日本数学会

2012年度年会

函数論分科会
講演アブストラクト

2012年3月

於　東京理科大学

日本数学会

2012年度年会

函数論分科会
講演アブストラクト

2012年3月

於　東京理科大学

3月26日(月) 第VII会場

3月27日(火)　第VII会場

9:00〜12:00

13:00〜13:30

13:40〜14:40　特別講演

A Four Multiple Infinite Sum obtained by Means of N- Fractional Calculus

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press Co.

Abstract

In this article a four multiple infinite sum derived by means of N- fractional calculus is reported. That is, the result below is reported for example.

Theorem 1. *Let*

$$M = M(\alpha,\beta,\gamma\,;k,m) = \frac{(-1)^{k+m}[-\alpha]_k[-\beta]_m[-\gamma]_m\Gamma(k-\alpha+\gamma-m)}{k\,!\cdot m\,!\,\Gamma(k-\alpha)},$$

$$K = K(\alpha,\gamma,\delta,\varepsilon\,;k,m,n) = \frac{(-1)^n[-\varepsilon]_n[m-\delta]_n\,\Gamma(k-m-n+\varepsilon+\gamma-\alpha)}{n\,!\,\Gamma(k-m+\gamma-\alpha)},$$

$$L = L(\mu,a,b;k,m,n,p) = \frac{(-1)^p[-\mu]_p[-b]_p[\Gamma(\mu-p-a)}{p\,!\,\Gamma(-a)} \quad \begin{pmatrix} a = m+n-k+\alpha-\beta-\gamma, \\ b = \gamma+\varepsilon-m-n. \end{pmatrix}$$

$$P = P(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\sin\pi\alpha\cdot\sin\pi(\gamma-\alpha-\beta)}{\sin\pi(\alpha+\beta)\cdot\sin\pi(\gamma-\alpha)}, \qquad (|P(\alpha,\beta,\gamma)| = A < \infty)$$

and

$$R = R(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon) = P(\alpha,\beta,\gamma)P(\alpha-\gamma,\delta,\varepsilon), \quad (|P(\alpha-\gamma,\delta,\varepsilon)| = A' < \infty).$$

$$\left|\frac{\Gamma(k-\alpha+\gamma-m)}{\Gamma(k-\alpha)}\right| < \infty, \qquad \left|\frac{\Gamma(k-m-n+\varepsilon+\gamma-\alpha)}{\Gamma(k-m+\gamma-\alpha)}\right| < \infty.$$

When $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\mu \notin \mathbf{Z}_0^+$, *we have the following four-multiple infinite sums.*

$$\sum_{k,m,n,p=0}^{\infty} M\cdot K\cdot L\cdot\left(\frac{-c}{z}\right)^k\left(\frac{z}{z-c}\right)^{m+n+p} = P(\alpha-\gamma-\varepsilon,\gamma+\varepsilon,\mu)R.$$

$$\times\frac{\Gamma(\varepsilon+\gamma-\alpha-\delta)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)\Gamma(\mu-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha-\delta)\Gamma(-\alpha-\beta)\Gamma(-\alpha)}\left(\frac{z-c}{z}\right)^{\alpha-\gamma-\varepsilon-\mu}.,$$

where

$|\Gamma(\varepsilon+\gamma-\alpha-\delta)/\Gamma(\gamma-\alpha-\delta)|$, $|\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)/\Gamma(-\alpha-\beta)|$, $|\Gamma(\mu-\alpha)/\Gamma(-\alpha)| < \infty$

and

$$|\Gamma(\mu-p-a)/\Gamma(-a)| < \infty, \quad |-c/z| < 1, \quad |z/z-c| < 1.$$

Production of Some Fractional Differintegral Equations in N- Fractional Calculus

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press Co.

Abstract

In this article homogeneous fractional differintegral equations

1) $$\varphi_\gamma - \varphi \cdot a^\gamma \left(1 + \frac{\gamma}{a(z-b)}\right) = 0, \quad (a(z-b) \neq 0),$$

2) $$\varphi_{\gamma+2} - \varphi_{\gamma+1} \cdot a - \varphi_\gamma \cdot \left(\frac{a^2}{a(z-b)+\gamma}\right) = 0, \quad (a(z-b)+\gamma \neq 0),$$

and nonhomogeneous ones

3) $$\varphi_{\gamma+1} - \varphi_\gamma \cdot \frac{\gamma+1}{z-b} = (\cos z)_\gamma \left((z-b) + \frac{\gamma^2+\gamma}{z-b}\right), \quad ((z-b) \neq 0),$$

and

4) $$\varphi_{\gamma+2} - \varphi_{\gamma+1} \cdot \frac{\gamma+2}{z-b} + \varphi_\gamma \cdot \frac{(\gamma+1)(\gamma+2)}{(z-b)^2}$$
$$= -(\sin z)_\gamma (z-b) - (\cos z)_\gamma \cdot \frac{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}{(z-b)^2}, \quad ((z-b) \neq 0),$$

are discussed in the field of N- fractional calculus; where

$$\varphi \in \boldsymbol{F} = \{ \varphi ; 0 \neq |\varphi_\gamma| < \infty, \gamma \in \boldsymbol{R} \}, \quad (\varphi = \varphi(z)).$$

Particular solutions are given by

$$\varphi = e^{az}(z-b)$$

to the equations 1) and 2), and

$$\varphi = (\sin z)(z-b)$$

to the equations 3) and 4), respectively, without the consideration of the arbitrary constants for integrations.

Coefficient conditions for harmonic close-to-convex functions

Toshio Hayami (Kwansei Gakuin University)

A complex-valued harmonic function $f(z)$ in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ is given by

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$$

where $h(z)$ and $g(z)$ are analytic in $\mathbb{U}$. We call $h(z)$ and $g(z)$ the analytic part and the co-analytic part of $f(z)$, respectively. A necessary and sufficient condition for $f(z)$ to be locally univalent and sense-preserving in $\mathbb{U}$ is $|h'(z)| > |g'(z)|$ in $\mathbb{U}$ (see, [2] or [6]). Let $\mathcal{H}$ denote the class of harmonic functions $f(z)$ in $\mathbb{U}$ with $f(0) = h'(0) - 1 = 0$. Thus, every normalized harmonic function $f(z)$ can be written by

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n}$$

where $a_1 = 1$ and $b_0 = 0$, for convenience.

We next denote by $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ the class of functions $f(z) \in \mathcal{H}$ which are univalent and sense-preserving in $\mathbb{U}$. Since the sense-preserving property of $f(z)$, we see that $|b_1| = |g'(0)| < |h'(0)| = 1$. If $g(z) \equiv 0$, then $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ reduces to the class $\mathcal{S}$ consisting of normalized analytic univalent functions. Furthermore, for every function $f(z) \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$, the function

$$F(z) = \frac{f(z) - \overline{b_1 f(z)}}{1 - |b_1|^2} = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n - \overline{b_1} b_n}{1 - |b_1|^2} z^n + \overline{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n - b_1 a_n}{1 - |b_1|^2} z^n}$$

is also a member of $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$. Therefore, we consider the subclass $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}^0$ of $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ as defined by

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}}^0 = \{f(z) \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}} : b_1 = g'(0) = 0\}.$$

We say that a domain $\mathbb{D}$ is a close-to-convex domain if the complement of $\mathbb{D}$ can be written as a union of non-intersecting half-lines. Let $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ and $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}^0$ be the respective subclasses of $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ and $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}^0$ consisting of all functions $f(z)$ which map $\mathbb{U}$ onto a certain close-to-convex domain.

Example 1 *The function*

$$f(z) = \frac{1-(1-z)^2}{2(1-z)^2} + \overline{\frac{z^2}{2(1-z)^2}} = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{2} \overline{z}^n$$

belongs to the class $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}^0$.

To obtain our results, we need the following lemmas due to Clunie and Sheil-small [2].

Lemma 1 *If $h(z)$ and $g(z)$ are analytic in $\mathbb{U}$ with $|h'(0)| > |g'(0)|$ and $h(z)+\varepsilon g(z)$ is close-to-convex for each ε $(|\varepsilon| = 1)$, then $f(z) = h(z)+\overline{g(z)}$ is harmonic close-to-convex.*

Lemma 2 *If $f(z) = h(z)+\overline{g(z)}$ is locally univalent in $\mathbb{U}$ and $h(z)+\varepsilon g(z)$ is convex for some ε $(|\varepsilon| \leqq 1)$, then $f(z)$ is univalent close-to-convex.*

Applying the above lemmas, we derive

Theorem 1 *If $f(z) \in \mathcal{H}$ satisfies the following condition*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left|na_n - e^{i\varphi}(n-1)a_{n-1}\right| + \sum_{n=1}^{\infty} \left|nb_n - e^{i\varphi}(n-1)b_{n-1}\right| \leqq 1$$

for some real number φ $(0 \leqq \varphi < 2\pi)$, then $f(z) \in \mathcal{C}_{\mathcal{H}}$.

Example 2 *The function*

$$f(z) = -\log(1-z)+\overline{\left(-mz-\log(1-z)\right)} = z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}z^n+(1-m)\overline{z}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\overline{z}^n \quad (0 < m \leqq 1)$$

satisfies the condition of Theorem 1 with $\varphi = 0$ and belongs to the class $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$.

References

[1] Y. Avci and E. Złotkiewicz, *On harmonic univalent mappings*, Ann. Univ. Marie Curie-Sklodowska Sect. A **44**(1991), 1–7.

[2] J. Clunie and T. Sheil-Small, *Harmonic univalent functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **9**(1984), 3–25.

[3] P. L. Duren, *Harmonic Mappings in the Plane*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[4] L. Fejér, *Über die positivität von summen, die nach trigonometrischen oder Legendreschen, funktionen fortschreiten. I*, Acta Szeged **2**(1925), 75-86(German).

[5] J. M. Jahangiri and H. Silverman, *Harmonic close-to-convex mappings*, J. Appl. Math. Stoch. Anal. **15**(2002), 23–28.

[6] H. Lewy, *On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **42**(1936), 689–692.

[7] T. Sheil-Small, *Constants for planar harmonic mappings*, J. London Math. Soc. **42**(1990), 237–248.

[8] H. Silverman, *Harmonic univalent functions with negative coefficients*, J. Math. Anal. Appl. **220**(1998), 283–289.

Coefficient bounds for bi-univalent functions

Toshio Hayami (Kwansei Gakuin University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}$ denote the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, and let $\mathcal{S}$ denote the subclass of functions $f(z)$ in $\mathcal{A}$ which are univalent in $\mathbb{U}$.

Then, each function $w = f(z) \in \mathcal{S}$ has an inverse function $f^{-1}(w)$ given by

$$f^{-1}(f(z)) = z \quad (z \in \mathbb{U}) \quad \text{and} \quad f(f^{-1}(w)) = w \quad \left(|w| < r_0(f);\ r_0(f) \geqq \frac{1}{4}\right).$$

It is well-known that the inverse function $f^{-1}(w)$ can be represented by

$$f^{-1}(w) = w - a_2 w^2 + \left(2a_2^2 - a_3\right) w^3 - \left(5a_2^3 - 5a_2 a_3 + a_4\right) w^4 + \cdots .$$

If a function $f(z) \in \mathcal{A}$ is univalent in $\mathbb{U}$ and $f^{-1}(w)$ is also univalent in $\mathbb{U}$ (*i.e.* $f(z) \in \mathcal{S}$ and $f^{-1}(w) \in \mathcal{S}$), then $f(z)$ is said to be bi-univalent in $\mathbb{U}$. We denote by Σ the class of all bi-univalent functions in $\mathbb{U}$.

The following theorem known as the Koebe one-quarter theorem was conjectured by Koebe [3] and proven by Bieberbach [1].

Theorem 1 *If $f(z) \in \mathcal{S}$, then $f(\mathbb{U})$ contains the circular domain*

$$\Omega = \left\{\omega \in \mathbb{C} : |\omega| < \frac{1}{4}\right\}.$$

The Koebe function and its rotation $f(z) = \dfrac{z}{(1+e^{i\theta}z)^2}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ shows that the constant $\dfrac{1}{4}$ is best possible.

Moreover, we discuss the domain $f(\mathbb{U})$ more in detail for any $f(z) \in \mathcal{S}$.

Theorem 2 *If $f(z) \in \mathcal{S}$, then it follows that*

$$f(\mathbb{U}) \not\supset \mathbb{U} \quad \textit{and} \quad f(\mathbb{U}) \not\subset \mathbb{U},$$

unless $f(z)$ is the identity function.

In consideration of the above theorem, the inverse function $f^{-1}(w)$ is not necessarily well-defined in $\mathbb{U}$. This implies that all functions $f(z) \in \mathcal{S}$ are not members of the class Σ. For example, the Koebe function $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2} \notin \Sigma$.

Now, we define the class $\mathcal{R}_\Sigma^\alpha$ of functions $f(z) \in \Sigma$ satisfying the following conditions

$$|\arg(f'(z))| < \frac{\pi}{2}\alpha \quad (z \in \mathbb{U}) \quad \text{and} \quad |\arg(g'(w))| < \frac{\pi}{2}\alpha \quad (w \in \mathbb{U})$$

for some α $(0 < \alpha \leqq 1)$, where $g(w)$ is the extension of $f^{-1}(w)$ to $\mathbb{U}$. Similarly, we say that a function $f(z) \in \Sigma$ belongs to the class $\mathcal{R}_\Sigma(\beta)$ if $f(z)$ satisfies the following inequalities

$$\mathrm{Re}(f'(z)) > \beta \quad (z \in \mathbb{U}) \quad \text{and} \quad \mathrm{Re}(g'(w)) > \beta \quad (w \in \mathbb{U})$$

for some β $(0 \leqq \beta < 1)$, where $g(w)$ is the extension of $f^{-1}(w)$ to $\mathbb{U}$. The classes $\mathcal{R}_\Sigma^\alpha$ and $\mathcal{R}_\Sigma(\beta)$ were introduced by Srivastava, Mishra and Gochhayat [7] and they discussed bounds for the coefficients $|a_2|$ and $|a_3|$ for these classes.

Remark 1 By the Noshiro-Warshawski theorem (see, [6], [8]), we readily see that both $\mathcal{R}_\Sigma^\alpha$ and $\mathcal{R}_\Sigma(\beta)$ are subclasses of Σ consisting of bi-univalent functions in $\mathbb{U}$.

The aim of this investigation is to determine the estimates on the coefficients $|a_2|$, $|a_3|$ and $|a_4|$ for functions in the classes $\mathcal{R}_\Sigma^\alpha$ and $\mathcal{R}_\Sigma(\beta)$, respectively.

References

[1] L. Bieberbach, *Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln*, S. B. Preuss. Akad. Wiss. **138**(1916), 940–955.

[2] D. A. Brannan and J. G. Clunie (Eds.), *Aspects of Contemporary Complex Analysis* (Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at the University of Durham, Durham; July 1–20, 1979), Academic Press, New York and London, 1980.

[3] P. Koebe, *Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. (1907), 191–210.

[4] M. Lewin, *On a coefficient problem for bi-univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **18**(1967), 63–68.

[5] E. Netanyahu, *The minimal distance of the image boundary from the origin and the second coefficient of a univalent function in $|z| < 1$*, Arch. Rational Mech. Anal. **32**(1969), 100–112.

[6] K. Noshiro, *On the theory of schlicht functions*, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. **2**(1934/35), 129–155.

[7] H. M. Srivastava, A. K. Mishra and P. Gochhayat, *Certain subclasses of analytic and bi-univalent functions*, Appl. Math. Lett. **23**(2010), 1188–1192.

[8] S. Warschawski, *On the higher derivatives at the boundary in conformal mappings*, Trans. Amer. Math. Soc. **38**(1935), 310–340.

Notes on the open door lemma

Kazuo Kuroki (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{H}$ denote the class of functions $p(z)$ which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. For a positive integer n and a complex number c, let $\mathcal{H}[c, n]$ be the class of functions $p(z) \in \mathcal{H}$ of the form

$$p(z) = c + \sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k.$$

Let $p(z)$ and $q(z)$ be members of the class $\mathcal{H}$. Then the function $p(z)$ is said to be subordinate to $q(z)$ in $\mathbb{U}$, written by

$$p(z) \prec q(z) \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

if there exists a function $w(z) \in \mathcal{H}$ with $w(0) = 0$ and $|w(z)| < 1 \quad (z \in \mathbb{U})$, and such that

$$p(z) = q(w(z)) \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

In particular, if $q(z)$ is univalent in $\mathbb{U}$, then the subordination $p(z) \prec q(z) \quad (z \in \mathbb{U})$ is equivalent to the conditions

$$p(0) = q(0) \quad \text{and} \quad p(\mathbb{U}) \subset q(\mathbb{U}).$$

Miller and Mocanu [1] discussed a certain method of proof involving a special differential subordination which is called as the open door lemma bellow.

Lemma 1 (The open door lemma) *Let c be a complex number with* $\operatorname{Re} c > 0$, *and let* $P(z) \in \mathcal{H}[c, n]$ *satisfy the following subordination*

$$P(z) \prec \frac{2n|c|}{\operatorname{Re} c}\sqrt{\frac{2\operatorname{Re} c}{n} + 1}\, \frac{(b - z)(1 - \bar{b}z)}{(1 - \bar{b}z)^2 - (b - z)^2} - \frac{n \operatorname{Im} c}{\operatorname{Re} c} i \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

where b is the complex number with $|b| < 1$ such that

$$\frac{n|c|}{\operatorname{Re} c}\sqrt{\frac{2\operatorname{Re} c}{n} + 1}\, \frac{2b}{1 - b^2} - \frac{n \operatorname{Im} c}{\operatorname{Re} c} i = c.$$

If $p(z) \in \mathcal{H}[\frac{1}{c}, n]$ satisfies the following differential equation

$$zp'(z) + P(z)p(z) = 1 \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

then

$$p(z) \prec \frac{\frac{1}{c} + \frac{1}{\bar{c}} z}{1 - z} \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

which implies that $\operatorname{Re} p(z) > 0 \quad (z \in \mathbb{U})$.

In the present talk, we discuss a certain univalent function in $\mathbb{U}$ which maps $\mathbb{U}$ onto a slit domain, and introduce a new open door lemma.

Theorem 1 *Let n be a positive integer, and let c be a complex number with* $\operatorname{Re} c > 0$. *Then the function $R_{c,n}(z)$ defined by*

$$R_{c,n}(z) = -\bar{c} - \frac{n}{1-z} + \frac{2\operatorname{Re} c + n}{1 + \frac{c}{\bar{c}} z} \qquad (z \in \mathbb{U})$$

is analytic and univalent in $\mathbb{U}$ with $R_{c,n}(0) = c$. In addition, the function $R_{c,n}(z)$ maps $\mathbb{U}$ onto the complex plane w with slits along the half-lines $\ell_{c,n}^{+}$ and $\ell_{c,n}^{-}$, where

$$\ell_{c,n}^{+} = \left\{ w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w = 0 \ \ \textit{and} \ \ \operatorname{Im} w \geqq \frac{n}{\operatorname{Re} c} \left(|c| \sqrt{\frac{2\operatorname{Re} c}{n} + 1} - \operatorname{Im} c \right) \right\}$$

and

$$\ell_{c,n}^{-} = \left\{ w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w = 0 \ \ \textit{and} \ \ \operatorname{Im} w \leqq -\frac{n}{\operatorname{Re} c} \left(|c| \sqrt{\frac{2\operatorname{Re} c}{n} + 1} + \operatorname{Im} c \right) \right\}.$$

Theorem 2 (New open door lemma) *Let c be a complex number with* $\operatorname{Re} c > 0$, *and let $P(z) \in \mathcal{H}[c, n]$ satisfy the following subordination*

$$P(z) \prec -\bar{c} - \frac{n}{1-z} + \frac{2\operatorname{Re} c + n}{1 + \frac{c}{\bar{c}} z} \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

If $p(z) \in \mathcal{H}[\frac{1}{c}, n]$ satisfies the following differential equation

$$zp'(z) + P(z)p(z) = 1 \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

then

$$p(z) \prec \frac{\frac{1}{c} + \frac{1}{\bar{c}} z}{1-z} \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

which implies that $\operatorname{Re} p(z) > 0 \quad (z \in \mathbb{U})$.

References

[1] S. S. Miller and P. T. Mocanu, *Briot-Bouquet differential equations and differential subordinations*, Complex Variables, **33**(1997), 217 – 237.

[2] S. S. Miller and P. T. Mocanu, *Differential Subordinations*, Pure and Applied Mathematics **225**, Marcel Dekker, 2000.

Notes on Nunokawa lemmas

Toshio Hayami (Kwansei Gakuin University)
Hitoshi Shiraishi (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{N}$ denote the class of functions $p(z)$ of the form

$$p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. For functions $p(z) \in \mathcal{N}$, Nunokawa [3, 4] has shown the following lemmas.

Lemma 1 *Let $p(z) \in \mathcal{N}$ and suppose that there exists a point $z_0 \in \mathbb{U}$ such that $\mathrm{Re}(p(z)) > 0$ $(|z| < |z_0|)$, $\mathrm{Re}(p(z_0)) = 0$ and $p(z_0) \neq 0$. Then, we have*

$$\frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} = ik$$

where k is real and $|k| \geqq 1$.

Lemma 2 *Let $p(z) \in \mathcal{N}$ with $p(z) \neq 0$ in $\mathbb{U}$ and suppose that there exists a point $z_0 \in \mathbb{U}$ such that*

$$|\arg(p(z))| < \frac{\pi\alpha}{2} \qquad for\ |z| < |z_0|$$

and

$$|\arg(p(z_0))| = \frac{\pi\alpha}{2}$$

where $\alpha > 0$. Then we have

$$\frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} = ik\alpha$$

where

$$k \geqq \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \qquad when \quad \arg(p(z_0)) = \frac{\pi\alpha}{2}$$

and

$$k \leqq -\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \qquad when \quad \arg(p(z_0)) = -\frac{\pi\alpha}{2}$$

where

$$p(z_0)^{\frac{1}{\alpha}} = \pm ia \qquad with \quad a > 0.$$

The above lemmas have been called Nunokawa lemmas and applied to obtain a number of interesting results by many mathematicians (see, for example, [1], [5]). But, nobody enumerated concrete functions satisfying these lemmas. Thus, in the present talk, we give the simple and interesting examples of Lemma 1 and Lemma 2, respectively.

At first, we consider the example for Lemma 1.

Example 1 *The function $p(z)$ defined by*

$$p(z) = 1 + \frac{z}{1+iz}.$$

satisfies Lemma 1.

We next discuss an example of Lemma 1 for the case that $p(z)$ maps the circular domain $\{z : |z| \leqq |z_0|\}$ onto the domain which touches the imaginary axis with two points.

Example 2 *The function $p(z)$ given by*

$$p(z) = 1 + m\left(z + \frac{1}{2}z^2\right) \qquad \left(\frac{4}{3} < m < \frac{8}{3}\right).$$

is an example of Lemma 1.

Further, we also discuss a function $p(z)$ satisfying Lemma 2 for every α $(0 < \alpha < 1)$ and a problem for Lemma 2 concerned with the Janowski functions defined by

$$p(z) = \frac{1+Az}{1+Bz} \qquad (-1 \leqq B < A \leqq 1)$$

which is analytic and univalent in $\mathbb{U}$. This function $p(z)$ has been studied by Janowski [2].

References

[1] N. E. Cho, I. H. Kim and J. A Kim, *Angular estimations of certain integral operators*, Int. J. Math. Sci. **21**(1998), 369–374.

[2] W. Janowski, *Extremal problem for a family of functions with positive real part and for some related families*, Ann. Polon. Math. **23**(1970), 159–177.

[3] M. Nunokawa, *On properties of Non-Carathéodory functions*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **68**(1992), 152–153.

[4] M. Nunokawa, *On the order of strongly starlikeness of strongly convex functions*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **69**(1993), 234–237.

[5] S. Owa, O. S. Kwon and N. E. Cho, *Some inequalities involving meromorphically multivalent functions*, J. Math. Anal. Appl. **212**(1997), 375–380.

Characterization of polynomials from potential theory and complex dynamics

Yûsuke Okuyama (Kyoto Institute of Technology)
Małgorzata Stawiska (Mathematical Reviews (University of Kansas))

We are interested in a characterization of polynomials among rational functions f of degree > 1 on $\mathbb{P}^1$ from the point of view of complex dynamics and potential theory. Recall that the Fatou set $F(f)$ of f is the region of normality of iterates $\{f^k; k \in \mathbb{N}\}$ in $\mathbb{P}^1$, which by the definition is open. The Julia set $J(f)$ is the complement of $F(f)$ and it is known to be non-empty. Both $F(f)$ and $J(f)$ are f-invariant. The characterization that we have in mind is provided by the following theorem:

Theorem 1 ([5]). *Let f be a rational function on $\mathbb{P}^1$ of degree > 1. Suppose that the point ∞ belongs to a Fatou component D_∞ of f, and that $f(D_\infty) = D_\infty$. Then the following statements are equivalent:*

(*i*). *f is a polynomial.*

(*ii*). *The balanced measure μ_f of f coincides with the harmonic measure ν of D_∞ with pole ∞.*

Under the additional assumption that $f(\infty) = \infty$, Theorem 1 was proved by Lopes [4]. The measure μ_f in Theorem 1 is also known to be the (unique) maximal entropy measure of f, and was constructed by Lyubich [3] and by Freire, Lopes and Mañé [2]. For polynomials f, the harmonic measure ν in Theorem 1 was also characterized as the weak limit of the averaged iterated value distribution of f for non-exceptional points of f by Brolin [1].

References

[1] Brolin, H. Invariant sets under iteration of rational functions, *Ark. Mat.*, **6** (1965), 103–144.

[2] Freire, A., Lopes, A. and Mañé, R. An invariant measure for rational maps, *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, **14**, 1 (1983), 45–62.

[3] Ljubich, M. J. Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **3**, 3 (1983), 351–385.

[4] Lopes, A. O. Equilibrium measures for rational maps, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **6**, 3 (1986), 393–399.

[5] Okuyama, Y. and Stawiska, M. Potential theory and a characterization of polynomials in complex dynamics, *Conform. Geom. Dyn.*, **15** (2011), 152–159.

8

行列の最小消去多項式候補を利用した固有ベクトル計算

照井　章　(筑波大学)*1
田島　慎一　(筑波大学)*2

これまでに, 著者 (田島) ら [2] は, 行列とその特性多項式が与えられており, かつ特性多項式が既約で, すべての固有値が相異なる場合に, 固有ベクトルを固有値の多項式として厳密に計算する効率的な算法を与えた. 行列のスペクトル分解の理論により, 着目している固有値に属する固有ベクトルは, その固有値におけるレゾルベントの留数値から求まる射影行列の列ベクトルによって与えられるが, この算法では, 留数計算を, 特性多項式を用いた多項式の計算に帰着させて行うことにより, 行列のスペクトル分解を並列に計算するとともに, 固有ベクトルを従来より大幅に効率的に計算可能であることを示した.

