、U_0 上の一価解析的な周期写像を構成する (U_0 上の一価写像を解析接続する事によって、多価解析的周期写像 Φ_K が得られる)。

$\{(y, u) | y > 0, u \in \mathbb{R}\}$ 上の解析関数 $F(u, y) = \sqrt{(u^2 - 2y^5)(u - (5y^2 - 10Xy + Y)}$ を考える。ただし、$y \in \mathbb{R}_+$ を固定した時、4 つの分岐点が $w_1 < w_2 < w_3 < \infty$ と並んだとすると、$F(u, y)$ の分枝は表 のようにとる。

	$-\infty < u < w_1$	$w_1 < u < w_2$	$w_2 < u < w_3$	$w_3 < u < \infty$
$F(u, y)$	$-\sqrt{-1}\mathbb{R}_+$	$-\mathbb{R}_+$	$\sqrt{-1}\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+$

5 次式 $u^2 = 2y^5$ と放物線 $u = p(y)$ で囲まれた「部屋」$R_1, \cdots, R_4$ を、図のように取る。



Theorem 2.1. U_0 上の周期写像の分枝は次のように具体的な代数関数の二重積分として得られる。

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Delta_1} \omega = 2\int_{R_2} \frac{dudy}{F(u,y)} + 2\int_{R_4} \frac{dudy}{F(u,y)}, & \displaystyle\int_{\Delta_2} \omega = 2\int_{R_2} \frac{dudy}{F(u,y)}, \\ \displaystyle\int_{\Delta_3} \omega = 6\int_{R_1} \frac{dudy}{F(u,y)} + 2\int_{R_3} \frac{dudy}{F(u,y)}, & \displaystyle\int_{\Delta_4} \omega = -2\int_{R_1} \frac{dudy}{F(u,y)}. \end{cases}$$

これは古典的な楕円積分の 2 変数への拡張を与えると言うことが出来る

References

[H] G. Humbert, *Sur les fonctions abéliennes singulières,* Oeuvres de G. Humbert 2, pub. par les soins de Pierre Humbert et de Gaston Julia, Gauthier-Villars, 297-401, 1936.

[N1] A. Nagano, *A theta expression of the Hilbert modular functions for $\sqrt{5}$ via the periods of $K3$ surfaces,* Kyoto J. Math., to appear, 2012.

[N2] A. Nagano, *On the Kummer surface for the Humbert surface of invariant 5,* preprint, 2012.

Minimal singular metrics of a line bundle admitting no Zariski-decomposition

小池 貴之　(東京大学大学院数理科学研究科 (M2))*

$\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影代数多様体 X と, その上の巨大直線束 L を考える. 本講演で扱うのは, L が nef になるための障害に関連する問題である. この種の情報は, L の最小特異エルミート計量 $h_{\min,L}$ を研究することで得られることが知られている.

定義 1 *L の特異エルミート計量 $h_{\min,L}$ が最小特異エルミート計量であるとは, 曲率カレントが半正なる L の任意の特異エルミート計量 h に対し, 次が成り立つときをいう. つまり, 任意の点 $x \in X$ に対し, $h_{\min,L}$ の x 近傍での local weight function を φ_L, h の x 近傍での local weight function を ψ としたとき, φ_L は x まわりで, 多重列調和函数として, ψ より強くない特異性を持つ. つまり, x の十分近傍で, ある定数 C に対して, $\psi \leq \varphi_L + C$ が成立する.*

L の最小特異エルミート計量 $h_{\min,L}$ を用いれば, 今回扱う問題は, $h_{\min,L}$ の特異部分に関する問題であるといえる. 具体的には, 次の二つの問題を扱う.

問題 2 *L の non-nef locus $\mathrm{NNef}(L)$ は, どのような形をしているか. 特に, Zariski 閉集合か.*

問題 3 *(Demailly, Kollár の openness conjecture([DK]) の弱い形) $t > 1$ とする. 乗数イデアル層 $\mathcal{J}(h^t_{\min,L})$ は, t が十分 1 に近いとき, $\mathcal{J}(h_{\min,L})$ と一致する.*

この種の問題においては, L が, 双有理的な意味で Zariski 分解可能である場合が基本的である. 実際, この場合には, $h_{\min,L}$ の特異部分の様子は, ほとんど代数的な状況として記述できるため, 上の二つの問題は簡単になる.

命題 4 *L が双有理的に Zariski 分解可能であるならば, $\mathrm{NNef}(L)$ は Zariski 閉集合である. またこのとき, 問題 3 の予想は正しい.*

従って, これらの問題を考察する上では, L が双有理的にも Zariski 分解不可能な場合が本質的となる. その様な L の例は, 中山 [N] によって, 複素トーラス上の完備で滑らかな射影的トーリック束の全空間 X 上の巨大直線束として構成された. 現在, 双有理的にも Zariski 分解不可能な例は, 未だ本質的にはこの一例しか構成されていないようである.

以上の様な意味で, このようなトーリック束上の巨大直線束は, 上記の様な問題を考える上で, 最も基本的な非自明な場合であるといえるであろう. 次の定理は本講演の主結果であり, このような X, L に於ける結果である.

定理 5 *X を複素トーラス上の完備で滑らかな射影的トーリック束の全空間とする. X 上の巨大直線束 L に対しては, $\mathrm{NNef}(L)$ は Zariski 閉集合である. またこのとき, 問題 3 の予想は正しい.*

* 〒153-8914　東京都目黒区駒場 3-8-1　東京大学 大学院数理科学研究科
e-mail: tkoike@ms.u-tokyo.ac.jp

このような X, L に対しては, 実はより詳しく, $h_{\min,L}$ の具体的な表示や $\mathrm{NNef}(L)$ 自体を求める方法を我々は得ている. 以下では例として, 中山 [N] の例 (X, L) に於ける $h_{\min,L}$ の特異部分の様子について述べる.

中山 [N] の例に於ける X は, 十分一般的な滑らかな楕円曲線二つの直積として書けるような Abel 曲面 V 上の $\mathbb{P}^2$ 束として記述される. より詳しく, V 上の特殊な直線束 L_1, L_2, L_3 を用いて, $X = \mathbb{P}(L_1 \oplus L_2 \oplus L_3)$ と書ける. L はその, 相対超平面束である.

このときの $\mathrm{NNef}(L)$ は, X の部分集合 $\mathbb{P}(L_3)$ であり, 確かに Zariski 閉集合である. そして $\mathrm{NNef}(L) = \mathbb{P}(L_3)$ の外に於いては, 今回構成した $h_{\min,L}$ は連続で, 特異部分を持たない. 一方で, 各 $x_0 \in \mathbb{P}(L_3)$ に於いては, $h_{\min,L}$ の local weight function φ_L は発散している. より詳しくは, $\mathbb{P}(L_3) = \{x = y = 0\}$ となるような x_0 近傍の X の局所座標 (x, y, z, w) を用いることで, x_0 の十分近傍では

$$\varphi_L(x, y, z, w) \sim \log \max_{(\alpha,\beta)\in H} (|x|^{2\alpha} \cdot |y|^{2\beta})$$

と書ける. ただしここで, H は, 下図のような, 双曲線の一部である. ここから, 同じく下図に記す S_t という凸集合を用いることで, 乗数イデアル層 $\mathcal{J}(h^t_{\min,L})$ は, x_0 では, 多項式の系

$$\{x^p y^q \mid (p+1, q+1) \in \mathrm{Int}(S_t) \cap \mathbb{Z}^2\}$$

によって生成されていることが分かる.

以上の結果を用いると, $h_{\min,L}$ に付随する乗数イデアル層に関して, jumping number や singularity exponent の計算も容易にでき, 代数的な乗数イデアル層に関するこれらの振る舞いとの相違 (有理的でない, 周期性が無い, 等) が確認できる.

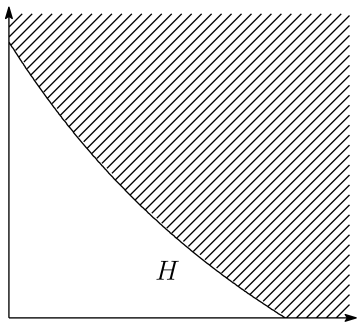


図 1: この図の斜線部が S_1 であり, 集合 S_t は, 点 $p \in \mathbb{R}^2$ の内, $\frac{p}{t} \in S_1$ なるもの全体の集合である.

