日本数学会

2012年度秋季総合分科会

函数論分科会
講演アブストラクト

2012年9月

於　九州大学

日本数学会

2012年度秋季総合分科会

函数論分科会
講演アブストラクト

2012年9月

於　九州大学

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
   函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする．

2. 委員会の任務
   (a) 函数論分科会評議員候補者を選出する．
   (b) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦．
   (c) 科研費基盤研究（審査区分（１））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼．
   (d) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる．
   (e) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する．
   (f) 分科会の行事 (たとえば， シンポジウムの開催等) について決定する．
   (g) 次期委員会委員候補者の推薦．
   (h) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する．

3. 委員会の構成及び委員の選出・任期
   (a) 委員の定数は特に定めないが 10 名程度をもって構成する．必要に応じ追加，削減できる．
   (b) 委員の任期は春季学会から２年間とする．再任は妨げないが，原則として再々任は認めない．
   (c) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う．
      i. 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する．その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する．
      ii. 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する．

4. 委員会の開催及び議決
   (a) 委員会は評議員が召集する．
   (b) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する．
   (c) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する．必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる．
   (d) 案件の議決は投票によってはならない．決定できない時は懸案事項として次回に繰越す．緊急事項については評議員に処置を一任する．

5. 函数論分科会委員会における評議員の任務
   (a) 委員会の司会をする．
   (b) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する．
   (c) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する．
   (d) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する．

付 則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する．
付 則　この規則の改正は，1996 年 8 月 1 日より施行する．

函　数　論

9月18日(火)　　第Ⅱ会場

10:00～12:00

	講演者	題目	(分)	頁
1	白石　將 (近畿大理工)♯	Extensions of Nunokawa lemma for argument properties	(15)	1
2	早味俊夫 (近畿大理工)♯	A sufficient condition for p-valently harmonic functions	(15)	3
3	伊藤　翼 (北大理)♯	Modulus of continuity of p-Dirichlet solutions in a metric measure space	(15)	5
4	米田力生 (小樽商大)*	Toeplitz and Hankel operators on the Bergman spaces with closed range	(15)	7
5	前田文之 (広島大)* 水田義弘 (広島工大工) 大野貴雄 (大分大教育福祉) 下村　哲 (広島大教育)	Approximate identities and Young type inequalities in Musielak–Orlicz spaces	(15)	9

14:30～16:15

	講演者	題目	(分)	頁
6	四之宮佳彦 (東工大理工)♯	Veech holomorphic families of Riemann surfaces and Diophantine problems	(15)	11
7	柳下剛広 (早大理工)♯	普遍タイヒミュラー空間の部分空間におけるタイヒミュラー距離と小林距離について	(15)	13
8	宮地秀樹 (阪大理)♯	A Characterization of biholomorphic automorphisms of Teichmüller space	(15)	15
9	小森洋平 (早大教育)♯	On growth rates of 3-dimensional hyperbolic Coxeter prisms	(15)	17
10	松崎克彦 (早大教育)♯	円周の微分同相写像群のメビウス群への共役	(15)	19

16:30～17:30　特別講演

	講演者	題目	(分)	頁
	須川敏幸 (東北大情報)♯	シュワルツ微分の一般化 —不変化と高階化を目指して—		21

9月19日(水)　　第Ⅱ会場

10:00～12:00

	講演者	題目	(分)	頁
11	王　艶艶 (名大多元数理)*	明示的に与えられたある平面領域族の Bergman 核の変動	(20)	31
12	菊田　伸 (上智大理工)	制限型 Carathéodory 擬体積形式について (訂正)	(20)	33
13	濵野佐知子 (福島大人間発達文化)♯	Schiffer span と harmonic span が導く負曲率計量の多変数的変動	(15)	35
14	P. Duren (Univ. of Michigan)♯ 濱田英隆 (九州産大工) G. Kohr (Babeş-Bolyai Univ.)	Two-point distortion theorems for harmonic and pluriharmonic mappings	(15)	37
15	I. Graham (Univ. of Toronto)♯ 濱田英隆 (九州産大工) G. Kohr (Babeş-Bolyai Univ.)	Extension operators and subordination chains	(15)	39

Complex Analysis

September 18th (Tue) Conference Room II

September 19th (Wed) Conference Room II

Extensions of Nunokawa lemma for argument properties

Hitoshi Shiraishi (Kinki University)

1 Introduction

Let $\mathcal{H}[a_0, n]$ denote the class of functions $p(z)$ of the form

$$p(z) = a_0 + \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ for some $a_0 \in \mathbb{C}$ and a positive integer n. If $p(z) \in \mathcal{H}[a_0, n]$ satisfies

$$|\arg(p(z))| < \frac{\pi}{2}\mu \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some real $0 < \mu \leqq 1$, then we say that $p(z)$ belongs to the class $\mathcal{STH}[a_0, n](\mu)$.

The basic tool in proving our results is the following lemma due to Miller and Mocanu [1] (also [2]).

Lemma 1. *Let the function $w(z)$ definded by*

$$w(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \cdots \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

be analytic in $\mathbb{U}$ with $w(0) = 0$. If $|w(z)|$ attains its maximum value on the circle $|z| = r$ at a point $z_0 \in \mathbb{U}$, then there exists a real number $m \geqq n$ such that

$$\frac{z_0 w'(z_0)}{w(z_0)} = m.$$

2 Main result

Applying Lemma 1, we derive the following result.

Lemma 2. *Let $p(z) \in \mathcal{H}[a_0, n]$ for some real $a_0 > 0$ and suppose that there exists a point $z_0 \in \mathbb{U}$ such that*

$$\mathrm{Re}(p(z)) > 0 \quad for \quad |z| < |z_0|$$

and $p(z_0) = \beta i$ is a pure imagenary number for some real $\beta \neq 0$.

Then we have

$$\frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} = il$$

where

$$l \geqq \frac{n}{2}\left(\frac{a_0}{\beta} + \frac{\beta}{a_0}\right) \geqq n \qquad (\beta > 0)$$

and

$$l \leqq \frac{n}{2}\left(\frac{a_0}{\beta} + \frac{\beta}{a_0}\right) \leqq -n \qquad (\beta < 0).$$

Using Lemma 2, we obtain Theorem 1.

Theorem 1. *If $p(z) \in \mathcal{H}[a_0, n]$ for some real $a_0 > 0$ and a positive integer $n \geqq 2$ satisfies $p(z) \neq 0$ for $z \in \mathbb{U}$ and satisfies*

$$|\arg(p(z) - zp'(z))| < \arctan(n\mu) - \frac{\pi}{2}\mu \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some real number $0 < \mu \leqq \sqrt{\dfrac{2n-\pi}{n^2\pi}} < 1$, then $p(z) \in \mathcal{STH}[a_0, n](\mu)$.

References

[1] S. S. Miller and P. T. Mocanu, *Second-order differential inequalities in the complex plane*, J. Math. Anal. Appl. **65**(1978), 289-305.

[2] S. S. Miller and P. T. Mocanu, *Differential Subordinations*, Theory and Applications. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 225. Marcel Dekker, Inc., New York, 2000.

[3] M. Nunokawa, *On propeties of non-Carathéodory functions*, Proc. Japan Acad., Ser. A **68** (1992), 152–153.

[4] M. Nunokawa, S. Owa, N. Uyanik and H. Shiraishi, *Sufficient conditions for starlikeness of order α for meromorphic functions*, Math. Comput. Modelling. **55** (2012), 1245–1250.

A sufficient condition for p-valently harmonic functions

Toshio Hayami (Kinki University)

For a fixed p ($p = 1, 2, 3, \cdots$), a meromorphic function $f(z)$ in a domain $\mathbb{D}$ is said to be p-valent in $\mathbb{D}$ (or multivalent of order p in $\mathbb{D}$) if for each w_0 (infinity included) the equation $f(z) = w_0$ has at most p roots in $\mathbb{D}$ where the roots are counted in accordance with their multiplicity and if there is some w_1 such that the equation $f(z) = w_1$ has exactly p roots in $\mathbb{D}$. In particular, $f(z)$ is said to be univalent (one-to-one) in $\mathbb{D}$ when $p = 1$.

A complex-valued harmonic function $f(z)$ in $\mathbb{D}$ is given by $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ where $h(z)$ and $g(z)$ are analytic in $\mathbb{D}$. We call $h(z)$ and $g(z)$ the analytic part and co-analytic part of $f(z)$, respectively. A necessary and sufficient condition for $f(z)$ to be locally univalent and sense-preserving in $\mathbb{D}$ is $|h'(z)| > |g'(z)|$ for all $z \in \mathbb{D}$ (see [1] or [5]). Let $\mathcal{H}(p)$ denote the class of functions $f(z)$ of the from

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=p}^{\infty} b_n z^n}$$

which are harmonic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. We next denote by $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}(p)$ the class of functions $f(z) \in \mathcal{H}(p)$ which are p-valent and sense-preserving in $\mathbb{U}$. Then, we say that $f(z) \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}(p)$ is a p-valently harmonic function in $\mathbb{U}$.

In the present talk, we consider the following sufficient condition on $h(z)$ for $f(z) \in \mathcal{H}(p)$, satisfying $g'(z) = z^{m-1}h'(z)$ $(m = 2, 3, 4, \cdots)$, to be in the class $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}(p)$.

Theorem 1 *Let $h(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n$ be analytic in the closed unit disk $\overline{\mathbb{U}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqq 1\}$ with $H(z) = h'(z)/z^{p-1} \neq 0$ $(z \in \overline{\mathbb{U}})$ and let*

$$F(t) = (2p + m - 1)t + 2\arg\left(H(e^{it})\right) \qquad (-\pi \leqq t < \pi), \quad m = 2, 3, 4, \cdots.$$

If for each $k \in K = \left\{0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm\left[\frac{2p+m+1}{2}\right]\right\}$ where $[\ ]$ is the Gauss symbol, the equation $F(t) = 2k\pi$ has at most a single root in $[-\pi, \pi)$ and for all $k \in K$ there exist exactly $2p + m - 1$ such roots in $[-\pi, \pi)$, then the harmonic function $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ with $g'(z) = z^{m-1}h'(z)$ belongs to the class $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}(p)$ and maps $\mathbb{U}$ onto a domain surrounded by several concave curves with $2p + m - 1$ cusps.

By the process of proving the above theorem, we obtain the following.

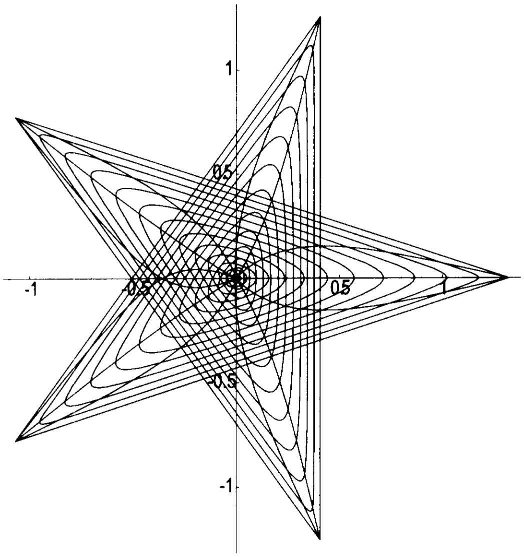
Example *The function*

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = \int_0^z \frac{pt^{p-1}}{1+t^{2p+m-1}}dt + \overline{\int_0^z \frac{pt^{p+m-2}}{1+t^{2p+m-1}}dt}$$

is a member of the class $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}(p)$ *and the image* $f(\mathbb{U})$ *is a domain surrounded by several straight lines with* $2p+m-1$ *cusps. In particular, putting* $p=2$ *and* $m=2$, *we know that*

$$f(z) = \int_0^z \frac{2t}{1+t^5}dt + \overline{\int_0^z \frac{2t^2}{1+t^5}dt}$$

is a 2*-valently harmonic function and maps* $\mathbb{U}$ *onto the following domain.*



References

[1] J. Clunie and T. Sheil-Small, *Harmonic univalent functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **9**(1984), 3–25.

[2] P. L. Duren, *Harmonic Mappings in the Plane*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[3] A. W. Goodman, *Univalent Functions, Vol. I and Vol. II*, Mariner Publishing Company, Tampa, Florida (1983).

[4] T. Hayami and S. Owa, *Hypocycloid of* $n+1$ *cusps harmonic function*, Bull. Math. Anal. Appl. **3**(2011), 239–246.

[5] H. Lewy, *On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **42**(1936), 689–692.

Modulus of continuity of p -Dirichlet solutions in a metric measure space

伊藤 翼 (北海道大学大学院理学院) *

$X = (X, d, \mu)$ を完備連結な距離測度空間とし，d は X 上の距離，μ は X 上の正則 Borel 測度で，任意の有界開集合 U に対して $0 < \mu(U) < \infty$ を満たすとする．X 上の微分として **upper gradient** と呼ばれる勾配 ∇ の概念を一般化したものを考える．また X 上の p-調和関数を p-Dirichlet 積分の **minimizer** として定義する．このとき X 内の領域 Ω 上で p-Dirichlet 問題，すなわち領域内で p-調和となり，与えられた境界関数と一致する関数を見つける問題を考える．

X は 2 倍条件と $(1,p)$-Poincaré 不等式 $(1 < p < \infty)$ を満たすと仮定する．このとき Euclid 空間の場合と同様に Perron 解を構成することができ，f を $\partial\Omega$ 上の関数として，$\mathcal{P}_\Omega f$ を f に対する Ω 上の Perron 解とする．Ω が正則であるとき，$\partial\Omega$ 上の連続関数 f に対して $\mathcal{P}_\Omega f$ は Ω 上 p-調和で $\overline{\Omega}$ 上連続になることが知られている．ここで次の問題が考えられる．

問題． f が良い連続性を持つとき，$\mathcal{P}_\Omega f$ も良い連続性を持つのか？

Aikawa-Shanmugalingam[2] の中で連続性として Hölder 連続性を考えて Ω の特徴付けを行っている．また Aikawa[1] では Euclid 空間上の通常の Dirichlet 解において，より一般の連続性を扱っている．

実数 α, β が $0 < \alpha < 1, \beta \in \mathbb{R}$ または $\alpha = 0, \beta > 0$ を満たすとする．$t_0 > 0$ に対して関数 $\psi_{\alpha\beta}$ を

$$\psi_{\alpha\beta}(t) = \begin{cases} t^\alpha(-\log t)^{-\beta} & \text{for } 0 < t < t_0, \\ t_0^\alpha(-\log t_0)^{-\beta} & \text{for } t \geq t_0. \end{cases}$$

とし，t_0 を十分小さくとると $\psi_{\alpha\beta}$ は凹関数となる．X 上の関数 f が $\psi_{\alpha\beta}$-Hölder 連続であるとは $|f(x) - f(y)| \leq C\psi_{\alpha\beta}(d(x,y))$ を満たすときをいう．良い連続性として $\psi_{\alpha\beta}$-Hölder 連続を考える．

$E \subset X$，E 上の有界連続関数 f に対して

$$\|f\|_{\psi_{\alpha\beta},E} = \sup_{x\in E}|f(x)| + \sup_{\substack{x,y\in E \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{\psi_{\alpha\beta}(d(x,y))}$$

* 日本学術振興会特別研究員 DC2

と定義し，$\|f\|_{\psi_{\alpha\beta},E} < \infty$ となるもの全体を $\Lambda_{\psi_{\alpha\beta}}(E)$ と書くことにする．

また作用素ノルムを

$$\|\mathcal{P}_\Omega\|_{\psi_{\alpha\beta}} = \sup_{\substack{f\in\Lambda_{\psi_{\alpha\beta}}(\partial\Omega)\\ f\neq 0}} \frac{\|\mathcal{P}_\Omega f\|_{\psi_{\alpha\beta},\Omega}}{\|f\|_{\psi_{\alpha\beta},\partial\Omega}}$$

と定義する．$\|\mathcal{P}_\Omega\|_{\psi_{\alpha\beta}} < \infty$ となる領域 Ω を特徴付ける．

定義． $E \subset \Omega$ が p-容量密度条件 **(capacity density condition ;** *p-CDC*) を満たすとは，ある正定数 C と r_0 が存在して

$$\frac{\mathrm{Cap}_p(E\cap B(x,r), B(x.2r))}{\mathrm{Cap}_p(B(x,r), B(x,2r))} \geq C$$

が任意の $x \in E$，$0 < r < r_0$ に対して成り立つこととする．ここで $\mathrm{Cap}_p(\cdot,\cdot)$ は p-相対容量とする．

条件 $\|\mathcal{P}_\Omega\|_{\psi_{\alpha\beta}} < \infty$ と p-容量密度条件に対して次の２つの定理が成り立つ．

定理 1. Ω を有界正則領域とする．

(i) $X\setminus\Omega$ が *p-CDC* を満たすとき，ある定数 $\alpha_1 > 0$ が存在して任意の $0 < \alpha < \alpha_1$，$\beta\in\mathbb{R}$ に対して $\|\mathcal{P}_\Omega\|_{\psi_{\alpha\beta}} < \infty$ が成り立つ．

(ii) 逆にある定数 $\alpha > 0$，$\beta\in\mathbb{R}$ に対して $\|\mathcal{P}_\Omega\|_{\psi_{\alpha\beta}} < \infty$ が成り立つと仮定する．さらに X が *Ahlfors Q*-正則 ($p \leq Q$) とすると，$X\setminus\Omega$ は *p-CDC* を満たす．ここで X が *Ahlfors Q*-正則であるとはある正定数 C が存在して

$$C^{-1}r^Q \leq \mu(B(x,r)) \leq Cr^Q$$

が任意の $x\in X$，$r > 0$ に対して成り立つこととする．

定理 2. Ω を有界正則領域とする．$X\setminus\Omega$ が *p-CDC* を満たすとき，任意の $\beta > 0$ に対して $\|\mathcal{P}_\Omega\|_{\psi_{0\beta}} < \infty$ が成り立つ．

本報告の結果は [3] による．[3] ではより一般の連続性に関して特徴付けを行なっている．

参考文献

[1] H. Aikawa, *Modulus of continuity of the Dirichlet solutions*, Bull. London Math. Soc. **42** (2010), no. 5, 857–867.

[2] H. Aikawa and N. Shanmugalingam, *Hölder estimates of p-harmonic extension operators*, J. Differential Equations **220** (2006), no. 1, 18–45.

[3] T. Itoh, *Modulus of continuity of p-dirichlet solutions in a metric measure space*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. Math. **37** (2012), no. 2.

Toeplitz and Hankel operators on the Bergman spaces with closed range

Rikio Yoneda (Otaru University of Commerce)

Let D be the open unit disk in complex plane C. For $z, w \in D$, and $0 < r < 1$, let $\varphi_w(z) = \frac{w - z}{1 - \overline{w}z}$ and $\rho(z, w) = \left|\frac{w - z}{1 - \overline{w}z}\right|$ and $D(w, r) = \left\{z \in D, \rho(w, z) < r\right\}$. Let $H(D)$ be the space of all analytic functions on D.

For $\alpha > -1$ and $p \geq 1$, the space $L^p\left((1 - |z|^2)^\alpha dA(z)\right)$ is defined to be the space of Lebesgue measurable functions f on D such that

$$\left\{\int_D |f(z)|^p(\alpha + 1)(1 - |z|^2)^\alpha dA(z)\right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

where $dA(z)$ denote the area measure on D. The weighted Bergman space $L_a^p\left((1 - |z|^2)^\alpha dA(z)\right)$ is defined by

$$L_a^p\left((1 - |z|^2)^\alpha dA(z)\right) = H(D) \cap L^p\left((1 - |z|^2)^\alpha dA(z)\right).$$

For $g \in L^2(dA(z))$ and $p > 1$, the Hankel operator H_g with symbol g is defined on $L_a^p(dA(z))$ by

$$H_g f = (I - P)(gf),$$

where $P(f)(z) = \int_D \frac{f(w)}{(1 - \overline{w}z)^2} dA(w)$.

For $g \in L^2(dA(z))$ and $p > 1$, the Toeplitz operator T_g with symbol g is defined on $L_a^p(dA(z))$ by

$$T_g f = P(gf),$$

In [2] S.Axler characterize the boundedness and the compactness of Hankel operator on the Bergman space.

Theorem. *Let $g \in L_a^2(dA(z))$. Then $H_{\overline{g}}$ is bounded (compact)if and only if $g \in \mathcal{B}$ ($g \in \mathcal{B}_0$), respectively.*

In this research, we study the Hankel operators on the Bergman spaces with the closed range :

Theorem. *Let* $g \in \mathcal{B}$, $p > 2$ *and* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *and that* $0 < \delta < \frac{1}{1+\sqrt{\frac{2}{q}}}(< 1)$. $H_{\overline{g}}$ *is bounded below on* $L^p_a(dA(z))$ *if and only if there is* $\epsilon > 0$ *such that for any* $w \in D$ *there is* $z_w \in D$ *such that* $z_w \in D(w, \frac{\delta}{8})$ *and* $(1 - |z_w|^2)|g'(z_w)| \geq \epsilon$.

And we will talk about Toeplitz on the Bergman spaces with closed range.

References

[1] A.Aleman and A.G.Siskakis, Integration operators on Bergman spaces, indiana Univ.Math.J.46(1997),337-356.

[2] S.Axler, The Bergman space, the Bloch space, and commutators of multiplication operators, Duke Math.J.53(1986),315-331.

[3] Paul S.Bourdon, Similarity of parts to the whole for certain multiplication opera tors, Proc.Amer.Math.Soc.99(1987),563-567.

[4] J.Bonet, P.Domanski, M.Lindstrom, Pointwise multiplication operators on weighted Banach spaces of analytic function, Studia Math. 137(1999),177-194.

[5] L.Carleson, An interpolation problem for bounded analytic functions, Amr.J.Math. 80(1958),921-930.

[6] P.Duren, A.Schuster , Bergman Spaces, American Mathematical Society, Provi dence, 2004.

[7] P.Ghatage and D.Zheng and Nina Zorboska, Sampling sets and closed range composition operators on the Bloch space, Proceedings of the Amer.Math.Soc.133, 5(2004), 1371-1377.

[8] J.B.Garnett and D.Marshall, Harmonic Measure, Cambridge University Press, 2005.

[9] J.Bonet, P.Domanski, M.Lindstrom, Pointwise multiplication operators on weighted Banach spaces of analytic function, Studia Math. 137(1999),177-194.

[10] H.Hedenmalm and B.Korenblum and K.Zhu, Theory of Bergman Spaces, Springer -Verlag, New York.

[11] D.Leucking, Inequalities on Bergman spaces, Illinois J.Math.25(1981), 1-11.

[12] G.McDonald and C.Sundberg, Toeplitz operators on the disc, indiana Univ.Math.J. 28(1979),595-611.

[13] S.C.Power, Hankel operators on Hilbert space, Pitman Advanced Publishing Program.

[14] K.Seip, Beuring type density theorems in the unit disk, Invent.Math.113(1993),21-39.

[15] K.Zhu, Operator Theory in Function Spaces, American Mathematical Society, Providence, 2007.