これと並行して, 著者 (田島) [1] は, レゾルベントの留数解析に基づき, 行列の最小消去多項式を用いて, 行列のスペクトル分解を効率的に求める算法を与えた. この算法では, 行列の最小多項式を用いる場合と比較して, 行列のスペクトル分解をより効率的に計算可能になる. さらに, 行列の最小消去多項式の計算をより効率化するため, 最小消去多項式候補を効率的に計算した上で, 最小消去多項式を計算する算法を提案している.

本稿では, これらの研究成果に基づき, 行列の最小消去多項式候補を用いて, 行列の固有ベクトルを効率的に計算する算法を提案する.

行列Aを, 整数を要素にもつn次正方行列とし, Eを単位行列とする. Aの特性多項式$\chi_A(\lambda)$は次式の形で, 整数上の既約因数分解をあらかじめ求めているものとする.

$$\chi_A(\lambda) = f_1(\lambda)^{m_1} f_2(\lambda)^{m_2} \cdots f_p(\lambda)^{m_p} \cdots f_q(\lambda)^{m_q}. \tag{1}$$

本稿で提案する算法の目的は, 式 (1) のある既約因子$f_p(\lambda)$ $(1 \leq p \leq q)$に対し, $f_p(\alpha) = 0$ をみたすAの固有値$\lambda = \alpha$に属する固有ベクトルを求めることである. なお, 本稿では, $m_p = 1$, すなわち, 注目する固有値の重複度は 1 と仮定する (従来の算法 [2] のように, χ_A全体が既約である必要はない).

多項式$f_p(\lambda)$に対し, 有理式$\Psi_p(x,y)$を$\Psi_p(x,y) = (f_p(x) - f_p(y))/(x-y)$で定義する. $\Psi_p(x,y)$は実際には多項式になることに注意する.

$\boldsymbol{e}_j = {}^t(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$を, 第$j$成分が1に等しい$n$次単位ベクトルとする. Aの第j列の最小消去多項式$\pi_{A,j}(\lambda)$は, イデアル$\{P(\lambda) \mid P(A)\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{0}\}$のモニックな生成元として定義される. ここで, $\pi_{A,j}(\lambda)$は$f_p(\lambda)$を因子にもつと仮定

キーワード：レゾルベント, 留数解析, スペクトル分解, 最小消去多項式

*1 305-8571 茨城県つくば市天王台 1-1-1 筑波大学 大学院数理物質科学研究科 数学専攻
e-mail: terui@math.tsukuba.ac.jp
web: http://researchmap.jp/aterui
*2 305-8571 茨城県つくば市天王台 1-1-1 筑波大学 大学院数理物質科学研究科 数学専攻
e-mail: tajima@math.tsukuba.ac.jp

し, $\pi_{A,j}(\lambda) = f_p(\lambda)\cdot g_{j,p}(\lambda)$ と表す (すなわち, $g_{j,p}(\lambda)$ は $f_p(\lambda)$ 以外の $\pi_{A,j}(\lambda)$ の因子の積である).

このとき, 以下の命題が成り立つ.

命題 1. $\chi_A(\lambda)$, $f_p(\lambda)$, $\Psi_p(x,y)$, $\pi_{A,j}(\lambda)$ を上記で与えられる多項式とする. このとき, 列ベクトル $\rho(\lambda)$ を

$$\rho(\lambda) = \Psi_p(A, \lambda E) g_{j,p}(A) \boldsymbol{e}_j$$

によって定めると, $f_p(\alpha) = 0$ をみたす A の固有値 $\lambda = \alpha$ に対し, 列ベクトル $\rho(\alpha)$ は

$$A \cdot \rho(\alpha) = \alpha \cdot \rho(\alpha),$$

をみたす. すなわち $\rho(\alpha)$ は A の固有値 $\lambda = \alpha$ に属する固有ベクトルである. □

さて, 本稿の算法では, 最小消去多項式候補を用いて固有ベクトル計算を行う. よって, 与えられた最小消去多項式候補が, 実際に最小消去多項式であることを確認する必要がある. 本稿で提案する最小消去多項式候補を用いた固有ベクトル計算は, 以下の流れになる.

1. **[固有ベクトル候補の計算]** 注目している A の固有値 $\lambda = \alpha$, A の第 j 列の最小消去多項式候補 $P_j(\lambda) = f_p(\lambda)\cdot g_{j,p}(\lambda)$ に対し

$$\rho(\alpha) = \Psi_p(A, \alpha E)\ g_{j,p}(A)\ \boldsymbol{e}_j \tag{2}$$

を計算する.

2. **[最小消去多項式のチェック]** $P_j(\lambda)$ が A の第 j 列の最小消去多項式になるかどうかをチェックする. 具体的には

$$P_j(A)\ \boldsymbol{e}_j = f_p(A)\ g_{j,p}(A)\ \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{0} \tag{3}$$

が成り立つことを確かめる.

本算法の特徴の一つは, 固有ベクトル候補の計算を先に行い, 引き続いて最小消去多項式のチェックを行っていることである. これは, 式 (2) の $\Psi_p(A, \alpha E)$ を Horner 法で計算すると, さらに 1 ステップの Horner 法の計算で, 式 (3) の $f_p(A)$ が導かれる事実に基づく. 実際の算法では, 式 (2), (3) の計算において, 行列・ベクトル積の Horner 法を用いることにより, さらなる計算の効率化を図っている.

参考文献

[1] 田島慎一. 微分作用素を用いたレゾルベントの留数解析と行列のスペクトル分解. *Computer Algebra — Design of Algorithms, Implementations and Applications*, 数理解析研究所講究録. 京都大学数理解析研究所, 2010. 印刷中.

[2] 田島慎一, 樋口水紀. レゾルベントを用いた固有ベクトル計算. *Computer Algebra — Design of Algorithms, Implementations and Applications*, 数理解析研究所講究録, 第 1666 巻, pp. 57–64. 京都大学数理解析研究所, October 2009.

On the growth rates of 3-dimensional generalized simplex reflection groups

小森　洋平　(阪市大理)[*1]
梅本　悠莉子　(阪市大理)[*2]

面角がすべて π を自然数で割った値を取るような、n 次元双曲空間 $\mathbb{H}^n$ 内の凸多面体 P を **Coxeter 多面体**という。面に関する鏡映変換全体 S の生成する群 Γ は、P を基本領域とする離散群となり (Γ, S) を n **次元双曲 Coxeter 群**と呼ぶ。このとき Γ の元 g の S **に関する長さ** $\ell_S(g)$ を、g の S の元による最短表示 $g = s_1 s_2 \cdots s_n$ の長さ n で定義する。(Γ, S) の **growth function** $f_S(t)$ とは、a_k を $\ell_S(g) = k$ を満たす g の個数とするときの形式的ベキ級数 $f_S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ のことである。(Γ, S) の **growth rate** を $\omega := \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$ と定義すると $1 < \omega \leq \sharp S$ を満たし ([3])、$f_S(t)$ は原点中心の半径 $R = 1/\omega$ の開円板上で解析関数となり、さらに全平面に有理関数 $P(t)/Q(t)$ として解析接続される。ここで $P(t)$ と $Q(t)$ は互いに素な $\mathbb{Z}$ 係数の多項式である。このとき $t = R$ は $f_S(t)$ の原点に最も近い極になり、$Q(0) = 1$ から $\omega > 1$ は、ω の共役元の絶対値が ω 以下となる実代数的整数になることが分かる。実代数的整数 $\alpha > 1$ の共役元の絶対値が真に α より小さくなるとき、α を **Perron 数**という。2次元と3次元の余コンパクトな双曲 Coxeter 群の ω は **Salem 数**になり ([1, 5])、2次元の余体積有限な双曲 Coxeter 群の ω は **Pisot-Vijayaraghavan 数**になることが知られている ([2])。これら Salem 数や Pisot-Vijayaraghavan 数は Perron 数の一種である。本講演では4元生成の余体積有限な3次元双曲 Coxeter 群について、その growth rate ω が Perron 数になることを報告する ([4])。5元生成の余体積有限な3次元双曲 Coxeter 群についても同様の結果が成り立つことを示す。

参考文献

[1] J. W. Cannon, P. Wagreich, Growth functions of surface groups, Math. Ann. 293 (1992), 239-257.

[2] W. Floyd, Growth of planar Coxeter groups, P.V. numbers, and Salem numbers, Math. Ann. 293 (1992), 475-43.

[3] P. de la Harpe, Groupes de Coxeter infinis non affines, Exposition. Math 5 (1987), 91-96.

[4] Y. Komori, Y. Umemoto, On the growth rates of 3-dimensional generalized simplex reflection groups, submitted.

[5] W. Parry, Growth series of Coxeter groups and Salem numbers, J. Algebra 154 (1993), 406-415.

[*1] e-mail: `komori@sci.osaka-cu.ac.jp`
[*2] e-mail: `yuriko.ummt.77@gmail.com`

純斜航的クライン群に対する、一般的な基本領域を与える点の分布

牛島 顕 (金沢大学 理工研究域 数物科学系)*

1. クライン群と基本領域

三次元双曲空間$\mathbb{H}^3$の、向きを保つ等長写像からなる群の部分群で、離散的なものはクライン群と呼ばれます。非自明な元が全て斜航的なもの（固定点が$\mathbb{H}^3$には無く$\mathbb{H}^3$の無限遠球面に二点生じるもの）であるクライン群は、特に、純斜航的クライン群と呼ばれます。本研究は、この様なクライン群の基本領域に関する、その組み合わせ構造と中心との関係についてのものです。

基本領域は、離散群の作用を研究する際の重要な道具です。本講演で扱う基本領域は全て、ディリクレ基本領域（基本多面形）と呼ばれる、次の集合$\mathcal{P}_0(w)$を考えます：

$$\mathcal{P}_0(w) := \left\{ z \in \mathbb{H}^3 \middle| \forall T \in \Gamma, \mathrm{d}_{\mathbb{H}^3}(z, w) \leq \mathrm{d}_{\mathbb{H}^3}(z, T(w)) \right\}.$$

ここでΓは純斜航的クライン群を表し、点$w \in \mathbb{H}^3$は基本領域$\mathcal{P}_0(w)$の中心と呼ばれます。

基本領域は離散群の研究において重要な対象となります。基本領域からは、例えば、その群の生成元や関係式を得る事が出来ます。

2. 一般的な基本領域

基本領域が一般的であるという事は、任意のクライン群に対して定義されますが、ここでは本講演に必要な純斜航的なものに限って定義を述べます。

純斜航的クライン群Γと点$w \in \mathbb{H}^3$に対し、基本領域$\mathcal{P}_0(w)$が一般的であるとは、次の3条件を満たすときをいいます。

- 各辺は、$\mathcal{P}_0(w)$が定める$\mathbb{H}^3$のタイル貼りにおいて（$\mathcal{P}_0(w)$も含め）3つの基本領域に囲まれている。
- $\mathbb{H}^3$内にある各頂点は、$\mathcal{P}_0(w)$が定める$\mathbb{H}^3$のタイル貼りにおいて（$\mathcal{P}_0(w)$も含め）4つの基本領域に囲まれている。
- $\mathbb{H}^3$の無限遠球面上ある各頂点は、丁度一本の辺の端点となっている。

この定義から、$\mathbb{H}^3$内にある各頂点から生じる辺は常に3本になります。

3. 主結果

一般的な基本領域を与える点（中心）の分布に関しては、次の事が予想されています。

予想. $\mathbb{H}^3$の殆ど全ての点が、一般的な基本領域に対応するだろう

この予想はJørgensenとMardenが「定理」として[JM88]で述べたものですが、その証明には不充分な点がありました。本研究は、純斜航的クライン群に対し、この「定理」の証明の不備を埋めたものです。

* 〒920-1192 石川県 金沢市 角間町

「予想」

~~**主定理**~~**.** 任意の純斜航的クライン群に対し、測度が0でありその（$\mathbb{H}^3$における）補集合の任意の点が一般的な基本領域を構成する、$\mathbb{H}^3$の部分集合が存在する。

4. 証明の方針

主定理の証明の手順は、[JM88] に従っています。

1. ある点を中心とする基本領域が一般的でなければ、その点はある代数方程式の解集合に含まれている事をみる。
2. これらの解集合が $\mathbb{H}^3$ 全体とならない事をそれぞれ確認し、測度が0である事を得る。
3. クライン群の離散性により、この様な代数方程式が加算個である事を見る。それらの解集合の和集合を $\mathbb{H}^3$ から引く事で、求める部分集合を得る。

論文 [JM88] における不備は、手順2で生じています。本研究では、純斜航的クライン群の幾何学的性質と [DP99] による巡回的純斜航的クライン群に対する予想の肯定的解決、それと一致の定理を利用してこの問題を解決しました。

5. 既存の結果

本研究に関連する、既存の結果を幾つか触れておきます。

2次元の場合には、予想に対応することは [Bea95] において定理9.5.2として示されています。この別証明として、Jørgensen と Marden の方針に則った証明を [DU09, Ush11] で与えました。

3次元の場合には、上で述べた様に、巡回的クライン群に対しては [DP99] で予想が肯定的に解決されています。これは Jørgensen による先行研究 [Jør73] を精密化したものです。

参考文献

[Bea95] Alan F. Beardon, *The geometry of discrete groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 91, Springer-Verlag, New York, 1995, Corrected reprint of the 1983 original.

[DP99] Todd A. Drumm and Jonathan A. Poritz, *Ford and Dirichlet domains for cyclic subgroups of* $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ *acting on* $\mathbf{H}^3_{\mathbf{R}}$ *and* $\partial\mathbf{H}^3_{\mathbf{R}}$, Conform. Geom. Dyn. **3** (1999), 116–150 (electronic).

[DU09] Raquel Díaz and Akira Ushijima, *On the properness of some algebraic equations appearing in Fuchsian groups*, Topology Proc. **33** (2009), 81–106.

[JM88] T. Jørgensen and A. Marden, *Generic fundamental polyhedra for Kleinian groups*, Holomorphic functions and moduli, Vol. II (Berkeley, CA, 1986), Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 11, Springer, New York, 1988, pp. 69–85.

[Jør73] Troels Jørgensen, *On cyclic groups of Möbius transformations*, Math. Scand. **33** (1973), 250–260 (1974).

[Ush11] Akira Ushijima, *Generic fundamental polygons for Fuchsian groups*, Pacific J. Math. **251** (2011), no. 2, 453–468.

極値的長さの微分公式

宮地 秀樹

1. 導入

この講演では [9] にて得られた極値的長さの微分公式について報告する．以下，X を (g,n) 型の解析的有限なリーマン面とする．ここで X は双曲計量を許容する，つまり $2g-2+n>0$ を満たすと仮定する．

1.1. **測度付き測地線層**. X 上の完備な単純双曲測地線の非交和である閉集合を X 上の**測地線層**と呼ぶ．ここでは測地線層はすべてコンパクトなものを考える．測地線層 λ の**横断的測度** α とは，測地線層に横断的に交わる弧の上にラドン測度を与える対応であり，それらのラドン測度は測地線層 λ に沿ったホモトピーに関して不変であるものである（詳細は [10] を参照せよ）．簡単のため，横断弧 k 上の測度も α と書く．測地線層と横断的測度の対 $\alpha=(\lambda,\alpha)$ が任意の横断弧 k に対して，k 上の測度 α の台が $\lambda\cap k$ となっているとき，**測度付き測地線層**であるという．X 上の測度付き測地線層全体のなす集合を $\mathcal{ML}_0$ と書く．

単純閉曲線間の幾何学的交点数を拡張することにより，$\mathcal{ML}_0\times\mathcal{ML}_0$ 上に交点数関数が連続的に定義される（cf. [1]）．また，Thurston により $\mathcal{ML}_0$ 上に自然な PL 構造が存在することが示されている（cf. [4]）．

1.2. **横断的ヘルダー分布**. 距離空間 M 上の**ヘルダー分布**とは，M 上のコンパクト台をもつヘルダー関数全体のなす空間上の線形汎関数であり，任意の ν に対して ν-ヘルダー関数全体のなすバナッハ空間に制限したときに連続であるものである．

X 上の測地線層 λ に対して，λ の**横断的ヘルダー分布**とは，λ に横断的に交わる滑らかな弧 k に対してヘルダー分布を与える対応で，λ に沿ったヘルダー双連続なホモトピーに対して不変なものとする（cf. [3]）．

ここで $[0,t_0]\ni t\mapsto G_t\in\mathcal{ML}_0$ を PL 曲線とする．曲線 $\{G_t\}_{t\in[0,t_0]}$ に対して，十分小さな t_1 と $0\le t\le t_1$ に対して G_t を carry する線路 τ が存在して，τ の任意の辺 e に対して，右微分

$$\dot{G}_0(e):=\left.\frac{d}{dt^+}G_t(e)\right|_{t=0}=\lim_{t\to+0}\frac{G_t(e)-G_0(e)}{t}$$

が存在するとき，曲線 $\{G_t\}_{t\in[0,t_0]}$ は $t=0$ で**微分可能**であるという．ただし $G(e)$ は G による辺 e の一般的な枕木 (tie) 上の積分とする．$\dot{G}_0$ は横断的ヘルダー分布と考えることが出来る（cf. Theorem 15, Complement 16 in [2]）．

2. 主定理

2.1. **タイヒミュラー空間と極値的長さ**. $T(X)$ を X の**タイヒミュラー空間**とする．$T(X)$ は X の標識付きリーマン面 (Y,f) の等角同値類からなる空間である．ここで Y はリーマン面であり，$f:X\to Y$ は擬等角写像である．

Date: 2011 年 11 月 26 日.
本研究は科研費（C, 21540177）の助成を受けたものである．

いま，$y=(Y,f)\in T(X)$ と $G\in\mathcal{ML}_0$ に対して $\mathrm{Ext}_y(G)$ を G の y 上の**極値的長さ**とする．極値的長さは Y 上の $f(G)$ を垂直測度付き葉層構造にもつ正則二次微分 $q_{G,y}$ を用いて

$$\mathrm{Ext}_y(G)=\int_Y |q_{G,y}|=\int_Y |q_{G,y}(z)|dxdy$$

と表される（cf. [7]）．写像

$$T(X)\times\mathcal{ML}_0\ni(y,G)\mapsto\mathrm{Ext}_y(G) \tag{2.1}$$

は連続である（cf. [8]）．

2.2. **主定理.** μ を Y 上のベルトラミ微分として，$y(s)$ を y の $\mu(s)$-擬等角変形で $\mu(s)=s\mu+o(|s|)$ （$s\in\mathbb{R}$）を満たすものとする．ここで $q_{G,y}$ の水平測度付き葉層構造を $F_{G,y}$ と書く．

定理 2.1 (主定理 [9]). 極値的長さ関数 (2.1) は $T(X)\times(\mathcal{ML}_0-\{0\})$ において次の意味で全微分可能である：

$$\mathrm{Ext}_{y(s)}(G_t)=\mathrm{Ext}_y(G_0)-2s\,\mathrm{Re}\int_Y \mu\, q_{G_0,y}+2t\, i(\dot{G}_0,F_{G_0,y})+o(|s|+t)$$

（$|s|+t\to 0$）が成立する．ただし，$\mathcal{ML}_0-\{0\}$ 内の $\{G_t\}_{t\in[0,t_0]}$ は $t=0$ で微分可能な PL 曲線とし，$\dot{G}_0$ をその $t=0$ での微分とする．

ここで，G を固定した場合の微分公式は F. Gardiner（[6]）により与えられている公式に一致することに注意する．ただし，主定理の証明には彼の微分公式を用いるため，主定理は彼の微分公式の別証明を与えている訳ではない．

実は，$\dot{G}_0$ と $F_{G_0,y}$ の交点数 $i(\dot{G}_0,F_{G_0,y})$ が定義出来ることは自明ではなく，定理の証明には交点数が定義出来ることを示すことも含まれている．実際，交点数は，横断的ヘルダー分布を測地的ヘルダーカレントと見なし（[2]），そして，Bonahon-Šarić [5] により与えられた２重箱（double box）に分割による方法を用いて定義される．

References

[1] F. Bonahon, Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3, Ann. of Math. **124** (1986), no. 1, 71–158.

[2] ———, Geodesic laminations with transverse Hölder distributions, Ann Sci. École Norm. Sup. **30** (1997), 205–240.

[3] ———, Transverse Hölder distributions for geodesic laminations, Topology, **36** (1997), 103–122.

[4] ———, Geodesic laminations on surfaces, *Laminations and foliations in dynamics, geometry and topology* (Stony Brook, NY, 1998), 1–37, Contemp. Math., **269**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2001).

[5] F. Bonahon and D. Šarić, Infinitesimal Liouville currents, cross-ratios and intersection numbers, to appear.

[6] F. Gardiner, Measured foliations and the minimal norm property for quadratic differentials, Acta Math. **152** (1984), no. 1-2, 57–76.

[7] F. Gardiner and H. Masur, Extremal length geometry of Teichmüller space. Complex Variables Theory Appl. **16** (1991), no. 2-3, 209–237.

[8] S. Kerckhoff, The asymptotic geometry of Teichmüller space, Topology **19** (1980), 23–41.

[9] H. Miyachi, A differential formula for extremal length, submitted.

[10] R. Penner and J. Harer, *Combinatrics of train tracks*, Ann. Math. Studies **125**, Princeton University Press (1992).

〒 560-0043, 大阪府豊中市待兼山町 1-1 大阪大学大学院理学研究科数学専攻

On the logarithmic order of an entire function in terms of the coefficients

Katsuya Ishizaki (Nippon Institute of Technology)*1
Kazuya Tohge (Kanazawa University)*2

1. Introduction

Let $f(z) = \sum_n a_n z^n$ be a transcendental entire function. It is familiar (see, e.g. [2]) that the growth order ρ of f coincides with the convergence rate μ of $a_n \to 0$ where

$$\rho := \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r}, \quad \mu := \limsup_{r\to\infty} \frac{n\log n}{\log|1/a_n|} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log n}{\log \sqrt[n]{|1/a_n|}},$$

if both ρ and μ are finite. But the equality $\rho = \mu$ would not, however, tell us very much about their convergences , if they vanish.

In this talk, our entire function f is assumed in general to be of *small* order of growth. Then we investigate the relation between the *logarithmic order* τ of f and the *logarithmic convergence rate* of $a_n \to 0$, both of which are defined as follows:

$$\tau =: \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r,f)}{\log\log r}, \quad \lambda =: \limsup_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log\log|1/a_n|}.$$

Here, as well as the definition of μ, we just simply take the quotient in the definition of λ to be zero, if $a_n = 0$. Note $1 \le \tau \le \infty$ and $0 \le \lambda \le 1$. We trace the proof of $\rho = \mu$ in quite a faithful way and obtain the following theorem on the logarithmic order in terms of the Taylor coefficients:

Theorem 1 *Assuming* $0 < \lambda < 1$, *we have the relation* $\tau = 1/(1-\lambda)$.

It might be of some interest to observe that this relation is equivalent to the following three expressions for our entire function f:

$$\tau = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log\log|1/a_n|}{\log\log \sqrt[n]{|1/a_n|}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log\log|1/a_n|}{\log\left(\frac{\log|1/a_n|}{n\log n}\right)}, \quad \lambda = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\left(\frac{\log M(r,f)}{\log r}\right)}{\log\log M(r,f)}.$$

Note that we have already known that

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|1/a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log|1/a_n|}{n\log n} = \lim_{r\to\infty} \frac{\log M(r,f)}{\log r} = \infty.$$

In fact, they follow from the assumption on f to be entire together with the Cauchy-Hadamard formula on radius of convergence of power series, the assumption that $0 < \lambda < 1$ which implies $\rho = 0$, and the assumption on f to be transcendental, respectively.

This work was supported by the Japan Society for the Promotion of Science Grant-in-Aid for Scientific Research (C) #22540233 for the first author and (C) #22540181 for the second author
2000 Mathematics Subject Classification: Primary 30D35.
Keywords: Entire functions, logarithmic order, small order of growth.
*1 e-mail: ishi@nit.ac.jp
*2 e-mail: tohge@t.kanazawa-u.ac.jp

2. Remarks and Examples

Remark 2 *The conclusion of Theorem* 1 *does hold when* $\lambda = 0$ *for transcendental* f.

Remark 3 *Let* K *be a real number satisfying* $K > 1$. *Our reasoning for the proof of Theorem* 1 *is to show the followings are equivalent:*
(A): $\exists A > 0$, $\exists r_0$ *such that* $M(r, f) \leq \exp\left(A(\log r)^K\right)$ $(\forall r \geq r_0)$.
(B): $\exists B < 0$, $\exists n_0$ *such that* $|a_n| \leq \exp\left(Bn^{\frac{K}{K-1}}\right)$ $(\forall n \geq n_0)$.

A point of this reasoning is in the choice of n *and* r *so that* $\log n \sim (K-1)\log\log r$. *In fact, then (A) and (B) give* $\log\log M(r, f) \leq \log\log|1/a_n| + O(1)$ *for such* n *and* r.

Example 4 *Let* q *be a constant satisfying* $0 < |q| < 1$. *We consider a transcendental entire function* $f(z) = \prod_{j=0}^{\infty}(1 - q^j z)$, *which is a solution of the q-difference equation* $(1-z)f(qz) - f(z) = 0$. *Thus its Taylor coefficients* a_n *are given by* $a_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{q^{k-1}}{q^k - 1} = O(q^{n(n-1)/2})$, *while it is shown in* [1] *that* $f(z)$ *has the growth property*

$$\log M(r, f) = (-2\log|q|)^{-1}(\log r)^2(1 + o(1)), \quad \text{as } r \to \infty. \tag{1}$$

Hence we have $\lambda = 1/2$ *and* $\tau = 2$, *respectively. (We will see* $\chi = (-2\log|q|)^{-1}$ *below.)*

It is possible to give an example of f with $\tau = 1$ and $\lambda = 0$. As long as the authors know, it seems open whether $\tau = \infty$ whenever $\lambda = 1$. Some examples are found in [2].