参考文献

[DK] J.-P. Demailly and J. Kollár, *Semi-continuity of complex singularity exponents and Kahler-Einstein metrics on Fano orbifolds*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **34** (2001), 525-556.

[N] N. Nakayama, *Zariski-decomposition and abundance*, MSJ Memoirs **14**, 2004.

リーマン面による葉層構造をもつ3次元多様体上の正 CR 直線束の豊富性について

足立真訓 (名大・多元数理)*

概　要

コンパクトレビ平坦3次元 CR 多様体について, 小平埋め込み定理のアナローグを議論する. 大沢・Sibony [6] により, 葉方向に正な CR 直線束があれば, その冪の大域切断の連比で, 高次元複素射影空間への $\mathcal{C}^\kappa$ 級埋め込みが, 任意の自然数 κ に対して作れることが知られている. 今回, 一般には $\kappa = \infty$ とできないことを示す反例が作れたので, 報告する.

1. 背景

$\mathcal{C}^\infty$ 級奇数次元多様体 M がレビ平坦 CR 多様体であるとは, M に実余次元1の $\mathcal{C}^\infty$ 級非特異葉層構造 $\mathcal{F}$ と, 葉上に制限したときにその複素構造を定める $\mathcal{C}^\infty$ 級の $J \in \mathrm{End}(T\mathcal{F})$ が与えられたときをいう. もっとも単純なレビ平坦 CR 多様体は, $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ であり, $\mathbb{C}^{n+1}$ を2つの擬凸領域に分けている. 複素多様体 X を局所的に2つの擬凸領域に分かつ実超曲面 M（レビ平坦面）の一般化として, レビ平坦 CR 多様体は位置づけられる.

もっとも一般的な問題として, M のトポロジー, $\mathcal{F}$ の力学系, J による函数論 (対象となる函数は CR 函数であって, 葉上に制限して正則になる函数と一致する) の関わり合いを問うことができる. この視点では, Barrett, 稲葉が1990年代前半にいくつかの結果を得ている. たとえば, 稲葉 [4] は「コンパクトレビ平坦 CR 多様体上の (葉と横断方向に) 連続な CR 関数は全ての葉上で定数となる」ことを示している.

レビ平坦 CR 多様体がコンパクト複素多様体 X 内の レビ平坦面 M として実現された場合は, X の複素幾何, 補空間 $X \setminus M$ の擬凸性との関わりも問うことができる. もっとも有名な問題は, $\mathbb{CP}^2$ 内のなめらかなレビ平坦面の非存在予想であろう.

2. 問題と主結果

今回考察するのは, 小平型の埋め込み定理である. M をコンパクトレビ平坦 CR 多様体, L を M 上の正の CR 直線束とする. ここで L が正とは, L の $\mathcal{C}^\infty$ 級エルミート計量 h をうまく取ると, どの葉に (L, h) を制限しても, そのチャーン曲率形式が正定値となること, を意味する. 問題は, $L^{\otimes n}$ の CR 切断 $s_0, \cdots, s_N$ を用いて, 連比 $(s_0 : \cdots : s_N)\colon M \to \mathbb{CP}^N$ により埋め込み写像が作れるか, である.

大沢・Sibony [6] は, 「任意の $\kappa \in \mathbb{N}$ に対し, L は $\mathcal{C}^\kappa$ 豊富である. すなわち, 自然数 n_0 が存在し, $L^{\otimes n}$ $(n > n_0)$ に対しては, (葉と横断方向に) $\mathcal{C}^\kappa$ 級の CR 切断を用いて, 上述の埋め込み写像が作れる」ことを証明した. κ は任意の自然数を指定できるが, κ を大きくするためには, n_0 を大きく取らねばならないことが原論文の証明, 別証明 [5] から示唆される.

$\kappa = \infty$ と一般にはできないことを示す反例の構成が, この報告の主結果である.

2010 Mathematics Subject Classification: 32V30; 32E10, 32V25, 53D35.
キーワード：レビ平坦 CR 多様体, 射影埋め込み, 正則円板束, 擬凸性, confoliation.
* e-mail: m08002z@math.nagoya-u.ac.jp
web: http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~m08002z/

定理. Σを閉 Riemann 面, $\mathcal{D} \to \Sigma$を単位円板$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$をファイバーとする正則ファイバー束(正則円板束)とする. $\mathcal{D}$ は自然に$\mathbb{CP}^1$束$\pi\colon X \to \Sigma$に埋め込まれる. X内での$\mathcal{D}$の境界は, $\mathcal{C}^\omega$級レビ平坦面(平坦円周束)となり, これをMで表す. LをΣ上の正な直線束とせよ. 引き戻し$\pi^*L|M$は正の CR 直線束である. $\mathcal{D}$が非正則かつ非反正則な調和切断を持つことを仮定する. このとき, $\pi^*L|M$ は$\mathcal{C}^\infty$豊富ではない.

仮定の状況は, たとえば以下の構成で実現する: Σの種数を2以上とし, フックス群模型$\Sigma = \mathbb{D}/\Gamma$と, その擬等角変形$\rho\colon \Gamma \to \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$で, Σのモジュライ空間の非自明な元を定めるものをとる. $\mathcal{D} = \mathbb{D} \times \mathbb{D}/(z, \zeta) \sim (\gamma z, \rho(\gamma)z)$ for $\gamma \in \Gamma$ とせよ.

なお, 関連する先行研究として, Ghys, Deroin, Fornæss-Wold も小平型の埋め込み定理を, コンパクトなラミネーション上で議論していることを指摘しておく。(cf. [3] およびその引用文献)

3. 証明のアイディア

L^2 $\overline{\partial}$コホモロジーの消滅に基づく, 次の Bochner-Hartogs 型の拡張定理を用いる.

定理. Xを連結なコンパクト複素多様体$(\dim X \geq 2)$, LをX上の正則直線束, Mを$\mathcal{C}^\infty$級コンパクトレビ平坦面とする. $X \setminus M$ が2つの武内1完備な領域$D \sqcup D'$に分かれることを仮定すると, $\kappa \in \mathbb{N}$ が見つかり, $L|M$の任意の$\mathcal{C}^\kappa$級CR切断は, Lの正則切断に拡張する. 特に, $L|M$の任意の$\mathcal{C}^\infty$級CR切断は, Lの正則切断に拡張する.

ここで, Dが武内1完備とは, $\overline{D}$上定義されたMの定義関数rが存在し, どんなXのエルミート計量ωに対しても, $i\partial\overline{\partial}(-\log|r|) \gtrsim \omega$が$D$上成り立つことを指す. これは, 武内により示された局所擬凸な $D \subsetneqq \mathbb{CP}^n$ の性質を取り出した概念である.

主結果における$\mathcal{D}, X \setminus \overline{\mathcal{D}}$は, 武内1完備となっている. これは正則円板束の調和切断による分類結果[2]を利用し, 従来知られていた多重劣調和皆既関数を, そのレビ形式が境界の近傍でも退化しないように補正することで証明できる.

上述の Bochner-Hartogs 型拡張定理より, どのnに対しても, $\pi^*L^{\otimes n}|M$ の $\mathcal{C}^\infty$ 級 CR 切断は, X 上の $\pi^*L^{\otimes n}$ の正則切断に拡張している. 一方, $\pi^*\colon H^0(\Sigma, L^{\otimes n}) \to H^0(X, \pi^*L^{\otimes n})$ が同型であるから, $\pi^*L^{\otimes n}|M$ の $\mathcal{C}^\infty$ 級 CR 切断は, π のファイバーの点を分離できない. したがって, $\mathcal{C}^\infty$豊富ではあり得ない.

参考文献

[1] M. Adachi, *On the ampleness of positive CR line bundles over Levi-flat manifolds*, in preparation.

[2] K. Diederich and T. Ohsawa, *On the displacement rigidity of Levi flat hypersurfaces—the case of boundaries of disc bundles over compact Riemann surfaces*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **43** (2007), 171–180.

[3] J.-E. Fornæss, E.-F. Wold, *Solving $\bar{\partial}_b$ on hyperbolic laminations* (2011), available at `arXiv:1108.2286 [math.CV]`.

[4] T. Inaba, *On the nonexistence of CR functions on Levi-flat CR manifolds*, Collect. Math. **43** (1992), no. 1, 83–87.