Approximate identities and Young type inequalities in Musielak-Orlicz spaces

前田 文之　広島大学名誉教授
水田 義弘　広島工業大学・工学部
大野 貴雄　大分大学・教育福祉科学部
下村 哲　広島大学大学院・教育学研究科

$\mathbf{R}^N$ 上の可積分関数 κ と $t > 0$ に対して，$\kappa_t(x) = t^{-N}\kappa(x/t)$ とする．

(1) $\int_{\mathbf{R}^N} \kappa(x)\,dx = 1$ ならば，関数族 $\{\kappa_t\}$ を approximate identity と呼ぶ．

(2) $\hat{\kappa}(x) = \sup_{|y|\ge|x|} |\kappa(y)|$ が可積分関数ならば，関数族 $\{\kappa_t\}$ はポテンシャルタイプであるという．

次の事実はよく知られている．

定理 A. $1 \le p < \infty$, 関数族 $\{\kappa_t\}$ を ポテンシャルタイプ approximate identity とすると $f \in L^p(\mathbf{R}^N)$ ならば，$\{\kappa_t * f\}$ は f に $L^p(\mathbf{R}^N)$ において収束する．

本講演では，定理 A の拡張を行う．そのために，関数 $\Phi(x,t) = t\phi(x,t)$ は次を満たすものを考える：

(Φ1) $\phi(\,\cdot\,,t)$ は $\mathbf{R}^N$ 上可測関数で $\phi(x,\,\cdot\,)$ は $[0,\infty)$ 上連続関数である；

(Φ2) 定数 $A_1 \ge 1$ が存在して，$A_1^{-1} \le \phi(x,1) \le A_1 \quad (x \in \mathbf{R}^N)$；

(Φ3) $\phi(x,\cdot)$ は $\mathbf{R}^N$ 上一様仮似増加関数である．つまり，定数 $A_2 \ge 1$ が存在して，

$$\phi(x,t) \le A_2\phi(x,s) \quad (x \in \mathbf{R}^N,\ 0 \le t < s);$$

(Φ4) 定数 $A_3 \ge 1$ が存在して，$\phi(x,2t) \le A_3\phi(x,t) \quad (x \in \mathbf{R}^N,\ t > 0)$；

(Φ5) ${}^\forall\gamma > 0$ に対して，定数 $B_\gamma \ge 1$ が存在して，

$$\phi(x,t) \le B_\gamma\phi(y,t) \quad (|x-y| \le \gamma t^{-1/N},\ t \ge 1);$$

(Φ6) 関数 $g \in L^1(\mathbf{R}^N)$ $(0 \le g(x) < 1)$ と定数 $B_\infty \ge 1$ が存在して，

$$B_\infty^{-1}\Phi(x,t) \le \Phi(x',t) \le B_\infty\Phi(x,t) \quad (|x'| \ge |x|,\ g(x) \le t \le 1).$$

$\bar{\phi}(x,t) = \sup_{0 \le s \le t} \phi(x,s)$ とし，

$$\overline{\Phi}(x,t) = \int_0^t \bar{\phi}(x,r)\,dr \quad (x \in \mathbf{R}^N,\ t > 0)$$

とする．このとき，

$$\|f\|_{L^{\Phi}(\mathbf{R}^N)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{\mathbf{R}^N} \overline{\Phi}(y, |f(y)|/\lambda)dy \le 1\right\} < \infty$$

を満たす $\mathbf{R}^N$ 上の可測関数 f からなる関数空間を $L^{\Phi}(\mathbf{R}^N)$ とする ([2, 3]).

さらに，次のような $p_0 \ge 1$ をとる：

$$P = \{p \ge 1 : t \mapsto t^{-p}\Phi(x,t) \text{ は } \mathbf{R}^N \text{ 上一様仮似増加関数}\}$$

とし，$\tilde{p} = \sup P$ とする．このとき，$\tilde{p} \in P$ ならば $p_0 = \tilde{p}$ とし，$\tilde{p} \notin P$ ならば $1 < p_0 < \tilde{p}$ とする．

定理. 関数族 $\{\kappa_t\}$ を approximate identity とする．さらに，κ は次のどちらかを満たすとする:

(1) 関数族 $\{\kappa_t\}$ はポテンシャルタイプ;

(2) $\kappa \in L^{(p_0)'}(\mathbf{R}^N)$ で, κ の台はコンパクト.

このとき，$f \in L^{\Phi}(\mathbf{R}^N)$ ならば，$\{\kappa_t * f\}$ は f に $L^{\Phi}(\mathbf{R}^N)$ において収束する．つまり

$$\lim_{t \to 0} \|\kappa_t * f - f\|_{L^{\Phi}(\mathbf{R}^N)} = 0.$$

また，本講演では $L^{\Phi}(\mathbf{R}^N)$ ノルムに対する Young 型 の不等式についても紹介をする．

参考文献

[1] F-Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Approximate identities and Young type inequalities in Musielak-Orlicz spaces, preprint.

[2] F-Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Boundedness of maximal operators and Sobolev's inequality on Musielak-Orlicz-Morrey spaces, to appear in Bull. Sci. Math.

[3] J. Musielak, Orlicz Spaces and Modular Spaces, Lecture Notes in Math. **1034**, Springer-Verlag, 1983.

Veech holomorphic families of Riemann surfaces and Diophantine problems

Yoshihiko Shinomiya (Tokyo Institute of Technology)*

1. Introduction

Let X be a Riemann surface of type (g, n) $(3g-3+n>0)$. A flat surface (X, u) with critical points on C is a pair of a Riemann surface X and an atlas $u = \{(U, z)\}$ on $X \setminus C$ such that the transition functions are of the form $w = \pm z + c$. A self-homeomorphism h of X is called an affine map of (X, u) if, for any (U, z), $(V, w) \in u$ with $h(U) \subset V$, $w \circ h \circ z^{-1}$ has the form $w = Az + c$ for some $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ and $c \in \mathbb{R}^2$. The affine group $\mathrm{Aff}^+(X, u)$ of (X, u) is the group of all affine maps of (X, u). For each affine map $h \in \mathrm{Aff}^+(X, u)$, the derivatives "$A$" of affine maps $w \circ h \circ z^{-1} = Az + c$ are uniquely determined up to the sign. Thus, there exists the homomorphism $D : \mathrm{Aff}^+(X, u) \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ which maps h to its derivatives. The Veech group $\Gamma(X, u)$ of (X, u) is the image of the map D.

Veech [2] showed that there exists a holomorphic and locally-isometric embedding $\Phi : \mathbb{H}/\overline{\Gamma}(X, u) \to \mathcal{M}\ (g, n)$. Here, $\overline{\Gamma}(X, u)$ is the mirror of the Veech group $\Gamma(X, u)$ and $\mathcal{M}\ (g, n)$ is the moduli space of Riemann surfaces of type (g, n) with the Teichmüller metric. Such embeddings give us holomorphic families of Riemann surfaces. A holomorphic family of Riemann surfaces of type (g, n) over B is a triple (M, π, B) of a complex 2-manifold M, a hyperbolic Riemann surface B, and a holomorphic map $\pi : M \to B$ such that each fiber $X_t = \pi^{-1}(t)$ is a Riemann surface of type (g, n) and the induced map $B \ni t \mapsto X_t \in \mathcal{M}\ (g, n)$ is holomorphic. Set B to be $\mathbb{H}/\overline{\Gamma}(X, u)$ with all its cone points removed,

$$M = \bigcup_{t \in B} \Phi(t) = \{(t, p) |\ t \in B, p \in \Phi(t)\}, \text{ and}$$

$$\pi : M \ni (t, p) \mapsto t \in B.$$

Then the triple (M, π, B) is a holomorphic family of Riemann surface.

Definition 1. We call such holomorphic families of Riemann surfaces Veech holomorphic families of Riemann surfaces.

Remark. Let $\iota : \mathbb{H} \to T(X)$ be a lift of a holomorphic and locally-isometric embedding $\Phi : \mathbb{H}/\overline{\Gamma}(X, u) \to \mathcal{M}\ (g, n)$ as above. Then ι is a holomorphic and isometric embedding. Assume that $\iota(i) = [X, id]$. Then there exists a holomorphic quadratic differential q on X such that the Teichmüller map $f_{\hat{t}} : X \to f_{\hat{t}}(X)$ from $\iota(i)$ to $\iota(\hat{t})$ has the Beltrami coefficient $\frac{i-\hat{t}}{i+\hat{t}}\frac{|q|}{q}$.

本研究はグローバルＣＯＥ 計算世界観の深化と展開の助成を受けたものである。

*Department of Mathematics Tokyo Institute of Technology 2-12-1 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8551, JAPAN
e-mail: shinomiya.y.aa@m.titech.ac.jp

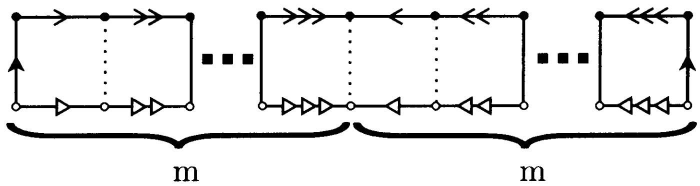
2. Results

Let (M, π, B) be a Veech holomorphic family of Riemann surfaces defined by a flat surface (X, u) and $\rho : \mathbb{H} \to \mathbb{H}/\overline{\Gamma}(X, u)$ be the branched universal covering map. For any sufficiently small connected open subset U of B, let us identify U with one of the connected component $\widehat{U}$ of $\rho^{-1}(U)$.

Theorem 2. *Let $s : B \to M$ be a holomorphic section of (M, π, B). Then there exists a point $a \in X$ with $\mathrm{Aff}^+(X, u)(\{a\}) = \mathrm{Ker}(D)(\{a\})$ such that the holomorphic section s is written as $s(\widehat{t}) = (t, f_{\widehat{t}}(a))$ on $\widehat{U}$. Here, $f_{\widehat{t}} : X \to f_{\widehat{t}}(X)$ is the Teichmüller map corresponding to each $\widehat{t} \in \widehat{U}$.*

This theorem characterize each holomorphic section of the Veech holomorphic family (M, π, B) of Riemann surfaces by a point of the flat surface (X, u).

We also give examples of Diophantine equation over function fields. A Diophantine equation corresponds to a holomorphic family of Riemann surfaces and a solution of the equation is regarded as a holomorphic section of the holomorphic family of Riemann surfaces. We construct Diophantine equations from Veech holomorphic families of Riemann surfaces which are obtained from the following flat surfaces X_m $(m \geq 2)$. All solutions of the equations are given by applying the characterization of holomorphic sections.

$X_m =$ 

Example 3. All solutions of the Diophantine equation

$$f(Z_1, Z_2, Z_3) = Z_1(Z_1^m - Z_3^m)(Z_1^m - tZ_3^m) - Z_2^2 Z_3^{2m-1} = 0 \quad (t \in \hat{\mathbb{C}})$$

are

$$[Z_1(t) : Z_2(t) : Z_3(t)] = [0 : 0 : 1], [0 : 1 : 0], [\exp(2\pi i l/m) : 0 : 1] \ (l = 1, 2, \cdots, m).$$

参考文献

[1] Y. Shinomiya. Veech holomorphic families of Riemann surfaces, holomorphic sections, and Diophantine problems. , arXiv :1202.5002.

[2] W. A. Veech. Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards. *Invent. Math.*, 97(3):553–583, 1989.

普遍タイヒミュラー空間の部分空間における タイヒミュラー距離と小林距離について

柳下　剛広　(早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻)*

タイヒミュラー空間とは、一つの曲面に導入できる、標識付きの複素構造全体を表している空間である。特に、曲面が複素単位円板 $\Delta = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ のときは普遍タイヒミュラー空間と呼ばれ、以下のように定義される。

QC を Δ 上の自己擬等角写像で $1, i, -1$ を固定するもの全体の集合とする。$f, g \in$ QC に対して、$f|_{\partial\Delta} = g|_{\partial\Delta}$ が成り立つとき、f と g はタイヒミュラー同値であるという。この同値関係による QC の商空間を普遍タイヒミュラー空間といい T で表す。$f \in$ QC で表されるタイヒミュラー同値類を $[f]$ と表す。Δ 上の恒等写像で定まるタイヒミュラー同値類を T の基点といい 0 で表す。また、ベルトラミ係数全体の集合と QC には 1 対 1 対応があるため、T はその集合の商空間とも見なせる。ベルトラミ係数 μ を代表元とするタイヒミュラー同値類を $[\mu]$ で表す。

普遍タイヒミュラー空間 T にはタイヒミュラー距離と呼ばれる距離が標準的に定まる。これは標識付きの複素構造の変形度を表わしている。タイヒミュラー距離は T 上で完備な距離となる。一方、T には複素構造が入り複素多様体となる。従って、Δ 上の双曲距離を複素多様体に対して拡張した小林擬距離が T 上で定まる。**一般に、任意の双曲型リーマン面に対して、そのタイヒミュラー空間上でのタイヒミュラー距離と小林距離は一致することが知られている。**まず種数 2 以上のコンパクトリーマン面に制限した場合を Royden [5] が示した。一般の場合は Gardiner [3] によって示された。

この命題と同様な問題が以下のように考えられる。T' を複素多様体で T への正則な埋め込み ι が存在するものとする。このとき、T' と $\iota(T')$ を同一視することにより、T' を T の部分空間として見なす。T' には上記と同様な 2 つの距離が自然に定まる。1 つは T 上のタイヒミュラー距離の T' への制限であり、もう 1 つは T' 上で定まる小林擬距離である。**このとき、この 2 つの距離が T' 上で一致するかどうかという問題が考えられる。**実際、Δ 上の自己漸近的等角写像を含むタイヒミュラー同値類全体の集合 T_0 上では、この 2 つの距離は一致する。この事実は最初に Earle, Gardiner, Lakic [2] によって示され、後に Hu, Jiang, Wang [4] がより直接的な方法で示した。本講演の目的は、彼らの議論を拡張して、タイヒミュラー距離と小林距離が一致するような T の部分距離空間の十分条件を与えることである。具体的には、以下の定理である。

主定理 T' を複素多様体で T への正則な埋め込みが存在するものとする。T' が以下の 3 条件をみたすとき、T' 上のタイヒミュラー距離 $d_{T'}$ と小林距離 $d_{K'}$ は一致する。

(1) $T' \setminus \{0\}$ は T の Strebel point 全体の集合に含まれる。

(2) 任意の $\tau \in T'$ に対して、τ に関する右変換 α_τ は T' 上の自己写像となる。

(3) 任意の $\tau \in T' \setminus \{0\}$ に対してある代表元 $\mu \in \tau$ が存在して、Δ のあるコンパクト部分集合の外で μ と一致するような任意の $\mu' \in \tau$ および任意の $t \in \Delta$ に対して、$[t\mu'] \in T'$ となる。

* 早稲田大学大学院基幹理工学研究科：〒169-8555 東京都新宿区大久保3-4-1
e-mail: m-yanagishita@asagi.waseda.jp

T の Strebel point とは、frame mapping を含むタイヒミュラー同値類のことである。 frame mapping とは、ある Δ のコンパクト部分集合の外側における最大歪曲度が、その写像を含むタイヒミュラー同値類の極値写像の最大歪曲度よりも真に小さくなる擬等角写像のことである。また条件 (2) において、 τ に関する右変換とは、 $\tau = [g]$ と表したとき、 $[f] \in T$ に対して $\alpha([f]) = [f \circ g^{-1}]$ で定まるものである。

$d_{K'} \geq d_{T'}$ は小林擬距離の縮小性によりすぐ成り立つ。逆の不等号の証明は、まず条件 (2) より任意の $\tau \in T' \setminus \{0\}$ に対して、

$$d_{K'}(0, \tau) \leq d_{T'}(0, \tau)$$

を示せばよい。 τ 内の極値写像の最大歪曲度を K_0 とおくと、 $d_{T'}(0, \tau) = \frac{1}{2}\log K_0$ と表せる。証明の方針は、以下の２つである。

1. $d_{K'}(0, \tau) \leq \frac{1}{2}\log K_n$ となる最大歪曲度の列 $\{K_n\}$ を構成する。
2. $\{K_n\}$ の部分列で K_0 に収束するものが存在する。

K_n の構成は τ 内の frame mapping を Δ の内部から修正していくことによって得られる。このときに繰り返し用いられるのが、Strebel's frame mapping theorem と呼ばれる定理である。これは、任意の Strebel point 内の極値写像は一意的に定まり、さらにその写像を具体的に表すことができるというものである。

この他に主定理を用いて、タイヒミュラー距離と小林距離が一致するような T の部分距離空間の例を紹介する。それは Δ 上のポアンカレ計量 ρ に対して２乗可積分なベルトラミ係数を含むタイヒミュラー同値類全体の集合 T_* である。ここで、ベルトラミ係数 μ が ρ に対して２乗可積分であるとは、

$$\iint_{\Delta} |\mu(z)|^2 \rho(z)^2 dxdy < \infty$$

をみたすことである。 T_* は T の可縮な部分距離空間となる。また T_* は Douady-Earle 拡張と呼ばれる特別な性質を持ったある Δ 上の自己擬等角写像で特徴付けられる ([1] 参照)。この特徴付けを利用して、 T_* 上のタイヒミュラー距離と小林距離が一致することが示される。

参考文献

[1] G. Cui, *Integrably asymptotic affine homeomorphisms of the circle and Teichmüller spaces*, Science in China Series A, **43**, 2000, 267-279.

[2] C. J. Earle, F. P. Gardiner and N. Lakic, *Asymptotic Teichmüller space, Part II : The metric structure*, Contemp. Math., **355**, 2004, 187-219.

[3] F. P. Gardiner *Approximation of infinite dimensional Teichmüller spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **282**, 1984, 367-383.

[4] J. Hu, Y. Jiang and Z. Wang, *Kobayashi's and Teichmüller's Metrics on the Teichmüller Space of Symmetric Circle Homeomorphisms*, Acta Math. Sinica. English Series, **26**, 2010, 1-9.

[5] H. L. Royden, *Automorphisms and isometries of Teichmüller space*, Advances in the theory of Riemann Surfaces (Proc. Conf., Stony Brook, N.Y., 1969), Ann. of Math. Studies, **66**, 1971, 369-383.

A CHARACTERIZATION OF BIHOLOMORPHIC AUTOMORPHISMS OF TEICHMÜLLER SPACE

HIDEKI MIYACHI (OSAKA UNIVERSITY)

1. Introduction

This is a joint work with Ryosuke Mineyama (Osaka University). For details, see [10].

1.1. **Teichmüller space and the Teichmüller distance.** Let $\Sigma_{g,m}$ be a compact oriented surface of genus g with m-holes and $2g-2+2m>0$. *Teichmüller space* $T_{g,m}$ *of Riemann surfaces of analytically finite type* (g,m) is the set of Teichmüller equivalence classes of pairs (Y,f) of Riemann surfaces Y of analytically finite type (g,m) and orientation preserving diffeomorphisms $f:\mathrm{Int}(\Sigma_{g,m})\to Y$. Two such pairs (Y_1,f_1) and (Y_2,f_2) are Teichmüller equivalent if there is a conformal mapping $h:Y_1\to Y_2$ such that $h\circ f_1$ is homotopic to f_2.

Teichmüller space $T_{g,m}$ admits a canonical distance, the so-called the *Teichmüller distance* d_T, which is defined by

$$d_T(y_1,y_2)=\frac{1}{2}\log\inf_h K(h) \tag{1.1}$$

for $y_i=(Y_i,f_i)\in T_{g,m}$, where the infimum (1.1) runs over all quasiconformal mapping $h\colon Y_1\to Y_2$ homotopic to $f_2\circ f_1^{-1}$, and $K(h)$ is the maximal dilatation of h. Teichmüller space is topologized with the Teichmüller distance. Under the topology, $T_{g,m}$ is homeomorphic to $\mathbb{R}^{6g-6+2m}$.

1.2. **The action of the extended mapping class group.** The *extended mapping class group* is, by definition, a quotient group defined by

$$\mathrm{Mcg}^*_{g,m}=\mathrm{Homeo}(\Sigma_{g,m})/\mathrm{Homeo}_0(\Sigma_{g,m}),$$

where $\mathrm{Homeo}(\Sigma_{g,m})$ is the group of homeomorphisms of $\Sigma_{g,m}$ and $\mathrm{Homeo}_0(\Sigma_{g,m})$ is a normal subgroup consisting of homeomorphisms homotopic to the identity. The *mapping class group* $\mathrm{Mcg}_{g,m}$ is a subgroup of $\mathrm{Mcg}^*_{g,m}$ consisting of equivalence classes of orientation preserving diffeomorphisms. Any element $[\omega]$ of $\mathrm{Mcg}^*_{g,m}$ acts on $T_{g,m}$ as follows. When ω is orientation preserving, we define

$$[\omega]_*(Y,f)=(Y,f\circ\omega^{-1}).$$

Suppose that ω is orientation reversing. Let $r_Y:Y\to Y^*$ be the anti-conformal mapping induced by the mirror reflection. Then, we set

$$[\omega]_*(Y,f)=(Y^*,r_Y\circ f\circ\omega^{-1}).$$

We can observe that the actions of elements of $\mathrm{Mcg}^*_{g,m}$ are isometric on $(T_{g,m},d_T)$ (cf. Masur-Wolf [8]. See also [9]). Namely, there is a natural homomorphism

$$\mathrm{Mcg}^*_{g,m}\ni[\omega]\mapsto[\omega]_*\in\mathrm{Isom}(T_{g,m},d_T). \tag{1.2}$$

It is known that the homomorphism (1.2) is an isomorphism when $(g,m) \neq (1,2)$ and $(2,0)$. When $(g,m) = (2,0)$, the homomorphism (1.2) is surjective (cf. Ivanov [4], Earle-Kra [1] and Miyachi [9]. See also Korkmaz [5] and Luo [6]).

2. Characterization of biholomorphisms

Teichmüller space $T_{g,m}$ has a canonical complex structure inherited from the complex Banach space of Bertrami differentials. The Teichmüller distance coincides with the Kobayashi hyperbolic distance under the complex structure. Therefore, any biholomorphism acts on $T_{g,m}$ isometrically. One can see that the action of any element of $\mathrm{Mcg}_{g,m}$ is biholomorphic. Hence we also have a homomorphism

$$\mathrm{Mcg}_{g,m} \ni [\omega] \mapsto [\omega]_* \in \mathrm{Aut}(T_{g,m}) \subset \mathrm{Isom}(T_{g,m}, d_T). \tag{2.1}$$

H. Royden first observed that the homomorphism (2.1) is an isomorphism when $g \geq 2$ and $m = 0$. C. Earle and I. Kra extended Royden's result to the case when $(g,m) \neq (1,2), (2,0)$. Earle and Markovic also obtained the characterization in a different way. See Royden [11], Earle-Kra [1] and Earle-Markovic [2].

In this talk, I would like to give an alternative approach of the characterization of biholomorphisms of Teichmüller space. Indeed, since the homomorphism (1.2) is surjective when $(g,m) \neq (1,2)$, any biholomorphism h on $T_{g,m}$ induces a homeomorphism h on $\Sigma_{g,m}$. We will show that the induced homeomorphism h is orientation preserving by analyzing the action of isometries by passing the Maskit embedding with the similar discussion as that in Shiga-Tanigawa [12].

References

[1] C. Earle and I. Kra, On isometries between Teichmüller spaces. Duke Math. J. **41** (1974), 583–591.

[2] C. Earle and V. Markovic, Isometries between the spaces of L^1 holomorphic quadratic differentials on Riemann surfaces of finite type, Duke Math. J. **120** (2003), no. 2, 433 440.