3. Logarithmic type and the coefficients

Defining the *logarithmic type* χ of $f(z) = \sum_n a_n z^n$ by

$$\chi = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r, f)}{(\log r)^\tau}, \quad \text{when } 0 < \tau < \infty,$$

we show a relation between the logarithmic order τ and the limit χ. This gives an analogy of the well-known formula $\sigma = (e\rho)^{-1} \limsup_{n\to\infty} \dfrac{n}{\left(\sqrt[n]{|1/a_n|}\right)^\rho}$ between ρ and the *type* σ of f,

$$\sigma = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r, f)}{r^\rho}, \quad \text{when } 0 < \rho < \infty.$$

Theorem 5 *A transcendental entire function* f *with* $\tau \in (1, \infty)$ *satisfies*

$$\chi = (\tau - 1)^{\tau-1}\tau^{-\tau}c(\tau),$$

where $c(\tau)$ *is given by*

$$c(\tau) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log|1/a_n|}{\left(\log\sqrt[n]{|1/a_n|}\right)^\tau}.$$

Note that $c(1) = \infty$ and $\lim_{\tau\to1+}(\tau - 1)^{\tau-1}\tau^{-\tau} = 1$. Hence the result is still true even when $\tau = 1$, since by definition $\tau = 1$ implies $\chi = \infty$ unless f is a polynomial.

Remark 6 *Let* f *be an entire function of order* $\rho = 0$. *Then Theorems* 1 *and* 5 *prove that* f *and its derivatives* $f^{(k)}$ *have the same logarithmic order and type, respectively.*

References

[1] Bergweiler, W., K. Ishizaki and N. Yanagihara, Growth of meromorphic solutions of some functional equations I, Aequationes Math., **63** (2002) 140–151.

[2] Markushevich, A. I. *Theory of functions of a complex variable.* Vol. II. Revised English edition translated and edited by Richard A. Silverman. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1965 xii+333 pp.

with

Extended Harnack inequalities

Hiroaki Aikawa (Hokkaido University)

Abstract

The Harnack inequality is one of the most fundamental inequalities for positive harmonic functions and, more generally, for positive solutions to elliptic equations and parabolic equations (De Giorgi-Nash-Moser theory). This talk gives a different view point of generalization. We generalize Harnack chains rather than equations. More precisely, we allow a *small exceptional set* in the Harnack chain and yet we obtain a similar Harnack inequality. In light of inextricable relationships between harmonic functions and Brownian motions, such a generalization is plausible. However, it is not so easy to give a rigorous formulation. We introduce a *Harnack double chain* in association with quasihyperbolic metric and measure the size of an exceptional set by capacity. We use only fundamental properties of harmonic functions such as the maximum principle and the linearity. Generalizations to positive solutions to uniformly elliptic equations seem to be straightforward.

Let us begin with *Harnack double chains.*

Definition 1 *Let $1 < A_0 < \infty$. Let $\{B_j\}_{j=0}^J = \{B(x_j, r_j)\}_{j=0}^J$ be finitely many open balls. We assume that*

$$\begin{aligned} &A_0^{-1} r_j \le r_{j-1} \le A_0 r_j, \\ &B_{j-1} \cap B_j \text{ includes a closed ball } b_j \text{ of radius greater than } A_0^{-1} r_j \end{aligned} \tag{1}$$

for $1 \le j \le J$. Let $\tau > 1$ and let $B_j^* = B(x_j, \tau r_j)$ be the expanded ball of B_j. We assume that

$$\text{if } |i-j| \ge 3, \text{ then } B_i^* \cap B_j^* = \emptyset \tag{2}$$

for $0 \le i, j \le J$. We call $\{B_j, b_j, B_j^*\}$ a Harnack double chain *with the radii condition* (1) *and the overlapping condition* (2). *For simplicity we write $\{B_j\}_{j=0}^J$ if b_j and B_j can be understood from the context.*

Note that a Harnack double chain can be constructed in association with the quasihyperbolic metric. Let D be a proper subdomain in $\mathbb{R}^n$, i.e., $\partial D \neq \emptyset$. For $x, y \in D$ we define the *quasihyperbolic metric* $k_D(x, y)$ by

$$k_D(x,y) = \inf_\gamma \int_\gamma \frac{ds(z)}{\delta_D(z)},$$

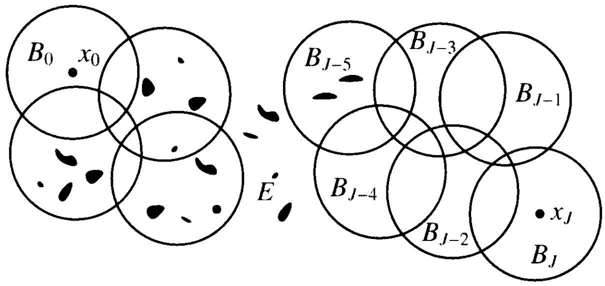
where the infimum is taken over all rectifiable curves γ connecting x to y in D and $ds(z)$ stands for the line element on γ.

Proposition 2 *Let D be a proper subdomain in $\mathbb{R}^n$ and let $x, y \in D$. Let $\tau = 6/5$. Then there exists a Harnack double chain $\{B_j\}_{j=0}^J$ with the radii condition* (1) *and the overlapping condition* (2) *such that $x \in B_0$, $y \in B_J$ and $J \le A k_D(x,y)$, where $A > 1$ is an absolute constant. More precisely, we can take $B_j = B(x_j, \alpha\delta_D(x_j))$ with $0 < \alpha < \frac{1}{10}$ and x_j on the quasihyperbolic geodesic connecting x and y in D.*

In order to measure the size of exceptional sets, we introduce (variational) capacity with respect to an open set U. For $E \subset U$ we define

$$\mathrm{Cap}_U(E) = \inf\{ \int_U |\nabla u(x)|^2 dx : \ u(x) \geq 1 \text{ on } E, u \in C_0^\infty(U)\}.$$

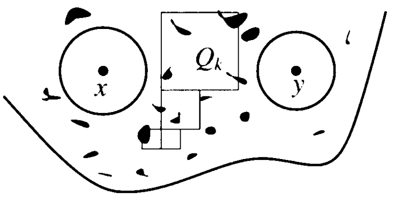
Theorem 3 *Let $\{B_j\}_{j=0}^J$ be a Harnack double chain with the radii condition* (1) *and the overlapping condition* (2). *Then there exist positive constants $\varepsilon_0 < 1$ and $A_1 > 1$ depending only on the dimension n and A_0 with the following property: Let E be a compact set of $B_0 \cup \cdots \cup B_J$ with $E \cap (B_0 \cup B_{J-4} \cup \cdots \cup B_J) = \emptyset$ and*



$$\frac{\mathrm{Cap}_{B_j^*}(E \cap B_j)}{\mathrm{Cap}_{B_j^*}(B_j)} < \varepsilon_0$$

for $j = 1, \ldots, J-5$. If h is a positive harmonic function in $B_0 \cup \cdots \cup B_J \setminus E$, then $\dfrac{h(x_J)}{h(x_0)} \leq \exp(A_1 J)$.

Theorem 4 *Let D be a domain with Whitney decomposition $\{Q_k\}$ and let $0 < \beta < 1$. Then there exists a positive constant $\varepsilon_0 < 1$ depending only on the dimension n and β with the following property: Let E be a compact set of D with*



$$\frac{\mathrm{Cap}_{Q_k^*}(E \cap Q_k)}{\mathrm{Cap}_{Q_k^*}(Q_k)} < \varepsilon_0,$$

where Q_k^* is the expanded cube of Q_k with factor $3/2$ and the same center. Let $x, y \in D$. If h is a positive harmonic function in $(D \setminus E) \cup B(x, \beta\delta_D(x)) \cup B(y, \beta\delta_D(y))$, then

$$\frac{h(y)}{h(x)} \leq \exp(A k_D(x, y)).$$

where $A > 1$ depends only on the dimension n and β.

Because of the existence of an exceptional set, our extended Harnack inequality includes some information about the boundary behavior of positive harmonic functions, and, as a result, it yields the global *boundary Harnack principle* for a domain whose boundary is given locally by the graph of a continuous function in $\mathbb{R}^{n-1}$ with modulus of continuity worse than Hölder continuity.

This work is inspired by [1], [2], and, in particular, [3, Lemma 2.4].

References

[1] R. Bañuelos, R. F. Bass, and K. Burdzy, *Hölder domains and the boundary Harnack principle*, Duke Math. J. **64** (1991), no. 1, 195–200.

[2] R. F. Bass and K. Burdzy, *A boundary Harnack principle in twisted Hölder domains*, Ann. of Math. (2) **134** (1991), no. 2, 253–276.

[3] ———, *Lifetimes of conditioned diffusions*, Probab. Theory Related Fields **91** (1992), no. 3-4, 405–443.

曲面のガウス写像の除外値数の上限の幾何学的意味について

川上　裕　(Yu KAWAKAMI, 山口大学)*

複素平面$\mathbf{C}$上の非定数有理型関数の除外値数の最良の上限は "2" であるが，それは値域であるRiemann球面のEuler数から来ていることが知られている（Ahlfors [1], Chern [2], etc）．このようなことが，完備計量をもつ曲面のGauss写像についても期待される．実際，我々は次のような結果を得ることができた．

定理 1 ([5]). Σ^2をその上の有理型関数gと正則1次微分形式ωによって構成される完備等角計量$ds^2 = (1+|g|^2)^n|\omega|^2$をもつ*Riemann*面とし，$D_g$を$g$の除外値数とする．もし$g$が定数関数でなければ，除外値数について次の式が成り立つ：

$$D_g \leq 2+n\,.$$

この結果はΣ^2の普遍被覆面$\widetilde{\Sigma}$上に持ち上げて考えても成り立つ．また，この結果の最良性を示す例が存在する（[5]）．この定理から様々な曲面（波面）のクラスのGauss写像の除外値数の上限の幾何学的意味がわかる．例えば，藤本坦孝氏（[3]）によって得られた，$\mathbf{R}^3$内の非平坦完備極小曲面のGauss写像$g\colon \Sigma \to \mathbf{C}\cup\{\infty\}$の除外値数の最良の上限 "4" については，$\mathbf{R}^3$からの誘導計量$ds^2$が，$g$を用いて$ds^2 = (1+|g|^2)^2|\omega|^2$（つまり$n=2$）と表せるからである．また，実3次元双曲型空間$\mathbf{H}^3$内の弱完備な平坦波面の標準形式の比$\rho\colon \widetilde{\Sigma} \to \mathbf{C}\cup\{\infty\}$については，完備性を考えている計量が$ds^2_{1,1} = (1+|\rho|^2)|\omega|^2$（つまり$n=1$）と表せることから，次の結果が得られる．

系 2 ([4, 6]). $\mathbf{H}^3$内の弱完備な平坦波面の標準形式の比ρが定数写像でないとき，その除外値数D_ρについて次の式が成り立つ：

$$D_\rho \leq 3\,.$$

参考文献

[1] L. Ahlfors, Zur Theorie der Überlagerungsflaächen, Acta. Math., **65** (1935), 157–194.

[2] S. S. Chern, Complex analytic mappings of Riemann surfaces. I, Amer. J. Math., **82** (1960), 323–337.

[3] H. Fujimoto, On the number of exceptional values of the Gauss map of minimal surfaces, J. Math. Soc. Japan, **40** (1988), 235 - 247.

[4] Y. Kawakami, A ramification theorem for the ratio of canonical forms of flat surfaces in hyperbolic three-space, preprint, arXiv:1110.3110 and MI 2011-16.

[5] Y. Kawakami, A geometric meaning of modified defect relations for the Gauss maps of various classes of surfaces, in preparation.

[6] Y. Kawakami and D. Nakajo, Value distribution of the Gauss map of improper affine spheres, to appear in Journal of the Mathematical Society of Japan, arXiv:1004.1484.

本研究は科研費(課題番号:21740053)の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 30D35, 53A10, 53A35
キーワード：ガウス写像, 除外値, 完備性
* 〒753-8512 山口県山口市吉田1677-1 山口大学大学院理工学研究科数理科学専攻
e-mail: y-kwkami@yamaguchi-u.ac.jp

Schiffer span および harmonic span による再生核の表現とその応用

濱野 佐知子 (福島大学)*

1. 序

$\mathbb{C}_z$ 上の滑らかな閉曲線$C_1,\ldots,C_\nu$で囲まれた領域DでのL^2-正則関数からなる全体を$A(D)$とおく．このとき $f,g\in A(D)$ に対して内積$(f,g)_D=\iint_D f(z)\overline{g(z)}dxdy$ を定めると$A(D)$はヒルベルト空間になる．任意の点$\zeta\in D$を固定する．$K:A(D)\ni f\mapsto f(\zeta)\in\mathbb{C}$ は有界線型汎関数である．よって, Rieszの表現定理より再生核関数が一意に存在する:

$$\exists 1K(\zeta,z)\in A(D) \text{ s.t. } \iint_D f(z)\overline{K(\zeta,z)}dxdy=f(\zeta) \text{ for } \forall f\in A(D).$$

特に, $\iint_D|K(\zeta,z)|^2dxdy=K(\zeta,\zeta)>0$であり, それらの具体的表現は

$$K(\zeta,z)=-\frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 g(\zeta,z)}{\partial\bar{\zeta}\partial z}\ \text{(by M. Schiffer)},\quad K(\zeta,\zeta)=-\frac{1}{\pi}\frac{\partial^2\lambda(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}\partial\zeta}\ \text{(by N. Suita)}$$

であることが知られている．また, $A(D)$ 上の有界線型汎関数$\widetilde{K}:A(D)\ni f\mapsto f'(\zeta)\in\mathbb{C}$ に対する再生核関数は$\widetilde{K}(\zeta,z)=-\frac{2}{\pi}\frac{\partial^3 g(\zeta,z)}{\partial\bar{\zeta}^2\partial z}$ である．

2. 結果

$A(D)$の部分集合として, $S(D)=\{f\in A(D)\mid\int_\gamma f(z)dz=0$ (γ はD内の任意の閉曲線)$\}$を考えると, $S(D)$は$A(D)$の閉部分空間になる．$A(D)$ 上の有界線型汎関数Kの$S(D)$への制限をLとおくと, $L:S(D)\ni f\mapsto f(\zeta)\in\mathbb{C}$ は Rieszの表現定理より再生核関数$L(\zeta,z)\in S(D)$が一意に存在する:

$$\exists 1L(\zeta,z)\in S(D) \text{ s.t. } \iint_D f(z)\overline{L(\zeta,z)}dxdy=f(\zeta) \text{ for } \forall f\in S(D).$$

このとき, 直交分解$A(D)=S(D)\dot{+}S(D)^\perp$を考えると, $K(\zeta,z)$の$S(D)$への直交射影が$L(\zeta,z)$である．

定理 1 上述のL-再生核関数およびL-再生核の具体的表現は

$$L(\zeta,z)=\frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 p(\zeta,z)}{\partial\bar{\zeta}\partial z}=-\frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 q(\zeta,z)}{\partial\bar{\zeta}\partial z}, \tag{1}$$

$$L(\zeta,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2\mathfrak{h}(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}\partial\zeta},\ \text{where } \mathfrak{h}(\zeta) \text{ is the harmonic span for } (D,0,\zeta). \tag{2}$$

ここで, $p(\zeta,z)$ (resp. $q(\zeta,z)$) は2点$\{0,\zeta\}\in D$において$z=\zeta$で$\log|z-\zeta|$ および$z=0$で$-\log|z|$ の極をもち, 境界でL_1-(resp. L_0-)behaviorをもつ調和関数である．

本研究は科研費 (課題番号:23740098) の助成を受けたものです．
2010 Mathematics Subject Classification: 32U05, 30C40
キーワード：再生核, スパン, 擬凸状領域
*〒960-1296 福島市金谷川1番地 福島大学 人間発達文化学類
e-mail: hamano@educ.fukushima-u.ac.jp

同様に, $A(D)$ 上の有界線型汎関数 $\widetilde{K}$ の $S(D)$ への制限を $\widetilde{L}$ とおくと, $\widetilde{L}: S(D) \ni f \mapsto f'(\zeta) \in \mathbb{C}$ はRieszの表現定理より再生核関数 $\widetilde{L}(\zeta, z) \in S(D)$ が一意に存在する:

$$\exists 1 \widetilde{L}(\zeta, z) \in S(D) \text{ s.t. } \iint_D f(z)\overline{\widetilde{L}(\zeta, z)}dxdy = f'(\zeta) \text{ for } \forall f \in S(D).$$

直交分解より $\widetilde{K}(\zeta, z)$ の $S(D)$ への直交射影が $\widetilde{L}(\zeta, z)$ である.

定理 2 上述の $\widetilde{L}$-再生核関数および $\widetilde{L}$-再生核の具体的表現は

$$\widetilde{L}(\zeta, z) = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 \widetilde{p}(\zeta, z)}{\partial\bar{\zeta}\partial z} = \frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 \widetilde{q}(\zeta, z)}{\partial\bar{\zeta}\partial z}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial z}(\zeta, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2 \mathfrak{s}(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}\partial\zeta}, \text{ where } \mathfrak{s}(\zeta) \text{ is the Schiffer span for } (D, \zeta). \tag{4}$$

ここで, $\widetilde{p}(\zeta, z)$ (resp. $\widetilde{q}(\zeta, z)$) は1点 $\zeta \in D$ において $\mathrm{Re}\frac{1}{z-\zeta}$ の極をもち, 境界で L_1-(resp. L_0-)behaviorをもつ調和関数である.

(1),(3) の証明は1変数関数論の計算で, (2),(4) の証明には各主関数の変分公式 (文献 [1],[2],[3],[4]) をLevi平坦な擬凸状領域に適用することで得られた.

3. 応用

調和関数 $\widetilde{p}(\zeta, z)$ および $\widetilde{q}(\zeta, z)$ より誘導される正則関数 $P(\zeta, z)$ および $Q(\zeta, z)$ は, 極 $z = \zeta$ を止めるごとに領域 D を垂直截線領域および平行截線領域に写す. 点 $a(\neq \zeta) \in D$ を固定し, 次の (i)(ii) を満たす D の単葉関数全体を $\mathcal{F}_a(D)$ とする: (i) $F(z) = \frac{1}{z-\zeta} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z-\zeta)^n$ at $z = \zeta$, (ii) $F(a) = 0$. このとき, Schiffer [5] によって $H(\zeta, z) := \dfrac{P+Q}{2}$ は $H \in \mathcal{F}_a(D)$, H の像領域の補集合は ν 個の凸領域からなり, $\mathcal{F}_a(D) \ni \forall F$ の像領域の補集合の面積を最大にする関数であることが示されている.

定理 3 $H(\zeta, z)$ は $D \times D$ 上で極 $\frac{1}{z-\zeta}$ をもつ2変数有理型関数である. 即ち, Schiffer 関数 $H(\zeta, z)$ は 極 ζ と共に正則に動く.

$B = \{|t| < \rho\} \subset \mathbb{C}$ とおくと, 複素パラメータ t を止めるごとに $\mathbb{C}_z$ 上の有界領域 $D(t)$ での $\widetilde{L}$-再生核関数 $\widetilde{L}(t, \zeta, z)$ が考えられる.

定理 4 $\mathcal{D} = \cup_{t \in B}(t, D(t))$ が2次元擬凸状領域ならば, $\log \dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial z}(t, \zeta, \zeta)$ は $\mathcal{D}$ 上多重劣調和関数である.

参考文献

[1] S. Hamano, *Variation formulas for L_1-principal functions and the application to simultaneous uniformization problem*, Michigan Math. J. **60** No.2 (2011), 271–288.

[2] S. Hamano, F. Maitani, and H. Yamaguchi, *Variation formulas for principal functions (II) Applications to variation for the harmonic spans*, to appear in Nagoya Math. J. **204** No.2 (2011).

[3] S. Hamano, *C^1 subharmonicity of harmonic spans for certain discontinuously moving Riemann surfaces*, to appear in J. of Math. Soc. Japan **64** (2012).

[4] S. Hamano, *Variation formulas for principal functions (III) Applications to variation for Schiffer spans* (submitted).

[5] M. Schiffer, *The span of multiply connected domains*, Duke Math. J. **10** (1943), 209–216.

再生核空間とその応用

山田 陽 (東京学芸大学)*

概 要

再生核 Hilbert 空間を用いて, 半正定値行列に関する Oppenheim の不等式の証明及び等号条件を定め, また Hilbert 空間の作用素に関する Douglas の Factorization Theorem を再生核 Hilbert 空間に関する定理として拡張してその応用を導く.

1. Introduction

近頃再生核 Hilbert 空間 (reproducing kernel Hilbert space, 以下 RKHS と略記) を使って幾つか結果を得たので, RKHS とその応用について少し説明する. 再生核 Hilbert 空間とは, ある集合上の複素数値函数からなる Hilbert 空間で, 函数値を与える線形汎函数が集合の各点で有界となるものを言う. 応用上はこれを少しだけ一般化した再生核 Hilbert 空間を考える必要があるが, これに関しては後述する.

2. Oppenheim の不等式

一つ目の応用は行列式である. 任意の $n \times n$ 半正定値複素行列 A, B に対して次が成り立つ (*Oppenheim* **の不等式**):

$$|A \circ B| \geq |A| b_{11} \cdots b_{nn}.$$

ただし, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ で, $A \circ B = (a_{ij} b_{ij})$ は行列 A, B の *Hadamard* **積**を表す. この不等式は 1930 年に得られ, 半正定値行列に関しては有名な不等式である. Oppenheim は [8] で彼の不等式を証明し, また A, B が正定値の場合に等号条件を定めている. ここでの我々の目標は Oppenheim の不等式を再生核の理論を用いて示し, 一般の半正定値行列の場合に等号条件を定めることである. cf. [14]

基本的なアイデアは簡単である. 集合 E 上の再生核 Hilbert 空間と E 上の (半) 正定値核が一対一に対応することは良く知られている. 半正定値行列を有限集合上の正定値核と見なすことにより, 半正定値行列に関する命題を再生核の理論を用いて示すことが可能となる. 半正定値行列の場合, 対応する RKHS は positive definite kernel $k(x, y)$ を再生核とする RKHS の構成の一般論を適用することで得られる. この場合有限次元空間であるから完備化は不要である. 具体的には次の通り (cf. [10, pp. 13–14]).

M_n を n 次複素正方行列全体の集合として, $A = (a_{ij}) \in M_n$ を半正定値とする. $a_{ij} = a(i, j)$ の対応で, 行列 A を有限集合 $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ 上の正定値核とみなす. また n 次元複素列ベクトルを E 上の函数と同一視する. このとき, A を列ベクトルに分解して $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_n\ \ldots\ \boldsymbol{a}_n)$ とすると, $\boldsymbol{a}_i$ は点 i に関する再生核となる. すなわち, RKHS の構成の一般論に従い, $H = \operatorname{ran} A = \{Ax \colon x \in \mathbb{C}^n\}$ とおき, $\mathbb{C}^n$ の線型部分空間 H に次の内積を導入すると H の再生核が A となることを示そう. Ax, $Ay \in \operatorname{ran} A$ の内積を

*e-mail: `yamada@u-gakugei.ac.jp`

${}^t x = (x_1, \dots, x_n)$, ${}^t y = (y_1, \dots, y_n)$のとき,

$$\langle Ax, Ay \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i \overline{y_j} a_{ji}$$

で定義する. この内積は,

$$\begin{aligned}\langle Ax, Ay \rangle &= \sum_i x_i \Big(\sum_j \overline{y_j} a_{ji} \Big) = \sum_i x_i \overline{(Ay)_j} \\ &= \sum_j \overline{y_j} \Big(\sum_i x_i a_{ji} \Big) = \sum_j \overline{y_j} (Ax)_i\end{aligned}$$

より, 函数値Ax, Ayのみに依存して値が決まるのでwell-definedである. $\boldsymbol{a}_i$が点iの再生核であることは,

$$\langle Ax, \boldsymbol{a}_i \rangle = \Big\langle \sum_j x_j \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_i \Big\rangle = \sum_j x_j a_{ij} = (Ax)_i$$

より分かる. 行列Aが再生核であることは, 定義より$\langle \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_i \rangle = a_{ij}$より明らか. 以上をまとめて,

命題 1. n次半正定値行列$A = (a_{ij}) = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \dots\ \boldsymbol{a}_n)$を再生核とする集合$\{1, 2, \dots, n\}$上の*RKHS* H_Aは, 列ベクトル$\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$の張る$\mathbb{C}^n$の部分空間$\operatorname{ran} A$に, 次の内積を与えたものである:

$$\Big\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \boldsymbol{a}_j \Big\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i \overline{y_j} a_{ji}.$$

特に, $\dim H_A = \operatorname{rank} A$, また点$i$における再生核は$\boldsymbol{a}_i$であり, $\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j \rangle = a_{ji}$ $(i, j = 1, \dots, n)$が成り立つ.

以下, 半正定値行列Aの第i列ベクトル$\boldsymbol{a}_i$がRKHS H_Aの点iにおける再生核であることを明示したいときは, k_i^Aと表すことにする. i.e. $A = (k_1^A\ k_2^A\ \dots\ k_n^A)$.

2.1. Bergmanの公式

最初にHilbert空間における補間問題で使うため, Bergmanの最小積分の公式[3, p.26]のアナログを導く. これはおそらくよく知られた公式と思われるが以下の形である.

命題 2. $\{x_j\}_{j=1}^n$は複素*Hilbert*空間$\mathcal{H}$の部分集合で線型独立と仮定する. このとき, 任意の複素数列$\{b_j\}_{j=1}^n$に対し, 等式

$$\langle f, x_j \rangle = b_j, \quad \forall j = 1, \dots, n \tag{1}$$

をみたす$f \in \mathcal{H}$でノルムが最小のものf_nがただ一つ存在し, 次で与えられる:

$$f_n = -\frac{1}{G_n} \begin{vmatrix} 0 & x_1 & \dots & x_n \\ b_1 & \langle x_1, x_1 \rangle & \dots & \langle x_n, x_1 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & \langle x_1, x_n \rangle & \dots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix}.$$

ただし, $G_n = \det(\langle x_j, x_i\rangle)_{i,j=1}^n$ は $\{x_j\}_{j=1}^n$ の *Gramian* である. また,

$$\|f_n\|^2 = -\frac{1}{G_n}\begin{vmatrix} 0 & \bar{b}_1 & \dots & \bar{b}_n \\ b_1 & \langle x_1, x_1\rangle & \dots & \langle x_n, x_1\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & \langle x_1, x_n\rangle & \dots & \langle x_n, x_n\rangle \end{vmatrix}.$$

注意 1. H_k が RKHS のときは, $x_j = k_{a_j}$ とおくと, 式 (1) は $f(a_j) = b_j$ の形になり, Nevanlinna 補完問題そのものである.

上の命題を特殊化して次の系を得る.

系 1. $\{x_j\} \subset \mathcal{H}$ が線形独立のとき, $b_1 = \cdots = b_{n-1} = 0,\ b_n = 1$ とした場合の補間問題 (1) の最小ノルム解を f_n とすると, 次が成り立つ.

(i) $\|f_n\|^2 = G_{n-1}/G_n$.

(ii) $f_n = \Phi_n/G_n$.