[5] T. Ohsawa, *On Projectively Embeddable Complex-Foliated Structures*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **48** (2012) no.3, 735–747.

[6] T. Ohsawa and N. Sibony, *Kähler identity on Levi flat manifolds and application to the embedding*, Nagoya Math J. **158** (2000), 87–93.

特別講演

Loewner chains on complete hyperbolic complex manifolds

Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University, Japan)*

Abstract

We present a new geometric construction of Loewner chains in one and several complex variables which holds on complete hyperbolic complex manifolds and show that there is essentially a one-to-one correspondence between evolution families of order d and Loewner chains of the same order. As a consequence we obtain a univalent solution ($f_t \colon M \to N$) for any Loewner-Kufarev PDE. We also show that a modified Roper-Suffridge extension operator preserves Loewner chains of order d.

1. Introduction

Loewner's partial differential equation

$$\frac{\partial f_s}{\partial s}(z) = -(df_s)_z G(z,s), \quad \text{a.e. } s \geq 0,$$

was introduced by Charles Loewner [47] in 1923 to study extremal problems in the unit disc $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ and, later, P.P. Kufarev [44] and C. Pommerenke [52], [53] developed the original theory. The Loewner theory is one of the main tool in the de Branges' proof of the Bieberbach conjecture. In 1999, O. Schramm [58] introduced a stochastic version of the original differential equation, nowadays known as SLE, which was a basic tool to prove Mandelbrot's conjecture by himself, G. Lawler and W. Werner.

Subordination chains in several complex variables were first studied by Pfaltzgraff [50] in 1974. He generalized to higher dimensions the Loewner differential equation and developed existence and uniqueness theorems for its solutions. His result is as follows:

Let $\mathbb{B}^n$ be the Euclidean unit ball in $\mathbb{C}^n$ and let

$$\mathcal{M} = \{h \in H(\mathbb{B}^n) : h(0) = 0, Dh(0) = I_n, \mathsf{Re}\,\langle h(z), z\rangle > 0, z \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}\}$$

be the Carathéodory class in $\mathbb{C}^n$.

Theorem 1.1. *Let $h = h(z,t) : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ be a mapping which satisfies the following conditions:*

(i) $h(\cdot, t) \in \mathcal{M}$, *for all* $t \geq 0$,

(ii) $h(z, \cdot)$ *is measurable on* $[0,\infty)$ *for* $z \in \mathbb{B}^n$,

(iii) *For each* $T > 0$ *and* $r \in (0,1)$, *there exists a number* $K = K(r,T) > 0$ *such that*

$$\|h(z,t)\| \leq K(r,T), \quad \textit{for } \|z\| \leq r, 0 \leq t \leq T.$$

This work has been supported by JSPS KAKENHI Grant Number 22540213.
2000 Mathematics Subject Classification: 32H02, 30C45.
Keywords: complete hyperbolic complex manifold, evolution family, Herglotz vector field, Loewner chain, Loewner differential equation.
* e-mail: h.hamada@ip.kyusan-u.ac.jp

Then for each $s \geq 0$ and $z \in \mathbb{B}^n$, the initial value problem

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -h(v,t) \ \ a.e. \ \ t \geq s, \quad v(z,s,s) = z,$$

has a unique solution $v = v(z,s,t)$ such that $v(\cdot,s,t)$ is a univalent Schwarz mapping and $Dv(0,s,t) = \exp(-(t-s))I_n$ for $t \geq s \geq 0$. In addition, the limit

$$\lim_{t\to\infty} e^t v(z,s,t) = f(z,s) \tag{1}$$

exists locally uniformly on $\mathbb{B}^n$ and $f(z,s)$ is univalent on $\mathbb{B}^n$ for each $s \geq 0$.

Moreover, we can show that

- $f(z,t)$ is a subordination chain such that $f(z,s) = f(v(z,s,t),t)$ for $t \geq s \geq 0$,
- $\{e^{-t}f(\cdot,t)\}_{t\geq 0}$ is a normal family on $\mathbb{B}^n$,
- $Df(0,t) = e^t I_n$, $t \geq 0$,
- $$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = Df(z,t)h(z,t) \ \text{ a.e. } \ t \geq 0, \quad \forall z \in \mathbb{B}^n.$$

We remark that the assumption (iii) on h does not necessarily hold for holomorphic mappings on the unit ball B in infinite dimensional complex Banach spaces. In [21], [38], we showed that $\mathcal{M}$ is uniformly bounded on each ball rB $(0 < r < 1)$ in complex Banach spaces. This enables us to generalize various results to complex Banach spaces [11], [12], [28], [29].

The existence and regularity theory and its applications have been considered by M. Chuaqui, P. Duren, S. Gong, I. Graham, H. Hamada, T. Honda, G. Kohr, M. Kohr, T. Liu, J.A. Pfaltzgraff, T. Poreda, T.J. Suffridge, M. Voda and others (see [20], [32]). In recent five years, we have studied about solutions for the Loewner differential equation [14], [22], [26], [34], quasiconformal extension [40], extension operators to higher dimensional spaces [23], geometrical characterization of the image [24], [25], extreme points and support points [27], [30], convex subordination chains [31], [41], growth theorems and coefficient bounds [35], [39]. These results have applications to linearly invariant families on bounded symmetric domains [36], [37] and pluriharmonic mappings [15].

Very recently, F. Bracci, M. Contreras and S. Díaz-Madrigal [8], [10], Contreras, Díaz-Madrigal and P. Gumenyuk [13], L. Arosio, F. Bracci, H. Hamada and G. Kohr [6] proposed a general setting for the Loewner theory, which works also on complete hyperbolic complex manifolds. L. Arosio [2], [3], [4], L. Arosio, F. Bracci and E. F. Wold [7], H. Hamada, G. Kohr, J. R. Muir [42] gave further developments. While the classical theory deals with normalized objects, this general theory does not, and encloses the classical theory as a special case.

The purpose of this talk is an announcement of our results in [6], [42] and related results. We present a general geometric construction of Loewner chains on complete hyperbolic complex manifolds which does not use a scaling limit process (and thus it is new also for the unit disc case) but relies on the apparently new interpretation of Loewner chains as the direct limit of evolution families, and to give applications of such a theory to geometric properties of univalent mappings on the unit ball. In dimension one, our results and the uniformization theorem allow to recover both the classical results of Loewner, Kufarev, Pommerenke and the new results by Contreras, Díaz-Madrigal and Gumenyuk. In higher dimensions these results are new.

2. Evolution families and Herglotz vector fields

In the rest of this talk, unless differently stated, M is a complete hyperbolic complex manifold, N is a connected complex manifold of the same dimension and $d \in [1, +\infty]$. Let d_M denote the distance associated with a given Hermitian metric on M.

Definition 2.1. A family $(\varphi_{s,t})_{0 \le s \le t}$ of holomorphic self-mappings of M is an *evolution family of order* d (or L^d-evolution family) if it satisfies the *evolution property*

$$\varphi_{s,s} = \mathsf{id}, \quad \varphi_{s,t} = \varphi_{u,t} \circ \varphi_{s,u}, \quad 0 \le s \le u \le t, \tag{2}$$

and if for any $T > 0$ and for any compact set $K \subset\subset M$, there exists a function $c_{T,K} \in L^d([0,T], \mathbb{R}^+)$ such that

$$d_M(\varphi_{s,t}(z), \varphi_{s,u}(z)) \le \int_u^t c_{T,K}(\xi) d\xi, \quad z \in K, \ 0 \le s \le u \le t \le T.$$

An L^d-evolution family has the following property.

Proposition 2.2. *Let $(\varphi_{s,t})$ be an L^d-evolution family. Then for all $0 \le s \le t$, the mapping $\varphi_{s,t}$ is univalent.*

Definition 2.3. (i) A *weak holomorphic vector field of order* d on M is a mapping $G : M \times \mathbb{R}^+ \to TM$ with the following properties:

- The mapping $G(z, \cdot)$ is measurable on $\mathbb{R}^+$ for all $z \in M$.
- The mapping $G(\cdot, t)$ is a holomorphic vector field on M for all $t \in \mathbb{R}^+$.
- For any compact set $K \subset\subset M$ and all $T > 0$, there exists a function $C_{K,T} \in L^d([0,T], \mathbb{R}^+)$ such that

$$\|G(z,t)\| \le C_{K,T}(t), \quad z \in K, \ \text{a.e. } t \in [0,T].$$

(ii) A holomorphic vector field G on M is called an *infinitesimal generator* if the Cauchy problem

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = G(z(t)), \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

has a solution $z : \mathbb{R}^+ \to M$ for all $z_0 \in M$.