[3] F. Gardiner and H. Masur, Extremal length geometry of Teichmüller space. Complex Variables Theory Appl. **16** (1991), no. 2-3, 209–237.

[4] N. Ivanov, Isometries of Teichmüller spaces from the point of view of Mostow rigidity, *Topology, Ergodic Theory, Real Algebraic Geometry* (eds. Turaev, V., Vershik, A.), pp. 131–149, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol **202**, American Mathematical Society (2001)

[5] M. Korkmaz, Automorphisms of complexes of curves on punctured spheres and punctured tori, Topology and its Applications **95** (1999), 85–111.

[6] F. Luo, Automorphisms of the complexes and curves, Topology **39**, 283–298.

[7] V. Markovic, Biholomorphic maps between Teichmüller spaces, Duke Math. **120**, 405–431.

[8] H. Masur and M. Wolf, The Weil-Petersson Isometry Group, Geom. Dedicata **93** (2002), 177 190.

[9] H. Miyachi, Unification of the extremal length geometry on Teichmüller space via intersection number, preprint.

[10] R. Mineyama and H. Miyachi, A Characterization of Biholomorphic Automorphisms of Teichmüller Space, to appear in Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society

[11] H. Royden, Automorphisms and isometries of Teichmüller space, *Advances in the Theory of Riemann Surfaces* (Proc. Conf., Stony Brook, N.Y., 1969), Ann. of Math. Studies, No. **66**. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. (1971), pp. 369–383.

[12] H. Shiga and H. Tanigawa, On the Maskit coordinates of Teichmüller spaces and modular transformations, Kodai Math. J. **12** (1989), 437–443.

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University, Machikaneyama 1-1, Toyonaka, Osaka, 560-0043, Japan

E-mail address: miyachi@math.sci.osaka-u.ac.jp

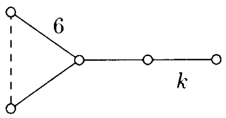
On growth rates of 3-dimensional hyperbolic Coxeter prisms

小森　洋平　(早大教育)*

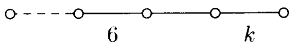
Let P be a 3-dimensional hyperbolic Coxeter prism which is combinatorially the product of a 1-simplex with a 2-simplex. Kaplinskaya [1] classified straight Coxeter prisms. When P is not straight, we can obtain P by pasting straight Coxeter prisms together along their common triangle face which is orthogonal to all their lateral faces. (cf. [3] Proposition 4.6.) Our main result is

Theorem 1. *The growth rates of 3-dimensional hyperbolic Coxeter prisms are Perron numbers.* □

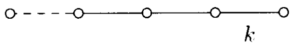
We will show a typical example below. Let P be the non-compact and non-straight Coxeter prism whose Coxeter diagram is as follows



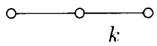
where $k \geq 7$. Then P can be obtained by glueing the non-compact straight hyperbolic Coxeter prism P_1 with Coxeter diagram



and the compact straight hyperbolic Coxeter prism P_2 with Coxeter diagram



along the hyperbolic triangle T with Coxeter diagram



Then the growth function $f_{P_1}(t)$ of P_1 can be calculated as

$$\frac{(t+1)^3(t^2-t+1)(t^2+t+1)(t^{k-1}+\cdots+t+1)}{(t-1)(2t^{k+4}+3t^{k+3}+4t^{k+2}+5t^{k+1}+6t^k+\cdots+6t^6+5t^5+3t^4+2t^3+t^2-1)}$$

by using Steiberg formula, while the growth function $f_{P_2}(t)$ of P_2 is equal to

$$\frac{(t+1)^3(t^2+1)(t^2+t+1)(t^{k-1}+\cdots+t+1)}{(t-1)(-t^{k+5}-t^{k+4}+2t^{k+2}+4t^{k+1}+5t^k+\cdots+5t^5+4t^4+2t^3-t-1)}.$$

Now P is the "amalgam" of P_1 and P_2 along T, the growth function $f_P(t)$ of P satisfies

$$\frac{1}{f_P(t)}=\frac{1}{f_{P_1}(t)}+\frac{1}{f_{P_2}(t)}-\left(\frac{1-t}{1+t}\right)\frac{1}{f_T(t)}$$

*e-mail: ykomori@waseda.jp

where $f_T(t)$ is the growth function of T

$$\frac{(t+1)^2(t^2+t+1)(t^{k-1}+\cdots+t+1)}{t^{k+3}+t^{k+2}-t^k-\cdots-t^3+t+1}.$$

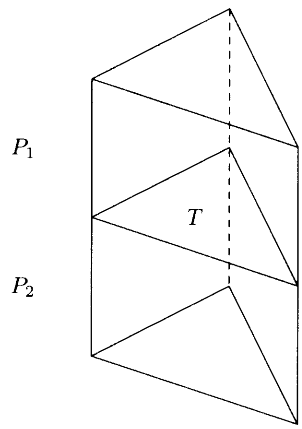
(c.f. [4] Corollary 3.1.) As a conclusion, $f_P(t)$ can be written as

$$\frac{(t+1)^3(t+1)^2(t^2-t+1)(t^2+t+1)(t^{k-1}+\cdots+t+1)}{(t-1)Q(t)}$$

where

$$\begin{aligned} Q(t) &= 2t^{k+6}+4t^{k+5}+7t^{k+4}+10t^{k+3}+12t^{k+2}+14t^{k+1} \\ &+ 15t^k+\cdots+14t^7+12t^6+9t^5+6t^4+3t^3+t^2-1. \end{aligned}$$

By means of Lemma 1 of [2], we conclude that the growth rate of $f_P(t)$ is a Perron number.



Non-straight Coxeter prism P

References

[1] I. M. Kaplinskaya, *Discrete groups generated by reflections in the faces of symplicial prisms in Lobachevskian spaces, Mat. Zametki, 15:1 (1974), 159?164.*

[2] Y. Komori and Y. Umemoto, *On the growth of hyperbolic 3-dimensional generalized simplex reflection groups, Proc. Japan Acad., 88, Ser. A (2012), 62-65.*

[3] E. B. Vinberg, *Hyperbolic reflection groups. Russian Math. Surveys 40 (1985), 31-75.*

[4] T. Zehrt and C. Zehrt-Liebendörfer, *The growth function of Coxeter garlands in* $\mathbb{H}^4$, preprint.

円周の微分同相写像群のメビウス群への共役

松崎　克彦　(早稲田大学)*

単位円周 $\mathbb{S}^1$ の向きを保つ微分同相写像からなる群 G が，メビウス変換群 $\text{Möb}(\mathbb{S}^1)$ の部分群と微分共役になるための条件について考える．Navas [1] は $\text{Diff}^3(\mathbb{S}^1)$ の部分群 G に対して，同じ滑らかさをもつ微分同相写像 $f \in \text{Diff}^3(\mathbb{S}^1)$ が存在して，$fGf^{-1} \subset \text{Möb}(\mathbb{S}^1)$ となるための条件を与えた．また，$\text{Diff}^{1+\alpha}(\mathbb{S}^1)$ $(0 < \alpha < 1)$ についても同様な結果が成り立つだろうと述べている．本講演では，タイヒミュラー空間の理論を援用することにより，次の結果が得られることを報告する．

定理 1　任意の α $(0 < \alpha < 1)$ に対して，ある定数 $c > 0$ で次をみたすものが存在する．単位円周 $\mathbb{S}^1$ の向きを保つ微分同相写像からなる（非初等的）群 G の各元 g の微分が同程度 α-ヘルダー連続性

$$|g'(x) - g'(y)| \leq c|x - y|^\alpha \qquad (\forall x, y \in \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$$

をみたすならば，G は $\text{Möb}(\mathbb{S}^1)$ の部分群と $(1+\alpha)$-級の微分同相写像 f により共役である．

なお，$\alpha > 1/2$ の場合には，定数 c に関する制約なしに，微分の同程度 α-ヘルダー連続性のみから結果がしたがうことも示される．

参考文献

[1] A. Navas, *On uniformly quasisymmetric groups of circle diffeomorphisms*, Ann. Acad. Sci. Fenn. **31** (2006), 437–462.

本研究は科研費 (課題番号:20340030) の助成を受けたものである．
2010 Mathematics Subject Classification: 30F60, 37E10
キーワード：擬対称同相写像群, シュワルツ微分
* 〒169-8050 東京都新宿区西早稲田 1-6-1 早稲田大学 教育・総合科学学術院
e-mail: matsuzak@waseda.jp
web: http://www.f.waseda.jp/matsuzak/

シュワルツ微分の一般化
～ 不変化と高階化を目指して ～

須川　敏幸　(東北大情報)*

1. 古典的なシュワルツ微分

複素1変数函数fのシュワルツ微分 (Schwarzian derivative) とは,

$$S_f = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = T_f' - \frac{1}{2}T_f^2$$

により定義される量であり，現在では複素解析学を中心として多くの分野において用いられている．ここで,

$$T_f = \frac{f''}{f'}$$

は現在ではfの前シュワルツ微分 (pre-Schwarzian derivative) と呼ばれることも多い．H. A. Schwarzによって円弧三角形の等角写像の構成 [34] やGaussの超幾何函数がいつ代数函数になるかというFuchsの問題の解決 [35] にこの量S_fが用いられたことから，Cayley [4] はSchwarzに敬意を表してこれをシュワルツ微分と名付けた．それ以後，この量は複素解析学の様々な分野で重要な役割を果たしてきた．なお，Schwarz自身は[35]において，この量はKummerが考察したものの特殊な場合であると述べているほか，自身の全集第2巻 [36] の注釈において実質的にはLagrangeが既に [15] において最初にこの量を用いていると指摘している．なお，これに関連したエピソードについては，[28] も参照のこと．

非定数有理型函数のシュワルツ微分について，次の性質が基本的である．

補題 1.1 f, gは平面領域上の非定数有理型函数とし，$f \circ g$が定義できるとする．

(i) $S_{f\circ g} = ((S_f)\circ g)(g')^2 + S_g$

(ii) $S_f = 0 \ \Leftrightarrow\ f$ はメビウス変換

(iii) 函数fは点z_0の近傍において非定数有理型とする．このとき，S_fがz_0の近傍において正則 $\Leftrightarrow$ fはz_0の近傍において単葉

この２つを組み合わせて，メビウス変換$T(w) = (aw+b)/(cw+d)$に対して

$$S_{T\circ f} = S_f, \qquad S_{f\circ T} = (S_f \circ T)(T')^2$$

を得る．

本講演の大部分はSeong-A Kim氏（東國大學校，韓国）との共同研究に基づく．また，本研究は科研費基盤(B)(課題番号:17340039, 22340025)の助成を受けたものである．
2010 Mathematics Subject Classification: Primary 30F45; Secondary 30C55, 53A30
キーワード：Schwarzian derivative, conformal metric, projective structure
*〒580-8579　仙台市青葉区荒巻字青葉6-3-09　東北大学 大学院情報科学研究科
e-mail: sugawa@math.is.tohoku.ac.jp
web: http://sugawa.cajpn.org/

シュワルツ微分は一見複雑な形をしているので，どこからこのような式が出てくるのか不思議に思う人も多い．それに対する答えの一つとして，メビウス変換 $w=(az+b)/(cz+d)$ を（a,b,c,d を任意定数とする）解の全体とするような常微分方程式を考察する方法がある．このアイデアは本質的には既に Schwarz [34, p. 116] に述べられている（原論文では式に誤植があるが，全集所載の論文 [36, p. 78] では修正されている）．また，Klein [12] の § 3.6 も参照されたい．

Cayley [4] はまた，$w=f(z)$ のシュワルツ微分を表す記号 $\{w,z\}$ を導入した．これは独立変数と従属変数を対等に扱うという立場からは便利な記号である．たとえば，f,g を局所単葉な有理型函数とし，$w=g(z),\zeta=f(w)$ とすれば，補題1.1 (i) は

$$\{z,\zeta\}d\zeta^2+\{\zeta,w\}dw^2+\{w,z\}dz^2=0$$

と書きなおすことができる．これは Cayley の巡回公式とも呼ばれている（[21]）．

シュワルツ微分は円弧多角形の写像函数の構成のほか，領域の一意化理論，実力学系などで応用されているほか，Bers によってタイヒミュラー空間論に応用された．その基となったのが Nehari の単葉性定理である．

定理 1.2 $f(z)$ を単位円板 $|z|<1$ 上の非定数有理型函数とする．もし f が単葉ならば，$(1-|z|^2)^2|S_f(z)|\le 6$ である．一方，$(1-|z|^2)^2|S_f(z)|\le 2$ ならば，f は単葉である．

前半の主張は，最初は Kraus [14] によって証明されたが，長い間忘れられていた．独立に再発見したのが Nehari [22] であったので，しばしば Kraus-Nehari の定理と呼ばれている．後半は Nehari [22] による．なお，定数の 6, 2 はそれぞれ最良である．詳しくは [16] を参照のこと．

さて，このように有用なシュワルツ微分であるので，これまで様々な方向に拡張が試みられてきた．多変数化（高次元化）については本講演では触れることができないが，たとえば Ahlfors [2], Carne [3], Osgood-Stowe [25, 26], 松本-佐々木-吉田 [18], Molzon-Mortenson [19, 20], 小林-和田 [13], 佐藤 [31], 佐々木-吉田 [30] などを参照のこと．また，シュワルツ微分の古典論については，[23], [6, Chap. 10], [24] なども有用である．

Cayley による公式：補題1.1 (i) はある種のコサイクル関係式とも見做せ，これらは適当な函数空間に作用する群のコホモロジーの計算に有用である（Ovsienko-Tabachnikov [27] などを参照のこと）．しかし，一方では，この式はシュワルツ微分を仮に2次微分とみなしたとしても，リーマン面上で大域的に定義されるわけではないことを意味している．したがって，別の拡張として，表題にもあるように大域的に定義できるような不変性を持つ類似の量を定義するという方向の拡張も考えられる．また，シュワルツ微分は3階の微分までを含む非線形の微分作用素であるが，より高階の微分まで含めてよいとなれば，もっと良い性質を持つ微分作用素が得られるかもしれない．

以下の節では，表題にあるように，主にシュワルツ微分の不変化と高階化について議論したい．そこで，次の節では Peschl-Minda による不変微分作用素について説明し，3節では Tamanoi によるシュワルツ微分の高階化について概観する．4節において，シュワルツ微分の不変な高階化を提案し，5節において射影シュワルツ微分を導入する．最後に6節において単葉性判定法への応用について述べる．

2. Peschl-Mindaの不変微分作用素

まず，標準的な場合から始めよう．以下では$\mathbb{C}_{+1}$はリーマン球面$\mathbb{C}\cup\{\infty\}$を，$\mathbb{C}_0$は複素平面$\mathbb{C}$を，そして$\mathbb{C}_{-1}$は単位円板$\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$を表すことにする．これらを同時に扱いたい時は$\mathbb{C}_\varepsilon$などと表記し，以下ではδ,εは$+1,0,-1$のいずれかを表すこととする．

$$\lambda_\varepsilon=\frac{|dz|}{1+\varepsilon|z|^2}$$

とすると，これは定曲率4εを持つ$\mathbb{C}_\varepsilon$上の等角計量となり，$\varepsilon=+1,0,-1$の場合に応じて，それぞれ球面計量，ユークリッド計量，双曲計量となっている．λ_εを$\mathbb{C}_\varepsilon$の標準計量と呼ぶことにする．$\mathbb{C}_\varepsilon$の向きと標準計量を保存する自己同相写像の全体を$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{C}_\varepsilon)$とする．$a\in\mathbb{C}_\varepsilon$に対して，

$$L_{\varepsilon,a}(\zeta)=\frac{\zeta+a}{1-\varepsilon\bar{a}z} \quad \zeta$$

とおく．ただし，$\varepsilon=+1,a=\infty$の場合は，$L_{+1,\infty}(\zeta)=-1/\zeta$と定める．これは$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{C}_\varepsilon)$の元であることがわかり，逆に任意の$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{C}_\varepsilon)$の元はこのような形の元と回転$z\mapsto e^{i\theta}z$とを合成して得られることが分かる．また，$L_{\varepsilon,a}(0)=a,\ L_{\varepsilon,a}^{-1}=L_{\varepsilon,-a}$であることも容易に確認できる．そこで，正則函数$f:\mathbb{C}_\delta\to\mathbb{C}_\varepsilon$（非定数な$f$が存在するためには$\delta\le\varepsilon$が必要）と，点$z\in\mathbb{C}_\delta$に対して，

$$(L_{\varepsilon,-f(z)}\circ f\circ L_{\delta,z})(\zeta)=\frac{f\left(\frac{\zeta+z}{1-\delta\bar{z}\zeta}\right)-f(z)}{1+\varepsilon\overline{f(z)}f\left(\frac{\zeta+z}{1-\delta\bar{z}\zeta}\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D^nf(z)}{n!}\cdot\zeta^n$$

と$\zeta=0$のまわりで展開する．ここで，$\delta=\varepsilon=0$の場合には，D^nfは通常のn階微分$f^{(n)}$に一致することに注意する．このD^nfをn位のPeschl微分と呼ぶ（Peschl [29]）．構成の仕方から，任意の$L\in\mathrm{Isom}^+(\mathbb{C}_\delta),M\in\mathrm{Isom}^+(\mathbb{C}_\varepsilon)$に対して，$|D^n(M\circ f\circ L)|=|D^nf|$であることが分かる．少し計算してみればわかるが，これを具体的に表すのは結構大変である．以下に3位までのPeschl微分を書き下しておこう．

$$D^1f(z)=\frac{(1+\delta|z|^2)f'(z)}{1+\varepsilon|f(z)|^2},$$

$$D^2f(z)=\frac{(1+\delta|z|^2)^2f''(z)}{1+\varepsilon|f(z)|^2}+\frac{2\delta\bar{z}(1+\delta|z|^2)f'(z)}{1+\varepsilon|f(z)|^2}-\frac{2\varepsilon(1+\delta|z|^2)^2\overline{f(z)}f'(z)^2}{(1+\varepsilon|f(z)|^2)^2},$$

$$D^3f(z)=\frac{(1+\delta|z|^2)^3f'''(z)}{1+\varepsilon|f(z)|^2}-\frac{6\varepsilon(1+\delta|z|^2)^3\overline{f(z)}f'(z)f''(z)}{(1+\varepsilon|f(z)|^2)^2}+\frac{6\delta\bar{z}(1+\delta|z|^2)^2f''(z)}{1+\varepsilon|f(z)|^2}$$
$$+\frac{6\delta^2\bar{z}^2(1+\delta|z|^2)f'(z)}{1+\varepsilon|f(z)|^2}-\frac{12\delta\varepsilon\bar{z}(1+\delta|z|^2)^2\overline{f(z)}f'(z)^2}{(1+\varepsilon|f(z)|^2)^2}+\frac{6\varepsilon^2(1+\delta|z|^2)^3\overline{f(z)}^2f'(z)^3}{(1+\varepsilon|f(z)|^2)^3}.$$

このように複雑なものではあるが，Kim, Ma, Minda達（[7], [8], [17]）は，シュワルツ微分の定義において$f^{(n)}$をD^nfに置き換えても通常のシュワルツ微分の不変形が出てくることを観察していた．すなわち，非定数正則写像$f:\mathbb{C}_\delta\to\mathbb{C}_\varepsilon$に対して，

$$\frac{D^3f}{D^1f}-\frac{3}{2}\left(\frac{D^2f}{D^1f}\right)^2=\frac{|S_f|}{{\lambda_\delta}^2}$$

が成り立つ．これは単なる偶然なのか，あるいは何か背後に理由があるのか．その疑問が今回の研究の動機の一つでもあった．(これについては4節で一つの解答を与える.)

なお，Peschlによる微分作用素はMindaによってより一般の等角計量に対しても定義が拡張された．Mindaの結果は出版されることはなかったが，Schippers [33] および独立にKim-S. [9] によって定式化され論文として出版されている．以下，[9] に沿って定義を与える．$\rho(z)|dz|$ を平面領域Ω上の滑らかな等角計量とする．$C^\infty(\Omega)$ に作用するρに関する微分作用素∂_ρを

$$\partial_\rho \varphi = \frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z}$$

によって定義する．また，Ω, Ω'をそれぞれ等角計量ρ, σを持つ平面領域とし，正則写像$f : \Omega \to \Omega'$に対して$D^n f$を帰納的に

$$\begin{aligned} D^1 f &= \frac{\sigma \circ f}{\rho} f' \\ D^{n+1} f &= \left[\partial_\rho - n\partial_\rho(\log \rho) + (\partial_\sigma \log \sigma) \circ f \cdot D^1 f\right] D^n f \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

と定める．するとΩ, Ω'がともに標準計量を持つ標準領域であるときは$D^n f$はPeschlの微分作用素に一致する．このように一般に定義された微分作用素$D^n = D^n_{\sigma,\rho}$をPeschl-Mindaの微分作用素と呼ぶ．

3. 高階シュワルツ微分

シュワルツ微分の高階化についてのアプローチは Aharonov [1] Harmelin [5], Tamanoi [37], Schippers [32] らによって考察されている．これらのうち，Aharonovによるものと Tamanoiによるものは本質的に同等である（[10] 参照）．紙数の都合上，以下ではTamanoiによるもののみ紹介する．点zの近傍で定義された非定数正則函数fに対して，メビウス変換$M_z(w)$を$M_z(0) = f(z), M_z'(0) = f'(z), M_z''(0) = f''(z)$を満たすように選ぶ．$X = M_z^{-1}(f(z+\zeta))$を$\zeta = 0$のまわりで展開して

$$X = \frac{f'(z)(f(z+\zeta) - f(z))}{\frac{1}{2}f''(z)(f(z+\zeta) - f(z)) + f'(z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n[f](z) \frac{\zeta^{n+1}}{(n+1)!}$$

と書いたとき，係数$S_n[f](z)$を仮想位数nのシュワルツ微分と呼ぶ．定義より$S_0[f] = 1, S_1[f] = 0$であり，$S_2[f]$が通常のシュワルツ微分S_fとなっている．また，等式

$$\partial_z X - \partial_\zeta X = -1 - \tfrac{1}{2} S_2[f](z) X^2$$

から，次の再帰公式を得る：

$$S_n[f] = S_{n-1}[f]' + \frac{1}{2} S_2[f] \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} S_{k-1}[f] S_{n-k-1}[f], \quad n \geq 3.$$

たとえば，$S_3[f] = S_2[f]', S_4[f] = S_3[f]' + 4S_2[f]^2$である．$S_n[f]$のより便利な表示を与えるため，いくつかの多項式系を用意する．まず，$S_n[f]$を$f^{(k)}/f'$ $(2 \leq k \leq n+1)$の多項式で表すため，多項式系$P_n = P_n(x_1, \ldots, x_n)$を$P_0 = 1, P_1 = 0, P_2 = x_2 - 3x_1^2/2$および

$$P_n = \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_1 x_k) \frac{\partial P_{n-1}}{\partial x_k} + \frac{1}{2} P_2 \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} P_{k-1} P_{n-k-1}, \quad n \geq 3$$