ただし, G_n は $\{x_j\}$ の n 次の *Gramian* $(G_0 = 1)$, また

$$\Phi_n = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \dots & \langle x_n, x_1\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_1, x_{n-1}\rangle & \dots & \langle x_n, x_{n-1}\rangle \\ x_1 & \dots & x_n \end{vmatrix}.$$

この系の基本的な使い方は次の通り. 正定値行列の行列式は行列の列ベクトルからなる各点の再生核に関する Gramian G_n とみなせるから, 正定値行列の行列式は最小ノルムの積 $\|f_1\|^2\|f_2\|^2\dots\|f_n\|^2$ の逆数として与えられる.

系 1 を用いると, Oppenheim の不等式の簡単な証明が得られる. そのために少し準備する. H_{k^j} $(j = 1, 2)$ を集合 E 上の RKHS とする. テンソル積 Hilbert 空間 $H_{k^1} \otimes H_{k^2}$ は $E \times E$ 上の RKHS で $(x, y) \in E \times E$ における再生核は $k_x^1 \otimes k_y^2$ で与えられる. $f \in H_{k^1}$, $g \in H_{k^2}$ ならば, 一般に次のノルム不等式

$$\|fg\|_{k^1k^2} \le \|f \otimes g\|_{k^1 \otimes k^2} = \|f\|_{k^1}\|g\|_{k^2} \tag{2}$$

が成り立つ. 上の不等式で等号が成り立つとき $f \otimes g \in H_{k^1} \otimes H_{k^2}$ は *extremal* であるという ([13]). 次の補題は容易に得られる.

補題 1. $f \otimes g \in H_{k^1} \otimes H_{k^2}$ が *extremal* である必要十分条件は, $f \otimes g$ が集合 $\{k_x^1 \otimes k_x^2\}_{x\in E}$ の *closed span* に入ることである. ただし, k_x^j は点 x における H_{k^j} の再生核である $(j = 1, 2)$.

$x, y \in \mathbb{C}^n$ に対して, $x = \alpha y,\ \exists\alpha \ne 0$ のとき $x \sim y$ と書き, $I_m = \{i\colon k_i^B \sim k_m^B, 1 \le i \le n\}$ とおく. また半正定値行列 $X \in M_n$ に付随する RKHS H_X に関する補間問題

$$f(1) = \cdots = f(m-1) = 0,\ f(m) = 1$$

の解が存在するとき, その最小ノルムを λ_m^X $(m = 1, \dots, n)$ とおく. 次の補題は再生核 Hilbert 空間のノルム不等式 (2) とベクトル空間のテンソル積の性質を用いて示される.

補題 2. $A, B \in M_n$ で A は正定値, B は半正定値で $b_{mm} > 0$ $(m = 1, \ldots, n)$ と仮定する. このとき, 次の不等式が成り立つ: $m = 1, \ldots, n$ に対して

$$\lambda_m^{A \circ B} \leq \lambda_m^A / \sqrt{b_{mm}}. \tag{3}$$

(3) で等号の成り立つ必要十分条件は, H_A の最小ノルム解 f_m が $\{k_i^A \colon k_i^B \sim k_m^B, 1 \leq i \leq m\}$ の一次結合であることである.

注意 2. A, B が正定値の場合, 補題の証明と同様にして

(i) $\lambda_m^{A \circ B} \leq \lambda_m^A \lambda_m^B$.

(ii) $\lambda_m^B \geq 1/\sqrt{b_{mm}}$.

が成り立つ. (i) より不等式 $|A \circ B| \geq |A||B|$ が, また (ii) より Hadamard の不等式が直ちに示される.

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して, n 次対称群 S_n の元 σ をとり, 行列 A^σ を $A^\sigma = (a_{\sigma(i)\sigma(j)})$ で定義する. σ が i と j $(1 \leq i, j \leq n)$ の互換のとき, 行列 A^σ は行列 A から i 行と j 行の入れ替え及び i 列と j 列の入れ替えを施して得られる行列である. この操作を**行と列の同時入れ替え**ということにすると, A^σ は行と列の同時入れ替えを A に有限回施して得られる行列である. 任意の $\sigma \in S_n$ に対して次が成り立つことは容易に分かる.

(i) A が半正定値 $\Longleftrightarrow$ A^σ が半正定値.

(ii) $|A| = |A^\sigma|$.

(iii) A の対角成分と A^σ の対角成分は集合として一致する.

ここで, Oppenheim の不等式において, (a) A が対角行列, または (b) B が rank 1, ならば等号が成り立つことに注意する. (a) ならば等号が成り立つのは明らかなので, (b) のとき等号が成り立つことを示そう. B は rank 1 かつ半正定値だから, $B = (w_i \overline{w}_j)$, $\exists (w_i) \in \mathbb{C}^n$ の形に表される. このとき,

$$|A \circ B| = \det(a_{ij} w_i \overline{w}_j) = |A||w_1 \cdots w_n|^2 = |A| b_{11} \cdots b_{nn}$$

となり等号が成り立つ. 別解として, $T = \operatorname{diag}(w_1, \ldots, w_n) \in M_n$ とおくと, $A \circ B = TAT^*$ と表されることを用いても良い.

次の定理は補題2を用いて示される. Oppenheim の不等式の等号条件は, 上の注意の (a) と (b) を両極端の典型例として, 一般の場合にはその中間の形態になることを主張する.

定理 1. A, $B \in M_n$ を複素半正定値行列とする. このとき, 次は同値である.

(i) *Oppenheim* の不等式で等号が成り立つ.

(ii) $A \circ B$ は *singular*, または $\sigma \in S_n$ が存在して A^σ が対角ブロック行列になる, *i.e.*

$$A^\sigma = \begin{pmatrix} A_{11} & & & \mathbf{0} \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & A_{pp} \end{pmatrix}.$$

ここで, $A_{ii} \in M_{n_i}$ $(i = 1, \dots, p)$, $n_1 + \cdots + n_p = n$ であり, また B^σ は次をみたす:

$$k_1^{B^\sigma} \sim \cdots \sim k_{n_1}^{B^\sigma},\ k_{n_1+1}^{B^\sigma} \sim \cdots \sim k_{n_1+n_2}^{B^\sigma},\ \dots,\ k_{n_1+\cdots+n_{p-1}+1}^{B^\sigma} \sim \cdots \sim k_n^{B^\sigma}.$$

(iii) $A \circ B$ が *singular,* または $\exists B' \in M_n$ *s.t.*

(a) B' は半正定値かつ *rank 1,*

(b) $A \circ B = A \circ B'$, かつ

(c) B' と B の対角成分は一致する.

(iv) $A \circ B$ が *singular,* または対角行列 $T = \mathrm{diag}(w_1, \dots, w_n)$ が存在して,

(a) $A \circ B = TAT^*$, かつ

(b) $|w_i|^2 = b_{ii}$ $(i = 1, \dots, n)$.

注意 3. 条件 (iv) は類似の形で [14, Theorem 1.5] で与えられている. ただし, この論文の結果は一般の半正定値行列に対しては修正が必要である.

注意 4. $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ が半正定値な $n \times n$ 行列の時, 次の Schur の不等式が成り立つ.

$$|A \circ B| + |A||B| \geq |A| b_{11} \cdots b_{nn} + |B| a_{11} \cdots a_{nn}.$$

これは Hadamard の不等式を使うと Oppenheim の不等式の拡張となっている. しかし, Schur の不等式の等号条件は Oppenheim の不等式の等号条件に帰着する. なぜなら, A, B が共に正定値の場合は Oppenheim 自身により等号条件は分かっている. したがって, 残るは A または B が singular の場合の等号条件だが, この場合には Schur の不等式は Oppenheim の不等式と同じになるので, 等号条件は Oppenheim のそれに帰着できる.

3. Douglas Factorization Theorem

再生核 Hilbert 空間の 2 つ目の応用は Hilbert 空間の作用素についてである. 1966 年 R. G. Douglas [5] は次の基本的な結果 (Douglas Factorization Theorem) を得た. その目的は Hilbert 空間の作用素の大小関係, 割算, 値域の包含関係の間に密接な関係があることを示すことにあった.

定理 2 (Douglas). *$\mathcal{H}$: Hilbert 空間, $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ のとき, 次は同値:*

(i) $\mathrm{ran}\, A \subset \mathrm{ran}\, B$.

(ii) $\exists \lambda \geq 0$ *s.t.* $AA^* \leq \lambda^2 BB^*$.

(iii) $\exists C \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *s.t.* $A = BC$.

このとき, $\inf \|C\| = \inf \lambda$.

Douglas の定理を用いて Sz.-Nagy-Foias 流の補間問題や dilation theory で有用な S. Parrott の定理 (1978, [9]), Foias-Tannenbaum による Strong Parrott 定理 (1989, [6]), Bakonyi-Woerdeman による Strong Parrott 定理の拡張 (1993, [2]) 等の定理群が得られる.

Douglasの定理に関する我々の最初の観察は, この定理は再生核Hilbert空間に関する定理であるというものである. これはHilbert空間の作用素Aがあるとき, $\operatorname{ran} A$は再生核AA^*をもつ1点上のHilbert-valued RKHSと見なせる (cf. p. 10) ことより, 定理の (i) と (ii) の同値性が再生核Hilbert空間の包含関係と再生核の大小関係の同値性に直ちに帰着されるからである. この観点からは定理の残りの条件 (iii) に対応する再生核Hilbert空間の条件があるに違いないと思ってDouglas Fatorization Theoremの再生核バージョンを探していて, 次の問題を考えるに至った. すなわち, これらの定理群で扱っている問題は次の問題に一般化される:

問題 1. $A_i \in \mathcal{L}(H_i, \mathcal{H}_1)$, $B_i \in \mathcal{L}(H_i, \mathcal{H}_2)$, $C_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, K_j)$, $D_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, K_j)$ で可換条件

$$D_j A_i = C_j B_i \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$$

が成り立っている時,

$$\begin{cases} XA_i = B_i, & (x = 1, \ldots, m), \\ C_j X = D_j, & (y = 1, \ldots, n), \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} & H_i \arrow[dl, "A_i"'] \arrow[dr, "B_i"] & \\ \mathcal{H}_1 \arrow[rr, dotted, "X"] \arrow[dr, "D_j"'] & & \mathcal{H}_2 \arrow[dl, "C_j"] \\ & K_j & \end{tikzcd}$$

をみたすcontraction $X\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$が存在するか?

この問題を (m,n)-*Douglas* **問題**ということにすると, Douglasの定理は $(1,0)$-問題, Parrottの定理は $(1,1)$-問題, Strong Parrott Theoremは $(2,1)$-問題の解であるということができる.

我々の目的はDouglasの定理を再生核Hilbert空間の理論を用いて, 一般の (m,n)-Douglas問題 ($m, n = \infty$ も含む) に拡張することである. そのためには, well-knownなHilbert-valued RKHSの定義を少しだけ拡張して, 点毎に異なる線形位相空間に値を持つ写像を "函数" と思って, それらの函数からなるHilbert空間に関する再生核Hilbert空間を考える必要がある. このように拡張されたRKHSは1964年のL. Schwartz [12] による一般化された再生核Hilbert空間と本質的に同じものではあるが, 集合上の "函数空間" であるのでAronszajn [1] の古典的な再生核理論とパラレルに理論構成が可能であり, より初等的であると思われる. この他には, 再生核Hilbert空間のmultiplierとde Brangesによるcomplementary spaceの性質も利用するので, 以下でこれらについて説明する.

4. 再生核Hilbert空間とmultiplier

集合Eをパラメータとする線形位相空間の族$H = \{H_x\}_{x \in E}$をE上の**線形位相空間族**という. E上の線形位相空間族$H = \{H_x\}_{x \in E}$に対して, それらの直積線形位相空間$\Gamma(H) = \prod_{x \in E} H_x$を$E$上の$H$-**値函数空間**という. $\mathcal{H}$が$\Gamma(H)$に含まれるHilbert空間であるとき, $\mathcal{H}$をH-*Hilbert*空間と言う. H-Hilbert空間$\mathcal{H}$がH-*reproducing kernel Hilbert space* (H-RKHS) であるとは, $\forall x \in E$に対してpoint evaluation

$$\pi_x\colon \mathcal{H} \to H_x, \quad f \in \mathcal{H} \mapsto f(x) \in H_x$$

が連続であることと定義する. Hilbert空間の場合と記号及びdualの概念を合わせるために, 線形位相空間Hのdual, i.e. 連続線形汎関数の全体をH'とおいて, $H^* = \overline{H'}$を

H の adjoint という. i.e. H の線形汎函数に複素共役写像を合成したもの (共役線形汎関数) の全体を H^* とする. $H \times H^*$ 上の sesqui-linear form を内積の形で

$$\overline{y(x)} = \langle x, y \rangle_H, \quad x \in H,\ y \in H^*$$

と表す. 以下断りがない場合, 線形位相空間族 $\{H_x\}_{x \in E}$ は次の条件 $(*)$ をみたすと仮定する.

$$H_x^* \text{は点分離} \, (\forall x \in E) \text{ i.e. } {}^{\perp}H_x^* = \{0\}. \tag{$*$}$$

このとき,

$$k_x = \pi_x^* \in \mathcal{L}(H_x^*, \mathcal{H}),$$
$$k(x, y) = k_x^* k_y = (k_y(\bullet))(x) = \pi_x \pi_y^* \in \mathcal{L}(H_y^*, H_x)$$

とおいて得られる $E \times E$ 上の "函数" $k(x,y) \in \mathcal{L}(H_y^*, H_x)$ を $\mathcal{H}$ の**再生核** (*reproducing kernel*) または**核函数** (*kernel function*) といい, $k \in \mathcal{L}_{E \times E}(H^*, H)$ と表す. 定義より, $\forall f \in \mathcal{H}$, $\forall x \in E$ に対して次の**再生性**が成り立つ:

$$\langle f(x), c \rangle_{H_x} = \langle f, k_x(c) \rangle_{\mathcal{H}}, \quad \forall c \in H_x^*.$$

条件 $(*)$ と再生性より, 再生核 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ において $\{k_x(c) \colon x \in E, c \in C_x^*\}$ の linear span は dense であることに注意する.

例 1 (Hilbert 空間に付随する trivial RKHS). 任意の Hilbert 空間 H に対して, $H_x = H$, $\forall x \in E$ とした Hilbert 空間族を H の生成する E 上の *trivial Hilbert* **空間族**といい, 同じ記号 H で表す. E 上の H-valued 定値函数全体を H_E, 射影を $\pi_x = id_H \colon H_E \to H$ $(\forall x \in E)$ とするとき, H_E は E 上の H-RKHS である. 再生核は $k(x,y) = id \in \mathcal{L}(H)$ で与えられる. H_E を Hilbert 空間 H の誘導する E 上の *trivial H-RKHS* という.

定義 1 (Multiplier). E 上の線形位相空間族 H, K が与えられたとき, 作用素の族 $A = \{A_x\}_{x \in E}$ が

$$A_x \in \mathcal{L}(H_x, K_x),\ \forall x \in E$$

をみたすとき, A を E 上の H から K への *multiplier* といい $A \in \mathcal{L}_E(H, K)$ と表す. $A^{\times} = \{A_x^*\} \in \mathcal{L}_E(K^*, H^*)$ を A の *adjoint multiplier* という.

線形写像 $A \colon H_1 \to H$ において, H_1 が Hilbert 空間で $\ker A$ が H_1 の閉集合ならば, $A \colon H_1 \to \operatorname{ran} A$ が coisometry, i.e. 線形同型 $A \colon (\ker A)^{\perp} \to \operatorname{ran} A$ が unitary になるような $\operatorname{ran} A$ の内積は一意的に定まる. $\operatorname{ran} A$ にこの内積を入れた Hilbert 空間を $\mathcal{M}(A)$ で表し, A の *operator range* という. Operator range $\mathcal{M}(A)$ のノルム $\|\cdot\|_{\mathcal{M}(A)}$ を A の *range norm* という. $y \in \mathcal{M}(A)$ に対して

$$\|y\|_{\mathcal{M}(A)} = \min\{\|x\| \colon y = Ax,\ x \in H_1\}$$

が成り立つ.

定義 2 (Multiplier による像). Multiplier $A = (A_x)_{x \in E} \in \mathcal{L}_E(H, K)$ が与えられたとき, 線形写像 $A \colon \Gamma(H) \to \Gamma(K)$ を次のように定義する: E 上の任意の H-valued function $f \in \Gamma(H)$ に対して

$$(Af)(x) = A_x(f(x)), \quad x \in E.$$

$Af \in \Gamma(K)$ を multiplier A による函数 f の**像**という．特に，$\mathcal{H}$ が E 上の H-RKHS のとき，線形写像 $A\colon \mathcal{H} \to \Gamma(K)$ が定義されるが，$\ker A$ は閉集合だから値域 $\operatorname{ran} A$ に range norm を入れて Hilbert 空間にすることができる．この multiplier A による $\mathcal{H}$ の *operator range* を mulitiplier による $\mathcal{H}$ の**像**または**値域の変換**といい $\mathcal{M}(A)$ で表す．また，作用素 $A\colon \mathcal{H} \to \Gamma(K)$ を induce する multiplier が存在する時，A を **multiplier 型の作用素**という．

H を E 上の線形位相空間族としたとき，$\Gamma(H)$ の $x \in E$ における evaluation を $\pi_x^H\colon \Gamma(H) \to H_x$ と表す．

命題 3. *$A = (A_x) \in \mathcal{L}_E(H^1, H^2)$ は multiplier, $\mathcal{H}_j$ は E 上の H^j-RKHS でその再生核を k^j とする $(j = 1, 2)$．次は同値:*

(i) $A(\mathcal{H}_1) = \mathcal{M}(A) \subset \mathcal{H}_2$.

(ii) $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.

また，このとき次が成り立つ．

$$\pi_x^2 A = A_x \pi_x^1,$$
$$A^* k_x^2 = k_x^1 A_x^*.$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_1 \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi_x^1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{H}_2 \arrow[d, "\pi_x^2"] \\ H_x^1 \arrow[r, "A_x"] & H_x^2 \end{tikzcd}$$

次の定理は multiplier によって RKHS が保存されることを意味する．これは再生核空間の理論でよく知られた，「積分変換」による Hilbert 空間の像空間が常に RKHS になるという事実に対応した結果である．

定理 3. *H, K が E 上の線形位相空間族，$\mathcal{H}$ が E 上の H-RKHS のとき，multiplier $A \in \mathcal{L}_E(H, K)$ に対して次が成り立つ．*

(i) $\mathcal{M}(A)$ は E 上の K-RKHS である．

(ii) $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{M}(A)$ は *coisometry, i.e.* $AA^* = I$, であり不等式

$$\|Af\|_{\mathcal{M}(A)} \le \|f\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall f \in \mathcal{H}$$

が成り立つ．等号の必要十分条件は $f \in (\ker A)^{\perp}$ である．特に，A が *unitary* になる必要十分条件は A が単射であることである．

(iii) $\mathcal{M}(A)$ の再生核 $A_* k$ は次で与えられる．

$$(A_* k)(x, y) = A_x k(x, y) A_y^*.$$

特に，

$$(A_* k)_x = A k_x A_x^*.$$

H-RKHS に対して，通常の Hilbert-valued RKHS の理論と同様の結果が同様の証明で容易に成り立つことが分かる．以下に定理の形でまとめておく．

定義 3. $H = \{H_x\}_{x \in E}$ は E 上の線形位相空間族, $k \in \mathcal{L}_{E\times E}(H^*, H)$ は $E \times E$ 上の作用素行列とする. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x_i \in E$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\forall (c_i) \in \prod_{i=1}^n H_{x_i}^*$ に対して,

$$\sum_{i,j=1}^n \langle k(x_i, x_j)(c_j), c_i \rangle_{H_{x_i}} \geq 0$$

となるとき, k を E 上の H-*(半)*正定値核といい, 記号 $k \gg_H 0$ で表す.

定理 4 (Moore-Kolmogorov-Aronszajn)**.** H は集合 E 上の線形位相空間族とする. $k \in \mathcal{L}_{E\times E}(H^*, H)$ に対して, 次は同値である.

(i) k は E 上の H-*positive definite operator matrix, i.e.* $k \gg_H 0$.

(ii) k を再生核としてもつ E 上の H-*RKHS* $\mathcal{H}$ が一意的に存在する,

(iii) *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}$ と *multiplier* $A \in \mathcal{L}_E(\mathcal{H}, H)$ が存在して, $k(x,y) = A_x A_y^*$ となる. *(Kolmogorov decomposition)*

定理 5 (再生核の和). H を E 上の線形位相空間族, $\mathcal{H}_j$ を再生核 k^j をもつ H-*RKHS* *(*$j = 1, 2$*)* とする. *Multiplier* $A \in \mathcal{L}_E(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, H)$ を $f_j \in \mathcal{H}_j$ $(j = 1, 2)$ に対して

$$A_x(f_1 \oplus f_2) = f_1(x) + f_2(x)$$

で定義すると, E 上の *trivial RKHS* $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ の A による像 $\mathcal{M}(A)$ は写像 $f \oplus g \in H_1 \oplus H_2 \mapsto f + g$ の *operator range* として H-*RKHS* であり, 再生核 $k_x^1 + k_x^2$ をもつ. このとき, ピタゴラスの不等式

$$\|f_1 + f_2\|_{k^1+k^2}^2 \leq \|f_1\|_{k^1}^2 + \|f_2\|_{k^2}^2$$

が成り立つ. 等号条件は,

$$\langle f_1, h \rangle_{k^1} = \langle f_2, h \rangle_{k^2}, \quad \forall h \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$$

で与えられる.

定理 6. E 上の H-*RKHSs* H_{k^j} $(j = 1, 2)$ に対して, 次は同値.

(i) $H_{k^1} \subset H_{k^2}$.

(ii) $H_{k^1} \subset H_{k^2}$ かつ包含写像 $i \colon H_{k^1} \hookrightarrow H_{k^2}$ が有界.

(iii) $\exists c \geq 0$ *s.t.* $k^1 \ll_H c^2 k^2$.

この時, $\|i\| = \inf c$. また, *(iii)* で等号の場合, 集合として $H_{k^1} = H_{k^2}$ でノルムが定数倍の時に限る.

これらの事実を使うと次の形で Douglas' Factorization Theorem の RKHS と multiplier を用いた拡張が得られる.

定理 7. H_1, H_2 が *Hilbert* 空間で H が E 上の線形位相空間族のとき, 二つの *multiplier* $A \in \mathcal{L}_E(H_1, H)$, $B \in \mathcal{L}_E(H_2, H)$ に対して次は同値:

(i) $\mathcal{M}(B) \subset \mathcal{M}(A)$.

(ii) $\mathcal{M}(B) \subset \mathcal{M}(A)$ かつ包含写像 $i\colon \mathcal{M}(B) \hookrightarrow \mathcal{M}(A)$ が有界.

(iii) $\exists c \geq 0$ *s.t.* $B_x B_y^* \ll_H c^2 A_x A_y^*$ *on* $E \times E$.

(iv) $\exists X \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ *s.t.* $A_x X = B_x$, $\forall x \in E$.

この時,

$$\|i\| = \inf c = \inf \|X\|.$$

5. Complementary space

H_1, H が Hilbert 空間の時, $A \in \mathcal{L}(H_1, H)$ の operator range $\mathcal{M}(A)$ の内積を少し調べよう. $\forall y \in H$, $A^*y \in \ker A^\perp$ だから内積の定義より

$$\langle Ax, AA^*y\rangle_{\mathcal{M}(A)} = \langle x, A^*y\rangle_{H_1} = \langle Ax, y\rangle_H$$

が成り立つ. この等式は $\mathcal{M}(A)$ が再生核 AA^* をもつ H-RKHS であることを意味している. ゆえに, $\mathcal{M}(A)$ は正値作用素 AA^* を再生核としてもつ 1 点上の H-RKHS (ベクトル値 RKHS) とみなせる. Contraction に関する complementary space の定義として, ここでは再生核を用いた定義を採用する. これは de Branges のノルムを用いたオリジナルな定義 [4] と同値であることに注意する.

定義 4 (complementary space). $A \in \mathcal{L}(H_1, H)$ が contraction (i.e. $\|A\| \leq 1$) のとき, 再生核 $1 - AA^*$ をもつ 1 点上の H-RKHS を $\mathcal{M}(A)$ の *complementary space* といい, 記号 $\mathcal{H}(A)$ で表す. cf. [11]

簡単のため, 同じ定義域をもつ Hilbert 空間の有界作用素 A, B が与えられたとき, 方程式 $XA = B$ をみたす contraction X 全体の集合を $\mathrm{Con}(A, B)$ と表すことにする.

$$\begin{tikzcd} & H \arrow[dl, "A"'] \arrow[dr, "B"] & \\ H_1 \arrow[rr, dotted, "X"] & & H_2 \end{tikzcd} \tag{4}$$

同様にして矢印の向きを全部逆にした方程式 $AX = B$

$$\begin{tikzcd} & H & \\ H_1 \arrow[ur, "A"] & & H_2 \arrow[ul, "B"'] \arrow[ll, dotted, "X"'] \end{tikzcd}$$

をみたす contraction X 全体の集合を $\mathrm{Con}^*(A, B)$ と表すことにする. Douglas' criterion により,

$$\mathrm{Con}(A, B) \neq \emptyset \iff B^*B \leq A^*A,$$
$$\mathrm{Con}^*(A, B) \neq \emptyset \iff BB^* \leq AA^*.$$

次の定理は部分的に [4] や [11] で知られている結果の拡張である.

定理 8 (Triangle Lemma). 図式 (4) において A は *contraction* で $X \in \mathrm{Con}(A, B)$ と仮定する. このとき, B は *contraction* で, 制限を $A' = A|_{\mathcal{H}(A^*)}$, $B' = B|_{\mathcal{H}(A^*)}$, $X' = X|_{\mathcal{H}(A)}$ とおくと, 次が成り立つ.

(i) $A' \colon \mathcal{H}(A^*) \to \mathcal{H}(A)$, $B' \colon \mathcal{H}(A^*) \to \mathcal{H}(B)$, $X' \colon \mathcal{H}(A) \to \mathcal{H}(B)$ は全て *contraction.*

(ii) X に X' を対応させて $\mathrm{Con}(A, B)$ と $\mathrm{Con}(A', B')$ の間の一対一対応が得られる. その逆写像は次で与えられる:

$$X = BA^* + i_{\mathcal{H}(B)} X' i^*_{\mathcal{H}(A)} = BA^* + X'(1 - AA^*).$$

$$\begin{tikzcd} & H \arrow[dl, "A"'] \arrow[dr, "B"] & \\ H_1 \arrow[rr, dotted, "X"] & & H_2 \end{tikzcd} \quad \overset{1:1}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{tikzcd} & \mathcal{H}(A^*) \arrow[dl, "A'"'] \arrow[dr, "B'"] & \\ \mathcal{H}(A) \arrow[rr, dotted, "X'"] & & \mathcal{H}(B) \end{tikzcd}$$

(iii) $\mathcal{H}(X') = \mathcal{H}(X)$, $\mathcal{H}(A') = \mathcal{M}(1 - AA^*)$, $\mathcal{H}(B') = \mathcal{M}((1 - 2BB^* + BA^*AB^*)^{1/2})$.