(iii) A *Herglotz vector field of order* d on M is a weak holomorphic vector field of order d such that the holomorphic vector field $z \mapsto G(z,t)$ is an infinitesimal generator for a.e. fixed $t \in \mathbb{R}^+$.

The following theorem in L. Arosio, F. Bracci [5] (cf. F. Bracci, M. D. Contreras and S. Díaz-Madrigal [8]) states that there is a one-to-one correspondence between evolution families and Herglotz vector fields. The bridge for such a correspondence is given by the Loewner-Kufarev ODE (3).

Both classical radial and chordal Loewner ODE in the unit disc are just particular cases of such an equation (see F. Bracci, M. D. Contreras and S. Díaz-Madrigal [10]).

Theorem 2.4. *For any Herglotz vector field G of order d on M, there exists a unique L^d-evolution family $(\varphi_{s,t})$ over M such that for all $z \in M$*

$$\frac{\partial \varphi_{s,t}}{\partial t}(z) = G(\varphi_{s,t}(z), t) \quad \textit{a.e. } t \in [s, +\infty). \tag{3}$$

Conversely, for any L^d-evolution family $(\varphi_{s,t})$ over M, there exists a Herglotz vector field G of order d such that (3) *is satisfied. Moreover, if H is another weak holomorphic vector field which satisfies* (3)*, then $G(z,t) = H(z,t)$ for all $z \in M$ and a.e. $t \in \mathbb{R}^+$.*

3. Kernel convergence

Definition 3.1. Let (Ω_k) be a sequence of open subsets of M. The *kernel* Ω is the biggest open set such that for any compact set $K \subset \Omega$, there exists $m = m(K)$ such that if $k \geq m$ then $K \subset \Omega_k$. We say that the sequence (Ω_k) *kernel converges* to Ω (denoted by $\Omega_k \to \Omega$) if every subsequence of (Ω_k) has the same kernel Ω.

Note that by the very definition the kernel is an open set. It might be empty as the following example shows:

Example 3.2. Let $M = \mathbb{D}$ and $f_k : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ be defined by $f_k(z) = \frac{1}{k} z$. Then (f_k) is a sequence of univalent mappings converging uniformly on compacta to 0, and $f_k(\mathbb{D}) \to \varnothing$.

We have the following result. Another version of the kernel convergence theorem in $\mathbb{C}^n$ may be found in P. Duren, I. Graham, H. Hamada, and G. Kohr [14].

Theorem 3.3. *[Kernel convergence] Let (f_k) be a sequence of univalent mappings from M to N which converges uniformly on compacta to a univalent mapping f. Then $f(M)$ is a connected component of the kernel Ω of the sequence $(f_k(M))$, and $(f_k^{-1}|_{f(M)})$ converges uniformly on compacta to $f^{-1}|_{f(M)}$. In particular if Ω is connected, then $(f_k(M)) \to \Omega$.*

The condition that the sets are open is important, as the following example shows:

Example 3.4. Let $\mathbb{D} := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$. Let $f_k : \mathbb{D} \to \mathbb{C}^2$ be defined by $f_k(\zeta) := (\zeta, \frac{1}{k}\zeta)$. Then (f_k) is a sequence of univalent discs which converges uniformly on compacta to the injective disc $\zeta \mapsto (\zeta, 0)$. The only compact set in $\mathbb{C}^2$ which is eventually contained in $f_k(\mathbb{D})$ is $\{0\}$.

4. Loewner chains

As we will show in what follows, some properties of Loewner chains can be deduced from the algebraic properties of evolution families without using L^d regularity. Hence, it is natural to introduce the following:

Definition 4.1. An *algebraic evolution family* on M is a family $(\varphi_{s,t})_{0 \leq s \leq t}$ of univalent self-mappings of M satisfying the evolution property (2).

By Proposition 2.2, an L^d-evolution family is an algebraic evolution family (*i.e.*, it is univalent).

Definition 4.2. (i) A family of holomorphic mappings $(f_t : M \to N)_{t \geq 0}$ is a *subordination chain* if for each $0 \leq s \leq t$, there exists a holomorphic mapping $v_{s,t} : M \to M$ such that $f_s = f_t \circ v_{s,t}$.

(ii) A subordination chain (f_t) and an algebraic evolution family $(\varphi_{s,t})$ are *associated* if

$$f_s = f_t \circ \varphi_{s,t}, \quad 0 \leq s \leq t.$$

(iii) An *algebraic Loewner chain* is a subordination chain such that each mapping $f_t : M \to N$ is univalent. The *range* of an algebraic Loewner chain is defined as $\mathsf{rg}\,(f_t) := \bigcup_{t \geq 0} f_t(M)$. An algebraic Loewner chain $(f_t \colon M \to N)$ is *surjective* if $\mathsf{rg}\,(f_t) = N$.

Remark 4.3. Equivalently, an algebraic Loewner chain can be defined as a family of univalent mappings $(f_t : M \to N)_{t\geq 0}$ such that

$$f_s(M) \subset f_t(M), \quad 0 \leq s \leq t.$$

Definition 4.4. Let d_N be the distance induced by a Hermitian metric on N. An algebraic Loewner chain $(f_t \colon M \to N)$ is a *Loewner chain of order d* (or L^d-Loewner chain) if for any compact set $K \subset\subset M$ and any $T > 0$, there exists a $k_{K,T} \in L^d([0,T], \mathbb{R}^+)$ such that

$$d_N(f_s(z), f_t(z)) \leq \int_s^t k_{K,T}(\xi) d\xi$$

for all $z \in K$ and for all $0 \leq s \leq t \leq T$.

M. D. Contreras, S. Díaz-Madrigal and P. Gumenyuk [13] proved that given an L^d-Loewner chain (f_t) in the unit disc $\mathbb{D}$, the family

$$(\varphi_{s,t} := f_t^{-1} \circ f_s)$$

is an associated L^d-evolution family, and conversely, any L^d-evolution family on $\mathbb{D}$ admits a unique (up to biholomorphisms) associated L^d-Loewner chain. Such a result, as already in the classical theory, is based on a scaling limit process.

Similar results, in the case of L^∞-evolution families $(\varphi_{s,t})$ in the unit ball $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{C}^n$ with $\varphi_{s,t}(0) = 0$, $D\varphi_{s,t}(0) = e^{-(t-s)} I_n$, have been obtained in I. Graham, H. Hamada and G. Kohr [21] (see also I. Graham and G. Kohr [32]). In such works, Loewner chains (f_t) are assumed that $f_t(0) = 0$ and $Df_t(0) = e^t I_n$. Again, Loewner chains are defined starting from normalized evolution families by means of a scaling limit process (1).

In the next theorem, we present a general geometric construction of Loewner chains on complete hyperbolic complex manifolds which does not use a scaling limit process (and thus it is new also for the unit disc case), but relies on the apparently new interpretation of Loewner chains as the direct limit of evolution families.

Theorem 4.5. *Any algebraic evolution family $(\varphi_{s,t})$ on M admits an associated algebraic Loewner chain $(f_t \colon M \to N)$. Moreover if $(g_t \colon M \to Q)$ is a subordination chain associated with $(\varphi_{s,t})$, then there exist a holomorphic mapping $\Lambda \colon \mathsf{rg}\,(f_t) \to Q$ such that*

$$g_t = \Lambda \circ f_t, \quad \forall t \geq 0.$$

The mapping Λ is univalent if and only if (g_t) is an algebraic Loewner chain, and in that case $\mathsf{rg}\,(g_t) = \Lambda(\mathsf{rg}\,(f_t))$.

Proof. Define an equivalence relation on the product $M \times \mathbb{R}^+$:

$$(x, s) \sim (y, t) \quad \text{iff} \quad \varphi_{s,u}(x) = \varphi_{t,u}(y) \text{ for } u \text{ large enough},$$

and define $N := (M \times \mathbb{R}^+)/_\sim$. Let $\pi \colon M \times \mathbb{R}^+ \to N$ be the projection on the quotient, and let $i_t \colon M \to M \times \mathbb{R}^+$ be the injection $i_t(x) = (x, t)$. Define a family of mappings $(f_t \colon M \to N)$ as

$$f_t := \pi \circ i_t, \quad t \geq 0.$$

Each mapping f_t is injective since $\pi|_{M\times\{t\}}$ is injective, and by construction the family (f_t) satisfies

$$f_s = f_t \circ \varphi_{s,t}, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Thus we have $f_s(M) \subset f_t(M)$ for $0 \le s \le t$ and $N = \bigcup_{t \ge 0} f_t(M)$.