によって定める．たとえば，$P_3 = x_3 - 4x_1x_2 + 3x_1^3$ となる．すると，$q_k[f] = f^{(k+1)}/f'$ として

$$S_n[f] = P_n(q_1[f], q_2[f], \ldots, q_n[f]), \quad n \geq 0$$

であることが分かる（[10] 参照）．

次に，$S_n[f]$ を S_f の高次導函数で表すため，多項式系 $T_n = T_n(x_2, \ldots, x_n)$ を $T_0 = 1, T_1 = 0, T_2 = x_2$, および

$$T_n = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_k} \cdot x_{k+1} + \frac{x_2}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} T_{k-1} T_{n-k-1}, \quad n \geq 3$$

と帰納的に定義する．たとえば，$T_3 = x_3$, $T_4 = x_4 + 4x_2^2$ である．すると，

$$S_n[f] = T_n(Sf, (Sf)', \ldots, (Sf)^{(n-2)}), \quad n \geq 0$$

が成り立つ（[11] 参照）．

4. 不変シュワルツ微分

Peschl 微分作用素を用いて形式的にシュワルツ微分を作ってみると，シュワルツ微分に重みをかけて不変化したものになっていることが観察されていたということは第 1 節で述べた．ここでは，それを高階のシュワルツ微分に対しても考えてみよう．そこで，非定数正則写像 $f : (\Omega, \rho) \to (\Omega', \sigma)$ に対して $Q^n f = D^{n+1} f / D^1 f$ とおき，形式的に

$$\Sigma^n f = P_n(Q^1 f, \ldots, Q^n f), \quad n \geq 0$$

と定める．ここで $P_n(x_1, \ldots, x_n)$ は前節で導入された多項式系とする．計量を明示するときは，$\Sigma^n_{\sigma,\rho} f$ とも書く．定義から ρ, σ がユークリッド計量であれば，$\Sigma^n f$ は Tamanoi のシュワルツ微分に一致することがわかる．たとえば，

$$\Sigma^2 f = \frac{D^3 f}{D^1 f} - \frac{3}{2} \left(\frac{D^2 f}{D^1 f} \right)^2,$$

$$\Sigma^3 f = \frac{D^4 f}{D^1 f} - 4 \frac{D^2 f D^3 f}{(D^1 f)^2} + 3 \left(\frac{D^2 f}{D^1 f} \right)^3$$

である．また，これらは次の不変性を持つことがわかる．$g : (\hat{\Omega}, \hat{\rho}) \to (\Omega, \rho)$ および $h : (\Omega', \sigma) \to (\hat{\Omega}', \hat{\sigma})$ をともに局所等長な正則写像とすると，

$$\Sigma^n_{\hat{\sigma},\hat{\rho}}(h \circ f \circ g) = (\Sigma^n_{\sigma,\rho} f) \circ g \cdot \left(\frac{g'}{|g'|} \right)^n.$$

したがって，不変シュワルツ微分を（適当なテンソル量として）等角計量を持つリーマン面の間の非定値正則写像に拡張することが可能となる．特に，その絶対値は座標のとり方によらずに定まり，函数としての意味を持つ．

次に，このように不変化されたシュワルツ微分 $\Sigma^2 f$ と古典的なシュワルツ微分 S_f を比較するために，計量の曲率に関連する量を次式で定義する：

$$\Theta_\rho(z) = 2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \log \rho(z) - 2 \left(\frac{\partial \log \rho(z)}{\partial z} \right)^2.$$

(実は，この量はリーマン面上では well-defined ではないが，射影構造を 1 つ固定すれば $\Theta_\rho(z)dz^2$ は well-defined な二次微分を与える.）なお，Θ_ρ が正則であるための必要十分条件は，ρ が定曲率であることである．また，標準計量 λ_ε に対しては $\Theta_{\lambda_\varepsilon}=0$ であることが直接計算により容易に分かる．このとき，次のことが言える．

定理 4.1 (Kim-S. [10]) ρ,σ をそれぞれ平面領域 Ω,Ω' 上の等角計量とし，$f:\Omega\to\Omega'$ を非定数正則写像とする．このとき，

$$\Sigma_{\sigma,\rho}f=\rho^{-2}\left[S_f+f^*\Theta_\sigma-\Theta_\rho\right]$$

が成り立つ．ここに，$f^*\Theta_\sigma=\Theta_\sigma\circ f\cdot(f')^2$ とする．

これから特に次の系が得られ，2 節で述べた Minda らによる観察結果が統一的に説明される．

系 4.2 $\delta,\varepsilon\in\{-1,0,+1\}$ および非定数正則写像 $f:\mathbb{C}_\delta\to\mathbb{C}_\varepsilon$ に対して次の等式が成り立つ：

$$\Sigma f=\lambda_\delta^{-2}Sf.$$

5. 射影シュワルツ微分

前節で導入された不変シュワルツ微分は源領域 (source)，目的領域 (target) の両方の計量に依存して決まるので，残念ながら非常に複雑な形となってしまっている．そこで，古典的な（高階）シュワルツ微分と不変シュワルツ微分の中間的な性格を持つ射影シュワルツ微分が Kim-S. [11] により導入された．ここではその定義を述べておこう．定義は等角計量と射影構造を持つリーマン面から射影構造のみを持つリーマン面への非定数正則写像に対して可能であるが，ここでは簡単のために平面領域（+ 自明な射影構造）の場合のみ考える．まず，十分滑らかな等角計量 ρ を持つ領域 Ω 上の滑らかな n 形式 $\varphi=\varphi(z)dz^n$ に対して，等式

$$\Lambda_\rho(\varphi)=\big[\partial\varphi-2n(\partial\log\rho)\varphi\big]dz^{n+1}$$

により $n+1$ 形式 $\Lambda_\rho(\varphi)$ を定める.（幾何的には，これは ρ に関する Levi-Civita 接続による $\varphi(z)dz^n$ の共変微分の dz 部分を取り出したものである．詳しくは [9] を参照のこと.）

次に非定数正則写像 $f:\Omega\to\Omega'$ に対して n 形式 $\mathfrak{D}^n_\rho f(z)dz^n$ $(n\ge 2)$ を n に関して帰納的に

$$\mathfrak{D}^2_\rho f=S_f,\quad \mathfrak{D}^n_\rho f dz^n=L_\rho(\mathfrak{D}^{n-1}_\rho f dz^{n-1}),\quad n\ge 3$$

によって定める．さらに，$V^n_\rho f$ を 3 節で導入された多項式系 $T_n(x_2,\ldots,x_n)$ を用いて

$$V^n_\rho f=T_n(\mathfrak{D}^2_\rho f,\ldots,\mathfrak{D}^n_\rho f),\quad n\ge 2$$

により定義する．これを仮想位数 n の射影シュワルツ微分と呼ぶことにする．$V^2_\rho f$ は定義から古典的なシュワルツ微分 S_f にほかならず，実際には ρ とは無関係に定まる．また，

$$V^3_\rho f=(S_f)'-4(\partial\log\rho)S_f$$

である．また，ρ がユークリッド計量の場合は構成の仕方から，$V^n_\rho f$ は Tamanoi のシュワルツ微分 $S_n[f]$ と一致する．射影シュワルツ微分の持つ不変性は次の形にまとめられる．

補題 5.1 $g:(\hat{\Omega},\hat{\rho})\to(\Omega,\rho)$ を等長なメビウス変換，h を一般のメビウス変換とするとき，非定数正則写像 $f:\Omega\to\Omega'$ に対して次の式が成り立つ：

$$V_{\hat{\rho}}^{n}(h\circ f\circ g)=(V_{\rho}^{n}f)\circ g\cdot(g')^{n},\quad n\geq 2.$$

6. 単葉性判定法への応用

本節では領域 Ω は単位円板 $\mathbb{C}_{-1}=\mathbb{D}$, 計量 ρ は双曲計量 $\lambda_{-1}=|dz|/(1-|z|^2)$ の場合に限定する．以下では $V_{\rho}^{3}f$ のみを考えるので，これを単に Vf と書くことにする．すなわち，

$$Vf(z)=(S_f)'(z)-\frac{4\bar{z}}{1-|z|^2}S_f(z)$$

とする．α を実定数とし，$\mathbb{D}$ 上の重み付きノルムを

$$\|\varphi\|_{\alpha}=\sup_{|z|<1}(1-|z|^2)^{\alpha}|\varphi(z)|$$

によって定める．1節で紹介したNehariの定理は，f が $\mathbb{D}$ 上で単葉なら $\|S_f\|_2\leq 6$ であり，逆に $\|S_f\|_2\leq 2$ ならば $\mathbb{D}$ 上で単葉であると言い換えられる．Vf について，Nehariの定理の類似が次の形で得られる．

定理 6.1 (Kim-S. [11]) f を単位円板 $\mathbb{D}$ 上の非定数有理型函数とする．もし f が単葉であれば，$\|Vf\|_3\leq 16$ であり，16は最良である．逆に $\|Vf\|_3\leq 3/2$ ならば，f は $\mathbb{D}$ 上で単葉である．

実は後半部分の証明にはNehariの定理を用いているので，単葉性の十分条件としてはNehariのそれより弱い．しかし，定数3/2が改良できればこれまでにない新しい単葉性判定法が得られる可能性はある．なお，3/2は $16\sqrt{3}/9\approx 3.0792$ 以上にはできないことが $f(z)=\log\frac{1+z}{1-z}$ のノルムを実際に計算することによりわかる．
上記の定理の証明には次の結果が用いられる．

命題 6.2 f を単位円板上の局所単葉有理型函数とすると，次の不等式が成り立つ：

$$\frac{16}{25\sqrt{5}}\|Vf\|_3\leq\|S_f\|_2\leq\frac{4}{3}\|Vf\|_3.$$

ここで定数 $16/25\sqrt{5}$ は最良である．

この命題の証明には次の表現公式が鍵となっている：

$$S_f(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{(1-|\zeta|^2)^4Vf(\zeta)}{(1-|z|^2)^4(\bar{\zeta}-\bar{z})}d\xi d\eta\quad(\zeta=\xi+i\eta).$$

参考文献

[1] D. Aharonov, *A necessary and sufficient condition for univalence of a meromorphic function*, Duke Math. J. **36** (1969), 599–604.

[2] L. Ahlfors, *Cross-ratios and Schwarzian derivatives in* $\mathbf{R}^n$, Complex Analysis: Articles Dedicated to Albert Pfluger on the Occasion of his 80th Birthday, Birkhauser, 1989, pp. 1–15.

[3] K. Carne, *The Schwarzian derivative of a conformal mapping*, J. reine angew. Math. **408** (1990), 10–33.

[4] A. Cayley, *On the Schwarzian derivative, and the polyhedral functions*, Camb. Phil. Trans. **13** (1880), 5–68.

[5] R. Harmelin, *Aharonov invariants and univalent functions*, Israel J. Math. **43** (1982), 244–254.

[6] E. Hille, *Ordinary Differential Equations in the Complex Plane*, Wiley-Interscience, 1976.

[7] S. Kim and D. Minda, *The hyperbolic and quasihyperbolic metrics in convex regions*, J. Analysis **1** (1993), 109–118.

[8] ———, *The hyperbolic metric and spherically convex regions*, J. Math. Kyoto Univ. **41** (2001), 297–314.

[9] S. Kim and T. Sugawa, *Invariant differential operators associated with a conformal metric*, Michigan Math. J. **55** (2007), 459–479.

[10] ———, *Invariant Schwarzian derivatives of higher order*, Complex Analysis and Operator Theory **5** (2011), 659–670.

[11] ———, *Geometric invariants associated with projective structures and univalence criteria*, Tohoku Math. J. **63** (2011), 41–57.

[12] F. Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, B. G. Teubner, Leipzig, 1884, 正20面体と5次方程式 改訂新版（関口次郎・前田博信訳），シュプリンガー・フェアラーク東京.

[13] O. Kobayashi and M. Wada, *Circular geometry and the Schwarzian*, Far East J. Math. Sci., Special Volume, Part III (Geometry and Topology), 2000, pp. 335–363.

[14] W. Kraus, *Über den Zusamenhang einiger Charakteristiken eines einfach zusammenhängenden Bereiches mit der Kreisabbildung*, Mitt. Math. Sem. Giessen **21** (1932), 1–28.

[15] J.-L. Lagrange, *Sur la construction des cartes géographiques*, Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin (1779), 637–692.

[16] O. Lehto, *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*, Springer-Verlag, 1987.

[17] W. Ma and D. Minda, *Two-point distortion theorems for bounded univalent functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **22** (1997), 425–444.

[18] K. Matsumoto, T. Sasaki, and M. Yoshida, *Recent progress of Gauss-Schwarz theory and related geometric structures*, Kyushu J. Math. **47** (1993), 283–381.

[19] R. Molzon and K. Pinney Mortensen, *The Schwarzian derivative for maps between manifolds with complex projective connections*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 3015–3036.

[20] ———, *Univalence of holomorphic mappings*, Pacific J. Math. **180** (1997), 125–133.

[21] F. Morley, *On differential inversive geometry*, Amer. J. Math. **48** (1926), 144–146.

[22] Z. Nehari, *The Schwarzian derivative and schlicht functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 545–551.

[23] ———, *Conformal Mappings*, McGraw-Hill, New York, 1952.

[24] B. Osgood, *Old and new on the Schwarzian derivative*, Quasiconformal mappings and analysis (Ann Arbor, MI, 1995), Springer, New York, 1998, pp. 275–308.

[25] B. Osgood and D. Stowe, *A generalization of Nehari's univalence criterion*, Comment. Math. Helv. **65** (1990), 234–242.

[26] ———, *The Schwarzian derivative and conformal mapping of Riemannian maniforlds*, Duke Math. J. **67** (1992), 57–99.

[27] V. Ovsienko and S. Tabachnikov, *Projective Differential Geometry Old and New. From the Schwarzian Derivatve to the Cohomology of Diffeomorphism Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[28] ———, *What is ... the Schwarzian derivative?*, Notices Amer. Math. Soc. **56** (2009), no. 1, 34 36.

[29] E. Peschl, *Les invariants différentiels non holomorphes et leur rôle dans la théorie des fonctions*, Rend. Sem. Mat. Messina **1** (1955), 100–108.

[30] T. Sasaki and M. Yoshida, *Schwarzian derivatives and uniformization*, CRM Proceedings and Lecture Notes **32** (2002), 271–286.

[31] H. Sato, *Schwarzian derivatives of contact diffeomorphisms*, Lobachevskii J. Math. **4** (1999), 89 98.

[32] E. Schippers, *Distortion theorems for higher order Schwarzian derivatives of univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 3241–3249.

[33] ———, *The calculus of conformal metrics*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **32** (2007), 497–521.

[34] H. A. Schwarz, *Ueber einige Abbildungsaufgaben*, J. reine angew. Math. **70** (1869), 105–120.

[35] ———, *Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt*, J. reine angew. Math. **75** (1873), 292 335.

[36] ———, *Gesammelte mathematische Abhandlungen II*, Springer, Berlin, 1890.

[37] H. Tamanoi, *Higher Schwarzian operators and combinatorics of the Schwarzian derivative*, Math. Ann. **305** (1996), 127 151.

VARIATIONS OF BERGMAN KERNELS FOR SOME EXPLICITLY GIVEN FAMILIES OF PLANAR DOMAINS

YANYAN WANG

Abstract: We study the parameter dependence of the Bergman kernels on some planar domains depending on complex parameter in nontrivial "pseudoconvex" ways. Smoothly bounded cases are studied at first: It turns out that, in an example where the domains are annuli, we prove the following Theorem.

Theorem 0.1. *Let* $A_\zeta := \{z \in \mathbb{C} \mid |\zeta| < |z| < 1\}$, $\mathcal{A} := \bigcup_{0<|\zeta|<1}\{\zeta\} \times A_\zeta$ *and* $\partial\mathcal{A} := \bigcup_{0<|\zeta|<1}\{\zeta\} \times \partial A_\zeta$ *then* $\partial^2 \log K_{A_\zeta}(z,z)/\partial\zeta\partial\bar{\zeta}$ *tends to* 0 *with order 2 as* $(\zeta, z) \in \mathcal{A}$ *tends to* $\partial\mathcal{A}$ *in a nontrivial way.*

Here, the point (ζ, z) tends to the boundary in a nontrivial way means that ζ tends to a fixed point firstly, then z tends to the boundary of the base domain A_ζ. By parity of reasoning, we will repeat no more later.

And in another example where the domains are the family of discs. We consider that

$$C = \bigcup_{\zeta \in B}\{\zeta\} \times C_\zeta$$

where $B = \mathbb{D}_\zeta$, $C_\zeta = \{z \in \mathbb{C}_z \mid |z - e^{i\theta(\zeta)}| < 1, \theta(0) = 0,\ \Delta\theta(\zeta) = 0\}$. Here, $\theta(\zeta)$ is a real-valued analytic function.

It is a well-known fact that a real hypersurface given by $|z - a(\zeta)|^2 = e^{-\gamma(\zeta)}$ is Levi-flat if and only if

$$\gamma_{\zeta\bar{\zeta}} = 2e^{\gamma}|a_{\bar{\zeta}}|^2, \quad a_{\zeta\bar{\zeta}} + \gamma_\zeta a_{\bar{\zeta}} = 0.$$

Therefore, ∂C is Levi-flat and we have the following theorem.

Theorem 0.2. *The Levi form of* $\log K_{C_\zeta}(z,z)$ *with respect to* ζ *approaches to* ∞ *when* $(\zeta, z) \in C$ *tends to* $\partial C \setminus \{(0,0)\}$ *but depends on* $\tan \arg z$ *when* $(\zeta, z) \in C$ *tends to* $(0,0)$ *in a nontrivial way. When* (ζ, z) *tends to* $(0,0)$ *in a nontrivial way, if* $\tan\arg z$ *tends to* ∞ *then* $\partial^2 \log K_{C_\zeta}(z,z)/\partial\zeta\partial\bar{\zeta}$ *approaches to* ∞, *otherwise,* $\partial^2 \log K_{C_\zeta}(z,z)/\partial\zeta\partial\bar{\zeta}$ *approaches to a positive non-zero constant which depends on* $\tan\arg z$.

Further, in contrast to this, in the cases where the boundary of the domains are not smooth, such as discs with slits, rectangles and half strips, the following phenomena are observed.

The considered family of discs with slits are

$$D_\zeta = \{z \in \mathbb{D}_z \mid z \neq s\zeta,\ s \geq 1\},$$

where $\zeta \in B$ with $B = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta - 1| < \delta, |\zeta| < 1\}$ and define $\mathcal{D} = \bigcup_{\zeta \in B}\{\zeta\} \times D_\zeta$. Then the following result holds.

1

Theorem 0.3. *The Levi form of* $\log K_{D_\zeta}(z,z)$ *with respect to* ζ *approaches to* ∞ *when* $(\zeta, z) \in \mathcal{D}$ *tends to* $(1,1) \in \partial\mathcal{D}$ *in a nontrivial way and approaches to* 0 *when* (ζ, z) *tends to* $(1, \pm i) \in \partial\mathcal{D}$ *in a nontrivial way. Otherwise,* $\partial^2 \log K_{C_\zeta}(z,z)/\partial\zeta\partial\bar{\zeta}$ *approaches to a positive non-zero constant.*

We shall present the explicit expressions of Bergman kernels on rectangles by using the Schwarz-Christoffel transformation and Jacobi's elliptic functions, and on the family of half strips by using the trigonometric functions.

The considered parameter rectangles are

$$R_\zeta := \{z = s + it \in \mathbb{C}_z \mid 0 < s < \mathrm{Re}\zeta,\ 0 < t < \mathrm{Im}\zeta\}$$

where $\zeta \in B$ with $B := \{\zeta \in \mathbb{C} \| \zeta - (1+i)| < \delta\}$ and define $\mathcal{R} := \bigcup_{\zeta\in B}\{\zeta\}\times R_\zeta$. The angle of ∂R_ζ at each vertical point is $\pi/2$ and the following results hold.

Theorem 0.4. *The Bergman kernels of* R_ζ *on the diagonal are*

$$K_{R_\zeta}(z,z) = \frac{1}{\pi(\mathrm{Im}\,\mathrm{sn}^2(u,k(\zeta)))^2}|\mathrm{sn}(u,k(\zeta))\mathrm{cn}(u,k(\zeta))\mathrm{dn}(u,k(\zeta))\frac{K(k(\zeta))}{\mathrm{Re}\zeta}|^2$$

where $u = K(k(\zeta))z/\mathrm{Re}\zeta$ *and* $\mathrm{sn}(u,k), \mathrm{cn}(u,k), \mathrm{dn}(u,k)$ *are the Jacobi's elliptic funtions of the first kind,* $K(k)$ *is the complete elliptic integral of the first kind.* $k(\zeta)$ *is a real valued analytic function with respect to* ζ*. Let* $\zeta = 1 + i + \varepsilon$ *then,*

$$k(\zeta) = k_0 + 2\mathrm{Re}((a+ib)\varepsilon) + 2\mathrm{Re}((c+id)\varepsilon^2) + 2e|\varepsilon|^2 + \cdots,$$

where $k_0 = 1/\sqrt{2}, a = b = -2c = K/\left(4\sqrt{2}(2E-K)\right), d = e = -\sqrt{2}a^2$*. Here,* K *is the value of the complete elliptic integral of the first kind at the point* $k = 1/\sqrt{2}$*, and* E *is the value of the complete elliptic integral of the second kind at the point* $k = 1/\sqrt{2}$.

Theorem 0.5. *For Bergman kernels* $K_{R_\zeta}(z,z)$ *where* $(\zeta,z) \in \mathcal{R}$*, it holds that*

$$\lim_{z\to 0}\lim_{\zeta\to 1+i}\frac{\partial^2 \log K_{R_\zeta}(z,z)}{\partial\zeta\partial\bar{\zeta}} = 0, \qquad \lim_{z\to 1}\lim_{\zeta\to 1+i}\frac{\partial^2 \log K_{R_\zeta}(z,z)}{\partial\zeta\partial\bar{\zeta}} = \frac{3}{2},$$

$$\lim_{z\to i}\lim_{\zeta\to 1+i}\frac{\partial^2 \log K_{R_\zeta}(z,z)}{\partial\zeta\partial\bar{\zeta}} = 16a^2, \qquad \lim_{z\to 1+i}\lim_{\zeta\to 1+i}\frac{\partial^2 \log K_{R_\zeta}(z,z)}{\partial\zeta\partial\bar{\zeta}} = \infty.$$

In the case of half strips, we get the following Theorem.

Theorem 0.6. *Let* $S_\zeta := \{z \in \mathbb{C}_z | 0 < \mathrm{Re}z < \mathrm{Re}\zeta, \mathrm{Im}z > 0\}$*, with* $B = \{\zeta \in \mathbb{C} \| \zeta - 1| < \delta\}$ *and* $\mathcal{S} := \bigcup_{\zeta\in B}\{\zeta\}\times S_\zeta$*. Then,*

$$\lim_{z\to 0}\left(\lim_{\zeta\to 1}\frac{\partial^2 \log K_{S_\zeta}(z,z)}{\partial\zeta\partial\bar{\zeta}}\right) = 0, \quad \lim_{z\to 1}\left(\lim_{\zeta\to 1}\frac{\partial^2 \log K_{S_\zeta}(z,z)}{\partial\zeta\partial\bar{\zeta}}\right) = \infty.$$

But,

$$\lim_{\mathrm{Im}z\to\infty}\left(\lim_{\zeta\to 1}\frac{\partial^2 \log K_{S_\zeta}(z,z)}{\partial\zeta\partial\bar{\zeta}}\right)$$

depends on the choice of $\mathrm{Re}z$.