(iv) $A'^* = A^*|_{\mathcal{H}(A)}$. *i.e.* $A'^* = A^{*\prime}$, $X'^*(1 - BB^*) = (1 - AA^*)X^*$, $B'^*(1 - BB^*) = (1 - A^*A)B^*$.

Multiplier による像 RKHS と Douglas Factorization Theorem の拡張 (定理 7) 及び complementary space を用いて議論することで次の定理を得る. これは我々の目標であった (m, n)-Douglas 問題の解であるが, 補間問題において有用な Parrott の定理 ([9]) の拡張となっている.

定理 9. $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ は *Hilbert* 空間, $H = \{H_x\}_{x \in E}$, $K = \{K_x\}_{x \in F}$ はそれぞれ E 上 (F 上) の線形位相空間族とする. *Multiplier* $A \in \mathcal{L}_E(H, \mathcal{H}_1)$, $B \in \mathcal{L}_E(H, \mathcal{H}_2)$, $C \in \mathcal{L}_F(\mathcal{H}_1, K)$, $D \in \mathcal{L}_F(\mathcal{H}_2, K)$ が与えられたとき, 作用素の一次方程式系

$$\begin{cases} XA_x = B_x, & x \in E, \\ C_y X = D_y, & y \in F, \end{cases} \qquad \begin{tikzcd} & H_x \arrow[dl, "A_x"'] \arrow[dr, "B_x"] & \\ \mathcal{H}_1 \arrow[rr, dotted, "X"] \arrow[dr, "D_y"'] & & \mathcal{H}_2 \arrow[dl, "C_y"] \\ & K_y & \end{tikzcd}$$

の解で *contraction* であるような作用素 $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ が存在する必要十分条件は次の *(i)–(iii)* が成り立つことである:

(i) $D_y A_x = C_y B_x$, $\forall x \in E$, $\forall y \in F$.

(ii) $(B^*_x B_y) \ll_{H^*} (A^*_x A_y)$ *on* $E \times E$.

(iii) $(D_x D^*_y) \ll_K (C_x C^*_y)$ *on* $F \times F$.

注意 5. 上の定理で一般解 X と任意の contraction $Z \colon \mathcal{H}(D'^*) \to \mathcal{H}(C'^*)$ は

$$X = B^{\times *} A^{\times} + (C'^* D' + Z(1 - D'^* D'))(1 - A^{\times *} A^{\times}),$$
$$Z = X|_{\mathcal{H}(D'^*)},$$

の関係で一対一に対応する．ただし，$B^{\times *}$, C'^{*}, D'^{*} はそれぞれ B の adjoint multiplier $B^{\times}\colon \mathcal{H}_2 \to \mathcal{M}(A^{\times})$, C の制限 $C'\colon \mathcal{H}(B^{\times *}) \to \mathcal{H}(G)$, D の制限 $D'\colon \mathcal{H}(A^{\times *}) \to \mathcal{H}(G)$ の adjoint である．

参考文献

[1] N. Aronszajn, *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 337–404. MR MR0051437 (14,479c)

[2] M. Bakonyi and H. J. Woerdeman, *On the strong Parrott completion problem*, Proc. Amer. Math. Soc. **117** (1993), no. 2, 429–433. MR 1145412 (93d:47011)

[3] S. Bergman, *The kernel function and conformal mapping*, revised ed., American Mathematical Society, Providence, R.I., 1970, Mathematical Surveys, No. V. MR MR0507701 (58 #22502)

[4] L. de Branges and J. Rovnyak, *Square summable power series*, (1966), viii+104. MR MR0215065 (35 #5909)

[5] R. G. Douglas, *On majorization, factorization, and range inclusion of operators on Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. **17** (1966), 413–415. MR 0203464 (34 #3315)

[6] C. Foias and A. Tannenbaum, *A strong Parrott theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **106** (1989), no. 3, 777–784. MR 972228 (90d:47011)

[7] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985. MR 832183 (87e:15001)

[8] A. Oppenheim, *Inequalities connected with definite Hermitian forms.*, J. London Math. Soc. **5** (1930), no. 2, 114–119.

[9] S. Parrott, *On a quotient norm and the Sz.-Nagy - Foiaş lifting theorem*, J. Funct. Anal. **30** (1978), no. 3, 311–328. MR 518338 (81h:47006)

[10] S. Saitoh, *Theory of reproducing kernels and its applications*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 189, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1988. MR MR983117 (90f:46045)

[11] D. Sarason, *Sub-Hardy Hilbert spaces in the unit disk*, University of Arkansas Lecture Notes in the Mathematical Sciences, 10, John Wiley & Sons Inc., New York, 1994, A Wiley-Interscience Publication. MR MR1289670 (96k:46039)

[12] L. Schwartz, *Sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associés (noyaux reproduisants)*, J. Analyse Math. **13** (1964), 115–256. MR 0179587 (31 #3835)

[13] A. Yamada, *Equality conditions for norm inequalities in reproducing kernel Hilbert spaces*, Math. Inequal. Appl. **12** (2009), no. 2, 377–390. MR 2521393 (2010f:46048)

[14] X.-D. Zhang and C.-X. Ding, *The equality cases for the inequalities of Oppenheim and Schur for positive semi-definite matrices*, Czechoslovak Math. J. **59(134)** (2009), no. 1, 197–206. MR 2486625 (2010a:15056)

16

An invariant surface of a fixed indeterminate point for rational mappings

Tomoko Shinohara [1]

Tokyo Metropolitan College of Industrial Technology

In this talk, we consider a local dynamical structure of a rational mapping F of $\mathbf{P}^3$ near the set I of indeterminate points of F. Using a blow up, we will construct a surface V which contains I and is invariant by F.

First, prepare some notation and terminology. Let F be a meromorphic mapping on U which is a neighborhood of the origin of $\mathbf{C}^3$ with a set I of indeterminate points of F. In general, if p is an indeterminate point, then $\bigcap_{U_p} \overline{F(U_p \setminus \{p\})}$ is not a single point, where the intersection is taken over all open neighborhoods U_p of p. So, no definition of the image $F(p)$ makes the mapping F be continuous. Moreover, if $p \in \bigcap_{U_p} \overline{F(U_p \setminus \{p\})}$, we call it a *fixed indeterminate point*. It can be seen from the definition that a fixed indeterminate point has a recurrent property, hence we expect a local dynamical structure at this point.

It is known that $\dim I = 0, 1$. If $\dim I = 0$, then we can construct generalized Cantor bouquet (see [1]). In the following, we consider the case that $\dim I = 1$. To simplify our discussion, put

$$I := \{(x_1, x_2, x_3) \in U \mid x_2 = 0, x_3 = 0\}.$$

Let $X_1 := \left\{(x_1, x_2, x_3) \times [l_2 : l_3] \in U \times \mathbf{P}^1 \mid x_3 l_2 - x_2 l_3 = 0\right\}$ be a subset of $U \times \mathbf{P}^1$. Then, X_1 is a subvariety of $U \times \mathbf{P}^1$ and covered by the following two coordinate charts $\{(U_1^j, \mu_1^j)\}_{j=2,3}$

$$U_1^2 := \left\{(x_1, x_2, x_3) \times [l_2 : l_3] \in X_1 \mid x_3 = \frac{l_3}{l_2} x_2\right\},$$

$$\mu_1^2 : U_1^2 \to \mathbf{C}^3, (x_1, x_2, x_3) \times [l_2 : l_3] \mapsto \left(x_1, x_2, \frac{l_3}{l_2}\right),$$

$$U_1^3 := \left\{(x_1, x_2, x_3) \times [l_2 : l_3] \in X_1 \mid x_2 = \frac{l_2}{l_3} x_3\right\},$$

$$\mu_1^3 : U_1^2 \to \mathbf{C}^3, (x_1, x_2, x_3) \times [l_2 : l_3] \mapsto \left(x_1, \frac{l_2}{l_3}, x_3\right).$$

Definition 1. *The map $\pi_1 : X_1 \to U$ defined by restricting the first projection $U \times \mathbf{P}^1 \to U$ is called the blow up of U along I and $E_1 := \pi^{-1}(I) = I \times \mathbf{P}^1$ is called the exceptional divisor.*

It is remarked here that $\pi_1 : X_1 \setminus E_1 \to U \setminus \{I\}$ is biholomorphic and

$$\pi_1|_{U_1^2}(z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2, z_2 z_3), \quad U_1^2 \cap E_1 = \left\{(z_1, z_2, z_3) \in U_1^2 \mid z_2 = 0\right\}.$$

[1] E-mail address: sinohara@s.metro-cit.ac.jp,
This research is supported by MEXT Grant-in-Aid for Young Scientists(B)No. 22740113.

Set $\tilde{F}_1 := F \circ \pi_1 : X_1 \to U$. Assume that F satisfies the following assumption.

$$(A.1)\begin{cases} (1)\ \tilde{F}_1 \text{ is holomorphic on a neighborhood of } E_1, \\ (2)\ \tilde{F}_1(E_1) \ni (0,0,0),\ \{p_1\} = \tilde{F}_1^{-1}(0,0,0),\ p_1 = (0,0,a_1^3) \in U_1^2,\ \pi_1(p_1) = (0,0,0), \\ (3) \text{ there is an open neighborhood } N_1 \text{ of } p_1 \text{ such that} \\ \quad \tilde{F}_1|_{N_1} : N_1 \to \tilde{F}_1(N_1) \text{ is biholomorphic.} \\ (4)\ I_1 := \tilde{F}_1^{-1}\left(I \cap \tilde{F}_1(N_1)\right),\ I_1 \subset E_1 \cap U_1^2 \text{ there is a holomorphic function } \psi_1 \\ \quad \text{such that } I_1 = \{(z_1,z_2,z_3) \in U_1^2 \mid z_2 = 0,\ z_3 = \psi_1(z_1)\ \ |z_1| < \epsilon_1\}. \end{cases}$$

Let $X_2 := \left\{(z_1,z_2,z_3) \times [l_2 : l_3] \in N_1 \times \mathbf{P}^1 \mid z_2 l_3 = (z_3 - \psi_1(z_1)) l_2\right\}$ be a subset of $N_1 \times \mathbf{P}^1$. The map $\pi_2 : X_2 \to N_1$ is called the blow up of N_1 along I_1. Set $F_1 := \pi_1^{-1} \circ \tilde{F}_1 : N_1 \to X$ and $\tilde{F}_2 := F_1 \circ \pi_2 : X_2 \to X_1$. Then, the following claim holds.

$$(A.2)\begin{cases} (1)\ \tilde{F}_2 \text{ is holomorphic on a neighborhood of } E_2 := \pi_2^{-1}(I_1), \\ (2)\ \tilde{F}_2(E_2) \ni p_1,\ \{p_2\} = \tilde{F}_1^{-1}(p_1),\ \pi_2(p_2) = p_1, \\ \text{if } p_2 \in U_2^2, \text{ then one can put } p_2 := (0,0,a_3^2) \in U_2^2. \\ (3) \text{ there is an open neighborhood } N_2 \text{ of } p_2 \text{ such that} \\ \quad \tilde{F}_2|_{N_2} : N_2 \to \tilde{F}(N_2) \text{ is biholomorphic.} \\ (4)\ I_2 := \tilde{F}_2^{-1}\left(I_1 \cap \tilde{F}_2(N_2)\right),\ I_2 \subset E_2, \text{ there is a holomorphic function } \psi_2 \\ \quad \text{such that } I_2 = \{(y_1,y_2,y_3) \in U_2^2 \mid y_2 = 0,\ y_3 = \psi_2(y_1)\ \ |y_1| < \epsilon_2\}. \end{cases}$$

If $p_n \in U_n^2 \cap E_n$ for every $n \in \mathbf{N}$, we can repeat this process inductively and obtain the sequence of sets

$$I_n := \tilde{F}_{n-1}^{-1}\left(I_{n-1} \cap \tilde{F}_{n-1}(N_{n-1})\right) = \left\{(y_1,0,y_3) \in U_n^2 \cap E_n \mid y_3 = \psi_n(y_1)\ \ |y_1| < \epsilon_n\right\}.$$

Here, we set $\psi_n(y_1) = \sum_{i \geq 0} a_{in} y_1^i$. Using the sequence $\{I_n\}$, one can characterize the set of points whose orbit is bounded.

Theorem A. *For any $m \in \mathbf{N}$ and sufficiently small open neighborhood N_p^m of $p = (0,0,0)$, there exists some open neighborhood N_m of p_m such that*

$$\bigcap_{k \geq 1}^{\infty} F^{-k}(N_p^m) \cap N_p^m \subset \pi \circ \cdots \pi_m(N_m) \cap N_p^m.$$

Put $V = \left\{(x_1,x_2,x_3) \in U \mid x_3 = \sum_{i,j \geq 0} b_{ij} x_1^i x_2^j\right\}$.

Theorem B. *V is non-empty, $V \supset I$ and V is invariant by F if and only if $b_{ij} = a_{ij}$ for all $i,j \geq 0$.*

References

[1] T. Shinohara, *Another construction of a Cantor bouquet at a fixed indeterminate point,* Kyoto J. Math. 50(2010), no.1, 205–224.

Dynamics and weights of polynomial skew products on $\mathbb{C}^2$

Kohei Ueno (Toba National College of Maritime Technology)

Abstract

We study the dynamics of polynomial skew products on $\mathbb{C}^2$. We insist that it is useful to consider the dynamics with suitable weights by showing that, if we admit plus infinity, the weighted Green functions are well defined on $\mathbb{C}^2$.

1. Introduction

We consider the dynamics of a polynomial skew product on $\mathbb{C}^2$ of the form $f(z,w) = (p(z), q(z,w))$, where p and q are polynomials such that $\delta = \deg p \geq 2$ and $d = \deg_w q \geq 2$. Let $b(z)$ be the coefficient of w^d and l the degree of b. It follows that the dynamical degree of f is equal to $\lambda = \max\{\delta, d\}$. An important tool for the study of the dynamics of f is the Green function of f, which is defined as

$$G_f(z,w) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda^n} \log^+ |f^n(z,w)|,$$

where f^n is the n-th iterate of f and $|(z,w)| = max\{|z|, |w|\}$. This function measures escape rates of points to infinity. The first question is whether the limit G_f exists or not. It is shown in [1] that G_f exists on $K_p \times \mathbb{C}$, where $K_p = \{z : \{p^n(z)\}_{n\geq 0} \text{ bounded}\}$. However, there are polynomial skew products whose Green functions are not defined on some curves in $A_p \times \mathbb{C}$, where $A_p = \{z : p^n(z) \to \infty \text{ as } n \to \infty\}$; see [4] for details.

In [4] we introduced the weighted Green function of f, which is now defined as

$$G_f^\alpha(z,w) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda^n} \log^+ |f^n(z,w)|_\alpha,$$

where $|(z,w)|_\alpha = max\{|z|^{max\{\alpha,0\}}, |w|\}$ for a real number α. We proved in [4] that if $l = 0$, then it is defined, continuous and plurisubharmonic on $\mathbb{C}^2$ for a suitable rational number $\alpha \geq 0$, which is defined below. In this talk, we generalize this previous result to the case $l \neq 0$.

2. Weights

The dynamics of f shows different behavior depending on the magnitude relation of δ and d. Let $f(z,w) = (z^\delta + \cdots, z^l w^d + c_j z^{n_j} w^{m_j} + \cdots)$ and define α as

- $\min\{a \in \mathbb{Q} : a\delta \geq l + ad \text{ and } a\delta \geq n_j + am_j \text{ for any } j\}$ if $\delta > d$,
- $\min\{a \in \mathbb{Q} : l + ad \geq a\delta \text{ and } l + ad \geq n_j + am_j \text{ for any } j\}$ if $\delta < d$,
- $\inf\{a \in \mathbb{Q} : l + ad \geq n_j + am_j \text{ for any } j\}$ if $\delta = d$.

Since q has only finitely many terms, we can take the minimum if $\delta \neq d$. In the case $\delta = d$, we can replace inf by min if $q(z,w) \neq b(z)w^d$, and $\alpha = -\infty$ if $q(z,w) = b(z)w^d$.

Remark 1. *Assume that f is not a polynomial product. If $\delta > d$, then α is positive and f extends to an AS rational map on the weighted projective space. On the other hand, if $\delta \leq d$, then α can be negative and it is not easy to find a nice compactification of $\mathbb{C}^2$. It seems that [2] and [3] relate to this compactification problem.*

3. Results

Now, we describe our results. It follows from a result in [1] that G_f^α is defined and locally bounded on $K_p \times \mathbb{C}$. Let G_p be the Green function of p.

Theorem 1. *If $\delta \neq d$, then G_f^α is defined and locally bounded on $\mathbb{C}^2$. More precisely, if $\delta > d$ then $G_f^\alpha = \alpha G_p$ on $\mathbb{C}^2$, which is continuous and plurisubharmonic on $\mathbb{C}^2$. If $\delta < d$ then $G_f^\alpha = G_f$ on $\mathbb{C}^2$, which is continuous and plurisubharmonic on $A_p \times \mathbb{C}$.*

The second question is whether G_f^α is continuous on $\mathbb{C}^2$ or not. An example in [1] shows that it can be discontinuous on $J_p \times \mathbb{C}$, where $J_p = \partial K_p$. On the other hand, Theorem 1 induces that if $\delta < d$ and $b^{-1}(0) \cap K_p = \emptyset$, then it is continuous on $\mathbb{C}^2$.

Theorem 2. *If $\delta = d$ and $l \neq 0$, then G_f^α is equal to ∞ on A_f and* $\max\{\alpha, 0\} G_p$ *on B_f, where $A_f = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(W_R)$, $W_R = \{|z| > R, |w| > R|z|^\alpha\}$ and $B_f = A_p \times \mathbb{C} - A_f$ for large $R > 0$. Moreover, if $q(z,w) = b(z)w^d$, then B_f coincides with the union of the preimages of $\{(z,w) : z \in A_p, w = 0\}$.*

Remark 2. *If $\delta = d$ and $l = 0$, then the dynamics of f has a nice feature which is different from the others; f extends to a holomorphic map on the weighted projective space. See [4] for details.*

It is helpful to observe the dynamics of the monomial map $f(z,w) = (z^\delta, z^l w^d)$ and of polynomial skew products that are semiconjugate to polynomial products. The theorems above follow from investigations of (fiberwise) Green functions of f such as

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{d^n} \log^+ \left| \frac{w_n}{z_n^\alpha} \right| \text{ and } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda^n} \log^+ |w_n|,$$

where $(z_n, w_n) = f^n(z,w)$.

References

[1] C. Favre and V. Guedj, *Dynamique des applications rationnelles des espaces multi-projectifs*, Indiana Univ. Math. J., **50** (2001), 881-934.

[2] C. Favre and M. Jonsson, *Dynamical compactifications of* $\mathbb{C}^2$, Ann. of Math., **173** (2011), 211-248.

[3] V. Guedj, *Dynamics of polynomial mappings on* $\mathbb{C}^2$, Amer. J. Math., **124** (2002), 75-106.

[4] K. Ueno, *Weighted Green functions of nondegenerate polynomial skew products on* $\mathbb{C}^2$, Discrete Contin. Dyn. Syst., **31** (2011), 985-996.

Linear invariance of locally biholomorphic mappings

Tatsuhiro HONDA (Hiroshima Institute of Technology, Japan)*1
Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University, Japan)*2
Gabriela KOHR (Babeş-Bolyai University, Romania)*3

Linear invariance, introduced by Pommerenke [17, 18] has been a powerful tool in extending many ideas of univalent function theory to the study of locally univalent functions on the unit disc. We introduce the notion of linear invariant families and the norm-order in the homogeneous unit ball of a complex Banach space.

Let B be the homogeneous unit ball of a complex Banach space X. Then a family $\mathcal{F}$ is called a *linear-invariant family* if $\mathcal{F} \subset \mathcal{LS}(B)$, $\Lambda_\phi(f) \in \mathcal{F}$ for all $f \in \mathcal{F}$ and $\phi \in \mathrm{Aut}B$, where $\mathrm{Aut}B$ denotes the set of biholomorphic automorphisms of B, and $\Lambda_\phi(f)$ is the *Koebe-transform*

$$\Lambda_\phi(f)(x) = [D\phi(0)]^{-1}[Df(\phi(0))]^{-1}(f(\phi(x)) - f(\phi(0)))$$

for all $x \in B$. Note that the Koebe transform has the group property $\Lambda_\psi \circ \Lambda_\phi = \Lambda_{\phi\circ\psi}$.

If $\mathcal{F}$ is a linear invariant family, we define two types of *norm-order* of $\mathcal{F}$ (cf.[16]), given by

$$\|ord\|_{X,1}\mathcal{F} = \sup_{f\in\mathcal{F}} \sup_{\|y\|=1} \left\{ \frac{1}{2}\|D^2f(0)(y,\cdot)\| \right\}$$

and

$$\|ord\|_{X,2}\mathcal{F} = \sup_{f\in\mathcal{F}} \sup_{\|y\|=1} \left\{ \frac{1}{2}\|D^2f(0)(y,y)\| \right\}.$$

It is clear that $\|ord\|_{X,1}\mathcal{F} \geq \|ord\|_{X,2}\mathcal{F}$. Since

$$D^2f(0)(y,z) = \frac{1}{2}\left\{D^2f(0)(y+z,y+z) - D^2f(0)(y,y) - D^2f(0)(z,z)\right\},$$

we obtain $\|ord\|_{X,1}\mathcal{F} \leq 3\|ord\|_{X,2}\mathcal{F}$.

Moreover, if X is a complex Hilbert space, then $\|ord\|_{X,1}\mathcal{F} = \|ord\|_{X,2}\mathcal{F}$.

Recently many mathematicians have studied the linear invariant families in several complex variables. Several interesting results, concerning the norm-order of a linear invariant family and some connections with starlikeness, convexity and other geometric properties of holomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$, were obtained by Pfaltzgraff and Suffridge [16]. Also they showed a number of growth, covering and distortion results for mappings that belong to a linear invariant family on the Euclidean unit ball in $\mathbb{C}^n$. Hamada and Kohr generalized the results in [16] to the unit ball in a complex Hilbert space in [11] and to the unit polydisc in [12]. For linear invariant families in several complex variables, see also the books [4, 5] and the references therein.

This work was supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No. 22540213 from Japan Society for the Promotion of Science, 2011.
2000 Mathematics Subject Classification: 32H02, 30C45.
Keywords: linear invariant family, norm order.
*1 e-mail: thonda@cc.it-hiroshima.ac.jp
*2 e-mail: h.hamada@ip.kyusan-u.ac.jp
web: http://www.ip.kyusan-u.ac.jp/J/kougaku/tb/hamada/
*3 e-mail: gkohr@math.ubbcluj.ro

In this talk, we obtain some connection between the norm-order of a linear invariant family and the starlikeness of order $1/2$. Also, we give some result concerning the radius of univalence of some linear invariant families. When the dimension of X is finite, and the norm order of a linear invariant family is finite, we will prove the normality of the linear invariant family and we also obtain upper bounds on the distortion and the growth of mappings in a linear invariant family with specified norm order [9] (cf.[2, 3, 10] and the references therein).

References

[1] R.W. Barnard, C.H. FitzGerald, S. Gong, A distortion theorem for biholomorphic mappings in $\mathbb{C}^2$, Trans. Amer. Math. Soc. 344 (1994) 907–924.

[2] C-H. Chu, H. Hamada, T. Honda, G. Kohr, Distortion theorems for convex mappings on homogeneous balls, J. Math. Anal. Appl. 369 (2010) 437–442.

[3] P. Duren, H. Hamada, G. Kohr, Two-point distortion theorems for harmonic and pluriharmonic mappings, Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011) 6197–6218.

[4] S. Gong, Convex and Starlike Mappings in Several Complex Variables, Mathematics and its Applications (China Series), 435. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht; Science Press, Beijing, 1998.

[5] I. Graham, G. Kohr, Geometric function theory in one and higher dimensions, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 255. Marcel Dekker, Inc., New York, 2003.

[6] H. Hamada, T. Honda, Sharp growth theorems and coefficient bounds for starlike mappings in several complex variables, Chin. Ann. Math. Ser. B 29 (2008) 353–368.

[7] H. Hamada, T. Honda, G. Kohr, Growth theorems and coefficient bounds for univalent holomorphic mappings which have parametric representation, J. Math. Anal. Appl. 317 (2006) 302–319.

[8] H. Hamada, T. Honda, G. Kohr, Bohr's theorem for holomorphic mappings with values in homogeneous balls, Israel J. Math. 173 (2009) 177–187.

[9] H.Hamada, T.Honda, G.Kohr, Linear invariance of locally biholomorphic mappings in the unit ball of a JB*-triple, J. Math. Anal. Appl. 385 (2012) 326–339.

[10] H.Hamada, T.Honda, G.Kohr, Trace-order and a distortion theorem for linear invariant families on the unit ball in a finite dimensional JB*-triple, preprint.

[11] H. Hamada, G. Kohr, Linear invariance of locally biholomorphic mappings in Hilbert spaces, Complex Var. Theory Appl. 47 (2002) 277–289.

[12] H. Hamada, G. Kohr, Linear invariant families on the unit polydisc, Mathematica(Cluj) 44(67), No.2 (2002) 153–170.

[13] H. Hamada, G. Kohr, Order of linear invariant families on the ball and polydisc of $\mathbb{C}^n$, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 48 (2003) 143–151.

[14] H. Hamada, G. Kohr, Roper-Suffridge extension operator and the lower bound for the distortion, J. Math. Anal. Appl. 300 (2004) 454–463.

[15] J.A. Pfaltzgraff, Distortion of locally biholomorphic maps of the n-ball, Complex Var. Theory Appl. 33 (1997) 239–253.

[16] J.A. Pfaltzgraff, T.J. Suffridge, Norm order and geometric properties of holomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$, J. Anal. Math. 82 (2000) 285–313.

[17] C. Pommerenke, Linear-invariante familien analytischer funktionen I, Math. Ann. 155 (1964) 108–154.

[18] C. Pommerenke, Linear-invariante familien analytischer funktionen II, Math. Ann. 156 (1964) 226–262.

A converse to the Andreotti-Grauert vanishing theorem.

松村 慎一 (東京大学大学院数理科学研究科 (D2))

問題. 本講演では, コンパクト複素多様体上の Andreotti-Grauert の定理の逆問題に対する [Mat] で得られた結果について紹介する. この問題は [DPS96] で Demailly-Peternell-Schneider により提起された.