Endow the product $M \times \mathbb{R}^+$ with the product topology, considering on $\mathbb{R}^+$ the discrete topology. Endow N with the quotient topology. Each mapping f_t is continuous and open, hence it is a homeomorphism onto its image. This shows that N is arcwise-connected and Hausdorff, since each $f_t(M)$ is arcwise-connected and Hausdorff. Moreover N is second countable since $N = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f_k(M)$. Now define a complex structure on N by considering the M-valued charts $(f_t^{-1}, f_t(M))$ for all $t \ge 0$. This charts are compatible since $f_t^{-1} \circ f_s = \varphi_{s,t}$ which is holomorphic. Hence the family (f_t) is an algebraic Loewner chain associated with $(\varphi_{s,t})$.

If $(g_t\colon M \to Q)$ is a subordination chain associated with $(\varphi_{s,t})$, then the map $\Psi\colon M \times \mathbb{R}^+ \to Q$

$$(z,t) \mapsto g_t(z)$$

is compatible with the equivalence relation $\sim$. The map Ψ passes thus to the quotient defining a holomorphic mapping $\Lambda\colon N \to Q$ such that

$$g_t = \Lambda \circ f_t, \quad t \ge 0.$$

The last statement is easy to check. □

As a corollary we have the following.

Corollary 4.6. *Let $(\varphi_{s,t})$ be an algebraic evolution family on M. Also let $(f_t\colon M \to N)$ and $(g_t\colon M \to Q)$ be two algebraic Loewner chains associated with $(\varphi_{s,t})$. Then there exists a biholomorphism $\Lambda\colon \mathsf{rg}\,(f_t) \to \mathsf{rg}\,(g_t)$ such that $g_t = \Lambda \circ f_t$ for all $t \ge 0$.*

Thus there exists essentially one algebraic Loewner chain associated with an algebraic evolution family.

Definition 4.7. Let $(\varphi_{s,t})$ be an algebraic evolution family. By Corollary 4.6, the biholomorphism class of the range of an associated algebraic Loewner chain is uniquely determined. We call this class the *Loewner range* of $(\varphi_{s,t})$ and we denote it by $\mathsf{Lr}\,(\varphi_{s,t})$ (cf. the abstract basin of attraction defined by Fornaess and Stensønes in the setting of discrete holomorphic dynamics with an attractive fixed point [19]).

To prove the following theorem, we use the kernel convergence theorem. The following theorem shows that the equation $f_s = f_t \circ \varphi_{s,t}$ provides a one-to-one correspondence (up to biholomorphisms) between L^d-Loewner chains and L^d-evolution families.

Theorem 4.8. *Assume that the algebraic evolution family $(\varphi_{s,t})$ on M is associated with the algebraic Loewner chain $(f_t\colon M \to N)$. Then $(\varphi_{s,t})$ is an L^d-evolution family if and only if (f_s) is an L^d-Loewner chain.*

If we consider evolution families defined on a domain D of a complex manifold N, a natural question is whether there exists an associated Loewner chain whose range is contained in N, or, in other terms, whether the Loewner range is biholomorphic to a domain of N. This question makes particularly sense if $D = \mathbb{B}^n$ and $N = \mathbb{C}^n$.

Remark 4.9. There exists an algebraic evolution family $(\varphi_{s,t})$ on $\mathbb{B}^3$ which does not admit any associated algebraic Loewner chain with range in $\mathbb{C}^3$. This follows from L. Arosio [2, Section 9.4].

There are several works in this direction, answering such a question in some normalized class of evolution families (see [2], [21], [25], [26], [32], [54], [60]). Here we give some answers based on the asymptotic behavior of the Kobayashi pseudometric under the corresponding evolution family.

Definition 4.10. Let $(\varphi_{s,t})$ be an algebraic evolution family on M. Let $\kappa_M : TM \to \mathbb{R}^+$ be the Kobayashi pseudometric of M. For $v \in T_zM$ and $s \geq 0$, we define

$$\beta_v^s(z) := \lim_{t\to\infty} \kappa_M(\varphi_{s,t}(z); (d\varphi_{s,t})_z(v)). \tag{4}$$

Remark 4.11. By the contraction property of the Kobayashi pseudometric, the limit in (4) is well defined.

Proposition 4.12. *Let $(\varphi_{s,t})$ be an algebraic evolution family on M. Let $(f_t\colon M \to N)$ be an associated surjective algebraic Loewner chain. Then for all $z \in M$ and $v \in T_zM$, it follows that*

$$f_s^*\kappa_N(z; v) = \beta_v^s(z).$$

If $M = \mathbb{D}$, the Loewner range $\mathsf{Lr}\,(\varphi_{s,t})$ is non-compact and simply connected. So, by the uniformization theorem, it has to be biholomorphic to $\mathbb{D}$ or $\mathbb{C}$. Then from Proposition 4.12, we obtain the following corollary (cf. M. D. Contreras, S. Díaz-Madrigal and P. Gumenyuk [13, Theorem 1.6]).

Corollary 4.13. *Let $(\varphi_{s,t})$ be an algebraic evolution family on the unit disc $\mathbb{D}$.*

(i) *If there exist $z \in \mathbb{D}$, $v \in T_z\mathbb{D}$, $s \geq 0$, such that $\beta_v^s(z) = 0$, then*

- $\mathsf{Lr}\,(\varphi_{s,t})$ *is biholomorphic to $\mathbb{C}$,*
- $\beta_v^s(z) = 0$ *for all $z \in \mathbb{D}$, $v \in T_z\mathbb{D}$, $s \geq 0$.*

(ii) *If there exist $z \in \mathbb{D}$, $v \in T_z\mathbb{D}$, $s \geq 0$, such that $\beta_v^s(z) \neq 0$, then*

- $\mathsf{Lr}\,(\varphi_{s,t})$ *is biholomorphic to $\mathbb{D}$,*
- $\beta_v^s(z) \neq 0$ *for all $z \in \mathbb{D}$, $v \in T_z\mathbb{D}$, $s \geq 0$.*

From Corollary 4.13 and Theorem 4.8, we obtain the following corollary.

Corollary 4.14. *Let $(\varphi_{s,t})$ be an L^d-evolution family on the unit disc $\mathbb{D}$. Then there exists an L^d-Loewner chain (f_t) associated with $(\varphi_{s,t})$ such that $\mathsf{rg}\,(f_t)$ is either the unit disc $\mathbb{D}$ or the complex plane $\mathbb{C}$.*

Such a result can be generalized in higher dimension as follows. Let us denote by $\mathsf{aut}(M)$ the group of holomorphic automorphisms of M. From Proposition 4.12 and Fornaess and Sibony [18, Theorem 3.2, Main Theorem], we obtain the following theorem.

Theorem 4.15. *Assume that $M/\mathsf{aut}(\mathsf{M})$ is compact. Let $(\varphi_{s,t})$ be an algebraic evolution family on M. Then*

(i) *If there exist $z \in M$, $s \geq 0$ such that $\beta_v^s(z) \neq 0$ for all $v \in T_zM$ with $v \neq 0$, then $\mathsf{Lr}\,(\varphi_{s,t})$ is biholomorphic to M.*

(ii) *If there exist $z \in M$, $s \geq 0$ such that $\dim_{\mathbb{C}}\{v \in T_zM : \beta_v^s(z) = 0\} = 1$, then $\mathsf{Lr}\,(\varphi_{s,t})$ is a fiber bundle with fiber $\mathbb{C}$ over a closed complex submanifold of M.*

In particular, if $M = \mathbb{B}^n$, then in the second case in Theorem 4.15, the Loewner range is a fiber bundle with fiber $\mathbb{C}$ over a closed complex submanifold of $\mathbb{B}^n$ and by [18, Corollary 4.8] it is actually biholomorphic to $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^n$. Therefore, we obtain

Corollary 4.16. *Let $(\varphi_{s,t})$ be an algebraic evolution family on the unit ball $\mathbb{B}^n$. If for some $z \in \mathbb{B}^n$, $s \geq 0$ it follows that* $\dim_{\mathbb{C}}\{v \in \mathbb{C}^n : \beta_v^s(z) = 0\} \leq 1$, *then there exists an algebraic Loewner chain $(f_t \colon M \to \mathbb{C}^n)$ associated with $(\varphi_{s,t})$.*

If $\dim_{\mathbb{C}}\{v \in \mathbb{C}^n : \beta_v^s(z) = 0\} \geq 2$, the complex structure of the Loewner range can be more complicated. The Loewner range of the algebraic evolution family recalled in Remark 4.9 has $\dim_{\mathbb{C}}\{v \in \mathbb{C}^n : \beta_v^s(z) = 0\} = 2$ and is not biholomorphic to a domain of $\mathbb{C}^3$.