制限型Carathéodory擬体積形式について(訂正)

菊田 伸 (上智大学 理工 学振PD)*

2011年3月の早稲田大学における日本数学会2011年度年会の函数論分科会において同タイトルで講演させて頂き, 制限型Carathéodory測度と標準束の制限型体積の間のある不等式を示すことが出来たことを報告させて頂いた. しかしその証明の鍵となる曲率の不等式に重大なミスが見つかり, 今のところ完全には修正出来ていないが, 現在分かっている修正点と余接束の正値性に関する補足について今回は報告させて頂く.

今述べた制限型Carathéodory測度と標準束の制限型体積の間の不等式とは, 以前講演者が得た次の不等式の解析的部分集合への制限型版となるべきものである:

定理 1 ([4]). Xを正規なn次元compact複素解析空間とし, K_Xをその標準束, $\tilde{X}$を普遍被覆とする. このとき, $\tilde{X}$のCarathéodory測度$\mu^C_{\tilde{X}}$とK_Xの体積$\mathrm{vol}_X(K_X)$に対して

$$\mathrm{vol}_X(K_X) := \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\mathrm{h}^0(X, \mathcal{O}_X(K_X^{\otimes m}))}{m^n/n!} \geq \frac{(n+1)^n n!}{(4\pi)^n} \mu^C_{\tilde{X}}(X).$$

これは$\tilde{X}$のCarathéodory測度双曲性 (i.e., Carathéodory測度$\mu^C_{\tilde{X}}$の非自明性)が, 標準束の巨大という正値性 (i.e., $\mathrm{vol}_X(K_X) > 0$)を導くことを明確な不等式で表している.

まず正則直線束に対する体積の制限型の定義を述べる. compact複素多様体X上の正則直線束Lとそのd次元閉解析的部分集合$\iota : Z \hookrightarrow X$に対して$L$の$Z$に沿った制限型体積$\mathrm{vol}_{X|Z}(L)$は

$$\mathrm{vol}_{X|Z}(L) := \limsup_{m\to\infty} \frac{\dim \mathrm{Im}[\iota^* : \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(L^{\otimes m})) \to \mathrm{H}^0(Z, \mathcal{O}_X(L^{\otimes m}))]}{m^d/d!}$$

で定義される. つまり制限型体積はXに拡張できるZ上のLの正則大域切断の数を漸近的に測ったもので, Zに沿ったLの正値性を測る量と考えられている. また正則大域切断の拡張をするためにとても有用な道具であり, 様々な応用がある.

そこで標準束の制限型体積と比較するのに自然であり, かつ部分多様体に沿ったCarathéodory測度双曲性を測る様なCarathéodory擬体積形式の部分多様体Zに沿った制限型を, 制限型体積に倣って次の様に定義する:

定義 1 ([5], 本質的にはEisenman [1]). n次元複素多様体X内のd次元複素解析的集合Zに対して, Zが滑らかである時には, Zに沿った制限型Carathéodory擬体積形式$v^C_{X|Z}$を次で定義する:

$$v^C_{X|Z} := \sup\left\{(f|_Z)^*\left(\frac{2^d}{d!(n+1)^d}(\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log v_1)^d\right) ; f : X \to \mathbb{B}^n : \text{正則}\right\}.$$

ここで$v_1 = 2^n(1-|t|^2)^{-(n+1)} \bigwedge_{\alpha=1}^n dt^\alpha \wedge d\bar{t}^\alpha$は$n$次元複素単位球体$\mathbb{B}^n$上のPoincaré体積形式である. 一般の$Z$に対してはこの類似の形で測度$\mu^C_{X|Z}$として定義し, 制限型Carathéodory測度と呼ぶ.

本研究は学術新興会特別研究員(DC)奨励費(課題番号:22・3509)の助成を受けた。
2010 Mathematics Subject Classification: 32Q45, 32J18, 32J25
キーワード:制限型Carathéodory擬体積形式, 標準束の制限型体積, 余接束の数値的正値性
* 〒102-8554 東京都千代田区紀尾井町7-1
e-mail: skikuta@sophia.ac.jp

そしてこれらの制限型の概念に対して, 定理1の制限型版が成り立つと予想した. 即ち

問題 ([5]). n次元compact複素多様体Xと$v_{\tilde{X}}^C$の零点集合に含まれないd次元既約閉解析的部分集合Z($\tilde{Z}$は$\tilde{X}$への引戻し)に対して, あるnとdのみに依る(出来れば明確な)正定数$C_{n,d}$が存在して次が成り立つ：

$$\mathrm{vol}_{X|Z}(K_X) \geq C_{n,d}\,\mu_{\tilde{X}|\tilde{Z}}^C(Z).$$

ここでZに対する仮定は不可欠である. $C_{n,d} = \frac{(n+1)^d d!}{(4\pi)^d}$とした問題が成り立つことを2011年度年会の際に報告したが, それは間違っていることが具体的な例から分かる. その間違いは証明の鍵となる次の曲率の不等式の証明が破綻したことに全て帰着される：

$$\left\langle \left((\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log v_X^C)|_Z \right)^d \right\rangle \geq \frac{d!(n+1)^d}{2^d} v_{X|Z}^C. \qquad (\sharp)$$

ここでBoucksom-Eyssidieux-Guedj-Zeriahiが導入したnon-pluripolar Monge-Ampère積$\langle\cdot\rangle$を用いている. もしこの種の不等式が成り立てば, Matsumura-HisamotoによるBoucksom-Popoviciの公式の制限型版([3], [7])に適用し, 問題の不等式は得られる.

一方で, 右辺の$v_{X|Z}^C$を, その定義においてCarathéodory臨界写像(i.e.,Carathéodory擬体積形式の上限を達成する写像)のみで上限をとった擬体積形式$\overline{v}_{X|Z}^C$(測度としては$\overline{\mu}_{X|Z}^C$)に置き換えると($\sharp$)は従い, よって問題の弱い形が成り立つ：

主定理 ([5]). n次元compact複素多様体Xと$v_{\tilde{X}}^C$の零点集合に含まれないd次元既約閉解析的部分集合Zに対して,

$$\mathrm{vol}_{X|Z}(K_X) \geq \frac{(n+1)^d d!}{(4\pi)^d}\overline{\mu}_{\tilde{X}|\tilde{Z}}^C(Z).$$

この結果は, 部分多様体に沿ったCarathéodory測度双曲性が強くなればなる程, 部分多様体に沿った標準束の正値性が大きくなることを明確な不等式で表している. また$\tilde{X}$が強Carathéodory測度双曲的な場合に, Nakai-Kleimanの判定法によって, 標準束の豊富性はCarathéodory測度双曲性より大きいことも数値的に表しているとみなせる.

またEisenman氏の制限型Carathéodory擬体積形式の曲率を[2]を応用して調べると, 余接束の数値的正値性とCarathéodory測度双曲性の間の同様の関係も得られる([6]).

参考文献

[1] D. A. Eisenman. Intrinsic measures on complex manifolds and holomorphic mappings, Memoirs of the American Mathematical Society, No. 96, 1970.

[2] P. Eyssidieux, V. Guedj, and A. Zeriahi, Viscosity solutions to degenerate complex Monge- Ampère equations, Comm. Pure Appl. Math. **64** (2011), no. 8, 1059–1094.

[3] T. Hisamoto, Restricted Bergman kernel asymptotics, to appear in Trans. Amer. Math. Soc, arXiv:math/1201.4233.

[4] S. Kikuta, Carathéodory measure hyperbolicity and positivity of canonical bundles, Proc. Amer. Math. Soc. **139** (2011), no. 4, 1411–1420.

[5] S. Kikuta, Restricted Carathéodory measure and restricted volume of canonical bundle, submitted.

[6] S. Kikuta, Carathéodory measure hyperbolicity and nef property of cotangent bundle, submitted.

[7] S. Matsumura, Restricted volumes and divisorial Zariski decompositions, to appear in Amer. J. Math., arXiv:math/1005.1503.

Schiffer span と harmonic span が導く負曲率計量の多変数的変動

濱野 佐知子 (福島大学)*

1. 序

1.1. Schiffer span から誘導される計量

$\mathbb{C}_z$ 上の滑らかな閉曲線 C_j $(j=1,\ldots,\nu)$ で囲まれた領域を D とし, 点 $\zeta\in D$ で

$$P(z)=(z-\zeta)^{-1}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(z-\zeta)^n \qquad \text{at } z=\zeta$$

を満たす D 上の単葉関数全体を $\mathcal{P}(D)$ とおく. 特に, D を垂直截線領域に写す写像を $P_1(z)$, 水平截線領域に写す写像を $P_0(z)$ とする. このとき, L_i-主関数 $p_i(z,\zeta):=\operatorname{Re}P_i$ $(i=1,0)$ は1点 ζ で極 $\operatorname{Re}\frac{1}{z-\zeta}$ をもち, 境界で L_i-条件を満たす調和関数である. L_i-定数 $\alpha_i:=\operatorname{Re}A_1^i$ の差 $s:=\alpha_0-\alpha_1$ を (D,ζ) の Schiffer スパンとよぶ. このとき, Schiffer [4] は $M(z,\zeta):=\dfrac{P_1+P_0}{2}$ とおくと, $M\in\mathcal{P}(D)$, M の像領域の補集合は ν 個の凸領域からなり, $\mathcal{P}(D)\ni\forall P$ の像領域の補集合の面積を最大にする関数であり, その面積は $\frac{\pi}{2}s$ であることを示した. この幾何学的性質から,

命題 1 Schiffer スパンは双正則写像 $f:D\to\widetilde{D}$ に対して $s_{\widetilde{D}}\circ f=|f'|^{-2}s_D$ が成り立つ.

これより Schiffer スパンから計量 $s(\zeta)|d\zeta|^2$ が誘導される.

1.2. harmonic span から誘導される計量

$\mathbb{C}_z$ 上の滑らかな閉曲線 C_j $(j=1,\ldots,\nu)$ で囲まれた領域を D とし, 2点 $\{0,\zeta\}\in D$ で

$$Q(z)=\begin{cases} z^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n & \text{at } z=0,\\ \sum_{n=1}^{\infty}B_n(z-\zeta)^n & \text{at } z=\zeta\end{cases}$$

を満たす D 上の単葉関数全体を $\mathcal{Q}(D)$ とおく. 特に, D を円弧截線領域に写す写像を $Q_1(z)$, 放射截線領域に写す写像を $Q_0(z)$ とする. このとき, L_i-主関数 $q_i(z,\zeta):=\log|Q_i|$ $(i=1,0)$ は2定点 $0,\zeta$ で極 $-\log|z|$, $\log|z-\zeta|$ をもち, 境界で L_i-条件を満たす調和関数である. L_i-定数 $\beta_i:=\log|\frac{dQ_i}{dz}(\zeta)|$ の差 $h:=\beta_1-\beta_0$ を $(D,0,\zeta)$ の harmonic スパンとよぶ. [1] では, $N(z,\zeta):=\sqrt{Q_1Q_0}$ とおくと $N\in\mathcal{Q}(D)$ を示した. N は $\mathcal{Q}(D)\ni\forall Q$ の像領域の補集合の対数的面積を最大にする関数であり, その面積は $\frac{\pi}{2}h$ であることを示した. harmonic スパンの定義と対数の性質から,

命題 2 harmonic スパンは双正則写像 $f:D\to\widetilde{D}$ に対して $h_{\widetilde{D}}\circ f=h_D$ が成り立つ.

平面領域 $D(t)$ が複素助変数 $t\in B=\{|t|<\rho\}$ と共に滑らかに変動 $\mathcal{D}:t\in B\to D(t)$ するとき, $(D(t),0,\zeta(t))$ の harmonic スパン $h(t,\zeta)$ について次の変分公式を示した.

本研究は科研費 (課題番号:23740098) の助成を受けたものです.
2010 Mathematics Subject Classification: 32F05, 30F15, 30C40
キーワード：擬凸状領域, スパン, 再生核, 計量
*〒960-1296 福島市金谷川1番地 福島大学 人間発達文化学類
e-mail: hamano@educ.fukushima-u.ac.jp

補題 3 (2階変分公式 [1]) $D(t) \ni \{0, \zeta(t)\}$, $z = \zeta(t)$ は B で正則と仮定する. このとき,

$$\frac{\partial^2 h(t,\zeta)}{\partial t \partial \bar{t}} = \frac{1}{\pi} \int_{\partial D(t)} k_2(t,z) \left(\left| \frac{\partial q_1(t,z,\zeta)}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial q_0(t,z,\zeta)}{\partial z} \right|^2 \right) ds_z$$
$$+ \frac{4}{\pi} \iint_{D(t)} \left(\left| \frac{\partial^2 q_1(t,z,\zeta)}{\partial \bar{t} \partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 q_0(t,z,\zeta)}{\partial \bar{t} \partial z} \right|^2 \right) dx dy.$$

ただし, $k_2(t,z)$ は米谷-山口 [5] の導入した $\partial \mathcal{D} := \cup_{t \in B}(t, \partial D(t))$ のレビ曲率関数である.

$\mathbb{C}_z$ 上の滑らかな閉曲線 C_j $(j = 1, \ldots, \nu)$ で囲まれた領域 D での L^2-正則関数からなる全体を $A(D)$, その部分集合 $S(D) = \{f \in A(D) \mid \int_{\widetilde{C}_j} f(z)dz = 0 \ (j = 1, \ldots, \nu)\}$ (但し, $C_j \sim \widetilde{C}_j \Subset D$) を考える. 点 $\zeta \in D$ を固定して, $S(D)$ での有界線型汎関数 R: $S(D) \ni f \mapsto f(\zeta) \in \mathbb{C}$ を考えるとその再生核関数 $R(z,\zeta)$ が定まる. すなわち,

$$\exists 1 \ R(z,\zeta) \in S(D) \ \text{ s.t. } \ f(\zeta) = \iint_D f(z)\overline{R(z,\zeta)} d\omega_z \ \text{ for } \ \forall f \in S(D).$$

核関数を $\zeta = z$ へ制限して再生核 $R(\zeta,\zeta) = \iint_D |R(\zeta,z)|^2 d\omega_z$ を得る.

補題3を D の平行移動の変動 $\mathcal{D}: \zeta \in D \to D(\zeta) = \{z - \zeta \in \mathbb{C}_w \mid z \in D\}$ に用いると,

補題 4 (再生核の表現 [3])

$$R(z,\zeta) = \frac{2}{\pi} \frac{\partial^2 q_1(z,\zeta)}{\partial z \partial \bar{\zeta}} = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial^2 q_0(z,\zeta)}{\partial z \partial \bar{\zeta}}, \qquad R(\zeta,\zeta) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 h(\zeta)}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}}.$$

命題2と補題4により, harmonic スパンから計量 $\mathfrak{h}(\zeta)|d\zeta|^2 := \dfrac{\partial^2 h}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} |d\zeta|^2$ が誘導される.

2. 結果 [3]

$D = \{|z| < 1\}$ のとき $s(\zeta) = \mathfrak{h}(\zeta) = 2(1 - |\zeta|^2)^{-2}$ で, 共に Poincaré 計量の $\sqrt{2}$ 倍である.

定理 5 (1) $s(\zeta)|d\zeta|^2$ 及び $\mathfrak{h}(\zeta)|d\zeta|^2$ は D の各点で負曲率である.

(2) 2つの計量~~の差 $s(\zeta) - \mathfrak{h}(\zeta)$ はDで調和である~~. は一致する

𝒟∋∀(t, ζ)に対し

~~$B = \{|t| < \rho\} \subset \mathbb{C}$ とおき, 複素パラメータ t を止めるごとに $\mathbb{C}_z$ 上の有界領域 $D(t)$ は 2点 $\{0, \zeta(t)\}$ を含み, $z = \zeta(t)$ は B で正則と仮定する. このとき~~, $(D(t), \zeta\cancel{(t)})$ の Schiffer スパン $s(t,\zeta)$, および $(D(t), 0, \zeta\cancel{(t)})$ の harmonic スパン $h(t,\zeta)$ が考えられる.

𝒟⊃B×{0}とすると

定理 6 $\mathcal{D} = \cup_{t \in B}(t, D(t))$ が $B \times \mathbb{C}_z$ での2次元擬凸状領域ならば, $\log s(t,\zeta)$ および $\log \mathfrak{h}(t,\zeta)$ は $\mathcal{D}$ 上多重劣調和関数である.

参考文献

[1] S. Hamano, F. Maitani, and H. Yamaguchi, *Variation formulas for principal functions (II) Applications to variation for the harmonic spans*, Nagoya Math. J. **204** No.2 (2011), 19–56.

[2] S. Hamano, *Variation formulas for principal functions (III) Applications to variation for Schiffer spans* (submitted).

[3] S. Hamano, *Variation formulas for principal functions (IV) Applications to variation for the metrics induced by Schiffer and harmonic spans* (submitted).

[4] M. Schiffer, *The span of multiply connected domains*, Duke Math. J. **10** (1943), 209–216.

[5] F. Maitani and H. Yamaguchi, *Variation of Bergman metrics on Riemann surfaces*, Math. Ann. **330** (2004), 477–489.

Two-point distortion theorems for harmonic and pluriharmonic mappings

Peter DUREN (University of Michigan)
Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University)*1
Gabriela KOHR (Babeş-Bolyai University)

The purpose of this talk is to develop some two-point distortion theorems for harmonic mappings in the plane, with extensions to pluriharmonic mappings in $\mathbb{C}^n$. Our results are generalizations of known distortion theorems for analytic functions [2, 3, 4, 5] and provide necessary and sufficient conditions for univalence of sense-preserving harmonic mappings of the unit disk.

Let Ω be a domain in the complex plane $\mathbb{C}$, and let f be a complex-valued function of class C^1 in Ω. The Jacobian of f is given by $J_f = |\partial f/\partial z|^2 - |\partial f/\partial \overline{z}|^2$. It is well known that f is locally univalent if $J_f(z) \neq 0$ in Ω, and that the converse is also true if f is harmonic. Thus a locally univalent harmonic mapping is either sense-preserving (if $J_f(z) > 0$ in Ω) or sense-reversing (if $J_f(z) < 0$). A harmonic mapping of the unit disk U has the unique representation $f = h + \overline{g}$, where h and g are analytic in U and $g(0) = 0$. This is called the canonical representation of f. Note that f is sense-preserving if and only if $|g'(z)| < |h'(z)|$ for all $z \in U$. This implies that $h'(z) \neq 0$ in U, so that h is locally univalent.

Let S_H denote the family of sense-preserving univalent harmonic mappings $f = h+\overline{g}$ on U, where $h, g \in \mathcal{H}(U)$ and are normalized by $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$, and $g(0) = 0$. Let S_H^0 denote the subclass of S_H with the further normalization $g'(0) = 0$. The family S_H is normal, and S_H^0 is compact.

We will be concerned with families of harmonic mappings that are both linearly invariant and affine invariant. Linear invariance was first studied by Pommerenke for families of locally univalent analytic functions. Sheil-Small [6] then generalized the notion to families of harmonic mappings. A family $\mathcal{F} \subset S_H$ is said to be *linearly invariant* if $f = h + \overline{g} \in \mathcal{F}$ implies that

$$\frac{f((z+z_0)/(1+\overline{z_0}z)) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2)h'(z_0)} \in \mathcal{F} \qquad \text{for each } z_0 \in U .$$

The family $\mathcal{F}$ is *affine invariant* if $f \in \mathcal{F}$ implies

$$\frac{f(z) + \varepsilon\,\overline{f(z)}}{1+\varepsilon\, g'(0)} \in \mathcal{F} \qquad \text{for each } \varepsilon \in U .$$

The full family S_H is both linearly and affine invariant.

The order of a family $\mathcal{F} \subset S_H$ is defined by

$$\alpha = \alpha(\mathcal{F}) = \sup\left\{\frac{1}{2}|h''(0)| : f = h + \overline{g} \in \mathcal{F}\right\} .$$

In view of the maximum principle and the fact that h is locally univalent, we see that $\alpha(\mathcal{F}) \geq 1$. Bieberbach's theorem says that $\alpha(S) = 2$. It has long been conjectured that $\alpha(S_H) = 3$, but this is still an open question.

Partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) no.22540213 from JSPS, 2011.
*1 e-mail: h.hamada@ip.kyusan-u.ac.jp
web: http://www.ip.kyusan-u.ac.jp/J/kougaku/tb/hamada/

For any family $\mathcal{F} \subset S_H$, let $\mathcal{F}^0 = \mathcal{F} \cap S_H^0$, the subfamily of functions $f = h + \overline{g} \in \mathcal{F}$ for which $g'(0) = 0$.

Next, we introduce the notions of affine and linear invariance for families of locally univalent pluriharmonic mappings on B^n. We begin by recalling some standard notation. We say that a mapping $f \in \mathcal{H}(B^n)$ is normalized if $f(0) = 0$ and $Df(0) = I_n$. The family of normalized biholomorphic mappings on B^n will be denoted by $S(B^n)$. We let $K(B^n)$ denote the subfamily of $S(B^n)$ consisting of convex mappings. The family of all normalized locally biholomorphic mappings on B^n will be denoted by $\mathcal{L}S(B^n)$.

A complex-valued function f of class C^2 on B^n is said to be pluriharmonic if its restriction to every complex line is harmonic. Every pluriharmonic mapping $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ can be written as $f = h + \overline{g}$, where g and h are holomorphic mappings of B^n into $\mathbb{C}^n$, and this representation is unique if $g(0) = 0$.

The symbol $\mathcal{L}S_H(B^n)$ will denote the family of all pluriharmonic mappings $f = h+\overline{g}$ on B^n with $h \in \mathcal{L}S(B^n)$ and $g(0) = 0$. Observe that a mapping $f \in \mathcal{L}S_H(B^n)$ is not required to be sense-preserving; that is, its real Jacobian (when f is regarded as a mapping from $\mathbb{R}^{2n}$ to $\mathbb{R}^{2n}$) need not be positive. Note that every locally biholomorphic mapping is sense-preserving because its real Jacobian is equal to $|\det Df(z)|^2 > 0$.

For families $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}S_H(B^n)$ of pluriharmonic mappings we introduce the following notions of linear and affine invariance.

Linear Invariance. If $f = h + \overline{g} \in \mathcal{F}$ then for each $\varphi \in \mathrm{Aut}(B^n)$ the mapping

$$F(z) = [D\varphi(0)]^{-1}[Dh(\varphi(0))]^{-1}[f(\varphi(z)) - f(\varphi(0))], \qquad z \in B^n,$$

also belongs to $\mathcal{F}$.

Affine Invariance. If $f = h + \overline{g} \in \mathcal{F}$ and $A \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ has norm $\|A\| < 1$, and if $h + Ag$ is locally biholomorphic on B^n, then the mapping

$$F(z) = [I_n + ADg(0)]^{-1}[f(z) + A\overline{f(z)}], \qquad z \in B^n,$$

also belongs to $\mathcal{F}$.

We now define the order of a linearly invariant family $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}S_H(B^n)$ of pluriharmonic mappings by

$$\alpha = \alpha(\mathcal{F}) = \sup\left\{\frac{1}{2}\|D^2h(0)\| : f = h + \overline{g} \in \mathcal{F}\right\}.$$

References

[1] P. Duren, H. Hamada and G. Kohr, Two-point distortion theorems for harmonic and pluriharmonic mappings, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), 6197–6218.