古典的な Andreotti-Grauert の定理によれば, 非コンパクト複素多様体が q-完備ならばその多様体のコホモロジー次元は q 以下である. この定理のコンパクト多様体版が直線束を定めることで定式化できる. 以下, X を n 次元のコンパクト複素多様体, L を X 上の正則直線束, $q = 0, \ldots, (n-1)$ とする.

定理 1. 直線束 L が q-正 (*q-positive*) ならば, 直線束 L は (コホモロジー的に) q-豊富 (*q-ample*) である.

ここで, 直線束の q-正値性と q-豊富性は, 以下で定義される.

定義 . (1) 直線束 L の (滑らかな) エルミート計量で以下を満たすものが存在する時, L は q-正であるという.

エルミート計量のチャーン曲率が X の至る所で $(n-q)$ 個以上の正固有値を持つ

(2) 以下のコホモロジーの消滅条件が満たされる時, L は q-豊富であるという.

X 上の任意の連接層 $\mathcal{F}$ に対して, L を十分に捻れば, $(q+1)$ 次以上のコホモロジー $H^i(X, \mathcal{F} \otimes L^{\otimes m})$ $(i > q, \quad m >> 1)$ は消滅する.

定義から明らかなように, q-正値性の概念は通常の正の概念の拡張である. ここで, 0-正が通常の正の概念に当たることに注意する. 小平の特徴付けによれば, 直線束が正 (positive) であることと豊富 (ample) であることは同値であった. よって, 定理 1 は「豊富ならば (コホモロジー的)0-豊富である」という Serre の消滅定理の一般化であると解釈できる. Serre の消滅定理には逆の包含が成立するということ (Serre によるコホモロジーを使った豊富性の特徴付け) に注意すると, 以下の問題が自然に発生する. 本講演では, この問題について得られた結果について解説する.

問題 2. ([DPS96]). 直線束 L が q-豊富の時, L は q-正であるか?

主結果. [Som] によれば, 直線束 L が半豊富の時, L の q-豊富性は半豊富ファイブレーションのファイバー次元で特徴付けることができる (定理 3 の (A) と (B) の同値性). このファイブレーションを用いて, L に曲率が q-正の条件を満たす計量を構成することができる. ここで, 直線束 L が半豊富とは, 適当な回数捻った直線束 $L^{\otimes m}$ $(m > 0)$ が基底点自由 (base point free) になることを意味する. この時, $L^{\otimes m}$ $(m > 0)$ の完備一次系が射影空間への正則写像 $\Phi_{|L^{\otimes m}|} : X \longrightarrow \mathbb{P}^N$ を誘導する. 捻る回数が十分大きい時, この正則写像はある種の普遍性を持つ. この時, この正則写像を半豊富ファイブレーションという.

定理 3. 直線束 L が半豊富だと仮定する．この時，以下は同値である．
(A) L の半豊富ファイブレーションのファイバーの次元が高々 q 次元である．
(B) L は（コホモロジー的に）q-豊富である．
(C) L が q-正である．
特に，直線束が半豊富の時，問題 *2* は肯定的である．

以下の定理 4 は，X が射影曲面の時，問題 2 が肯定的に解けることを主張する．直線束に何の仮定も置かずに，問題 2 について述べた結論は少なく，そういう意味でこの定理は価値を持つ．

定理 4. 多様体 X が射影的な曲面であると仮定する．この時，問題 *2* は肯定的である．即ち，直線束の 1-豊富性から 1-正値性が導かれる．

本講演では定理 4 の証明の概略を説明する：まず，X が射影多様体の時，L の $(n-1)$-豊富性をある曲線 (strongly movable curve) との交点数で特徴付ける．これを用いると，射影曲面の上では，L の 1-豊富性は，L と豊富な因子との交点数が正であることで特徴付けられる．この条件から多様体上の大域的な方程式 (Monge-Ampère 方程式) を利用して計量を構成する．

定理 5. 直線束が巨大 (*big*) だと仮定する．この時，以下は同値である．
(A) L が X 上の直線束として q-正である．
(B) L の非豊富集合 (*non-ample locus*) $\mathbb{B}_+(L)$ への制限 $L|_{\mathbb{B}_+}$ が q-正である．

[Bro] によれば，q-豊富性に対しても同様の結論が成立する．また，この定理の系として，$\dim \mathbb{B}_+(L) \leq q$ の時，L が q-正であることがわかる．同様の仮定の下で，L が q-豊富であることが知られている ([Kür10])．よって，この事実は [Kür10] の結果の解析版と見なせる．

References

[Bro] Brown M V. *Big q-ample line bundles.* to appear in Compositio Mathematica.

[DPS96] Demailly J P, Peternell T, Schneider M. *Holomorphic line bundles with partially vanishing cohomology.* Proceedings of the Hirzebruch 65 Conference on Algebraic Geometry (Ramat Gan, 1993), 165–198, Israel Math. Conf. Proc., **9**, Bar-Ilan Univ 1996.

[Kür10] Küronya A. *Positivity on subvarieties and vanishing of higher cohomology.* preprint, arXiv:1012.1102v1.

[Mat] Matsumura S. *Asymptotic cohomology vanishing and a converse to the Andreotti-Grauert theorem on a surface.* preprint, arXiv:1104.5313v1.

[Som] Sommese A J. *Submanifolds of Abelian varieties.* Math. Ann. **233** (1978), no. 3, 229–256.

Author: Shin-ichi Matsumura
e-mail : shinichi@ms.u-tokyo.ac.jp

Weak Lefschetz theorems and the topology of zero loci of ample vector bundles.

松村 慎一 (東京大学大学院数理科学研究科 (D2))

問題. Lefschetz の超平面定理によれば, 非特異射影多様体 X のホモトピー群は X 上の豊富な直線束の正則切断の零点のホモトピー群と比べることができる. 本講演では, この定理の豊富なベクトル束への一般化 (への試み) について紹介する. この種の結果については以下が基本的である.

命題 1. ([$So78$]). X を n 次元の非特異射影多様体, E を階数 r の正則ベクトル束とする. E の正則切断 $s \in H^0(X, \mathcal{O}_X(E))$ の零点集合

$$S := s^{-1}(0) := \{x \in X \mid s(x) = 0 \in E_x\}.$$

を考える. 今, ベクトル束 E が豊富であると仮定する. この時, 以下が成立する.

$$H_i(X, S : \mathbb{Z}) = 0 \qquad for \;\; i \leq n - r.$$

問題 2. 命題 *1* と同じ設定の下で, ベクトル束 E が豊富であると仮定する. この時, 相対ホモトピー群 $\pi_i(X, S)$ は消滅するであろうか？

研究の動機. ベクトル束 E が Griffiths-正である時, 問題 2 は肯定的に解決されている. (例えば, [FV03, Theorem 1.2] を参照.) 一般に, ベクトル束 E が Griffiths-正ならば, 豊富であることが知られている. しかし, 豊富性から Griffiths-正値性が従うかどうかは未解決である (Griffiths 予想). もし, Griffiths 予想が正しいならば問題2は肯定的であるはずである. 近年, コンパクト多様体上の Andreotti-Grauert の定理の逆が成立するかどうかという問題 (Demailly-Peternell-Schneider により提起された問題) に反例が与えられた. この問題は, Griffiths 予想と多くの類似点を持っている. また, その反例は問題 2 と似た問題を考察することで与えられた. 問題 2 を考察することで Griffiths 予想への手掛かりを掴むことを期待している.

主結果. [Oko87] によれば, 問題 2 は以下の仮定の下で肯定的に解かれている.

ベクトル束 E が大域切断で生成される, S が期待次元 r を持つ.

また, [Laz83, Theorem 3.5] によれば, 以下の仮定の下でも肯定的に解かれている.

$E \otimes B^{\otimes -1}$ が大域切断で生成される.

ここで, B は大域切断で生成される豊富な直線束である. 以下の定理はこれらの定理の一般化である. 定理 3 の仮定は, 上のいずれの仮定よりも弱いことに注意する.

定理 3. 命題 *1* と同じ設定の下で, 直線束 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^*)}(-1)$ が $(r-1)$-正であると仮定する. この時, 以下が成立する.

$$\pi_i(X, S) = 0 \qquad for \;\; i \leq n - r.$$

定理 3 の仮定は, 解析的な仮定である. 代数的な仮定から問題 2 にどこまで迫れるのかを考察することは興味深い. 以下で, この考察についての結果を述べる.

定理 4. X を n 次元の非特異射影多様体, Y を X 上の台が連結な解析的集合で局所完全交叉なもの, U を Y の連結な開近傍とする. 今, 補集合 $X \setminus Y$ はコホモロジー的 $(n-2)$-完備であると仮定する. この時, X 上の任意の解析的集合 R に対して, 写像 $j_* : \pi_1(U \setminus R) \longrightarrow \pi_1(X \setminus R)$ は全射である. 特に, 写像 $j_* : \pi_1(Y) \longrightarrow \pi_1(X)$ は全射となる.

ここで, 複素数多様体 M がコホモロジー的 q-完備とは, M 上の任意の連接層 $\mathcal{F}$ に対して, $H^i(M, \mathcal{F}) = 0$ $(i > q)$ が成立することを言う. 補集合 $X \setminus Y$ が (解析的な意味で) $(n-2)$-完備の時は, Morse 理論を用いて同じ結論を下すことができる. 代数的な仮定からも位相的基本群に関して情報を得ることができるというのが上の定理 4 の利点である. 系として以下を得る. この系は問題 2 が基本群の全射性に関しては肯定的に解けることを主張している.

系 5. 命題 *1* の設定の元で, E が豊富であること, S が期待次元 r を持つこと, $r < n$ を仮定する. この時, 写像 $j_* : \pi_1(S) \longrightarrow \pi_1(X)$ は全射である.

定理 4 の証明には [NR-98] のアイデアと技術を用いる. その技術を改変することで以下の定理を得ることができる.

定理 6. X を n 次元の（特異点を持ち得る）射影多様体, Y を X 上の台が連結な有効因子, U を Y の連結な開近傍で X の特異点集合 X_{sing} と交わらないものとする. 今, Y の小平次元が 2 以上だと仮定する. この時, X_{sing} を含む X 上の任意の解析的集合 R に対して, , 写像 $j_* : \pi_1(U \setminus R) \longrightarrow \pi_1(X \setminus R)$ は全射である. 特に, X が正規多様体の時, 写像 $j_* : \pi_1(Y) \longrightarrow \pi_1(X)$ が全射となる.

References

[FV03] Francisco P, Vicente M. *Semipositive bundles and Brill-Noether theory.* Bull. London Math. Soc. **35** (2003), no. 2, 179–190.

[Laz83] Lazarsfeld R. *Some applications of the theory of positive vector bundles.* Complete intersections (Acireale, 1983), Lecture Notes in Math, vol.**1092**, Springer, Berlin, 1984, 29–61.

[Mat11] Matsumura S. *Weak Lefschetz theorems and the topology of zero loci of ample vector bundles .* preprint.

[NR98] Napier T, Ramachandran M. *The L^2 $\bar{\partial}$-method, weak Lefschetz theorems, and the topology of Kähler manifolds.* J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), no. 2, 375–396.

[Oko87] Okonek C. *Barth-Lefschetz theorems for singular spaces.* J. Reine Angew. Math. **374** (1987), 24–38.

[So78] Sommese A J. *Submanifolds of Abelian varieties.* Math. Ann. **233** (1978), no. 3, 229–256.

Author: Shin-ichi Matsumura

e-mail : shinichi@ms.u-tokyo.ac.jp

次数付き線形系の体積とその解析的表示について

久本智之 (東京大学大学院数理科学研究科)

X を滑らかな射影的複素代数多様体, L をその上の正則直線束とする. 部分空間 $W_m \subseteq H^0(X, L^{\otimes m})$ で $W_m \cdot W_{m'} \subseteq W_{m+m'}$ を満たすものを次数付き線形系と呼ぶ. これは切断環 $\oplus_{m \geqslant 1} H^0(X, L^{\otimes m})$ の次数付き部分環を与えることに他ならない. 代数幾何学では, 線形系 $W_\bullet$ の m についての漸近的な構造がよく調べられている. 例えば, $W_\bullet$ の体積

$$\mathrm{vol}(W_\bullet) := \limsup_{m \to \infty} \frac{\dim W_m}{m^n/n!}$$

はその代表的なものである. 特に $W_\bullet$ が完備すなわち $W_m = H^0(X, L^{\otimes m})$ のときは $\mathrm{vol}(L)$ と表し, L の体積と呼ぶ. 体積が 0 でないときは, $\mathrm{vol}(L)$ は L の数値的同値類だけで決まる不変量であり, 解析的に取り扱うことができる. ([Bou02], [Ber09] 参照.) 一般に, 体積が 0 でなければ, 種々の漸近的不変量も L の数値的同値類のみに依存し, 解析的に調べられる.

このような漸近解析を一般の次数付き線形系で考察することは自然であり, また応用上も大切である. 実際 [LM08] は, 次数付き線形系の体積を定義し, この場合にも藤田の近似定理 ([Fuj94]) が成り立つことを示した. 彼らの手法は Okounkov 体を用いる代数的なものである. 完備でない線形系に対しては, 解析的な立場からの研究は殆ど無かった. 閉部分多様体から定まる線形系の場合には, [His11] で, Bergman 核を用いて詳しく調べている. 今回我々は Boucksom と Berman の手法を発展させることで, 一般の次数付き線形系について, 体積の解析的な側面を研究した. そこでは次の平衡計量が中心的役割を果たす.

Definition 1. 直線束 L の滑らかな Hermite 計量 $e^{-\varphi}$ を固定する. 次数付き線形系 $W_\bullet$ 及び φ に関する平衡計量とは

$$(P_{W_\bullet}\varphi)(x) := \sup{}^* \left\{ \frac{1}{m} \log |\sigma(x)|^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} m \geqslant 1,\ \sigma \in W_m, \\ \text{and } |\sigma|^2 e^{-m\varphi} \leqslant 1 \text{ on } X. \end{array} \right\}$$

で定義される L の特異 Hermite 計量である．ここで * は upper envelope を表している．

大まかにいうと，$P\varphi$ は，φ の epigraph の $W_\bullet$ に関する多項式凸包に対応している．$W_\bullet$ が 0 でない元を持てば，実際 $P\varphi$ は L の特異計量を定め，$dd^cP\varphi$ は正カレントになる．しかも，値が $-\infty$ を取るような集合は代数的真部分集合に含まれるから，Skoda の拡張定理によりウェッジ積 $(dd^cP\varphi)^n$ が適当に定義出来る．このとき主結果は次のように述べられる．

Theorem 2. 次数付き線形系 $W_\bullet$ の定める有理写像 $\Phi : X \to \mathbb{P}(W_m^*)$ が十分大きな m に対して双有理的であると仮定する．このとき，L の勝手な Hermite 計量 φ について

$$\mathrm{vol}(W_\bullet) = \int_X (dd^cP\varphi)^n$$

が成り立つ．

これは藤田の近似定理の解析的解釈とも捉えることができる．このような定理が示されると，$\mathrm{vol}(W_\bullet)$ の下からの評価を局所的に行えるようになる．

参考文献

[Ber09] R. Berman: *Bergman kernels and equilibrium measures for line bundles over projective manifolds.* Amer. J. Math. **131** (2009), no. 5, 1485–1524.

[Bou02] S. Boucksom: *On the volume of a line bundle.* Internat. J. Math. **13** (2002), no. 10, 1043–1063.

[Fuj94] T. Fujita: *Approximating Zariski decomposition of big line bundles.* Kodai Math. J. **17** (1994), no. 1, 1–3.

[His11] T. Hisamoto: *Restricted Bergman kernel asymptotics.* Preprint (2011) Trans. Amer. Math. Soc., to appear.

[LM08] R. Lazarsfeld, M. Mustaţă: *Convex Bodies Associated to graded linear siries.* Preprint (2008) arXiv:0805.4559.

ケーラーリッチ流の半正値性

S. Boucksom（パリ第6大学）-辻　元（上智大学理工学部）

X を非特異射影代数多様体，ω_0 を X 上のケーラー形式として，次のリッチ流を考える。

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega(t) = -\mathrm{Ric}(\omega(t)) - \omega(t) \quad \text{on } X \times [0,T) \tag{0.1}$$

$$\omega(0) = \omega_0$$

但し ω_0 は、適当な C^∞ 体積形式 Ω に対して

$$\omega_0 + \mathrm{Ric}\,\Omega$$

がケーラー形式になっているものとする。

ここで T は C^∞-解の極大存在時間である。

定理 1 *K_X が pseudoeffective であるとすると (0.1) の正閉カレント解 $\omega(t)$ で*

(1) $\omega(t)$ は固定した t に対して、X の
(2) $[\omega(t)] = (1 - e^{-t})2\pi c_1(K_X) + e^{-t}[\omega_0]$,
(3) $\omega(t)$ は同じコホモロジー類を代表する正閉 $(1,1)$-カレントの中で極小特異性を持つ。

を満たすものが $X \times [0,\infty)$ で一意的に存在する。

上で構成した解 $\omega(t)$ の時間無限大における挙動については X が一般型であれば、$\omega(\infty) := \lim_{t\longrightarrow\infty}\omega(t)$ が存在し、X 上の標準的なケーラー-アインシュタインカレントである。即ち、$\omega(\infty)$ は、X の空でないザリスキ開集合 U で C^∞ ケーラー形式で U 上 $-\mathrm{Ric}(\omega(\infty)) = \omega(\infty)$ を満たす極小特異性をもつ正閉 $(1,1)$-カレントである。

さて $f : X \to Y$ を滑らかな射影族とする。 このとき ω_0 を X 上のケーラー形式として各ファイバー上で (0.1) を考えて出来た解の族を $\omega(t)$ とおくと

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega(t) = -\mathrm{Ric}_{X/Y}(\omega(t)) - \omega(t)$$

$\omega(0) = \omega_0$ を満たす。ここで $\mathrm{Ric}_{X/Y}(\omega(t))$ は相対リッチ形式で、

$$[\omega(t)] = (1 - e^{-1})2\pi c_1(K_{X/Y}) + e^{-t}[\omega_0]$$

である。このとき次が成り立つ。

定理 2 カレント解の族 $\omega(t)$ は全ての $t \in [0, \infty)$ について、X 上の半正値閉 $(1,1)$ カレントである。$\square$

参考文献

[B] Berman, R.: Relative Kähler-Ricci flows and their quantization, arXiv:1002.3717.

[B3] Berndtsson, B.: Curvature of vector bundles associated to holomorphic fibrations, Ann. of Math.(2) **169** (2009), no. 2, 531-560.

[B-C-H-M] Birkar, C.-Cascini, P.-Hacon,C.-McKernan, J.: Existence of minimal models for varieties of log general type, arXiv:math/0610203

[S-T] Song, J. and Tian, G. : Canonical measures and Kähler-Ricci flow, arXiv:0802.2570 (2008).

[T7] Tsuji, H.: Dynamical construction of Kähler-Einstein metrics, Nagoya Math. J. **199** (2010), 107-122.

[T11] Tsuji, H.: Ricci iterations and canonical Kähler-Einstein currents on log canonical pairs, arXiv:0903.5445.

[Y1] Yau, S.-T.: On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), 339-411.

接続と整曲線の第二主要定理について

野口潤次郎 (東大数理)*

§1 序. この講演では、あるC^∞な接続を用いることで整（正則）曲線に対する第二主要定理を証明する。また、特別な場合の適用例を与える。この方法で、H. カルタンの第二主要定理をフビニ・スツュディ計量の接続を用いて微分幾何学的に証明することができることが分かる。Y. Tiba [2] により、更なる応用が得られつつある。

§2 第2主要定理. Mをn次元コンパクト複素多様体、$\mathbf{T}(M)$でその上の正則接束を表す。$\mathbf{T}(M)$のC^∞接続∇を一つとる。Uを複素平面$\mathbf{C}$の領域とする。正則曲線$f: U \to M$に対しその微分（1-ジェット持ち上げ）$f'(z) \in \mathbf{T}(M)_{f(z)}$をとる。帰納的に

$$f^{(1)}(z) = f'(z), \quad f^{(k)}(z) = \nabla_{f'(z)} f^{(k-1)}(z), \quad k = 2, 3, \ldots$$

と定義する。これにより、∇に関するfのロンスキアンが次で定義される。

$$W(\nabla, f) = f^{(1)}(z) \wedge \cdots \wedge f^{(n)}(z) \in K_M^*.$$

ここで、K_M^*はMの標準束K_Mの双対を表す。その局所的な性格から、$W(\nabla, f)$が正則であることと$\log|W(\nabla, f)|$が劣調和であるという概念が定義できる。

fが∇-（非）退化とは、$W(\nabla, f) \equiv 0$ $(\not\equiv 0)$であることとする。

定理 1 (SMT). $f: \mathbf{C} \to M$を∇-非退化な整曲線、$D = \sum_i D_i$をM上の単純正規交叉的被約因子とする。次を仮定する。

(i) $\log|W(\nabla, f)|$は劣調和である。

(ii) 全てのD_iは∇-全測地的である。

このとき、次が成立する。

$$T_f(r, L(D)) + T_f(r, K_M) \leq \sum_i N_n(r, f^* D_i) + S_f(r). \tag{2}$$

ここで$S_f(r)$はネヴァンリンナ理論で言う小さい項を表す。

次に、∇を$\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$のフビニ・ステュディ計量接続とする。∇-全測地的部分多様体とは$\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$の線形部分空間のこととなる。このとき、∇の成分は、局所的には$\log(1 + \|z\|^2)$の$\partial_j, \bar{\partial}_k$の3階偏微分で表され、全く正則ではないが、次の定理が成立する。

定理 3. (i) ロンスキアン$W(\nabla, f)$は正則である。

(ii) 整曲線$f: \mathbf{C} \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$が線形非退化であることと$W(\nabla, f) \not\equiv 0$であることは同値である。

系 4. $f: \mathbf{C} \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$を線形非退化整曲線とする。一般の位置にある$q$超平面$H_i \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, $1 \leq i \leq q$に対し次が成立する。

$$qT_f(r, O(1)) + T_f(r, K_{\mathbf{P}^n(\mathbf{C})}) \leq \sum_i N_n(r, f^* D_i) + S_f(r). \tag{5}$$

* 本研究は科研費 (基盤研究 (B) 課題番号:23340029) の助成を受けたものである。
* e-mail: noguchi@ms.u-tokyo.ac.jp
web: http://nogpc4.ms.u-tokyo.ac.jp/nog/

$K_{\mathbf{P}^n(\mathbf{C})} = O(-n-1)$であるから、(5) はカルタンの第二主要定理('33)である. すなわち、この系はの証明は、カルタンの第二主要定理の幾何学的証明を与える。

§3 $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})^2$. 整曲線 $f: \mathbf{C} \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})^2$ の値分布を調べるのが次の目標である。我々は $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})^2$ を準アーベル多様体$G = \mathbf{C}^{*2}$の同変コンパクト化と考える。これは特別な場合ではあるが、興味深い場合でもあるにかかわらずあまり研究されていない。$E = \mathbf{P}^1(\mathbf{C})^2 \setminus G$ を境界因子とし、(x, y) をGのアファイン座標とする。不変ベクトル場$x\frac{\partial}{\partial x}$, $y\frac{\partial}{\partial y}$ に関する平坦接続を ∇ と書く。D を $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})^2$ 上の被約因子で各既約成分が∇-全測地的であるものとする。すると、あるブローアップ$\hat{G} \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})^2$があり、$D+E$の持ち上げ$\hat{D}+\hat{E}$が単純正規交叉になるものがある。$f: \mathbf{C} \to \hat{G}$を$f$の持ち上げとする。

定理 6. $\hat{f}: \mathbf{C} \to \hat{G}$は$\nabla$-非退化とし, $\hat{D} = \sum \hat{D}_i$, $\hat{E} = \sum \hat{E}_j$ を上述の因子の既約成分への分解とする。$\{\hat{\mathrm{P}}_k\}$ を $\hat{E}_j$ の交点の全体とする。このとき、次が成立する。

$$T_{\hat{f}}(r, L(\hat{D})) \leq \sum_i N_2(r, \hat{f}^*\hat{D}_i) + 2\sum_j N_1(r, \hat{f}^*\hat{E}_j) - \sum_k N_1(r, \hat{f}^*\hat{\mathrm{P}}_k) + S_f(r).$$

定理 7. $D = \sum_i D_i$, $E = \sum E_j$ を上述のもの、$f = (F, G): \mathbf{C} \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})^2$ は∇-非退化と仮定する。次を仮定する。

(i) $D \cap G$ は単純正規交叉である。

(ii) f は、Eの交差点の近傍の点を値としない。

このとき次が成立する。

$$T_f(r, O(m, n)) \leq \sum_i N_2(r, f^*D_i) + 2\sum_j N_1(r, f^*E_j) + S_f(r). \tag{8}$$

系 9. 定理7の仮定の下で、特に次が成立する。

$$T_f(r, O(m-4, n-4)) \leq \sum_i N_2(r, f^*D_i) + S_f(r).$$

注意 10. より一般的な場合の結果については Y. Tiba [2] を参照。

証明では、M 上にC^∞ 級体積型式Ωをとり、次の関数を考える。

$$\xi(z) = \frac{|W(\nabla, f)(z)|^2 \cdot \Omega(f(z))}{\prod_i \|\sigma_{D_i}(f(z))\|^2}. \tag{11}$$

次の補題が鍵となる。

鍵補題 12. Mを代数的とし、$D = \sum_i D_i$は単純正規交叉的であるとする。更に、全てのD_iは、∇-全測地的とすると、

$$\int_{|z|=r} \log^+ \xi(z) \frac{d\theta}{2\pi} = S_f(r). \tag{13}$$

参考文献

[1] Noguchi, J., Connections and the second main theorem for holomorphic curves, Preprint UTMS 2011-3 (2011), to appear in J. Math. Sci. Univ. Tokyo.

[2] Tiba, Y., Holomorphic curves into the product space of the Riemann spheres, Preprint UTMS 2010-19 (2010), to appear in J. Math. Sci. Univ. Tokyo.