Example 4.17. Let $(\varphi_{s,t})$ be an algebraic evolution family of $\mathbb{B}^2$ such that $\varphi_{s,t}(0) = 0$ for all $0 \leq s \leq t$ and $(D\varphi_{s,t})(0) = e^{A(t-s)}$ where A is a diagonal matrix with eigenvalues $i\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$ and $\lambda \in \mathbb{C}$ for some $\mathsf{Re}\,\lambda \leq 0$. Then $\dim_{\mathbb{C}} \ker \beta_v^s(0) \leq 1$ (it is either 1 if $\mathsf{Re}\,\lambda < 0$ or 0 if $\mathsf{Re}\,\lambda = 0$ which is the case if and only if $\varphi_{s,t}$ are automorphisms). Therefore in such a case there exists an algebraic Loewner chain with range in $\mathbb{C}^2$.

5. Loewner-Kufarev PDE

In this section, we show that L^d-Loewner chains on complete hyperbolic complex manifolds are the univalent solutions of the Loewner-Kufarev PDE, as in the classical theory of Loewner chains on $\mathbb{B}^n$ (see [21], [32]). Other results related to the solutions of the Loewner-Kufarev PDE on $\mathbb{B}^n$ may be found in [14].

Proposition 5.1. *Let $(f_t \colon M \to N)$ be an L^d-Loewner chain on M. Then there exists a set $E \subset \mathbb{R}^+$ (independent of z) of zero measure such that for every $s \in (0, +\infty) \setminus E$, the mapping*

$$M \ni z \mapsto \frac{\partial f_s}{\partial s}(z) \in T_{f_s(z)}N$$

is well-defined and holomorphic on M.

Theorem 5.2. *Let $G : M \times \mathbb{R}^+ \to TM$ be a Herglotz vector field of order d associated with the L^d-evolution family $(\varphi_{s,t})$. Then a family of univalent mappings $(f_t \colon M \to N)$ is an L^d-Loewner chain associated with $(\varphi_{s,t})$ if and only if it is locally absolutely continuous on $\mathbb{R}^+$ locally uniformly with respect to $z \in M$ and solves the Loewner-Kufarev PDE*

$$\frac{\partial f_s}{\partial s}(z) = -(df_s)_z G(z, s), \quad a.e.\ s \geq 0, z \in M. \tag{5}$$

By Theorems 4.8, 2.4, and 5.2, we obtain the following corollary. This result has been proved with different method also in H. Hamada, G. Kohr, J. R. Muir [42].

Corollary 5.3. *Every L^d-Loewner chain $(f_t \colon M \to N)$ solves a Loewner-Kufarev PDE.*

From Theorems 2.4, 4.5, 4.8 and 5.2, we obtain the following corollary.

Corollary 5.4. *The Loewner-Kufarev PDE* (5) *admits a solution given by univalent mappings $(f_t \colon M \to N)$. Any other solution with values in a complex manifold Q is of the form $(\Lambda \circ f_t)$ where $\Lambda \colon \mathsf{rg}\,(f_t) \to Q$ is holomorphic. Hence a solution given by univalent mappings $(h_t \colon M \to \mathbb{C}^n)$ exists if and only if the Loewner range $\mathsf{Lr}\,(\varphi_{s,t})$ is biholomorphic to a domain in $\mathbb{C}^n$.*

L. Arosio, F. Bracci and E. F. Wold [7] showed that any Loewner PDE on a complete hyperbolic starlike domain in $\mathbb{C}^n$ admits a univalent solution with values in $\mathbb{C}^n$ using Corollary 5.4 (For partial results, see L. Arosio [2], [3], [4]).

Theorem 5.5. *Let $D \subset \mathbb{C}^n$ be a complete hyperbolic starlike domain. Let $G : D\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}^n$ be a Herglotz vector field of order d. Then there exists a family of univalent mappings $(f_t : D \to \mathbb{C}^n)$ of order d which solves the Loewner PDE*

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}(z) = -df_t(z)G(z,t), \quad a.e.\ t \geq 0, \forall z \in D.$$

Moreover, $\mathsf{rg}\,(f_t) = \cup f_t(D)$ *is a Runge and Stein domain in $\mathbb{C}^n$.*

Corollary 5.6. *Let $D \subset \mathbb{C}^n$ be a complete hyperbolic starlike domain. Let $(\varphi_{s,t})$ be an L^d-evolution family on D. Then there exists an L^d-Loewner chain (f_t) associated with $(\varphi_{s,t})$ such that* $\mathsf{rg}\,(f_t)$ *is a Runge and Stein domain in $\mathbb{C}^n$.*

6. Extension of Loewner chains from the unit disk

Since the introduction of what is now known as the Roper-Suffridge extension operator in 1995 [56], a great deal of work has been done to develop and study operators that extend locally biholomorphic mappings defined in $\mathbb{D}$ (or in $\mathbb{B}^n$) to mappings defined in the ball of a higher-dimensional space. The modification of the Roper-Suffridge extension operator with a general Q was introduced by Muir in [48], where it was shown to preserve convexity and starlikeness for Q of sufficiently small norm. The following result provides examples of L^d-Loewner chains on $\mathbb{B}^n$, which are generated by a modified Roper-Suffridge extension operator [42].

Theorem 6.1. *Let $Q : \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}$ be a homogeneous polynomial of degree 2 with $\|Q\| \leq 1/4$. If $\{f_t\}_{t\geq 0} \subseteq H(\mathbb{D},\mathbb{C})$ is an L^d-Loewner chain, then $\{F_t\}_{t\geq 0} \subseteq H(\mathbb{B}^n,\mathbb{C}^n)$ is also an L^d-Loewner chain, where $\{F_t\}$ is any well-defined branch of the Φ_Q-extension of $\{f_t\}$, given by*

$$F_t(z) = \left(f_t(z_1) + f_t'(z_1)Q(\hat{z}), e^{t/2}\sqrt{f_t'(z_1)}\,\hat{z}\right),, \quad z = (z_1,\tilde{z}) \in \mathbb{B}^n, \quad t \geq 0,$$

where

$$\sqrt{f'(z_1)} = \exp\left(\frac{1}{2}\left[\log f'(0) + \int_0^{z_1} \frac{f''(w)}{f'(w)}\,dw\right]\right),$$

is a consistent branch of $\sqrt{f'(\cdot)}$.

Remark 6.2. (i) Let

$$F(z) = (f(z_1) + G(\sqrt{f'(z_1)}\hat{z}), \sqrt{f'(z_1)}\hat{z}),$$

where $f(z_1) = z_1/(1-z_1)^2$ is the Koebe function and $G \in H(\mathbb{C}^{n-1},\mathbb{C})$ is such that $G(0) = 0$ and $DG(0) = 0$. If $\|F(z)\| \leq \|z\|/(1-\|z\|)^2$ for $z \in \mathbb{B}^n$, then G must be a homogeneous polynomial of degree 2 from [49, Theorem 4.1].
(ii) It is shown in J.R. Muir Jr. [48] that if f is the Koebe function, $f(z_1) = z_1/(1-z_1)^2$, $z_1 \in \mathbb{D}$, then f is starlike and $F = \Phi_Q(f)$ (where the branch of $\sqrt{f'(\cdot)}$ is such that $\sqrt{f'(0)} = 1$) is starlike if and only if $\|Q\| \leq 1/4$. Accordingly, $\{F_t\}_{t\geq 0} = \{e^tF\}_{t\geq 0}$ is an L^∞-Loewner chain (and consequently an L^d-Loewner chain for all $d \in [1,\infty)$) if and only if $\|Q\| \leq 1/4$. If $\|Q\| > 1/4$, then $\{F_t\}$ is not an L^d-Loewner chain for any $d \in [1,\infty]$. This shows that the bound $\|Q\| \leq 1/4$ is the best possible for Theorem 6.1 for all $d \in [1,\infty]$.