[2] J. A. Jenkins, On weighted distortion in conformal mapping *II*, Bull. London Math. Soc. **30** (1998), 151–158.

[3] S. A. Kim and D. Minda, Two-point distortion theorems for univalent functions, Pacific J. Math. **163** (1994), 137–157.

[4] D. Kraus and O. Roth, Weighted distortion in conformal mapping in euclidean, hyperbolic and elliptic geometry, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **31** (2006), 111–130.

[5] P. T. Mocanu, Sufficient conditions of univalency for complex functions in the class C^1, Anal. Numer. Theor. Approx. **10** (1981), 75–79.

[6] T. Sheil-Small, Constants for planar harmonic mappings, J. London Math. Soc. **42** (1990), 237–248.

Extension operators and subordination chains

Ian GRAHAM (University of Toronto)
Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University)*1
Gabriela KOHR (Babeş-Bolyai University)

Since the work of Roper and Suffridge [11], there has been considerable interest in constructing holomorphic maps of the unit ball in $\mathbb{C}^n$ with various geometric properties (convexity, starlikeness, and spirallikeness) by using lower dimensional maps with similar properties. It is also interesting to extend subordination chains (which may be related to geometric properties such as the above). Recently M. Elin has introduced an approach to extension operators on Banach spaces based on semigroups which leads to an identification of some of the essential properties of such operators. In this talk we adopt Elin's point of view and give a theorem about the extension of subordination chains which extends and unifies existing results.

Let X and Y be complex Banach spaces with respect to the norms $\|\cdot\|_X$ and $\|\cdot\|_Y$, and let $Z = X \times Y$. Let B_X (resp. B_Y) be the unit ball of X (resp. Y).

Let $p : [0,1] \to [0,1]$ be a continuous function such that (see [1]):

(i) $p(0) = 1$ and $p(1) = 0$;

(ii) p is a strictly decreasing function;

(iii) $p\left(\dfrac{s_1+s_2}{2}\right) \geq \dfrac{1}{2}(p(s_1)+p(s_2)), \quad \forall s_1, s_2 \in [0,1]$.

For example, the function $p(t) = (1-t^q)^{1/r}$ $(q, r \geq 1)$ satisfies the above conditions.

The norm $\|(x,y)\|_Z$ of Z is defined to be the unique solution $\lambda \geq \|x\|_X$ of the equation $\|y\|_Y = \lambda p(\|x\|_X/\lambda)$. Then $(Z, \|\cdot\|_Z)$ is a Banach space. The set

$$B_Z = \Big\{(x,y) \in B_X \times B_Y \subset Z : \|y\|_Y < p(\|x\|_X)\Big\}$$

is the open unit ball of Z. Note that $\|\cdot\|_Z$ is the Minkowski functional of B_Z.

Recently Elin [1] introduced the notion of appropriate operator-valued mappings. We first extend this definition slightly so that we can apply it to transition mappings. We omit the requirement that $\hat{K}$ be closed under composition.

Definition 1 [3] *Let $\hat{\mathcal{K}} \subset \mathrm{Hol}(B_X)$ consisting of biholomorphic mappings and let $\hat{\Gamma} : \hat{\mathcal{K}} \times B_X \to L(Y)$ be such that $f \mapsto \hat{\Gamma}(f,\cdot)$ is a continuous mapping of $\hat{\mathcal{K}}$ into $\mathrm{Hol}(B_X, L(Y))$. We say that $\hat{\Gamma}$ is appropriate if it satisfies the followings:*

(i) id_X *belongs to* $\hat{\mathcal{K}}$, *and* $\hat{\Gamma}(\mathrm{id}_X, x) = \mathrm{id}_Y$;

(ii) $\hat{\Gamma}(f, g(x))\hat{\Gamma}(g,x) = \hat{\Gamma}(f \circ g, x)$ *for all* $f, g \in \hat{\mathcal{K}}$ *with* $f \circ g \in \hat{\mathcal{K}}$ *and* $x \in B_X$;

(iii) for each $f \in \hat{\mathcal{K}}$ *and* $x \in B_X$, *the corresponding operator* $\hat{\Gamma}(f,x)$ *is invertible;*

(iv) $\left\|\hat{\Gamma}(f,x)\right\|_{L(Y)} \leq \dfrac{p(\|f(x)\|_X)}{p(\|x\|_X)}$, *for all* $f \in \hat{\mathcal{K}}$ *and* $x \in B_X$.

Partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) no.22540213 from JSPS, 2011.
*1 e-mail: `h.hamada@ip.kyusan-u.ac.jp`
web: `http://www.ip.kyusan-u.ac.jp/J/kougaku/tb/hamada/`

For each appropriate mapping $\hat{\Gamma}$, we define the operator $\hat{\Phi} : \hat{\mathcal{K}} \to \mathrm{Hol}(B_Z, Z)$ by

$$\hat{\Phi}[f](x, y) = (f(x), \hat{\Gamma}(f, x)y).$$

We call $\hat{\Phi}$ the extension operator associated to $\hat{\Gamma}$.

We next adapt the notion of appropriate operator so that it applies to biholomorphic mappings from B_X into X, in particular to subordination chains. Our definition is a slight modification of [1, Definition 3.2].

Definition 2 [3] *Let $\hat{\mathcal{K}} \subset \mathrm{Hol}(B_X)$ consisting of biholomorphic mappings and let $\hat{\Gamma} : \hat{\mathcal{K}} \times B_X \to L(Y)$ be an appropriate mapping. Suppose that there are a non-empty set $\mathcal{K} \subset \mathrm{Hol}(B_X, X)$ consisting of biholomorphic mappings and a mapping $\Gamma : \mathcal{K} \times B_X \to L(Y)$ such that $h \mapsto \Gamma(h, \cdot)$ is a continuous mapping of $\mathcal{K}$ into $\mathrm{Hol}(B_X, L(Y))$ and*

(i) $\Gamma(h, g(x))\hat{\Gamma}(g, x) = \Gamma(h \circ g, x)$ for all $h \in \mathcal{K}$, $g \in \hat{\mathcal{K}}$ with $h \circ g \in \mathcal{K}$ and $x \in B_X$;

(ii) for each $h \in \mathcal{K}$ and $x \in B_X$, the operator $\Gamma(h, x)$ is invertible;

Then we say that $\hat{\Gamma}$ and Γ are associated appropriate mappings.

For each appropriate mapping Γ, we define the operator $\Phi : \mathcal{K} \to \mathrm{Hol}(B_Z, Z)$ by

$$\Phi[h](x, y) = (h(x), \Gamma(h, x)y).$$

We call Φ the extension operator associated to Γ.

References

[1] M. Elin, Extension operators via semigroups, J. Math. Anal. Appl. **377** (2011), 239–250.

[2] S. Gong, T.S. Liu, On the Roper-Suffridge extension operator, J. Anal. Math. **88** (2002), 397 404.

[3] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, Extension operators and subordination chains, J. Math. Anal. Appl. **386** (2012), 278–289.

[4] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr, Asymptotically spirallike mappings in several complex variables, J. Anal. Math. **105** (2008), 267–302.

[5] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr, Extreme points, support points and the Loewner variation in several complex variables, Sci. China Math., to appear.

[6] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, T.J. Suffridge, Extension operators for locally univalent mappings, Michigan Math. J. **50** (2002), 37–55.

[7] I. Graham, G. Kohr, Univalent mappings associated with the Roper-Suffridge extension operator, J. Anal. Math. **81** (2000), 331–342.

[8] I. Graham, G. Kohr, M. Kohr, Loewner chains and the Roper-Suffridge extension operator, J. Math. Anal. Appl. **247** (2000), 448–465.

[9] T.S. Liu, Q.H. Xu, Loewner chains associated with the generalized Roper-Suffridge extension operator, J. Math. Anal. Appl. **322** (2006), 107–120.

[10] J.A. Pfaltzgraff, T.J. Suffridge, An extension theorem and linear invariant families generated by starlike maps, Ann. Univ. Mariae Curie Sklodowska Sect. A. **53** (1999), 193–207.

[11] K. Roper, T.J. Suffridge, Convex mappings on the unit ball of $\mathbb{C}^n$, J. Anal. Math. **65** (1995), 333–347.

[12] Y. Zhu, M.S. Liu, The generalized Roper-Suffridge extension operator in Banach spaces, II, J. Math. Anal. Appl. **303** (2005), 530–544.

[13] Y. Zhu, M.S. Liu, Loewner chains associated with the generalized Roper–Suffridge extension operator on some domains, J. Math. Anal. Appl. **337** (2008), 949–961.

Diffeomorphisms between Siegel domains of the first kind preserving the holomorphic automorphism groups and applications

Akio Kodama (Kanazawa University)
Satoru Shimizu (Tohoku University)

Abstract

In 2010, in the class of hyperbolic manifolds in the sense of Kobayashi, we obtained an intrinsic characterization of bounded symmetric domains by their automorphism groups. In connection with this, we give in this talk a structure theorem on diffeomorphisms between Siegel domains of the first kind that preserve the holomorphic automorphism groups. As an application, we obtain a well-known fact that two Siegel domains of the first kind are biholomorphically equivalent if and only if they are linearly equivalent.

Let M be a connected complex manifold and $\mathrm{Aut}(M)$ the group of all biholomorphic automorphisms of M equipped with the compact-open topology. Then one of the fundamental problems in complex geometric analysis is to determine the complex analytic structure of M by its holomorphic automorphism group $\mathrm{Aut}(M)$. Of course, in many cases, this is a very difficult problem. However, in the class of hyperbolic manifolds in the sense of Kobayashi [2], we obtained the following characterization of bounded symmetric domains by their automorphism groups (cf. [3, Corollary 2]):

Let M be a connected hyperbolic manifold of dimension n and let D be a bounded symmetric domain in $\mathbb{C}^n$. Assume that $\mathrm{Aut}(M)$ is isomorphic to $\mathrm{Aut}(D)$ as topological groups. Then M is biholomorphically equivalent to D.

Here it would be natural to ask what happens when the domain D is a homogeneous bounded (not necessarily symmetric) domains in $\mathbb{C}^n$. Here we study exclusively Siegel domains of the first kind in conection with this question and we can prove the following:

THEOREM 1. *Let T_Ω and $T_{\Omega'}$ be Siegel domains of the first kind in $\mathbb{C}^n$ associated to the convex cones Ω and Ω' in $\mathbb{R}^n$. Let $G(T_\Omega)$ and $G(T_{\Omega'})$ be the identity components of $\mathrm{Aut}(T_\Omega)$ and $\mathrm{Aut}(T_{\Omega'})$, respectively. Assume that there exists a real analytic diffeomorphism $F : T_\Omega \to T_{\Omega'}$ with $FG(T_\Omega)F^{-1} = G(T_{\Omega'})$. Then, after replacing F by a suitable diffeomorphism of the form $\sigma\cdot F$, $\sigma \in G(T_{\Omega'})$, if necessary, F can be written in the form*

$$F(z) = Px + U(y) + \sqrt{-1}V(y), \quad z = x + \sqrt{-1}y \in T_\Omega,$$

where $P \in GL(n,\mathbb{R})$ and $U : \Omega \to \mathbb{R}^n$ is a real analytic mapping, and $V : \Omega \to \Omega'$ is a real analytic diffeomorphism which satisfies the following :

$$V(hy) = PhP^{-1}V(y) \quad \textit{for all} \;\; h \in G(\Omega),\, y \in \Omega,$$

The authors are partially supported by the Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No. 24540166 and (C) No. 22540167, the Ministry of Education, Science, Sports and Culture, Japan.
2000 Mathematics Subject Classification: Primary 32M05; Secondary 32Q28.
Keywords: Holomorphic automorphism groups, Siegel domains of the first kind, Holomorphic equivalence problem.

where $G(\Omega)$ is the identity component of the linear automorphism group $GL(\Omega)$ of the convex cone Ω in $\mathbb{R}^n$.

As an immediate consequence of this theorem, we obtain the following well-known fact (cf. [1]):

COROLLARY. *Let T_Ω and $T_{\Omega'}$ be Siegel domains of the first kind in $\mathbb{C}^n$ associated to the convex cones Ω and Ω' in $\mathbb{R}^n$. Then T_Ω is biholomorphically equivalent to $T_{\Omega'}$ if and only if there exists a diffeomorphism $V : \Omega \to \Omega'$ having the form $V(y) = Py$, $y \in \Omega$, with $P \in GL(n, \mathbb{R})$.*

THEOREM 2. *In the same notations as in Theorem 1, assume that there exists a topological group isomorphism $\Phi : G(T_\Omega) \to G(T_{\Omega'})$ and assume further that one of two Siegel domains T_Ω and $T_{\Omega'}$ is homogeneous. Then the other is also homogeneous and Φ induces a real analytic diffeomorphism $F : T_\Omega \to T_{\Omega'}$ such that $F(g\cdot z) = \Phi(g)\cdot F(z)$ for all $g \in G(T_\Omega)$ and all $z \in T_\Omega$. In particular, after replacing Φ by a suitable topological group isomorphism of the form $\sigma\Phi\sigma^{-1}$, $\sigma \in G(T_{\Omega'})$, if necessary, F can be written in the same form as in Theorem 1. Moreover, the restriction of Φ to the identity component $A(T_\Omega)$ of the affine automorphism group of T_Ω can be explicitly determined by the following :*

$$F(g\cdot z) = PhP^{-1}F(z) + Pa + (I_n - PhP^{-1})\mathfrak{a}_o, \quad z \in T_\Omega,$$

for every elenent $g = (h, a) \in A(T_\Omega) = G(\Omega) \times \mathbb{R}^n$, where $P \in GL(n, \mathbb{R})$ and I_n is the identity matrix of degree n, and $\mathfrak{a}_o$ is an element of $\mathbb{R}^n$.

In particular, as an application of our study here, we obtain the following:

FACT. *Let T_Ω and $T_{\Omega'}$ be homogeneous Siegel domains of the first kind in $\mathbb{C}^n$ with $n \leq 3$. Then T_Ω is biholomorphically equivalent to $T_{\Omega'}$ if and only if there exists a topological group isomorphism $\Phi : G(T_\Omega) \to G(T_{\Omega'})$.*

References

[1] W. Kaup, Y. Matsushima, and T. Ochiai, On the automorphisms and equivalences of generalized Siegel domains, Amer. J. Math. **92** (1970), 475–498.

[2] S. Kobayashi, Hyperbolic complex spaces, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1998.

[3] A. Kodama and S. Shimizu, Addendum to our characterization of the unit polydisc, Kodai Math. J. **33** (2010), 182–191.

Hopf 曲面の擬凸状領域について[1]

山口 博史 (滋賀大学)

1 序

与えられた $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $|a| > 1$, 自然数 $n \geq 1$ に対して，a に関しての Hopf 多様体は次で定義される. $\mathbb{H}_a := \mathbb{C}^n \setminus \{0\}/\sim$. 但し, $z' \sim z$ iff $\exists m \in \mathbb{Z}$ $s.t.$ $z' = a^m z$. $\mathbb{H}_a$ は n 次元コンパクト多様体である. 次が成立した (K-T. Kim, N. Levenberg & H.Y. [1]).

定理 1.1. D は $\mathbb{H}_a$ での 境界 ∂D が C^ω 級の擬凸状域とする. もし D が Stein 領域でないならば，$D \approx T_a \times D_0$. 但し，$T_a := \mathbb{C} \setminus \{0\}/\sim_a$ (1 次元トーラス), $D_0 := \mathbb{P}^{n-1}$ での境界 ∂D_0 が C^ω 級の或る擬凸状域である.

証明は, (i) 複素 Lie 群 M に，複素助変数 $t \in B = \{|t| < r\}$ と共に変化する滑らかな境界 $\partial D(t)$ を持つ領域 $D(t)$ の滑らか変動：$\mathcal{D} : t \in B \to D(t) \Subset M$ に対して，各 $D(t)$ のロバン定数 $\lambda(t)$ の変分公式を作り，「total space $\mathcal{D} = \bigcup_{t\in B}(t, D(t))$ が 空間 $B \times M$ での擬凸状域ならば，$-\lambda(t)$ は B 上の劣調和になる」ことを示し, (ii) それを「$\mathbb{H}_a$ は Lie 変換群 $GL(n, C)$ に関して 等質空間である」ことに応用して, なされた.

与えられた $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$ に対して, (a, b) に関する Hopf 曲面は 次で定義される：$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{(a,b)} := \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}/\sim$. 但し, $(z, w) \sim (z', w')$ iff $\exists n \in \mathbb{Z}$ $s.t.$ $(z', w') = (a^n z, b^n w)$. $\mathcal{H}$ は 2 次元コンパクト多様体である. $\mathbf{T}_a := T_a \times \{0\}$, $\mathbf{T}_b := \{0\} \times T_b$ (1 次元トーラス), $\mathcal{H}^* := \mathcal{H} \setminus (\mathbf{T}_a \cup \mathbf{T}_b)$ とおくと

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^* \cup \mathbf{T}_a \cup \mathbf{T}_b \quad \text{(disjoint union)}.$$

$a = b$ の場合を除き, $\mathcal{H}$ は等質空間ではないが, $\mathcal{H}^*$ は常に 単位元 $e = (1, 1)$ の Lie 変換群 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ に関して等質空間である. 即ち，Hopf 曲面 $\mathcal{H}$ は等質空間 $\mathcal{H}^*$ に 2 つのトーラス $\mathbf{T}_a, \mathbf{T}_b$ を加えたコンパクト化である. これを，上の命題の証明法に適用して. 次の定理を得る. 但し，$\rho \geq 1$ を次で定義する：

$$\rho := \frac{\log |b|}{\log |a|} \geq 1.$$

定理 1.2. D は $\mathcal{H}$ での 境界 ∂D が C^ω 級の擬凸状域とする. もし D が Stein 領域でないならば，D は次のいずれかである：

(a) ρ は無理数の場合：$c \in (0, +\infty)$ に対して，

$$\Sigma_c := \{|w| = c|z|^\rho\}/\sim, \quad \Sigma_0 := \mathbf{T}_a, \quad \Sigma_{+\infty} := \mathbf{T}_b$$

と置くと $\mathcal{H} = \bigcup_{c\in[0,+\infty]} \Sigma_c$ (disjoint union)；各 Σ_c, $c \in (0, \infty)$ は $\mathcal{H}^*$ の Levi-flat 曲面；$\Sigma_c \approx \Sigma_1$(解析的に同値) であり, 領域 D は次のいずれかである：

(a-1) $\exists k_1,\ k_2 (0 < k_1 < k_2 < +\infty)$ $s.t.$ $D = \bigcup_{c\in(k_1,k_2)} \Sigma_c$.

(a-2') $0 < \exists\, k < +\infty$ $s.t.$ $D = \bigcup_{c\in[0,k)} \Sigma_c$.

(a-2") $0 < \exists\, k < +\infty$ $s.t.$ $D = \bigcup_{c\in(k,+\infty]} \Sigma_c$.

(b) ρ は有理数, $\rho = q/p$, $(p, q) = 1$ の場合：

$$\tau := \frac{1}{2\pi}\left(\frac{q}{p} \arg a - \arg b\right), \quad 0 \leq \arg a,\ \arg b < 2\pi,$$

[1] これは N. Levenberg 氏 (Indiana 大) との共同研究 [2] である.

と置き，次の 2 つの場合に分ける：

(b1) τ は無理数の場合： (**a**) と同じなので, (a-1), (a-2'), (a-2") と書く.

(b2) τ は有理数の場合： $\tau=\frac{m}{l}$, $l\geq 1$, $(l,m)=\pm 1$ ($\tau=0$ とき $l=1$).

$$\begin{aligned}&\nu:=pl/g\in\mathbb{Z} \quad (\text{但し}, g:=p,l \text{ の最大公約数}),\\ &K:=\{e^{2\pi i\,k/\nu}\}_{k=0,1,\ldots,\nu-1} \quad (\mathbb{C}^* \text{ の部分群}),\\ &\sigma_c:=\{w=c\,z^{\rho}\}/\sim \ \text{ for } c\in\mathbb{C}^*/K,\quad \sigma_0:=\mathbf{T}_a,\quad \sigma_\infty:=\mathbf{T}_b\end{aligned}$$

とおくと, $\mathcal{H}=\bigcup_{c\in\mathbb{P}^1}\sigma_c$ (disjoint union), 各 σ_c, $c\in\mathbb{C}^*$ は $\mathcal{H}^*$ での一次元トーラス；$\sigma_c\approx\sigma_1$ であり，領域 $D=\bigcup_{c\in\delta}\sigma_c$. 但し，$\delta$ は $\mathbb{P}^1$ の或る領域で $\partial\delta$ が C^ω 級である.

本講演はこの定理 1.2 についての話である.

謝辞： 上田哲生氏（京都大）は 定理 1.2 の (**a**) を予想され，我々が 定理 1.2 を考えることを示唆された．このことに関して深く感謝致します。

2 Hopf 曲面 $\mathcal{H}_{(a,b)}$ の性質

この節は 上田氏に依る．第一節で述べた (a,b) に関する Hopf 曲面 $\mathcal{H}:=\mathcal{H}_{(a,b)}$ を考える．$\mathbb{C}^*:=\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $(\mathbb{C}^2)^*:=\mathbb{C}^2\setminus\{(0,0)\}$ と書く．空間 $(\mathbb{C}^2)^*$ を

$$[z,w]:=\{(a^nz,b^nw):\ n\in\mathbb{Z}\},\quad (z,w)\in(\mathbb{C}^2)^*$$

とクラス分けした空間が $\mathcal{H}$ である．$\mathcal{H}$ の $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$ での典型的な基本領域は

$$\mathcal{F}:=\{|z|\leq|a|\}\times\{1<|w|\leq|b|\}\ \cup\ \{1<|z|\leq|a|\}\times\{|w|\leq|b|\}=:E_1\cup E_2.$$

$\mathcal{F}_k:=\mathcal{F}\times(a^k,b^k)$, $k\in\mathbb{Z}$ も基本領域であり，$(\mathbb{C}^2)^*=\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}_n$ (disjoint union).

次の 2 つの記号を用いる：任意の集合 $D\subset\mathcal{H}$ に対して

$$\begin{aligned}\widetilde{D}&:=\{(z,w)\in(\mathbb{C}^2)^*:[z,w]\in D\}\subset(\mathbb{C}^2)^*;\\ \mathcal{I}&:=\{(a^n,b^n)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*:n\in\mathbb{Z}\}\subset\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*.\end{aligned}\tag{2.1}$$

$\mathcal{I}$ は $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$ での 孤立集合である.

ρ は無理数と仮定する．次の $\mathcal{H}^*$ 上の実関数 $U[z,w]$ は以下に述べる性質もつ：

$$U[z,w]:=\frac{\log|z|}{\log|a|}-\frac{\log|w|}{\log|b|},\qquad [z,w]\in\mathcal{H}^*.$$

(1) $U[z,w]$ は $\mathcal{H}^*$ での多重調和関数,

$$\lim_{[z,w]\to\mathbf{T}_a}U[z,w]=-\infty,\qquad \lim_{[z,w]\to\mathbf{T}_b}U[z,w]=+\infty.$$

よって，任意の開区間 $I\Subset(-\infty,\infty)$ に対して，集合 $U^{-1}(I)$ は $\mathcal{H}^*$ での 2 つの Levi-flat な曲面で囲まれた両面擬凸状域である.