有理型写像の位数、有理曲面とケーラー条件について[1]

野口潤次郎　(東大数理)*

§1 序.　コンパクト複素多様体 X が有理あるいは有理的であるとは、X が $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ と双有理型同型であることとする。

$\iota : \mathbf{C}^2 \hookrightarrow S$ を $\mathbf{C}^2$ のコンパクト化とする。K. Kodaira [1] は、ネヴァンリンア理論的手法と複素曲面の分類理論を用いて S は、有理曲面であることを示した。ここでは、一般に n 次元コンパクト複素多様体 X への微分非退化 ($\mathrm{Jac}(f) \not\equiv 0$) な有理型写像 $f : \mathbf{C}^n \to X$ を考えたい。ρ_f で f の位数を表す。主結果は次の二つである ([4])。

定理 1. $\dim X = 2$ かつ X はケーラーであるとする。もし $\rho_f < 2$ ならば X は有理曲面である。

定理 2 (例). あるホップ曲面 S（非ケーラー）と微分非退化な正則写像 $f : \mathbf{C}^2 \to S$ で $\rho_f = 1$ であるものが存在する。

§2 準備.　X をコンパクト複素多様体とし、その上のエルミート計量型式 ω を一つとる。$f : \mathbf{C}^n \to X$ を有理型写像する。$z = (z_j) \in \mathbf{C}^n$ を自然な複素座標とする。

$$\|z\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2, \quad \alpha = dd^c\|z\|^2, \quad d^c = \frac{i}{4\pi}(\bar{\partial} - \partial),$$

$$B(r) = \{z \in \mathbf{C}^n : \|z\| < r\}, \qquad S(r) = \{z \in \mathbf{C}^n : \|z\| = r\} \quad (r > 0)$$

と置く。以上の記法の下で、f の ω に関する位数関数を

$$T_f(r;\omega) = \int_1^r \frac{dt}{t^{2n-1}} \int_{B(t)} f^*\omega \wedge \alpha^{n-1} \tag{3}$$

と定義する。f の位数は、

$$\rho_f = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log T_f(r;\omega)}{\log r}$$

と定義される。位数 ρ_f は ω の取り方に依らないことが容易く分かる ([3])。

例 4. (i) $X = \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ で f が有理写像（代数的）ならば、$\rho_f = 0$.

(ii) X をコンパクト複素トーラスとする。$f : \mathbf{C}^n \to X$ が非定数ならば、$\rho_f \geq 2$. 特に $f : \mathbf{C}^n \to X$ ($\dim X = n$) が普遍被覆写像ならば、$\rho_f = 2$.

(iii) 以上から、X がリーマン面の場合は、$\rho_f < 2$ である非定数 $f : \mathbf{C} \to X$ の存在から $X \cong \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ が分かる。

§3 証明.　Ω_X^k で X 上の正則 k-型式の正則束を表す。$S^l\Omega_X^k$ でその対称 l-次対称テンソル積を表す。特に、$K_X = \Omega_X^n$ ($n = \dim X$) は標準束となる。次が鍵となる定理である。

---

* 本研究は科研費 (基盤研究 (B) 課題番号:23340029) の助成を受けたものである。

* e-mail: noguchi@ms.u-tokyo.ac.jp
web: http://nogpc4.ms.u-tokyo.ac.jp/nog/

[1] この研究は、J. Winkelmann (Bocum) との共同研究によるものである。

定理 5. X をコンパクト複素多様体とする。微分非退化な有理型写像 $f: \mathbf{C}^n \to X$ が存在して $\rho_f < 2$ であるとする。すると、任意の $l_k \geq 0, \sum_{k=1}^n l_k > 0$ に対し

$$H^0(X, S^{l_1}\Omega_X^1 \otimes \cdots \otimes S^{l_n}\Omega_X^n) = \{0\}.$$

証明. $\eta \in H^0(X, S^{l_1}\Omega_X^1 \otimes \cdots \otimes S^{l_n}\Omega_X^n) \setminus \{0\}$ が存在したとする。$dz_j, 1 \leq j \leq n$ から決まる $S^{l_1}\Omega_{\mathbf{C}^n}^1 \otimes \cdots \otimes S^{l_n}\Omega_{\mathbf{C}^n}^n$ の枠を $\{dZ^\alpha\}_\alpha$ とかくと、$f^*\eta = \sum_\alpha \xi_\alpha dZ^\alpha$ と置く。一方、$f^*\omega \wedge \alpha^{n-1} = \zeta\alpha^n$ と置く。小さな正数 $\epsilon > 0$ をとれば、定数 $C > 0$ が存在して $(\sum_\alpha |\xi_\alpha|^2)^\delta \leq C\zeta$ となる。$(\sum_\alpha |\xi_\alpha|^2)^\delta$ が多重劣調和であることより、劣平均値性を用いると $\rho_f \geq 2$ となり、矛盾を得る。

定理1の証明. 定理5より、$H^0(X, \Omega_X^1) = H^0(X, K_X^l) = 0, {}^\forall l \geq 1$. ケーラー条件より、$H^1(X, \mathbf{C}) = 0$ となり合わせて分類理論より X は有理曲面である。

定理2の証明. $\lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| > 1$ とする。これは、$\mathbf{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上に $\phi_n : (x,y) \mapsto (\lambda^n x, \lambda^n y)$ により $\mathbf{Z}$-作用を引き起こす。この作用に関する商多様体 S を考える。これは、ホップ曲面と呼ばれるものの一つで、$S^1 \times S^3$ と微分同相になり、第1ベッチ数が $b_1(S) = 1$ である。従って、特に非ケーラーである。

さて、

$$\omega = \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{dx \wedge d\bar{x} + dy \wedge d\bar{y}}{|x|^2 + |y|^2} = \frac{dd^c||(x,y)||^2}{||(x,y)||^2}$$

と置くと、これは $\mathbf{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上の正値 $(1,1)$-型式で、$\{\phi_n; n \in \mathbf{Z}\}$-作用に関して不変である。従って、$S$ 上に正値 $(1,1)$-型式を誘導する。これも、ω と書くことにする。

正則写像 $(z,w) \mapsto (z, 1+zw)$ から誘導される正則写像 $f: \mathbf{C}^2 \to S$ をとる。明らかに、f は、微分非退化である。

以上の $f: \mathbf{C} \to S$ と ω から位数関数 $T_f(r;\omega)$ を考えると

$$r \lesssim T_f(r;\omega) \lesssim r^{1+\epsilon}, \quad {}^\forall \epsilon > 0.$$

これより定理2が従う。

参考文献

[1] K. Kodaira, Holomorphic mappings of polydiscs into compact complex manifolds, J. Diff. Geometry, **6** (1971), 33-46.

[2] J. Noguchi, Some problems in value distribution and hyperbolic manifolds, Kôkyûroku **819** (1993), 66-79, R.I.M.S. Kyoto University.

[3] J. Noguchi and T. Ochiai, Geometric Function Theory in Several Complex Variables, Math. Monographs Vol. **80**, Amer. Math. Soc., Providence, 1990 (translated from Japanese version published from Iwanami, Tokyo 1984).

[4] J. Noguchi and J. Winkelmann, Order of meromorphic maps and rationality of the image space, Preprint UTMS 2011-6, to appear in J. Math. Soc. Jpn.

25

CRベクトル束の局所フレーム存在問題について

加治佐　智紀　(名大多元数理)*

概　要

CR多様体上の$\mathbb{C}$-ベクトル束に対し, ある微分作用素によってCRベクトル束が複素多様体上の正則ベクトル束と同様に定義される. その微分作用素の作用によって消えるような局所的なフレームのことをこの講演ではCR局所フレームと呼ぶことにするが, 正則ベクトル束が常に局所正則フレームを持つのとは異なり, CRベクトル束が常にCR局所フレームを持つとは限らない. そのことを詳しく考察するために, 私はまずCR多様体の局所埋め込み問題はあるCRベクトル束のCR局所フレームの存在問題と同値であることを示した. これは局所的に埋め込むことの出来ないCR多様体上にはCR局所フレームを持たないCRベクトル束が存在することを示唆する. さらにそのCRベクトル束を用いて, 局所埋め込み不可能な3次元CR多様体上にはある条件下でCR局所フレームを持たないCR直線束が多く存在することを示した.

*e-mail: `t-kajisa@citv.jp`

一般化された楕円体上の無限小 CR 自己同型について

林本厚志　長野工業高等専門学校

$$M_0 = \{(z_1, \ldots, z_s, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{C}^{n_s} \times \mathbb{C} : \mathrm{Im} z_{n+1} = |z_1|^{2m_1} + \cdots + |z_{s-1}|^{2m_{s-1}} + |z_s|^2\}$$

ただし $z_j = (z_j^1, \ldots, z_j^{n_j})$ に対して $|z_j|^2 = \sum_{k=1}^{n_j} |z_j^k|^2$ とし, $j = 1, \ldots, s-1$ に対して $m_j, n_j \geq 2$, $n_s \geq 0$. M_0 の強擬凸部分を M とする. これの内部として定義される領域を一般化された楕円体といい, その境界を扱う. この講演では次の Montti-Morbidelli の定理の別証明を与える.

定理 0.1. $f : N \to N'$ を M の連結開集合の間の CR 写像とする. このとき, うまく ψ, δ_r, ϕ_a を下のように選んで $f = \psi \circ \delta_r \circ J \circ \phi_a$ と分解できる. $z = (z_1, \ldots, z_s)$ とおく.

$$I(z, z_{n+1}) = \left(\frac{z_1}{(z_{n+1})^{1/m_1}}, \ldots, \frac{z_{s-1}}{(z_{n+1})^{1/m_{s-1}}}, \frac{z_s}{z_{n+1}}, -\frac{1}{z_{n+1}}\right) \tag{1}$$

$$\delta_r(z, z_{n+1}) = (r^{1/m_1} z_1, \ldots, r^{1/m_{s-1}} z_{s-1}, r z_s, r^2 z_{n+1}) \tag{2}$$

$$\psi(z, z_{n+1}) = (B_1 z_{\sigma(1)}, \ldots, B_{s-1} z_{\sigma(s-1)}, B_s z_s + b_s, b_{n+1} + z_{n+1} + 2i(B_s z_s \cdot \bar{b}_s)) \tag{3}$$

$$\phi_a(z, z_{n+1}) = (z_1, \ldots, z_{s-1}, z_s + a_s, z_{n+1} + a_{n+1} + 2i z_s \cdot \bar{a}_s) \tag{4}$$

$r > 0$, σ は $1, \ldots, s-1$ の置換, B_j はユニタリー行列, $b_s \in \mathbb{C}^{n_s}, b_{n+1} = t^0 + i|b_s|^2 \in \mathbb{C}$ $a = (a_s, t^1 + i|a_s|^2) \in \mathbb{C}^{n_s} \times \mathbb{C}$ とする. f の分解中, J は上記の I 又は恒等写像を表す.

この証明は, F を未知の写像で $f = F \circ \delta_r \circ J \circ \phi_a$ と分解したときに各写像の CR ファクターを計算すると F の CR ファクターが 1 となり, そのような写像は上の ψ しかないということを Ricci テンソルや Chern 不変量などの変換則を使って証明する. しかし一般には Ricci テンソルや Chern 不変量の変換則を求めることや, CR ファクターからの写像の復元は難しく, さらに写像 δ_r, J, ϕ_a がどこから出てきたかは, 証明からは分からない.

そこで CR ベクトル場を CR 不変な部分束の直和に分解し, CR 写像の各成分についての偏微分方程式を解くことで別証明を与えた. (2011 年春の学会, 9 月の京大での研究集会.) CR ベクトル場から写像の形が分かるということは, 無限小 CR 自己同型からも写像の形が分かることを意味している. その立場から, さらなる別証明を与えたのが今回の講演内容である. 実ベクトル場 X が無限小 CR 自己同型であるとは, その 1-径数変換 $\exp tX$ が CR 自己同型写像であることを言う.

以下, M 上の無限小 CR 自己同型の集合を $\mathrm{hol}(M)$ と表す. 次の S.M.Baouendi, P.Ebenfelt, L.P.Rothschild による無限小 CR 自己同型と CR 自己同型群の関係が基本的である.

定理 0.2. M を実解析的で正則的非退化かつ, ある点で最小な一般型 CR 多様体とする. このとき CR 自己同型群 $\mathrm{Aut}(M)$ をリー群にし, そのリー環が $\mathrm{hol}(M)$ となるような $\mathrm{Aut}(M)$ の位相が唯一存在する.

正則的非退化や最小の定義は述べないが，一般化された楕円体の境界はこれらの条件を満たすことに注意する．無限小 CR 自己同型 X を

$$X = \sum_{j=1}^{n+1} (a_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \bar{a}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}) \tag{5}$$

とおくと a_j は CR 関数である．一般化された楕円体の定義関数を X に作用させて零と置くと a_j についての微分方程式が得られ，それを解くことで X を求めることが出来る．そこに表れるパラメータ毎に $\mathrm{hol}(M)$ の元を分類して 1-径数変換を求めると次のようになる．

定理 0.3.

$$\begin{aligned} &\exp(\varepsilon Y_1)(z, z_{n+1}) \\ &\quad = (\frac{z_1}{(1-\varepsilon z_{n+1})^{1/m_1}}, \dots, \frac{z_{s-1}}{(1-\varepsilon z_{n+1})^{1/m_{s-1}}}, \frac{z_s}{1-\varepsilon z_{n+1}}, \frac{z_{n+1}}{1-\varepsilon z_{n+1}}), \end{aligned} \tag{6}$$

$$\exp(\varepsilon Y_2)(z, z_{n+1}) = ((e^\varepsilon)^{1/m_1} z_1, \dots, (e^\varepsilon)^{1/m_{s-1}} z_{s-1}, e^\varepsilon z_s, (e^\varepsilon)^2 z_{n+1}), \tag{7}$$

$$\exp(\varepsilon Y_3)(z, z_{n+1}) = (z_1, \dots, z_{s-1}, z_s, z_{n+1} + \varepsilon), \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &\exp(\varepsilon_1 Y_s^1 + \cdots + \varepsilon_{n_s} Y_s^{n_s})(z, z_{n+1}) \\ &\quad = (z_1, \dots, z_{s-1}, z_s + \varepsilon, z_{n+1} + 2i z_s \cdot \varepsilon + i|\varepsilon|^2), \end{aligned} \tag{9}$$

$$\exp(\sum_{j=1}^{s} \sum_{\substack{\alpha,\beta \in I_j \\ \alpha > \beta}} \varepsilon^{\alpha}_{j,\beta} Y^{\alpha}_{j,\beta})(z, z_{n+1}) = (B^1 z_1, \dots, B^{s-1} z_{s-1}, B^s z_s, z_{n+1}). \tag{10}$$

ここで $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n_s})$, $z_s \cdot \varepsilon$ は z_s と ε の内積. B^j は $\varepsilon^{\alpha}_{j,\beta}$ によって決まるユニタリー行列である．

定理 0.1 に出てくる写像は，少しの合成は必要であるが，I を省いてここから簡単に出てくる．I に関しては定理 0.1 のパラメータで $t^1 = t^0 = r = -1/\varepsilon, a_s = b_s = 0, B_j = id$ と置くことで

$$I = \delta_r^{-1} \circ \psi^{-1} \circ (\exp \varepsilon Y_1) \circ \phi_a^{-1}. \tag{11}$$

を得る．

無限小 CR 自己同型はここに与えたもので全てなので，CR 自己同型写像もそれらの 1-径数変換で尽くされる．よってそれらの合成で CR 自己同型写像が得られる．つまり定理 0.1 が示された．

1, 定理 0.1 では自然数 m_j, n_j に条件が付いていたが，無限小 CR 自己同型の方法を使うと，それらの条件は必要ない．

2, 合成に使われる各成分の写像は 1-径数変換として自然に得られる．

3, 定理 0.1 ではその証明から合成の順番が大切であった．しかし (6)〜(10) の形にすると合成の順番は何でもよいことになる．

以上の 3 点がこの別証明の利点である．

ATSUSHI HAYASHIMOTO: 716 TOKUMA, NAGANO 381-8550, JAPAN
E-mail address: atsushi@ge.nagano-nct.ac.jp

$K3$ 曲面族の周期微分方程式と $\sqrt{5}$ のヒルベルト・モジュラー関数について

永野中行

2012 年

2 つの複素パラメータ (X,Y) をもつ $K3$ 曲面族 $\mathcal{F}=\{S(X,Y)\}$

$$S(X,Y): z^2 = x^3 - 4y^2(4y-5)x^2 + 20Xy^3x + Yy^4. \tag{0.1}$$

を考える。ただし、(X,Y) は $\mathfrak{X}=\{(X,Y)\in\mathbb{C}^2 | Y(1728X^5-720X^3Y+80XY^2-64(5X^2-Y)^2-Y^3)\neq 0\}$. を動くとする。

Theorem 0.1. ([N1], [N2]) (1) *generic* $(X,Y)\in\mathfrak{X}$ について $\mathrm{rank}(\mathrm{NS}(S(X,Y)))=18.$,

(2) *generic* な $(X,Y)\in\mathfrak{X}$ について、$S(X,Y)$ の *Néron-Severi* 格子の交点行列は $E_8(-1)\oplus E_8(-1)\oplus \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$、 超越格子の交点行列は $U\oplus\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix} =: A.$

IV 型の Hermite 対象領域 $\mathcal{D}=\{\xi\in\mathbb{P}^3(\mathbb{C}) | {}^t\xi A\xi=0, {}^t\xi A\bar{\xi}>0\}$ をとる。これは $\mathcal{D}=\mathcal{D}_+\cup\mathcal{D}_-$ と連結成分に分かれる。$\mathcal{F}$ にあるマーキングを与え、$\Gamma_1,\cdots,\Gamma_4\in H_2(S(X,Y),\mathbb{Z})$ をマーキングから定まる 2-サイクルとし、$S(X,Y)$ の正則 2-形式 ω を積分することにより、周期写像

$$\Phi:\mathfrak{X}\ni(X,Y)\mapsto\Big(\int_{\Gamma_1}\omega:\int_{\Gamma_2}\omega:\int_{\Gamma_3}\omega:\int_{\Gamma_4}\omega\Big)\in\mathcal{D}_+$$

を得る。$\mathfrak{X}$ での解析接続をすると Φ は $\mathfrak{X}$ 上多価解析であり、その射影モノドロミー群 を G とする。このとき、モジュラー同型 $(\mathcal{D}_+,G)\simeq(\mathbb{H}\times\mathbb{H},\langle PSL(2,\mathcal{O},\tau)\rangle)$ がある。

Theorem 0.2. ([N1]) $S(X,Y)$ の周期は次の微分方程式を満たす。

$$(\mathbf{PerUDE})\begin{cases} u_{XX}=L_1u_{XY}+A_1u_X+B_1u_Y+P_1u,\\ u_{YY}=M_1u_{XY}+C_1u_X+D_1u_Y+Q_1u\end{cases}$$

ただし

$$\begin{cases} L_1=\dfrac{-20(4X^2+3XY-4Y)}{36X^2-32X-Y}, & M_1=\dfrac{-2(54X^3-50X^2-3XY+2Y)}{5y(36X^2-32X-Y)},\\ A_1=\dfrac{-2(20X^3-8XY+9X^2Y+Y^2)}{XY(36X^2-32X-Y)}, & B_1=\dfrac{10Y(-8+3X)}{X(36X^2-32X-Y)},\\ C_1=\dfrac{-2(-25X^2+27X^3+2Y-3XY)}{5Y^2(36X^2-32X-Y)}, & D_1=\dfrac{-2(-120X^2+135X^3-2Y-3XY)}{5XY(36X^2-32X-Y)}\\ P_1=\dfrac{-2(8X-Y)}{X^2(36X^2-32X-Y)}, & Q_1=\dfrac{-2(-10+9X)}{25XY(36X^2-32X-Y)}.\end{cases}$$

周期積分を用いて $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ の座標

$$(z_1,z_2)=\Big(-\frac{\int_{\Gamma_3}\omega+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\int_{\Gamma_4}\omega}{\int_{\Gamma_2}\omega},-\frac{\int_{\Gamma_3}\omega+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\int_{\Gamma_4}\omega}{\int_{\Gamma_2}\omega}\Big). \tag{0.2}$$

を得る。周期写像の逆写像を考えることによって、パラメータの組 (X,Y) は $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ のヒルベルト・モジュラー関数の組と見なせる。

Remark 0.1. 実は、$\mathfrak{X}$ は重み付き射影空間$\mathbb{P}(1,3,5)-\{c_0\}$ にうめこまれ、$\mathcal{F}$ は$\mathbb{P}(1,3,5)-\{(X,Y)=(0,0)\}$ 上の $K3$ 曲面族に、周期写像 $\Phi:\mathfrak{X}\to\mathcal{D}_+$ は $\Phi:\mathbb{P}(1,3,5)-\{(X,Y)=(0,0)\}\to\mathcal{D}_+$ に拡張される。

そこで、$\{Y=0\}$ の上の $K3$ 曲面族 $\mathcal{F}_X=\{S(X,0)\}$ を考えよう。$\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ の対角集合

$$\Delta=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{H}\times\mathbb{H}|z_1=z_2\}\simeq\mathbb{H}$$

について、$\Phi^{-1}(\Delta)=\{Y=0\}$ である。(0.2) によると Δ における座標 z は

$$z=-\frac{\eta_3}{\eta_2}. \tag{0.3}$$

$X=\dfrac{25}{27}t$ とおくと、

Proposition 0.1. [N2] 周期 η_1,η_2,η_3 のみたす微分方程式は、次の 3 階フックス型方程式である。

$$(\mathbf{Per}\Delta):\quad \frac{d^3}{dt^3}u+\frac{3}{2(t-1)}\frac{d^2}{dt^2}u+\frac{5t-36}{36t^2(t-1)}\frac{d}{dt}u+\frac{72-5t}{72t^3(t-1)}u=0.$$

この周期微分方程式の解の考察を通じて次を得る。

Theorem 0.3. ([N2]) $K3$ 曲面族 $\mathcal{F}_X=\{S(X,0)\}$ のパラメータ X は、(0.3) の座標を用いて、

$$X(z)=\frac{25}{27}\cdot\frac{1}{J(z)}. \tag{0.4}$$

さて、ジーゲル上半平面 $\mathbb{H}_2=\{Z\in\mathrm{Mat}(2,2)|{}^tZ=Z,\mathrm{Im}(Z)>0\}$. 上の井草のテータ零値 $\vartheta(Z;a,b)$ を介して、Müller [M] は次のようにして $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ についての対象なヒルベルト・モジュラー形式の環の生成元を得た。$\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ の $\mathbb{H}_2$ へのうめこみ

$$\psi:(z_1,z_2)\mapsto\frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix}(1+\sqrt{5})z_1-(1-\sqrt{5})z_2 & 2(z_1-z_2)\\ 2(z_1-z_2) & (-1+\sqrt{5})z_1+(1+\sqrt{5})z_2\end{pmatrix},$$

を用いて、$j\in\{0,1,\cdots,9\}$ と ${}^ta=(a_1,a_2),{}^tb=(b_1,b_2)$ について次の表にしたがった対応を与える。

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
${}^ta$	(0,0)	(1,1)	(0,0)	(1,1)	(0,1)	(1,0)	(0,0)	(1,0)	(0,0)	(0,1)
${}^tb$	(0,0)	(0,0)	(1,1)	(1,1)	(0,0)	(0,0)	(0,1)	(0,1)	(1,0)	(1,0)

このとき

$$\theta_j(z_1,z_2)=\vartheta(\psi(z_1,z_2);a,b)$$

として、次のようにおく。

$$\begin{cases} g_2=\theta_{0145}-\theta_{1279}-\theta_{3478}+\theta_{0268}+\theta_{3569},\\ s_6=2^{-8}(\theta_{012478}^2+\theta_{012569}^2+\theta_{034568}^2+\theta_{236789}^2+\theta_{134579}^2),\\ s_{10}=2^{-12}\theta_{0123456789}^2.\end{cases}$$

ここでは g_2,s_6,s_{10},s_{15} を Müller theta constant と呼ぶ (本稿では s_{15} の定義式は割愛)。

Theorem 0.4. ([N2]) $K3$ 曲面族の $\mathcal{F}=S(X,Y)$ のパラメータ (X,Y) は、(0.2) の座標 (z_1,z_2) を用いて、次の *Müller theta constant* による表示を持つ:

$$X(z_1,z_2)=2^5\cdot5^2\cdot\frac{s_6(z_1,z_2)}{g_2^3(z_1,z_2)},\qquad Y(z_1,z_2)=2^{10}\cdot5^5\cdot\frac{s_{10}(z_1,z_2)}{g_2^5(z_1,z_2)}. \tag{0.5}$$

References

[M] R. Müller *Hilbertsche Modulformen und Modulfunctionen zu* $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ Arch. Math. **45**, 1985, 239-251.

[N1] A. Nagano, *Period differential equations for the families of K3 surfaces with 2 parameters derived from the reflexive polytopes*, Kyushu J. Math., 2011, to appear.

[N2] A. Nagano, *A theta expression of the Hilbert modular functions for* $\sqrt{5}$ *via the periods of K3 surfaces,* preprint, 2011.