Example 6.3. Let $d \in [1, \infty)$ and $\lambda : [0, \infty) \to (-\infty, 0)$ be an absolutely continuous increasing function that satisfies

$$\lim_{t \to \infty} \lambda(t) = 0, \qquad \lambda' \in L^d_{\mathrm{loc}}([0, \infty)).$$

Now let Ω be a nonempty simply connected proper subdomain of $\mathbb{C}$, let $h : \mathbb{D} \to \Omega$ be any Riemann mapping, and define $\{f_t\}_{t \geq 0} \subseteq H(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ by

$$f_t(\zeta) = h(e^{\lambda(t)}\zeta), \qquad \zeta \in \mathbb{D}, \ t \geq 0.$$

Corresponding to $\{f_t\}$, we define $\{\psi_{s,t}\}_{t \geq s \geq 0} \subseteq H(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ by

$$\psi_{s,t}(\zeta) = (f_t^{-1} \circ f_s)(\zeta) = e^{\lambda(s) - \lambda(t)}\zeta, \qquad \zeta \in \mathbb{D}, \ t \geq s \geq 0.$$

Then the following results hold.

(i) $\{\psi_{s,t}\}$ is an evolution family of order d on $\mathbb{D}$.

(ii) It follows from Theorem 4.8 that $\{f_t\}$ is a Loewner chain of order d on $\mathbb{D}$.

(iii) $\bigcup_{t \geq 0} f_t(\mathbb{D}) = \Omega$, independent of h. Thus there are many Loewner chains with range Ω, all of which are of order d.

(v) The evolution family $\{\psi_{s,t}\}$ depends only on λ, and hence corresponds to all Loewner chains constructed using arbitrary Ω and h.

From Theorem 6.1 and Example 6.3, we have many examples of Loewner chains of order d on $\mathbb{B}^n$.

We have the following result on the range of any branch of the Φ_Q-extension of an L^d-Loewner chain on $\mathbb{D}$.

Theorem 6.4. *For any L^d-Loewner chain $\{f_t\}_{t \geq 0} \subseteq H(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ and homogeneous polynomial $Q : \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}$ of degree 2 with $\|Q\| \leq 1/4$, if $\{F_t\}_{t \geq 0}$ is a suitable branch of the Φ_Q-extension of $\{f_t\}$, then*

$$\bigcup_{t \geq 0} F_t(\mathbb{B}^n) = \left(\bigcup_{t \geq 0} f_t(\mathbb{D}) \right) \times \mathbb{C}^{n-1}.$$

7. Spiral-shapedness and Star-shapedness

Definition 7.1. Let $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ and let $A \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ be such that $m(A) > 0$, where

$$m(A) = \min\{\mathrm{Re}\,\langle A(z), z\rangle : \|z\| = 1\}.$$

We say that Ω is *spiral-shaped with respect to A* if $e^{-tA}(w) \in \Omega$ whenever $w \in \Omega$ and $t \in \mathbb{R}^+$. If $A = I_n$ and Ω is spiral-shaped with respect to I_n, we say that Ω is *star-shaped.*

If f is a univalent mapping on $\mathbb{B}^n$, then f is called *spiral-shaped with respect to* A if the image domain $\Omega = f(\mathbb{B}^n)$ is spiral-shaped with respect to A. In addition, if $A = I_n$ and f is spiral-shaped with respect to I_n, we say that f is *star-shaped* (see [17]).

Remark 7.2. It is clear that if f is spiral-shaped with respect to A, then $0 \in \overline{f(\mathbb{B}^n)}$. Moreover, if $0 \in f(\mathbb{B}^n)$, then the above definition reduces to the usual definition of spiral-likeness (respectively star-likeness) (see [33] and [59]).

We next present some applications of Theorem 5.2 to the case $M = \mathbb{B}^n$. The first result provides necessary and sufficient conditions for a locally univalent mapping on $\mathbb{B}^n$ to be spiral-shaped, and thus univalent on $\mathbb{B}^n$.

Remark 7.3. We remark that the equivalence between the conditions (i) and (iv) in Theorem 7.4 below was first obtained by Elin, Reich and Shoikhet (see the proof of [17, Proposition 3.5.2]; cf. [17, Proposition 3.7.2]; [55]) by different arguments (compare [16]). In the case $f(0) = 0$, the analytic characterization of spiral-likeness (6) is due to Gurganus [33] and Suffridge [59].

Theorem 7.4. *Let $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}^n$ be a locally univalent mapping such that $0 \in \overline{f(\mathbb{B}^n)}$. Also let $A \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ be such that $m(A) > 0$. Then the following conditions are equivalent:*

(i) *f is spiral-shaped with respect to A;*

(ii) *The family $(f_t := e^{tA} f(z))_{t \geq 0}$ is an L^∞-Loewner chain.*

(iii) *$G(z, t) = -[Df(z)]^{-1} A f(z)$ is a Herglotz vector field of order ∞.*

(iv) *f is univalent on $\mathbb{B}^n$ and*

$$\mathsf{Re}\, \langle [Df(z)]^{-1} A f(z), z \rangle \geq (1 - \|z\|^2) \mathsf{Re}\, \langle [Df(0)]^{-1} A f(0), z \rangle, \quad z \in \mathbb{B}^n. \tag{6}$$

We next give the following analytic characterization of star-shapedness on $\mathbb{B}^n$ (cf. [17]). In the case $f(0) = 0$, the inequality in (iv) becomes the well known analytic characterization of star-likeness on $\mathbb{B}^n$ (see [20], [32], [59] and the references therein). Necessary and sufficient conditions for star-likeness with respect to a boundary point are given in P. Liczberski, V.V. Starkov [45].

Corollary 7.5. *Let $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}^n$ be a locally univalent mapping such that $0 \in \overline{f(\mathbb{B}^n)}$. Then the following conditions are equivalent:*

(i) *f is star-shaped;*

(ii) *The family $(f_t := e^t f(z))_{t \geq 0}$ is an L^∞-Loewner chain.*

(iii) *$G(z, t) = -[Df(z)]^{-1} f(z)$ is a Herglotz vector field of order ∞.*

(iv) *f is univalent on $\mathbb{B}^n$ and*

$$\mathsf{Re}\, \langle [Df(z)]^{-1} f(z), z \rangle \geq (1 - \|z\|^2) \mathsf{Re}\, \langle [Df(0)]^{-1} f(0), z \rangle, \quad z \in \mathbb{B}^n.$$

From Theorem 6.1 and Corollary 7.5, we obtain the following corollary.

Corollary 7.6. *Let $Q : \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}$ be a homogeneous polynomial of degree 2 with $\|Q\| \leq 1/4$. If f is starshaped on $\mathbb{D}$, then $F = \Phi_Q(f)$ is also starshaped on $\mathbb{B}^n$ for any suitable branch of Φ_Q.*

Remark 7.7. The bound $\|Q\| \leq 1/4$ is the best possible for Corollary 7.6, for all $d \in [1, \infty]$ (see Remark 6.2).

References

[1] M. Abate, *Iteration theory of holomorphic maps on taut manifolds*, Mediterranean Press, Rende, 1989.

[2] L. Arosio, *Resonances in Loewner equations*, Adv. Math. **227** (2011), 1413-1435.

[3] L. Arosio, *Basins of attraction in Loewner equations*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **37** (2012), 563–570.

[4] L. Arosio, *Loewner equations on complete hyperbolic domains,* J. Math. Anal. Appl., **398** (2013), 609–621.

[5] L. Arosio and F. Bracci, *Infinitesimal generators and the Loewner equation on complete hyperbolic manifolds*, Anal. Math. Phys., **1** (2011), 337-350

[6] L. Arosio, F. Bracci, H. Hamada and G. Kohr, *An abstract approach to Loewner chains*, J. Anal. Math., to appear.

[7] L. Arosio, F. Bracci and E. F. Wold, *Solving the Loewner PDE in complete hyperbolic starlike domains of* $\mathbb{C}^N$, preprint.

[8] F. Bracci, M. D. Contreras and S. Díaz-Madrigal, *Evolution families and the Loewner equation II: complex hyperbolic manifolds*, Math. Ann., **344** (2009), 947–962.