(2) $|U[z,w]|:=\mathrm{Max}\{U[z,w],-U[z,w]\}$ は $\mathcal{H}^*$ での多重劣調和近似関数であり，Levi-flat な曲面 $U[z,w]=0$, i.e., $|w|=|z|^{\rho}$ を除き，多重調和である.

(3) $c \in (-\infty, +\infty)$ に対して，定数面 $S_c : U[z,w] = c$ は $|w| = k|z|^\rho$ (但し，$k = e^{-c\log|b|} > 0$) と同じ．従って，定理 1.2 に現れた (a-1), (a-2'), (a-2") に対応する Stein でない擬凸状域 D は各々 $U^{-1}((c_1, c_2))$, $U^{-1}((c, +\infty)) \cup \mathbf{T}_a$, $U^{-1}((-\infty, c)) \cup \mathbf{T}_b$ に他ならない．

S. U. Nemirovskii [3] は，$a > 1$ として，Hopf 曲面 $\mathcal{H}_{(a,a)}$ での領域 $D = \mathbb{C}_z \times \{\Re w > 0\}/\sim$ は Levi-flat な曲面 ∂D で囲まれた Stein 領域であることを示した．この領域 D は上記 (3) の上田領域とコントラストをなしている．

3 準備のための補題

[I] $\mathcal{H}_{(a,b)}$ 上のベクトル場に関するもの：

空間 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ で正則ベクトル場 $X = \alpha z\frac{\partial}{\partial z} + \beta w\frac{\partial}{\partial w}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ からなる線形空間 $\mathfrak{X}$ を考える．初期値 (z_0, w_0) の解曲線は $(z_0, w_0)\exp tX = \{(z,w) = (z_0e^{\alpha t}, w_0e^{\beta t}) : t \in \mathbb{C}\}$ である．ベクトル場 X は Hopf 曲面 $\mathcal{H}_{(a,b)} = \mathcal{H}$ のそれでもある．例えば，$\alpha, \beta \neq 0$ とする．$c_0 : = w_0/z_0^{\beta/\alpha}$ とおくと，解析曲線 $w = c_0\, z^{\beta/\alpha}$ は $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ での解であり，$\mathcal{H}$ での解曲線 $[z_0, w_0]\exp t\, X$ は

$$\{w = c_0\, z^{\beta/\alpha}\}/\sim \qquad \text{in } \mathcal{H}^*.$$

特別のベクトル場

$$X_u = (\log|a|)z\frac{\partial}{\partial z} + (\log|b|)w\frac{\partial}{\partial w} \ \in \mathfrak{X}$$

で生成される線形部分空間を $\mathfrak{X}_u = \{cX_u : c \in \mathbb{C}\}$ とおく．初期値 $e = [1,1]$ の X_u の解曲線は $\tilde{\sigma}_u = \{w = z^\rho\}/\sim$ in $\mathcal{H}^*$ である．$\tilde{\sigma}_u$ の $\mathcal{H}$ での閉包を $\tilde{\Sigma}_u$ と書く．次の elementary 補題を得る．

補題 3.1. 1. ベクトル場 X_u に関しては

(1) ρ が無理数か，ρ は有理数で τ が無理数ならば，$\tilde{\Sigma}_u = \{|w| = |z|^\rho\}/\sim$ は $\mathcal{H}^*$ でのコンパクトな Levi-flat 曲面である．

(2) ρ も τ も有理数ならば，$\tilde{\sigma}_u$ は $\mathcal{H}^*$ でのコンパクトな曲線 (トーラス) である．

2. ベクトル場 $X = \alpha z\frac{\partial}{\partial z} + \beta w\frac{\partial}{\partial w} \notin \mathfrak{X}_u$ に関しては，初期値 e の解曲線 $\sigma : = \{\exp tX : t \in \mathbb{C}\}/\sim$ は $\mathcal{H}$ においてコンパクトでない．σ の $\mathcal{H}$ での閉包を Σ と書くと次が成立する：

(1) $\alpha, \beta \neq 0$ ならば，$\Sigma \supset \mathbf{T}_a \cup \mathbf{T}_b$.

(2) $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ ならば，$\Sigma \supset \mathbf{T}_a$ かつ $\Sigma \cap \mathbf{T}_b = \emptyset$.

この補題から 次の ($\mathfrak{a}$), ($\mathfrak{b}$) が導かれる．

($\mathfrak{a}$) ρ が無理数か，ρ が有理数で τ が無理数ならば，

$$\mathcal{H} = \left(\bigcup_{c\in(0,\infty)}\{|w| = c|z|^\rho\}/\sim\right) \cup \mathbf{T}_a \cup \mathbf{T}_b \quad \text{(disjoint union)}.$$

点 $[z_0, w_0] \in \mathcal{H}^*$ に対して $c : = |w_0/z_0^\rho|$ とおくと，$\Sigma_c : = \{|w| = c|z|^\rho\}/\sim$ は X_u の解曲線 $[z_0, w_0]\exp tX_u$ の $\mathcal{H}$ における閉包である．各 Σ_c は $\mathcal{H}^*$ でのコンパクトな Levi-flat 曲面であり，Σ_1 と同値である．従って，$\Sigma_0 = \mathbf{T}_a$, $\Sigma_\infty = \mathbf{T}_b$ と書くと $\mathcal{H} = \bigcup_{c\in[0,\infty]}\Sigma_c$ (disjoint union).

(**b**) ρ も τ も有理数ならば,

$$\mathcal{H} = \left(\bigcup_{c\in\mathbb{C}^*}\{w = cz^\rho\}/\sim\right) \cup \mathbf{T}_a \cup \mathbf{T}_b \quad \text{(disjoint union)}.$$

点 $[z_0, w_0] \in \mathcal{H}^*$ に対して $c = w_0/z_0^\rho$ とおくと, X_u の解曲線 $[z_0, w_0]\exp tX_u$ は $\sigma_c :\ = \{w = cz^\rho\}/\sim$ に一致し, $\mathcal{H}^*$ でのコンパクト曲線（トーラス）である. $K :\ = \{e^{i2\pi k/\nu}\}_{k=0,1,\dots,\nu-1}$ (ν は定理 1.2 の (b2) で定義されたもの）とおくと $\sigma_c = \sigma_{c'}$ iff $c/c' \in K$. $\mathbb{C}^*/K$ はリーマン面として $\mathbb{C}^*$ と同値だから, $c = cK$ と書き, $\sigma_0 = \mathbf{T}_a$, $\sigma_\infty = \mathbf{T}_b$ と書くと $\mathcal{H} = \bigcup_{c\in\mathbb{P}^1}\sigma_c$ (disjoint union).

[II] 擬凸状域に関するもの：

$\mathbb{C}_z \times \mathbb{C}_w$ の 2 重円板 $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 = \{|z| < r_1\} \times \{|w| < r_2\}$ 内の擬凸状域 D が次の条件を満たすとする： $D \not\Subset \Delta$; Δ での境界 ∂D は C^ω 級 ; $\partial D \ni (0,0)$; ∂D は w-方向に解けている. 即ち, D の Δ での C^ω 級定義関数を $\psi(z,w)$ とすると $D = \{(z,w) \in \Delta : \psi(z,w) < 0\}$; $\partial D \cap \Delta = \{(z,w) \in \Delta :\ \psi(z,w) = 0\}$; $\psi(0,0) = 0$. 更に, $\psi(z,w) = 0$ では $\nabla\psi(z,w) \neq 0$, $\frac{\partial\psi}{\partial w} \neq 0$, かつ, Levi form

$$\mathcal{L}\psi(z,w) :\ = \frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial\bar{z}}\left|\frac{\partial\psi}{\partial w}\right|^2 - 2\Re\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial\bar{w}}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\psi}{\partial w}\right\} + \frac{\partial^2\psi}{\partial w\partial\bar{w}}\left|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|^2 \ \geq 0. \tag{3.1}$$

よって, $\{w : \psi(0,w) = 0\}$ は Δ_2 での原点 $w = 0$ を通る C^ω Jordan 曲線である. D の境界を $\mathcal{S} :\ = \partial D \cap \Delta$ とかき,

$$D(z) :\ = \{w \in \Delta_2 : (z,w) \in D\} \subset \Delta_2; \quad S(z) :\ = \{w \in \Delta_2 : (z,w) \in \mathcal{S}\} \subset \Delta_2$$

と書くと $S(0) \ni 0$; $D = \bigcup_{z\in\Delta_1}(z, D(z))$; $\mathcal{S} = \bigcup_{z\in\Delta_1}(z, S(z))$ である.

$r_1, r_2 > 0$ を適当に小さくとると

(i) 各 $z \in \Delta_1$ に対して, $D(z) \neq \emptyset$ であって, $S(z)$ は $\partial\Delta_2$ のある 2 点 $a(z)$, $b(z)$ を結ぶ Δ_2 での C^ω Jordan 曲線である.

次の補題のための必要条件をおく： (ii) $\psi(z,0) \not\equiv 0$ in Δ_1.

補題 3.2. 上の条件 (i), (ii) の下で, 与えられた任意の円板 $\delta_1 = \{|z| < r\} \subset \Delta_1$ に対して, 或る円板 $\delta_2 = \{|w| < r'\} \subset \Delta_2$ が存在して, $\bigcup_{z\in\delta_1} S(z) \supset D(0) \cap \delta_2$ である.

これは擬凸状域 $D|_{\delta_1} = \bigcup_{z\in\delta_1}(z, D(z)) \subset \delta_1 \times \mathbb{C}_w$ に対して,「$w_0 \in D(z), \forall\ z \in \delta_1$ ならば, w_0 と境界 $\partial D(z)$ との $\mathbb{C}_w$ でのユークリッド距離 $R(z)$ は $z \in \delta_1$ に関して優調和である」というよく知られた Hartogs の定理の部類に属するものと見れる. 補題 3.2 の証明は Levi form の条件 (3.1) を何度か使う繊細だが初等的なものであった (cf : p.38-44, [2]). 補題 3.2 は, この講演の主補題 4.1 の証明に用いられた.

[III] 領域の変動に関するもの：

$\mathbb{C}^2$ のユークリッド距離 $ds^2 = |dz|^2 + |dw|^2$ の Lie 群 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ への制限を考える. また, $\mathbb{C}^2$ 上の C^ω 正数値実関数 $c(z,w)$ を固定し, $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ に制限する. これら ds^2, $c(z,w)$ によって, $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ の領域での $c-$ 調和関数が定義される. 従って, 滑らかな境界を持つ領域 $\Omega \Subset \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ 及び 定点 $p_0 \in \Omega$ に対して, p_0 に極を持つ Ω での $c-$Green 関数及び $c-$Robin 定数を作れる. ポテンシャル論における通常の近似法によって, $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ の（有界でもなく, 境界が滑らかでもない）任意の領域 Ω 及び $p_0 \in \Omega$ に対してもそれらは定義される. [2]

[2] $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ での 任意の Kähler 距離 dS^2 (例えば, $\mathbb{P}^2$ の Fubini-Study 距離の $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ への制限) 及び C^ω 正数値実関数 $C(z,w)$ に対して, 同様に, Ω での $C-$Robin 定数 $\Lambda(p)$ が作れる. このような $C-$Robin 定数を作れる柔軟性は補題 5.1 の証明で使われた.

$B=\{|t|<r\}\subset\mathbb{C}_t$ とする. 各 $t\in B$ に対して, $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$ での滑らかな境界 $\partial D(t)$ を持つ領域 $D(t)$ の滑らかな変動

$$\mathcal{D}:\ t\in B\to D(t)\subset\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$$

を考える. $\mathcal{D}:=\bigcup_{t\in B}(t,D(t))$; $\partial\mathcal{D}|_B=\bigcup_{t\in B}(t,\partial D(t))$ in $B\times(\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*)$ とおく. $\mathcal{D}\supset B\times\{e\}$ と仮定する. $\mathbb{C}^2$ での微分作用素 $\Delta_{(z,w)}-c(z,w)$ に関する 単位元 e での基本解 (極) $Q_0(z,w)$ を固定する. 各 $D(t)$, $t\in B$ には極 $Q_0(z,w)$ を持つ c−Green 関数 $g(t,(z,w))$ および c−Robin 定数 $\lambda(t)$ が定まる. $\zeta=(z,w)$, $c(z,w)=c(\zeta)>0$, $g(t,\zeta)=g(t,(z,w))$ とかく. [1] の定理 3.1 で次の変分公式を得た:

$$\frac{\partial^2\lambda(t)}{\partial t\partial\bar{t}}=-c_2\int_{\partial D(t)}K_2(t,\zeta)\|\nabla_\zeta\, g(t,\zeta)\|^2dS_\zeta$$
$$-4c_2\iint_{D(t)}\Big(\Big|\frac{\partial^2 g(t,\zeta)}{\partial\bar{t}\partial z}\Big|^2+\Big|\frac{\partial^2 g(t,\zeta)}{\partial\bar{t}\partial w}\Big|^2\Big)dV_\zeta-2c_2\iint_{D(t)}c(\zeta)\Big|\frac{\partial g(t,\zeta)}{\partial t}\Big|^2dV_\zeta.$$

但し, $1/c_2$ は $\mathbb{C}^2$ の単位球面面積 ; dV_ζ, dS_ζ は $\mathbb{C}^2$ での体積, 面積要素;

$$K_2(t,\zeta)=\mathcal{L}(t,\zeta)/\|\nabla_\zeta\psi(t,\zeta)\|^3;$$
$$\mathcal{L}(t,\zeta)=\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial\bar{t}}\|\nabla_\zeta\psi\|^2-2\Re\left\{\frac{\partial\psi}{\partial t}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar{t}\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial\bar{w}}\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar{t}\partial w}\Big)\right\}+\Big\|\frac{\partial^2\psi}{\partial t}\Big\|^2\Delta_\zeta\psi\ .$$

$\psi(t,\zeta)$ は $\mathcal{D}|_B$ の定義関数である. 上記の変分公式から

補題 3.3. Total space $\mathcal{D}$ が $B\times(\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*)$ での擬凸状域ならば,

$$\frac{\partial^2\lambda(t)}{\partial t\partial\bar{t}}\le-2c_2\iint_{D(t)}c(\zeta)\Big|\frac{\partial g(t,\zeta)}{\partial t}\Big|^2dV_\zeta\le 0,\qquad t\in B$$

が成立し, $-\lambda(t)$ は B で劣調和である. 更に, 次を得る:

(1) $\lambda(t)$ が B で調和ならば, $\mathcal{D}$ は直積 $B\times D(0)$ である.

(2) 或る $t_0\in B$ で $-\lambda(t)$ が強劣調和で無いならば, $\frac{\partial g}{\partial t}(t,\zeta)\big|_{t=t_0}\equiv 0$ *on* $D(t_0)$.

(3) 或る $t_0\in B$ で, $\exists\, z_0\in D(t_0)$ *s.t.* $\frac{\partial\psi}{\partial t}(t_0,z_0)\neq 0$ ならば, $-\lambda(t)$ は点 t_0 で強劣調和である.

上記の補題 の (1), (2), (3) は [1] で使われた. 今回は, (3) の待遇命題である (4) が定式化され, 補題5.1 で使われた.

4 D 上の多重劣調和近似関数 $-\lambda[z,w]$ の作成

点 $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$ は $(\alpha,\beta):\ [z,w]\in\mathcal{H}\mapsto[\alpha z,\beta w]\in\mathcal{H}$ によって, Hopf 曲面 $\mathcal{H}$ の自己同形写像を定める. 即ち, $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$ は $\mathcal{H}$ に作用する可換な Lie 群である. これは $\mathcal{H}$ 上では 推移的ではないが, 領域 $\mathcal{H}^*$ 上では 推移的, 即ち, $\mathcal{H}^*$ は Lie 変換群 $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$ によって等質空間である. 点 $[z,w]\in\mathcal{H}^*$ に関する $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$ の同位部分群 $I_{[z,w]}:=\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*:(\alpha,\beta)[z,w]=[z,w]\}$ は (2.1) で定義した $\mathcal{I}$ に等しく, $[z,w]\in\mathcal{H}^*$ に依らない. 故に, $\mathcal{H}^*=(\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*)/\mathcal{I}$.

この節では常に「D は $\mathcal{H}$ での境界 ∂D が C^ω 級の擬凸状域とし, $D^*:=D\setminus(\mathbf{T}_a\cup\mathbf{T}_b)\subset\mathcal{H}^*$ とおく.」 任意の $[z,w]\in\mathcal{H}$ に対して

$$D[z,w]:=\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*:(\alpha,\beta)[z,w]\in D\}\subset\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$$

と定義する．$D\cap \mathbf{T}_a =: D_a\times\{0\}$, $D\cap\mathbf{T}_b =: \{0\}\times D_b$ かつ $\widetilde{D_a} := \{a^n z : z\in D_a,\ n\in\mathbb{Z}\}\subset\mathbb{C}^*_z$; $\widetilde{D_b} := \{b^n w : w\in D_b,\ n\in\mathbb{Z}\}\subset\mathbb{C}^*_w$ と置くと

$$\begin{aligned}
D[z,w] &= \big((1/z,1/w)\cdot D^*\big)\times\mathcal{I} = (1/z,1/w)\cdot\widetilde{D^*} && \text{if } [z,w]\in D^*;\\
D[z,0] &= \big(\tfrac{1}{z}D_a,\mathbb{C}^*\big)\times\mathcal{I} = \big(\tfrac{1}{z}\widetilde{D_a}\big)\times\mathbb{C}^*_w && \text{if } [z,0]\in D\cap\mathbf{T}_a;\\
D[0,w] &= \big(\mathbb{C}^*,\tfrac{1}{w}D_b\big)\times\mathcal{I} = \mathbb{C}^*_z\times\big(\tfrac{1}{w}\widetilde{D_b}\big) && \text{if } [0,w]\in D\cap\mathbf{T}_b
\end{aligned}$$

であり，次を得る：

(1) 各点 $[z,w]\in D$ に対して，$D[z,w]$ は $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$ での C^ω 級の $\partial D[z,w]$ を持ち，e を含む開集合 (一般には $D[z,w]\not\subset\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$) である．

(2) $e\in D$ ならば，$D[e]=\widetilde{D^*}$; $D[z,w]=D[z,w]\times\mathcal{I}$ for $[z,w]\in D$; $D[z,w]=D^*[z,w]$ for $[z,w]\in D^*$.

(3) (i) $[z,w],[z',w']\in D^*$ に対して，$D[z,w]=(\frac{1}{z},\frac{1}{w})\,\widetilde{D^*}$, $D[z',w']=(\frac{z}{z'},\frac{w}{w'})\,D[z,w]$. 故に，$D[z,w]\approx D[z',w']$ in $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$.

(ii) $[z,0],[z',0]\in D\cap\mathbf{T}_a$ に対して $D[z',0]=(\frac{z}{z'},1)\,D[z,0]$. 故に，$D[z,0]\approx D[z',0]$ in $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$.

(4) 点 $[z_0,0]\in D\cap\mathbf{T}_a$ に 点列 $[z_n,w_n]\in D^*$ $(n=1,2,\ldots)$ が $\mathcal{H}$ において 収束したとする．任意の $0<r<R$ に対して $\mathcal{A}(r,R) := \{r<|z|<R\}\times\{r<|w|<R\}\subset\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$ とおくと 一様に

$$\lim_{n\to\infty}\partial D[z_n,w_n]\cap\mathcal{A}(r,R)=\partial D[z_0,0]\cap\mathcal{A}(r,R)\quad \text{in } \mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*.$$

4 次元空間 $D\times(\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*)$ での領域 $\mathcal{D} := \bigcup_{[z,w]\in D}([z,w],D[z,w])$ を考える．これは関数論的 ” 平行 ” 移動による変動

$$\mathcal{D} : [z,w]\in D\to D[z,w]\subset\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$$

と見做せる．各 $[z,w]\in D$ の定める領域 $D[z,w]$ は e を含むから，$D[z,w]$ には e に極を持つ c−Green 関数 $g([z,w],(\xi,\eta))$ 及び c−Robin 定数 $\lambda[z,w]$ が定まる．我々は $[z,w]\in D\to\lambda[z,w]\in\mathbb{R}$ を「D での c−Robin 関数」と呼ぶ．

補題 4.1. (1) $-\lambda[z,w]$ は D 上の多重劣調和関数である．

(2)-(a) $[z_0,w_0]\in\partial D^*$ に対して，$\lim_{[z,w]\to[z_0,w_0]}\lambda[z,w]=-\infty$.

(2)-(b) $[z_0,0]\in\partial D\cap\mathbf{T}_a$ に対して，$\lim_{[z,w]\to[z_0,0]}\lambda[z,w]=-\infty$.

(3) $\partial D\not\supset\mathbf{T}_a$, $\partial D\not\supset\mathbf{T}_b$ ならば，$-\lambda[z,w]$ は D 上の多重劣調和近似関数である．

証明. この補題は $\mathcal{H}$ の擬凸状域 D 上の Robin 関数 $\lambda[z,w]$ の基本的性質なので (1), (2) を 4 段階に分けて示す. (3) は (1), (2) から自明である．

(第 1 段階) $-\lambda[z,w]$ は D^* で多重劣調和関数である．
実際，点 $[\zeta_0]=[z_0,w_0]\in D^*$, $\mathbf{a}\in\mathbb{C}^2$ $s.t.$ $\|\mathbf{a}\|=1$ を固定し，円板 $B=\{|t|<r\}$ と $[\zeta_0]$ を通る D^* 内の直線 $l : t\in B\to[\zeta(t)]=[z(t),w(t)]=[\zeta_0]+\mathbf{a}t$ を描き，$D(t) := D[\zeta(t)]$ $\subset\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$, $t\in B$; $g(t,(z,w)) := g([\zeta(t)],(z,w))$, $(z,w)\in D[\zeta(t)]$ とおく．

$$D(t)=D[\zeta_0]\,\Big(\frac{z_0}{z(t)},\frac{w_0}{w(t)}\Big)\quad \text{in } \mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*.$$

より, $t\in B$ を複素助変数とする領域の“平行移動” による変動 $\mathcal{D}|_B: t\in B\to D(t)\subset \mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$ を得る. Total space $\mathcal{D}|_B:=\bigcup_{t\in B}(t,D(t))$ は $B\times(\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*)$ での擬凸状域だから, 補題3.3 から $-\lambda(t)$ は B 上で劣調和である.

(第 2 段階) $-\lambda[z,w]$ は D まで多重劣調和に延長できる.

実際, $\lambda[z,w]$ は D 全体で定義されていて, その作り方から D において有限値連続である. 更に, $D\setminus D^*$ は二つの一次元トーラス $\mathbf{T}_a\cup\mathbf{T}_b$ に含まれるから, 第 2 段階が言えて, 補題 4.1 の (1) を得る.

(第 3 段階) 境界点 $[z',w']\in\partial D^*$ に対して, $\displaystyle\lim_{[z,w]\in D\to[z',w']}\lambda[z,w]=-\infty$.

実際. $z'\neq 0$, $w'\neq 0$ であるから, 領域 $D[z,w]$ の作り方から, $\mathcal{H}$ において, 内点 $[z,w]\in D^*$ が境界点 $[z',w']$ 近づくとき, 滑らかな境界 $\partial D[z,w]$ は極 e に近づく. 従って, ポテンシャル論から補題 4.1 の 2.(a) を得る.