[9] F. Bracci, M. D. Contreras and S. Díaz-Madrigal, *Pluripotential theory, semigroups and boundary behaviour of infinitesimal generators in strongly convex domains*, J. Eur. Math. Soc., **12** (2010), 23–53.

[10] F. Bracci, M. D. Contreras and S. Díaz-Madrigal, *Evolution families and the Loewner equation I: the unit disk*, J. Reine Angew. Math., **672** (2012), 1–37.

[11] C.H. Chu, H. Hamada, T. Honda and G. Kohr, *Starlike and convex rational mappings on infinite dimensional domains*, Math. Nachr., **282** (2009), 160–168.

[12] C.H. Chu, H. Hamada, T. Honda and G. Kohr, *Distortion theorems for convex mappings on homogeneous balls*, J. Math. Anal. Appl., **369** (2010), 437–442.

[13] M. D. Contreras, S. Díaz-Madrigal and P. Gumenyuk, *Loewner chains in the unit disk*, Rev. Mat. Iberoamericana, **26** (2010), 975–1012.

[14] P. Duren, I. Graham, H. Hamada, and G. Kohr, *Solutions for the generalized Loewner differential equation in several complex variables*, Math. Ann. **347** (2010) 411–435.

[15] P. Duren, H. Hamada and G. Kohr, *Two-point distortion theorems for harmonic and pluriharmonic mappings*, Trans. Amer. Math. Soc., **363** (2011), 6197–6218.

[16] M. Elin, S. Reich and D. Shoikhet, *Holomorphically accretive mappings and spiral-shaped functions of proper contractions*, Nonlinear Anal. Forum, **5** (2000), 149–161.

[17] M. Elin, S. Reich and D. Shoikhet, *Complex dynamical systems and the geometry of domains in Banach spaces*, Dissertationes Mathematicae, **427** (2004), 1–62.

[18] J. E. Fornæss and N. Sibony, *Increasing sequences of complex manifolds.* Math. Ann. **255** (1981), 351–360.

[19] J. E. Fornaess and B. Stensønes, *Stable manifolds of holomorphic hyperbolic maps*, Internat. J. Math. **15** (2004), 749–758

[20] S. Gong, *Convex and starlike mappings in several complex variables*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.

[21] I. Graham, H. Hamada and G. Kohr, *Parametric representation of univalent mappings in several complex variables*, Canadian J. Math., **54** (2002), 324–351.

[22] I. Graham, H. Hamada and G. Kohr, *On subordination chains with normalization given by a time-dependent linear operator*, Complex Anal. Operator Theory, **5** (2011), 787–797.

[23] I. Graham, H. Hamada and G. Kohr, *Extension operators and subordination chains*, J.

Math. Anal. Appl., **386** (2012), 278–289.

[24] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr and M. Kohr, *Parametric representation and asymptotic starlikeness in* $\mathbb{C}^n$, Proc. Amer. Math. Soc., **136** (2008), 3963–3973.

[25] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, and M. Kohr, *Asymptotically spirallike mappings in several complex variables*, J. Anal. Math., **105** (2008), 267–302.

[26] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, and M. Kohr, *Spirallike mappings and univalent subordination chains in* $\mathbb{C}^n$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa-Cl. Sci., **7** (2008), 717–740.

[27] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr and M. Kohr, *Extreme points, support points and the Loewner variation in several complex variables*, Sci. China Math., **55** (2012), 1353–1366.

[28] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, and M. Kohr, *Univalent subordination chains in reflexive complex Banach spaces*, Proceedings of Complex Analysis and Dynamical Systems V, to appear.

[29] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, and M. Kohr, *Asymptotically spirallike mappings in reflexive complex Banach spaces*, Complex Anal. Oper. Theory , to appear.

[30] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, and M. Kohr, *Extremal properties associated with univalent subordination chains in* $\mathbb{C}^n$, submitted.

[31] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr and J. A. Pfaltzgraff, *Convex subordination chains in several complex variables*, Canad. J. Math. **61** (2009), 566–582.

[32] I. Graham and G. Kohr, *Geometric function theory in one and higher dimensions*, Marcel Dekker Inc., New York, 2003.

[33] K. Gurganus, Φ*-like holomorphic functions in* $\mathbb{C}^n$ *and Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **205** (1975), 389–406.

[34] H. Hamada, *Polynomially bounded solutions to the Loewner differential equation in several complex variables*, J. Math. Anal. Appl., **381** (2011), 179–186.

[35] H. Hamada and T. Honda, *Sharp growth theorems and coefficient bounds for starlike mappings in several complex variables,* Chin. Ann. Math. Ser.B, **29** (2008), 353–368.

[36] H. Hamada, T. Honda and G. Kohr, *Linear invariance of locally biholomorphic mappings in the unit ball of a JB***-triple*, J. Math. Anal. Appl., **385** (2012), 326–339.

[37] H. Hamada, T. Honda and G. Kohr, *Trace-order and a distortion theorem for linearly invariant families on the unit ball of a finite dimensional JB***-triple*, J. Math. Anal. Appl., **396** (2012), 829–843.

[38] H. Hamada and G. Kohr, Φ*-like and convex mappings in infinite dimensional spaces*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl.. **47** (2002), 315–328.

[39] H. Hamada and G. Kohr, *On some classes of bounded univalent mappings in several complex variables*, Manuscripta Math., **131** (2010), 487–502.

[40] H. Hamada and G. Kohr, *Univalence criterion and quasiconformal extension of holomorphic mappings*, Manuscripta Math., to appear.

[41] H. Hamada, G. Kohr, P. T. Mocanu and I. Şerb, *Convex subordination chains and injective mappings in* $\mathbb{C}^n$, J. Math. Anal. Appl., **364** (2010), 32–40.

[42] H. Hamada, G. Kohr and J. R. Muir, *Extension of* L^d*-Loewner chains to higher dimensions*, J. Anal. Math., to appear.

[43] S. Kobayashi, *Hyperbolic complex spaces*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 318, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[44] P.P. Kufarev, *On one-parameter families of analytic functions*, Mat. Sb. **13** (1943), 87–118 (in Russian).

[45] P. Liczberski and V.V. Starkov, *Starlikeness with respect to a boundary point and*

Julia's theorem in $\mathbb{C}^n$. J. Math. Anal. Appl. **366** (2010), no. 1, 360–366.

[46] N. Lloyd, *Degree theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1978.

[47] C. Loewner, *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises*, Math. Ann., **89** (1923), 103–121.

[48] J.R. Muir Jr., *A modification of the Roper-Suffridge extension operator*, Comput. Meth. Funct. Theory **5** (2005), 237–251.

[49] J.R. Muir Jr., *A class of Loewner chain preserving extension operators*, J. Math. Anal. Appl. **337** (2008), 862–879.

[50] J.A. Pfaltzgraff, *Subordination chains and univalence of holomorphic mappings in* $\mathbb{C}^n$, Math. Ann., **210** (1974), 55–68.

[51] J.A. Pfaltzgraff, *Subordination chains and quasiconformal extension of holomorphic maps in* $\mathbb{C}^n$, Ann. Acad. Scie. Fenn. Ser. A I Math., **1** (1975), 13–25.

[52] C. Pommerenke, *Über die Subordination analytischer Funktionen*, J. Reine Angew. Math., **218** (1965), 159–173.

[53] C. Pommerenke, *Univalent functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

[54] T. Poreda, *On generalized differential equations in Banach spaces*, Dissertationes Mathematicae, **310** (1991), 1–50.

[55] S. Reich and D. Shoikhet, *Nonlinear semigroups, fixed points, and geometry of domains in Banach spaces*, Imperial College Press, London, 2005.

[56] K.A. Roper and T.J. Suffridge, *Convex mappings on the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, J. Anal. Math., **65** (1995), 333–347.

[57] W. Rudin, *Function theory in the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 241, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980.

[58] O. Schramm, *Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees*, Israel J. Math., **118** (2000), 221–288.

[59] T.J. Suffridge, *Starlikeness, convexity and other geometric properties of holomorphic maps in higher dimensions*, Lecture Notes in Math., **599**, 146–159, Springer-Verlag, 1977.

[60] M. Voda, *Solution of a Loewner chain equation in several variables*, J. Math. Anal. Appl. **375** (2011), no. 1, 58–74.