(第 4 段階) 点 $[z_0,0]\in\partial D\cap\mathbf{T}_a$, $[z,w]\in D$ に対して. $\displaystyle\lim_{[z,w]\to[z_0,0]}\lambda[z,w]=-\infty$.

実際, 主張は 第3段階と同じである. 第3段階の場合には D が $\mathcal{H}$ での擬凸状域である必要はなかった. 第4段階では D が擬凸状域でない場合, それがが言えない簡単な例がある. この現象は 等質空間の擬凸状域から生じる ” 平行移動変動 ” でも起きなった. 即ち, Robin 関数 $-\lambda(\zeta)$ が (D が擬凸状を使って) 多重劣調和性を示す事 と $-\lambda(\zeta)$ が近似関数であることを示すこととは分離していた. 第4段階は 擬凸状域に関する 補題 3.2 を使って示された. 証明は微妙で少し長いので割愛する (cf: p. 15-18, [2]). □

補題 4.2. $-\lambda[z,w]$ は D^* 内のある点 $p_0=[z_0,w_0]$ において「強多重劣調和ではない」と仮定する. このとき

(1) 次の性質を持つ $\mathcal{H}$ 上の $\mathfrak{X}$ に属するベクトル場 $X=\alpha z\frac{\partial}{\partial z}dz+\beta w\frac{\partial}{\partial w}dw\neq 0$ が存在する:

> $[z,w]\in D^*$ (resp. ∂D^*) ならば, $\mathcal{H}$ での解曲線 $[z,w]\exp tX$ *in* $\mathcal{H}$ は D^* (resp. ∂D^*) に含まれる. この性質を持つベクトル場 X を 境界 ∂D^* に関する “ 接ベクトル場 ” と呼ぶ.

(2) 上記のベクトル場 X と D とは次の関係がある:

- (i) $\partial D\not\supset\mathbf{T}_a$ かつ $\partial D\not\supset\mathbf{T}_b$ ならば, $X\in\mathfrak{X}_u$ であり,
  - (i-a) ρ が無理数 か, ρ は有理数で τ は無理数の場合: D は 定理 1.2 の (a-1).
  - (i-b) ρ も τ も有理数の場合: D は (b2), $D=\bigcup_{c\in\delta}\sigma_c$. 但し, $\delta\subset\mathbb{C}^*$.

  いずれの場合も $\partial D\cap(\mathbf{T}_a\cup\mathbf{T}_b)=\emptyset$ である.
- (ii) $\partial D\supset\mathbf{T}_a$ かつ $\partial D\not\supset\mathbf{T}_b$ ならば, X は次の 3 つの場合に分かれる:
  - (ii-a) $X\in\mathfrak{X}_u$ であり, D は (b2), $D=\bigcup_{c\in\delta}\sigma_c$. 但し, $\partial\delta\ni 0$, $\partial\delta\ni\infty$.
  - (ii-b) $X=cz\frac{\partial}{\partial z}$ であり. D は *“Nemirovskii type”* である. すなわち. $b>1$ であり, $D=\mathbb{C}_z\times\{Au+Bv<0\}/\sim$. 但し, $w=u+iv$, $(A,B)\neq(0,0)$.
- (iii) $\partial D\supset\mathbf{T}_a\cup\mathbf{T}_b$ ならば, $X\in\mathfrak{X}_u$ であり, D は (b2), $D=\bigcup_{c\in\delta}\sigma_c$. 但し, $\partial\delta\ni 0,\infty$.

(1) の証明. $-\lambda[z,w]$ への条件からベクトル場 $X\in\mathfrak{X}$ が存在して,

$$X=\alpha z\frac{\partial}{\partial z}+\beta w\frac{\partial}{\partial w}\ \neq 0\quad s.t.\quad \frac{\partial^2\lambda[p_0\exp\ tX]}{\partial t\partial\bar{t}}\Big|_{t=0}=0. \tag{4.1}$$

この X が ∂D^* に関して 接ベクトル場であることを示そう．小さい円板 $B=\{|t|<r\}$ を取れば，任意の $t\in B$ に対して $p_0\exp tX\subset D^*$ である．$D(t)=D[p_0\exp tX]\subset\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$; $g(t,(z,w))=g([p_0\exp tX],(z,w))$; $\lambda(t)=\lambda[p_0\exp tX]$ とおく．領域の変動 $\mathcal{D}|_B:\ t\in B\to D(t)\subset\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$ を得るが, total space $\mathcal{D}|_B$ は $B\times(\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*)$ での擬凸状域であるから (4.1) と補題 3.3 の (2) から

$$\left.\frac{\partial g(t,(z,w))}{\partial t}\right|_{t=0}\equiv 0\quad \text{on } D[z_0,w_0]\cup\partial D[z_0,w_0].$$

各 $t\in B$ に対して，$\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$ の自己同形写像

$$(Z,W)\to(z,w)=F(t,(Z,W))=(Z,W)([z_0,w_0]\exp\ tX)^{-1}$$

を考えると，$D(t)=F(t,\widetilde{D^*})$, i.e., $F^{-1}(t,D(t))=\widetilde{D^*}$. そこで

$$G(t,(Z,W)):=g(t,(z,w))\quad\text{where}\ (z,w)=F(t,(Z,W)),\quad (Z,W)\in\widetilde{D^*}$$

とおくと 各 $G(t,(Z,W))$, $t\in B$ は 領域 $\widetilde{D^*}$ での関数であり, $G(t,(Z,W))=0$ on $\partial\widetilde{D^*}$.
簡単な計算により, $(Z,W)\in\widetilde{D^*}\cup\partial\widetilde{D^*}$ に対して

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t,(z,w))=\frac{\partial G}{\partial t}(t,(Z,W))+\alpha Z\frac{\partial G}{\partial Z}(t,(Z,W))+\beta W\frac{\partial G}{\partial W}(t,(Z,W)).$$
$$\therefore\quad \alpha Z\frac{\partial G}{\partial Z}(0,(Z,W))+\beta W\frac{\partial G}{\partial W}(0,(Z,W))=0\quad \text{on } \partial\widetilde{D^*}.$$

$G(0,(Z,W))$ は $\widetilde{D^*}$ の定義関数になるから，空間 $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$ において，ベクトル場 X は $\partial\widetilde{D^*}$ に関して 接ベクトル場である．定義から, 任意の $t\in\mathbb{C}$ に対して, $[z,w]\exp tX\in D^*$ (resp. ∂D^*) iff $(z,w)\exp tX\in\widetilde{D^*}$ (resp. $\partial\widetilde{D^*}$) より, 空間 $\mathcal{H}$ において，X は ∂D^* に関して接ベクトル場である．

(2) の証明． (i) の $X\in\mathfrak{X}_u$ は補題 3.1 の 2. からわかる．(i-a) 及び (i-b) は補題 3.1 の下に述べた ($\mathfrak{a}$) 及び ($\mathfrak{b}$) からわかる．(ii-a) は ($\mathfrak{b}$) からわかる．(ii-b) は 補題 3.1 の 2. から, $X=cz\frac{\partial}{\partial z}$ がわかり, 境界 ∂D が滑らかなことと合わせて, 補題 4.2 の (1) から, 初等的考察で分かる. (iii) は 補題 3.1 の (2) と ($\mathfrak{b}$) からわかる． □

5 定理 1.2 の証明

この節では D は $\mathcal{H}$ での境界 ∂D が C^ω 級滑らかな擬凸状域とする．

補題 5.1. $\emptyset\neq\partial D\cap\mathbf{T}_a\neq\mathbf{T}_a$ かつ $D\not\supset\mathbf{T}_b$ ならば, D は Stein 領域である.

条件 $D\not\supset\mathbf{T}_b$ は次の 3 つの場合に分かれる：

$$\text{(c1)}\ \ \partial D\cap\mathbf{T}_b=\emptyset,\quad \text{(c2)}\ \ \emptyset\neq\partial D\cap\mathbf{T}_b\neq\mathbf{T}_b,\quad \text{(c3)}\ \ \partial D\cap\mathbf{T}_b=\mathbf{T}_b.$$

証明. 方針は，先ず, (i) もし $-\lambda[z,w]$ が D において 強多重劣調和関数でないならば，或る点 $p_0=[z_0,w_0]\in D^*$ において $-\lambda[z,w]$ は強多重劣調和ではないこと; 次に, (ii) そのような p_0 の存在によって，(c1), (c2), (c3) の各場合, それぞれに（異なる理由で）D は Stein 領域であること, を示す．[2] では 5 つの場合に分けて示した．それらの証明で鍵になった 2 つの場合を述べる. なお, $\psi[z,w]$ は D の C^ω-級定義関数である.

[場合 1]　(c1) の下で，次の条件 ($\diamondsuit$) を満たす或る境界点 $[z_0, 0] \in \partial D \cap \mathbf{T}_a$ が存在すれば，D は Stein 領域である：

$$(\diamondsuit) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial z}[z_0, 0] \neq 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial \psi}{\partial w}[z_0, 0] \neq 0.$$

先ず, 各点 $[z', 0] \in D \cap \mathbf{T}_a$ で, 方向 $\mathbf{a} = (0, 1)$ に関して 不等式 $\frac{\partial^2(-\lambda)}{\partial \tau \partial \bar{\tau}}[z', \tau]|_{\tau=0} > 0$ を示そう. $z' = 1$ としてよい．小さい $\delta := \{|\tau| < r\} \subset \mathbb{C}_\tau$ を取り，領域の変動 $D: \tau \in \delta \to D(\tau) := D[1, \tau] \subset \mathbb{C}^*_Z \times \mathbb{C}^*_W$ を考える. 定義から

$$D(\tau) = \begin{cases} \widetilde{D^*} \times (1, 1/\tau) & \text{if} \quad \tau \in \delta \setminus \{0\}; \\ \widetilde{D_a} \times \mathbb{C}^*_W & \text{if} \quad \tau = 0. \end{cases} \qquad \text{但し，} D \cap \mathbf{T}_a = [D_a, 0].$$

$\lambda(\tau) = \lambda[1, \tau]$; $\mathfrak{D} := \bigcup_{\tau \in \delta} (\tau, D(\tau))$; $\partial \mathfrak{D} = \bigcup_{\tau \in \delta} (\tau, \partial D(\tau)) \subset \delta \times (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*)$ とおく．各 $\tau \in \delta \setminus \{0\}$ に対して，$\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ の自己同形写像

$$F_\tau : (z, w) \in \mathbb{C}^*_z \times \mathbb{C}^*_w \to (Z, W) = (z, w/\tau) \in \mathbb{C}^*_Z \times \mathbb{C}^*_W$$

を考えると, $D(\tau)$ の定義から $D(\tau) = F_\tau(\widetilde{D}^*)$. $\mathcal{H}$ での D の定義関数 $\psi[z, w]$ は $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ での $\widetilde{D}$ の定義関数 $\psi(z, w)$ と見做せるから

$$\begin{cases} \Phi(\tau, (Z, W)) := \psi(Z, \tau W), & \tau \in \delta \setminus \{0\}, \\ \Phi(0, (Z, W)) := \psi(Z, 0), & \tau = 0 \end{cases}$$

とおくと，$\Phi(\tau, (Z, W))$ は $\mathfrak{D} \subset \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ の滑らかな定義関数である. 特に, 特別な境界点 $(z_0, 1) \in \partial D(0)$ では, 点 $[z_0, 0]$ の条件 ($\diamondsuit$) から

$$\nabla_{(Z,W)} \Phi \big|_{(0,(z_0,1))} = \Big(\frac{\partial \psi}{\partial z}, \frac{\partial \psi}{\partial w}\, \tau \Big)\big|_{(0,(z_0,1))} = \Big(\frac{\partial \psi}{\partial z}(z_0, 0), 0 \Big) \neq (0, 0),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}\big|_{(0,(z_0,1))} = \frac{\partial \psi}{\partial w}\, W \big|_{(0,(z_0,1))} = \frac{\partial \psi}{\partial w}(z_0, 0) \neq 0.$$

従って，補題 3.3 の (3) から目的の不等式を得る. 同様にして，方向 $\mathbf{a} = (0, 1)$ の代わりに $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $a_1 \neq 0$ の場合も目的の不等式を得る.

次に, $0 \neq \partial D \cap \mathbf{T}_a \neq \mathbf{T}_a$ と (c1) の下では, $-\lambda[z, w]$ は多重劣調和近似関数であることに注意すると, もし $-\lambda[z, w]$ が D で強多重劣調和でないと仮定すれば，或る点 $[z_0, w_0] \in D^*$ で $-\lambda[z, w]$ は「強」ではない. $\partial D \not\supset \mathbf{T}_a$ かつ $\partial D \not\supset \mathbf{T}_b$ より, 補題 4.2 の (2)(i) に矛盾する．故に，$-\lambda[z, w]$ は D で強多重劣調和近似関数である. 岡-Grauert-Nishino により, D は Stein 領域である.

[場合 2]　(c3) の下で，条件 ($\diamondsuit$) を満たす境界点 $[z_0, 0] \in \partial D \cap \mathbf{T}_a$ が存在すれば，D は Stein 領域である.

実際，(c3) より，$\partial D \supset \mathbf{T}_b$ である. 補題 4.1 の 2 (b) にのべた $-\lambda[z, w]$ の性質と 第2節でのべた関数 $U[z, w]$ の性質を合わせると

$$s[z, w] := \max\{-\lambda[z, w], U[z, w]\}$$

は D の多重劣調和近似関数である．従って, D が Stein 領域であることを示すためには, 岡論文 [4] の § 14 の方法によって次を示せばよい：「与えられた任意の $K \Subset D$ に

対して，$K \Subset D_K \subset D$ を満たすような Stein 領域 D_K が存在する.」そのような D_K を作るために，先ず，大きな $m \gg 1$ と小さい $\varepsilon > 0$ を取り，

$$v[z,w] := \max\{-\lambda[z,w] + 2m, \ \ \varepsilon U[z,w]\} \quad \text{on } D \tag{5.1}$$

とおくと，$v[z,w] = -\lambda[z,w] + 2m$ on K であり，$v[z,w]$ は D での多重劣調和近似関数である．従って，大きな $M \gg 1$ を取ると

$$K \Subset D(M) := \{[z,w] \in D : v[z,w] < M\};$$

$$\emptyset \neq \partial D(M) \cap \mathbf{T}_a \neq \mathbf{T}_a; \quad \partial D(M) \cap \mathbf{T}_b = \emptyset.$$

従って，($\partial D(M)$ は区分的滑らかではあるが, 滑らかではない. しかし，Robin 定数の作り方から) c−Robin 関数 $\lambda_M[z,w]$ は $D(M)$ 上の C^ω 級多重劣調和近似関数である．$M' \gg 1$ を大きくとって，

$$D(M,M') := \{[z,w] \in D(M) : \ -\lambda_M[z,w] < M'\}$$

とすると $D(M,M') \Supset K$, $\emptyset \neq \partial D(M,M') \cap \mathbf{T}_a \not\supset \mathbf{T}_a$ であり，$D(M,M')$ は $\mathcal{H}$ での滑らかな境界 $\partial D(M,M')$ を持つ擬凸状域である．従って，場合 1 から $D(M,M')$ は Stein 領域であるから，これを D_K としてとれる．

なお，場合 1,2 における 条件 ($\diamondsuit$) が満たされないという特別な場合は，第 3 節の [III] の脚注に述べた Robin 定数を作ることの柔軟性と場合 2 で作った近似関数を用いた方法を繰り返して，示される． □

補題 5.2. $\partial D \supset \mathbf{T}_a$ かつ $\partial D \cap \mathbf{T}_b \neq \mathbf{T}_b$ ならば，次のいずれかである：

(1) D は Stein 領域である．

(2) D は 定理 1.2 の (b2), $D = \bigcup_{c \in \delta} \sigma_c$. 但し，$\partial\delta \ni 0$, $\delta \cup \partial\delta \not\ni \infty$.

条件 $\partial D \cap \mathbf{T}_b \neq \mathbf{T}_b$ は次の 3 つに分かれる：

$$(\tilde{c}1)\ \emptyset \neq \partial D \cap \mathbf{T}_b \neq \mathbf{T}_b, \quad (\tilde{c}2)\ D \supset \mathbf{T}_b, \quad (\tilde{c}3)\ \partial D \cap \mathbf{T}_b = \emptyset.$$

証明. ($\tilde{c}$1) 及び ($\tilde{c}$3) の場合の証明: D は (b2) でないとすれば，D は Stein 領域を示せばよい．補題 5.1 の場合 2 と同じく D での多重劣調和近似関数 $v[z,w] := \max\{-\lambda[z,w] + 2m, \ \varepsilon U[z,w]\}$ を使った同様の議論によって，D は Stein 領域であることが示せる．

($\tilde{c}$2) の場合の証明: $\mathbf{T}_b$ はコンパクトであり，$c \to \infty$ ならば，$\mathcal{H}$ において，Levi-flat 曲面 $\Sigma_c := \{|w| = c|z|^\rho\}/\sim$ (or $\sigma_c := \{w = cz^\rho\}/\sim$) は $\mathbf{T}_b$ に近づく．$D \Supset \mathbf{T}_b$ より，大きな $c > 1$ に対して，$\Sigma_c \Subset D$ より Σ_c 上で $-\lambda[z,w]$ は定数となり，各点 $[z',w'] \in \Sigma_c$ で $-\lambda[z,w]$ は強多重劣調和ではない．補題 3.1 の ($\mathfrak{a}$) と ($\mathfrak{b}$) から (2) を得る． □

補題 4.2, (2) (ii-b) の Nemiroviskii-type の領域 D は補題 5.2 の ($\tilde{c}$1) の特別の場合であるから，D は Stein 領域である．

補題 5.2 と同様にして，次を得る：

補題 5.3. $\partial D \supset \mathbf{T}_a \cup \mathbf{T}_b$ ならば，次のいずれかである：

(1) D は Stein 領域である．

(2) D は (b2), $D=\bigcup_{c\in\delta}\sigma_c$. 但し，$\partial\delta\ni 0,\infty$.

定理 1.2 の証明. D は $\mathcal{H}$ での 境界 ∂D が C^ω 級の擬凸状域であって，Stein 領域でないと仮定する. 境界 ∂D と $\mathbf{T}_a,\mathbf{T}_b$ との $\mathcal{H}$ 内での関係は ($\mathbf{T}_a$ と $\mathbf{T}_b$ の入れ替えを同じものとみると) 次の 3 つの場合に尽きる：

[I] $\partial D\supset\mathbf{T}_a$. これは次の 2 つの場合に分ける

$$[\mathrm{I}]=\begin{cases}(1)\ \ \partial D\cap\mathbf{T}_b\neq\mathbf{T}_b;\\(2)\ \ \partial D\supset\mathbf{T}_b.\end{cases}$$

[II] $\partial D\cap\mathbf{T}_a=\emptyset$. これを次の 2 つの場合に分ける：

$$[\mathrm{II}]=\begin{cases}(1)\quad \partial D\cap\mathbf{T}_b=\emptyset;\\(2)\ \ \emptyset\neq\partial D\cap\mathbf{T}_b\neq\mathbf{T}_b.\end{cases}$$

更に, (1), (2) を次の場合に細分する：

$$(1)=\begin{cases}\text{(i) } D\cap(\mathbf{T}_a\cup\mathbf{T}_b)=\emptyset;\\\text{(ii) } D\cap\mathbf{T}_a=\emptyset,\quad D\supset\mathbf{T}_b;\\\text{(iii) } D\supset\mathbf{T}_a\cup\mathbf{T}_b.\end{cases}\qquad(2)=\begin{cases}\text{(i) } D\supset\mathbf{T}_a;\\\text{(ii) } D\not\supset\mathbf{T}_a.\end{cases}$$

[III] $\emptyset\neq\partial D\cap\mathbf{T}_a\neq\mathbf{T}_a$.

補題 5.1, 5.2, 5.3 によって 上記各々の場合が 次になることは容易に確かめられる. 但し, 下の記号 (a-1), (a-2"), (b2) 等は 定理 1.2 に述べているものである.

$$[\mathrm{I}]=\begin{cases}(1)\ D \text{ は (b2)}, D=\bigcup_{c\in\delta}\sigma_c.\ \text{但し，}\partial\delta\ni 0,\ \partial\delta\not\ni\infty;\\(2)\ D \text{ は (b2)}, D=\bigcup_{c\in\delta}\sigma_c.\ \text{但し，}\partial\delta\ni 0,\infty.\end{cases}$$

$$[\mathrm{II}]\text{-}(1)=\begin{cases}\text{(i) } D \text{ は (a-1) か (b2)}, D=\bigcup_{c\in\delta}\sigma_c.\ \text{但し}, \delta\subset\mathbb{C}^*;\\\text{(ii) } D \text{ は (a-2") か (b2)}, D=\bigcup_{c\in\delta}\sigma_c.\ \text{但し}, \delta\ni\infty,\ \delta\cup\partial\delta\not\ni 0\ ;\\\text{(iii) 条件を満たす } D \text{ は存在しない.}\end{cases}$$

$$[\mathrm{II}]\text{-}(2)=\begin{cases}\text{(i) } D \text{ は (b2)}, D=\bigcup_{c\in\delta}\sigma_c.\ \text{但し，}\delta\ni 0,\ \partial\delta\cup\delta\not\ni\infty;\\\text{(ii) 条件を満たす } D \text{ は存在しない.}\end{cases}$$

[III] の場合は, 条件を満たす D は $\partial D\cap\mathbf{T}_b=\emptyset$ となり，場合 (II) になる.

よって，定理 1.2 は証明された. □

参考文献

[1] K. T. Kim, N. Levenberg and H. Yamaguchi, *Robin functions for complex manifolds and applications*, Memoirs of Amer. Math. Soc., Vol. 209, No. 984, 2011.

[2] N. Levenberg and H. Yamaguchi, *Pseudoconvex domains in the Hopf surface*, arXiv : 1205,3346 (2012).

[3] S. U. Nemirovskii, *Stein domain with Levi-flat boundaries on compact complex surfaces*, Mathematical Notes, **66** No. 4 (1999), 522–525.

[4] K. Oka, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables VI. Domains pseudo-convexes*, Tohoku Math. J. **17** (1942), 15–52.

函数論分科会委員会委員
投票用紙

以下の委員候補者（２０１３年４月から２０１５年３月まで任期２年）のうち適任と思われる者に ○，不適任と思われる者に × を付して下さい．一括信任（不信任）の場合は該当欄に御記入下さい．

	一括信任

	相原 義弘
	奥山 裕介
	平地 健吾
	本田 竜広
	山田 雅博
	小野 太幹
	林本 厚志
	藤解 和也

任期中の委員は小森洋平，中西敏浩，増本誠，米田力生，諸澤俊介 です．
他に適任と思われる方がいましたら，２名以内ご推薦下さい．
ただし，規則により，辻元，下村哲，石崎克也，高山茂晴，山ノ井克俊は被推薦者になれません．

なお，投票は学会開催中に函数論分科会会場，それ以降は９月２８日必着で

〒 780-8520　高知県高知市曙町 2-5-1
高知大学理学部数学コース
諸澤　俊介
(函数論分科会連絡責任評議員)

宛に郵送してください．