単純$K3$特異点の変形系列

パラメータ付定義方程式の変形

高橋　正 (甲南大学)*

1. 退化条件の導出

特異点定義方程式のパラメータがある条件を満たす時、その方程式によって定義される特異点の位相的構造（位相型）が変化する。超局面純楕円型特異点に相当するものは、単純$K3$特異点である（[1]）。

グレブナー基底は、本来、パラメータを含まない多項式系での理論であったが、パラメータを持つ多項式系での理論が発展している。パラメータを持つグレブナー基底は包括的グレブナー基底（Comprehensive Gröbner Basis (CGB)）と呼ばれている（[2]）。

パラメータをもつ定義方程式で定義された特異点の退化条件を導出するには、その定義方程式から構成される多項式イデアルに対し包括的グレブナー基底を求めることで退化条件を得ることができる。この手法を用いて、パラメータの数が3以下の単純$K3$特異点定義方程式に対し、その退化条件を導出した（[3]）。

No.	定義方程式	退化条件
f_{52}	$x^3+4\lambda xyzw+xz^3+y^4+zw^4$	$\lambda^4-1=0$
f_{56}	$x^2y+y^3z+3\lambda yz^2w^2+z^5+w^6$	$\lambda^3+1=0$
f_{46}	$x^2+y^3+3\lambda yz^4w^4+z^{11}+2\mu z^6w^6+zw^{12}$	$(\lambda^3+\mu^2+1)^2-4\mu^2=0$
f_{61}	$x^2z+y^4+2\sqrt{2}\lambda y^2zw^2+z^4w+2\mu z^2w^4+w^7$	$(\mu^2-1)((\lambda^2-\mu)^2-1)=0$

No.	定義方程式
$f_{64(1)}$	$x^2z+xy^2+2\lambda y^2zw^2+2\sqrt{2}\mu yz^2w^3+z^6+2\nu z^3w^4+w^8$
$f_{64(2)}$	$x^2z+y^3w+3\lambda yz^2w^3+z^6+2\mu z^3w^4+w^8$

No.	退化条件
$f_{64(1)}$	$(-16\lambda^2+4\sqrt{2}\lambda^3\mu^2-27\mu^4+24\nu+8\lambda^4\nu-36\sqrt{2}\lambda\mu^2\nu-16\lambda^2\nu^2+8\nu^3)^2$ $-16(2+2\lambda^4-9\sqrt{2}\lambda\mu^2-8\lambda^2\nu+6\nu^2)^2=0$
$f_{64(2)}$	$(\lambda^3+\mu^2+1)^2-4\mu^2=0$

（No. の添字の数は分類番号，λ, μ, ν がパラメータ）

しかし、包括的グレブナー基底計算の大規模化により、パラメータの数が4の単純$K3$特異点定義方程式に対し、その退化条件を導出できない状況が続いていたが、いくつかの部分的結果を得ることができた。

2. 変形系列

上記のパラメータを２つもつものに関しては、$\mu=0$ の時、パラメータが１つの場合に帰着する（パラメータ空間の構造が同型となる）。$f_{64(2)}$ の退化条件は f_{46} の退化条

2010 Mathematics Subject Classification: 32S25
キーワード：単純$K3$特異点, 定義方程式, 変形系列
*〒658-8501 兵庫県神戸市東灘区岡本8-9-1　甲南大学 知能情報学部
e-mail: takahasi@konan-u.ac.jp

件と一致し、$f_{64(1)}$ の退化条件は、$\mu = 0$ に対して、f_{61} の結果に帰着する。この関係を変形系列と呼び、特異点の変形系列をその定義方程式のパラメータ空間の構造の系列により把握することを目指す。

この手法は、退化条件をパラメータ空間の構造として捉え、それらを簡単化することである。その計算例を f_{64} で示す。

例

In [1]　$f64 = x^2z + xy^2 + py^2zw^2 + qyz^2w^3 + z^6 + rz^3w^4 + w^8;;$
Factor[GroebnerBasis [{f64, ∂_x (f64) , ∂_y (f64) , ∂_z (f64) , ∂_w (f64) } ,
{ x, y, z, w }, {x, y, z }]]

Out[1]　{ $(-512 + 512p^2 - 128p^4 + 288pq^2 - 16p^3q^2 + 27q^4 + 768r - 512p^2r + 64p^4r - 144pq^2r - 384r^2 + 128p^2r^2 + 64r^3)(512 + 512p^2 + 128p^4 - 288pq^2 - 16p^3q^2 + 27q^4 + 768r + 512p^2r + 64p^4r - 144pq^2r + 384r^2 + 128p^2r^2 + 64r^3)\ w^{17}$ }

In [2]　$m1 = 512p^2 - 16p^3q^2 + 27q^4 + 768r + 64p^4r - 144pq^2r + 128p^2r^2 + 64r^3;$
$m2 = 512 + 128p^4 - 288pq^2 + 512p^2r + 384r^2; p = \sqrt{2}\lambda; q = 2\sqrt{2}\mu; r = -2\nu;$

In [3]　Factor[m1]
Out[3]　$-64(-16\lambda^2 + 4\sqrt{2}\lambda^3\mu^2 - 27\mu^4 + 24\nu + 8\lambda^4\nu - 36\sqrt{2}\lambda\mu^2\nu - 16\lambda^2\nu^2 + 8\nu^3)$

In [4]　Factor[m2]
Out[4]　$256(2 + 2\lambda^4 - 9\sqrt{2}\lambda\mu^2 - 8\lambda^2\nu + 6\nu^2)$

f_i の退化条件を $M(f_i)$ で表すことにする。このとき、$M(f_{61})$ は、$\mu = 0$ に対して、$M(f_{52})$ に移行する。このような現象を $M(f_{46}) \to M(f_{56})$, $M(f_{61}) \to M(f_{52})$ などと表すことにする。この表記を用いると、上記の関係は、以下のように表記することができる。

$$M(f_{56}) \leftarrow M(f_{46}) \leftarrow M(f_{64}) \rightarrow M(f_{61}) \rightarrow M(f_{52})$$

この手法をパラメータを４つもつ単純 $K3$ 特異点定義方程式に対して拡張した結果を示す。

参考文献

[1] 石井 & 渡邊, On simple $K3$ singularities (in Japanese), Proceedings of the Conference on Algebraic Geometry at Tokyo Metropolitan Univ. (1988), pp.20-31.

[2] V. Weispfenning: Comprehensive Gröbner bases, Journal of Symbolic Computation 14/1, (1992), pp. 1-29.

[3] T. Takahashi, An Application of Greobner Bases for the Moduli of Hypersurface Simple K3 Singularities, Computer Algebra, Vol. 11, No.3,4, pp. 43-55, 2005.

超曲面純楕円型特異点のスペクトラル対について

金坂 尚礼　(豊田高専 一般学科)*

本講演では，超曲面孤立特異点が純楕円型特異点と呼ばれるものである場合について得られた，スペクトラル対の性質に関する結果を報告する.

1. 準備

1.1. スペクトラル対

多項式 $f(z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}[z_0, z_1, \cdots, z_n]$ が定義する正則関数芽 $f : (\mathbb{C}^{n+1}, o) \to (\mathbb{C}, 0)$ で，原点 $o \in \mathbb{C}^{n+1}$ に孤立特異点を持つものを考える.

開球 $B = \{x \mid |x| < \varepsilon\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ と開円盤 $S = \{t \mid |t| < \delta\} \subset \mathbb{C}$ に対して，$X := B \cap f^{-1}(S)$ と定めると，S の半径 δ を十分に小さくとれば，制限写像 $f|_{X \setminus X_0} : X \setminus X_0 \to S \setminus \{0\}$ がスムースで局所自明なファイバー束となることが知られている (Milnor [2])．点 $t_0 \in S \setminus \{0\}$ を 1 つ固定すると，基本群 $\pi_1(S \setminus \{0\}, t_0)$ がファイバー $X_{t_0} = f^{-1}(t_0)$ の n 次のコホモロジー群 $H^n(X_{t_0})$ に作用するが，π_1 の生成元に対応する線形変換 $T : H^n(X_{t_0}) \to H^n(X_{t_0})$ を（ピカール-レフシェッツ）モノドロミー変換という. Steenbrink 氏によれば，$H^n(X_{t_0})$ はモノドロミー T の半単純部分 T_s に関して不変な混合 Hodge 構造を持つが，$H^n(X_{t_0})$ にこの混合 Hodge 構造を入れて考えたものを $H^n(X_\infty)$ と記す. T の固有値 λ について，$H^n(X_\infty)$ の λ に関する（広義の）固有空間を H_λ と表すことにする.

定義 1 (Steenbrink [3]) $\dim Gr_F^p H_\lambda \neq 0$ であるとき, 有理数

$$\alpha = -\frac{1}{2\pi i} \log \lambda, \quad n - p - 1 < \alpha \leq n - p$$

をスペクトラル数（*spectral number*），$n_\alpha := \dim Gr_F^p H_\lambda$ を α の重複度と呼ぶ.

また，$h_\lambda^{p,q} = \dim Gr_F^p Gr_{p+q}^W H_\lambda \neq 0$ であるとき, 整数

$$l = \begin{cases} p+q, & \text{if } \lambda \neq 1 \\ p+q-1, & \text{if } \lambda = 1 \end{cases}$$

をウエイト数（*weight number*）, (α, l) をスペクトラル対（*spectral pair*），$n_{\alpha,l} := h_\lambda^{p,q}$ を (α, l) の重複度と呼ぶ.

1.2. 純楕円型特異点

純楕円型特異点は渡辺公夫氏により導入された，正規孤立特異点に対して定義される多重種数 $\{\delta_m(X, x)\}_{m \in \mathbb{N}}$ を用いて次のように定義される.

定義 2 (渡辺 [4]) 任意の $m \in \mathbb{N}$ について $\delta_m(X, x) = 1$ であるとき，(X, x) は純楕円型特異点 (*purely elliptic singularity*) であるという.

ゴレンシュタイン正規孤立特異点 (X, x) が純楕円型特異点であるための必要十分条件は，(X, x) はログ端末的ではない，ログ標準的特異点であることが知られている. ま

* 〒471-8525 愛知県豊田市栄生町 2-1 豊田工業高等専門学校 一般学科
e-mail: kanesaka@toyota-ct.ac.jp

た，n次元のゴレンシュタイン純楕円型特異点は，次に述べるようにn種類に分類されるが，この分類と特異点解消における例外集合の双有理幾何的な性質との関係が石井志保子氏を始めとする諸研究により明らかにされている．

定義 3 (石井 [1]) n次元ゴレンシュタイン純楕円型特異点 (X,x) の良特異点解消の本質的因子 E_J について，

$$\mathbb{C} = H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_{E_J}) \cong Gr_F^0 H^{n-1}(E_J, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{i=0}^{n-1} H_{n-1}^{0,i}(E_J).$$

が成立し，$H_{n-1}^{0,i}(E_J) \neq 0$ であるとき (X,x) はタイプ $(0,i)$ であるという．

定義多項式 f がニュートン境界 $\Gamma(f)$ に関して非退化であるとき，超曲面孤立特異点が純楕円型特異点となるための必要十分条件は渡辺 [5] により与えられている．

2. 主結果

以下，特異点の定義多項式 f は常にニュートン境界 $\Gamma(f)$ に関して非退化であるものと仮定する．また，最小のスペクトラル数を $\alpha_{\min}$ と記すことにする．

定理 1 超曲面孤立特異点 $(X,x) = (\{f=0\},o)$ が純楕円型特異点（有理特異点）であるための必要十分条件は $\alpha_{\min} = 0$ ($\alpha_{\min} > 0$) となることである．このとき，$n_{\alpha_{\min}} = n_0 = 1$ が成立する．

定理 2 n次元超曲面孤立特異点 $(X,x) = (\{f=0\},o)$ が純楕円型特異点であるとき，次の2条件は同値である．

(i) (X,x) のタイプは $(0,i)$.

(ii) $l = n + (n-i-1) = 2n-i-1$ なる l について，$n_{0,l} \neq 0$

系 3 n次元超曲面孤立特異点 $(X,x) = (\{f=0\},o)$ がタイプ $(0,i)$ の純楕円型特異点であるとき，モノドロミー変換 T は，固有値 1 について，大きさが $(n-i)$ 以上のジョルダン細胞を持つ．

系 4 n次元超曲面孤立特異点 $(X,x) = (\{f=0\},o)$ がタイプ $(0,i)$ の純楕円型特異点について，$i = 0, 1$，または 2 であるときには、モノドロミー変換 T のジョルダン標準形におけるジョルダン細胞の大きさは $(n-i)+1$ を超えない．また，固有値 1 のジョルダン細胞については $(n-i)$ を超えない．

参考文献

[1] S. Ishii, On isolated Gorenstein singularities, Math. Ann. **270** (1985), 541–554.

[2] J. Milnor, Singular Points of Complex Hypersurfaces, Annals of Math. Studies, No. 61, Princeton University Press, Princeton, 1968.

[3] J. H. M. Steenbrink, Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology, Real and Complex Singularities, Oslo 1976, 525–563, Alphen aan den Rijin, Oslo, 1977.

[4] K. Watanabe, On plurigenera of normal isolated singularities I, Math. Ann. **250** (1980), 65–94.

[5] K. Watanabe, On plurigenera of normal isolated singularities II, Complex Analytic Singularities (T.Suwa and P.Wagreich editors), 671–685, Adv. Stud. in Pure Math., 8, Kinokuniya, Tokyo and North-Holland, Amsterdam, New York and Oxford, 1986.

複素2次元特異点の幾何種数について

奥間 智弘　(山形大学)*

1. はじめに

特異点論は複素幾何学，代数幾何学，位相幾何学，環論等の様々な分野と関係している．特に2次元特異点は局所的にはリンクとよばれる3次元多様体上の錐になるため，低次元トポロジーとの関連が深い．また，リンクは特異点解消グラフでも記述されるので，2次元特異点の位相的不変量とはグラフの不変量でもあり，組合せ論的な面もある．このように，位相が比較的記述しやすいので，位相から制限される複素構造の自由度や，どのような解析的不変量がどのような条件の下で位相的不変量になるのかを研究するのは一つの自然な方向だと思われる．たとえば，Artin の有理2重点の分類，有理型特異点の特徴付けやLaufer の最小楕円型特異点の導入，重複度や埋め込み次元などの公式などはそのような視点から理解することができる．その後もこの方向で多くの研究があり，今も Némethi 等によって活発な研究がすすめられている．

本講演では幾何種数を主題にする．ある種の加法性を持つ公式について述べ，特殊なクラスへの応用について述べる．

以下，特に断らない限り「特異点」は2次元特異点を表す．

2. 幾何種数の定義

この節では幾何種数の定義とよく知られた結果などを簡単に述べる．泊氏による幾何種数のサーベイ [27] はより多くの内容を簡潔にまとめており大変参考になる．

(X, o) を2次元正規特異点とし，$\pi\colon \widetilde{X} \to X$ を特異点解消とする．Grauert の定理より $R^1\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ は連接層である．また，π の例外集合 $\pi^{-1}(o)$ を E と表すと, π は同型 $\widetilde{X} \setminus E \to X \setminus \{o\}$ を導くから $R^1\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ の台は $\{o\}$ に含まれ, そのストークは $\mathbb{C}$ 上有限次元である．(X, o) の幾何種数 $p_g(X, o)$ は次のように定義される．

$$p_g(X, o) = \dim_{\mathbb{C}}(R^1\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}})_o.$$

この値は特異点解消によらないことが知られている．以下 X は Stein であるとする．このとき，$p_g(X, o) = h^1(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}) := \dim_{\mathbb{C}} H^1(\mathcal{O}_{\widetilde{X}})$ となる．

2.1. サイクルと幾何種数

$E = \bigcup_{v\in\mathcal{V}} E_v$ を既約因子 E_v への分解とする．

$$L := \sum_{v\in\mathcal{V}} \mathbb{Z}E_v$$

の元をサイクルとよぶ．Siu の定理により $\widetilde{X}$ 上の連接層の H^2 は消える．したがって，$D_1, D_2 \in L$ が $D_1 > D_2 > 0$ を満たすなら，自然な準同型 $H^1(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}) \to H^1(\mathcal{O}_{D_1})$ と $H^1(\mathcal{O}_{D_1}) \to H^1(\mathcal{O}_{D_2})$ は全射である．Grauert の比較定理より, ある $D_0 \in L$ が存在し，$D \geq D_0$ ならば $p_g(X, o) = h^1(\mathcal{O}_D)$ が成り立つことがわかる．

* 〒990-8560 山形市小白川町一丁目4-12　山形大学 地域教育文化学部
e-mail: okuma@e.yamagata-u.ac.jp

2.2. 標準層と幾何種数

K を $\widetilde{X}$ 上の標準因子とする．Grauert-Riemenschneider の消滅定理より次の完全列を得る．

$$0 \to H^0(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(K)) \to H^0(\widetilde{X} \setminus E, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(K)) \to H^1_E(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(K)) \to 0$$

双対定理により

$$p_g(X, o) = h^1(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}) = h^1_E(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(K)) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{H^0(\widetilde{X} \setminus E, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(K))}{H^0(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(K))}.$$

$I(E)$ が不定値なので任意の $v \in \mathcal{V}$ に対して $(K+Z_K)\cdot E_v = 0$ となる $Z_K \in L\otimes\mathbb{Q}$ が存在する．これを標準サイクルとよぶ．(X, o) が Gorenstein (すなわち，$\mathcal{O}_{\widetilde{X}\setminus E}(K) \cong \mathcal{O}_{\widetilde{X}\setminus E}$) なら $Z_K \in L$ であり，$\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(K) \cong \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-Z_K)$．このとき，上の公式は

$$p_g(X, o) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{H^0(\mathcal{O}_{\widetilde{X}})}{H^0(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-Z_K))}$$

と表せる．この表現によれば，幾何種数は零の浅い関数の多さを表している．

2.3. 特異点の位相—リンクとグラフ

$\pi : \widetilde{X} \to X$ を最小良特異点解消とする．すなわち，各 E_v は非特異曲線であり，異なる既約因子は交点において正規交差しており，π はこのような条件を満たすような特異点解消で最小のものである．それは一意的に存在し，すべての良解消は最小良解消をブローアップすることで得られる．このとき，特異点解消グラフ Γ とは，各 E_v を頂点に，各交点 $E_v \cap E_w \neq \emptyset$ を対応する二つの頂点を結ぶ辺に対応させ，E_v の自己交点数 E_v^2 と種数 $g(E_v)$ をウェイトとして対応する頂点に付加したものである．したがって，Γ は交点行列 $I(E) := (E_v \cdot E_w)$ と $g(E_v)$ のデータと同じである．

X は $o \in X$ が原点となるように $\mathbb{C}^n$ の開集合に埋め込まれているとする．$S^{2n-1}_\varepsilon \subset \mathbb{C}^n$ を o を中心とする十分小さい半径ε をもつ球面とすると，$\Sigma := X \cap S^{2n-1}_\varepsilon$ は ε によらない3次元閉多様体であり，$o \in X$ の近傍は Σ 上の錐に同相であることが知られている．Σ を (X, o) のリンクという．特異点の位相とはそのリンクのことであるといえる．$\partial X = \Sigma$ と仮定してよい．このとき $\Sigma = \partial\widetilde{X}$ であるが，Σ は Γ から定まるグラフ多様体 (plumbed manifold) として実現できる．実際，Σ と Γ は同じ情報を持つ (Neumann [14])．したがって，特異点の位相不変量とは Γ または Σ の不変量のことである．

Σ が有理ホモロジー球面であるための条件は各 v に対して $g(E_v) = 0$ かつ Γ が木であることである．また，Σ がホモロジー球面であるための条件は Σ が有理ホモロジー球面であって $I(E)$ がユニモジュラーであることである．

2.4. 重要な例

$\widetilde{X}$ 上の因子 D が，各 v に対して $D \cdot E_v \geq 0$ を満たすとき，D はネフであるという．交点行列 $I(E)$ が不定値であることから, $D \in L$ がネフなら $D \geq 0$ である．

2.4.1. 基本種数が 1 以下の場合

Z_{min} を Artin の基本サイクルとする．すなわち，$-D$ がネフになるサイクル $D > 0$ の中で最小のものである．Z_{min} は次のようなサイクルからなる「計算列」を用いて

計算することができる：$Z_1 = E_{v_1}$, $Z_i = Z_{i-1} + E_{v_i}$, $Z_{i-1} \cdot E_{v_i} > 0$. この計算列を用いて $h^j(\mathcal{O}_{Z_i}) - h^j(\mathcal{O}_{Z_{i-1}})$ を順に捉える．基本サイクルの算術種数 $p_a(Z_{min}) := Z_{min} \cdot (K + Z_{min})/2 + 1$ は特異点解消の取り方によらない．この値を基本種数といい $p_f(X, o)$ と表す． p_f は位相不変量であり，$0 \leq p_f \leq p_g$ が成り立つ．Artin は $p_f = 0$ なら $p_g = 0$ となることを示した．とくに $p_g = 1$ ならば $p_f = 1$ となることがわかる．Laufer は $\widetilde{X}$ が最小楕円型，すなわち最小特異点解消のとき $Z_K = Z_{min}$ (これは位相的条件) なら (X, o) は Gorenstein で $p_g(X, o) = 1$ であることを示した．S.S.T. Yau は $p_f = 1$ となる特異点を弱楕円型特異点とよび，楕円列 (または Laufer 列) とよばれる計算列を導入し，p_g が楕円列の長さ l 以下になることを示した．l は位相不変量である．Z_K がサイクルのときには楕円列の総和は Z_K になる．泊も [24] において楕円列の特徴付けや特異点解消プロセスとの関連づけなど精密な議論を展開している．Némethi [8] は Gorenstein 弱楕円型特異点のリンクが有理ホモロジー球面のとき，$p_g = l$ を示した．一般の Gorenstein 弱楕円型特異点の場合には，l とある直線束のねじれ元としての位数 γ を用いた公式が得られている ([19]). 一方，都丸 [26] は $p_f \geq 2$ となる場合に和が Z_K になるサイクルの列を考え，それが存在するときに $p_g \leq p_f + 1$ が成り立つことを示した．今野 [5] は非特異曲面上の任意の曲線 (ゼロでない有効因子) は鎖連結成分に分解されることを示し，2次元特異点論に応用して Yau と都丸の結果を一般化した．

2.4.2. $\mathbb{C}^*$ 作用を持つ場合

(X, o) が good $\mathbb{C}^*$-action を持つとする．このような特異点を擬斉次特異点ともいう．そのとき特異点解消グラフ Γ は星形, すなわち一つの頂点からいくつかの鎖が伸びている形になる．また，リンクは Seifert 多様体である．Pinkham はアファイン環をグラフの中心に対応する曲線 E_0 上の有理数係数の因子 D を用いて $\bigoplus_{k \geq 0} H^0(\mathcal{O}_{E_0}(kD))$ と表した．これにより $p_g(X, o) = \sum_{k \geq 0} h^1(\mathcal{O}_{E_0}(kD))$ が従う．もしも Σ が有理ホモロジー球面であれば $E_0 \cong \mathbb{P}^1$ であり，p_g は位相不変量になる．

2.4.3. 特異点解消過程から

泊は [24] において，超曲面特異点の特異点解消を点または非特異曲線を中心とするブローアップの列によって構成するとき，各ステップから生じる不変量を用いて幾何種数を表した．簡単な場合を例示する．(X, o) を重複度 d の超曲面特異点，点 $o \in X$ のブローアップを $X' \to X$ とし，X' は孤立特異点 $\{x_1, \ldots, x_m\}$ しか持たないとすると

$$p_g(X, o) = \frac{d(d-1)(d-2)}{6} + \sum_{i=1}^{m} p_g(X', x_i)$$

が成り立つ．ここで，(X', x_i) は特異点の芽を表している．

泊氏は公式を求める上での基本原理として，問題となる不変量をブローアップの中心から決まる Hilbert 関数と Hilbert 多項式の差，または別の Hilbert 多項式の定数項としてとらえることを述べている ([24, 2.8]). また，上の公式は filtered blowing up の理論 ([25]) により一般化される．本講演で主題とする公式はそれからヒントを得ている．

3. 幾何種数の加法公式

前節でも見たように，幾何種数の求め方は特異点の注目している性質に応じて様々である．ここでは，グラフ不変量との関連が分かりやすい形の公式を考えたい．

以下，リンクは有理ホモロジー球面であると仮定する．したがって，グラフ Γ と交点行列 $I(E)$ は同じ情報を持つ．グラフから一つの頂点とそれから出ている辺を消すという操作を繰り返すと，星形グラフや有理型特異点に対応するグラフたちに分割することが出来る．対象としている不変量について，この分割に同調するような公式が得られれば，グラフの大きさや $p_a(Z_{min})$ 等に関する帰納法が使えるはずである．

3.1. 公式の型

E_v を固定し， $E - E_v$ の連結成分を $F_1, \ldots, F_m$ とする．Grauert の定理より，各 F_i は正規特異点にブローダウンできる．$\cup F_i$ をブローダウンする射を $\pi'\colon \widetilde{X} \to X'$ とし，$x_i = \pi'(F_i)$ とする．ここでも (X', x_i) は特異点の芽を表す．

$$c(\widetilde{X}, v) := p_g(X, o) - \sum_{i=1}^{m} p_g(X', x_i)$$

とおく．$E_v, F_1, \ldots, F_m$ の適当な近傍に関するチェック複体を考えれば，$c(\widetilde{X}, v) \geq 0$ となることがわかる．この $c(\widetilde{X}, v)$ を求めることが問題となるが，それは一般には困難である．何らかの良い複素構造を考えるべきだろう．この場合の良い複素構造とはどのようなものかという問題も生じてくる．

この公式の動機から，次の問題を考えることは自然である．

問 3.1. 次の条件を満たすような特異点のクラス $\mathcal{C}$ を見つけよ．

$(X, o) \in \mathcal{C}$ ならば，

1. 各 v に対して $c(\widetilde{X}, v)$ は計算可能であり，
2. 各 (X', x_i) も $\mathcal{C}$ に属する．

有理型特異点の幾何種数はゼロであるから，このようなクラスに属する特異点の幾何種数は，公式 $p_g(X, o) = c(\widetilde{X}, v) + \sum_{i=1}^{m} p_g(X', x_i)$ を使うことにより，帰納的に計算できる．

3.2. Periodic constant

ここでは，$c(\widetilde{X}, v)$ の一つの表現を考える．$\widetilde{X}$ 上の関数のなす環に E_v における零の位数によってフィルトレーションを定め，それから不変量を導く．

$$I_n := H^0(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-nE_v)) \subset H^0(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}), \qquad G_n := I_n / I_{n+1}, \qquad G := \bigoplus_{n \geq 0} G_n.$$

次数付環 G の Hilbert 級数を $H_G(t)$ と表す：

$$H_G(t) = \sum_{n \geq 0} (\dim_{\mathbb{C}} G_n) t^n.$$

定義 3.2. $h(t) = \sum_{i \geq 0} a_i t^i \in \mathbb{C}[[t]]$ を形式的べき級数とする．ある $k \in \mathbb{N}$ が存在し，$\sum_{i=0}^{nk-1} a_i$ が変数 n の多項式関数 $P_k(n)$ になると仮定する．このとき，$P_k(n)$ の定数項は条件を満たすような k の値によらず一定である．この定数を periodic constant とよび，$\mathrm{pc}(h)$ と表す．

$\mathrm{pc}(H_G)$ が定まるとき，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，I_n を $H^0(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-nkE_v))$ に取り換えて G と同様に得られた環を $G^{(k)}$ と表すと，$\mathrm{pc}(H_G) = \mathrm{pc}(H_{G^{(k)}})$ が成り立つ．

命題 3.3. ある多項式 $p(t), q(t), r(t) \in \mathbb{C}[t]$ が存在して

$$h(t) = p(t) + \frac{r(t)}{q(t)}, \quad \deg r < \deg q$$

となるとき，$\mathrm{pc}(h)$ が定まり，$\mathrm{pc}(h) = p(1)$ である．

例 3.4. $R = \mathbb{C}[x, y, z]$, $f \in R$ を次数 d の斉次多項式とすると

$$H_{R/(f)}(t) = (1 - t^d)/(1 - t)^3, \qquad \mathrm{pc}(H_{R/(f)}) = \binom{d}{3} = d(d-1)(d-2)/6.$$

定理 3.5. 自然な射 $X' \to X$ が射影的であるとき，$c(\widetilde{X}, v) = \mathrm{pc}(H_G)$.

定理の条件が成り立つとき G は有限生成 $\mathbb{C}$ 代数であり，H_G は有理関数である．

系 3.6. 各 (X', x_i) が有理型特異点ならば $p_g(X, o) = \mathrm{pc}(H_G)$.

4. Splice quotient 特異点

この節では，splice quotient 特異点が「クラス $\mathcal{C}$」の例になることを紹介する．引き続き§3 と同じ記号を使う．リンク Σ は有理ホモロジー球面，$\widetilde{X}$ は最小良特異点解消である．

交点行列 $I(E)$ が負定値であったから，各 $i \in \mathcal{V}$ に対して $E_i^* \cdot E_j = -\delta_{ij}$ $(j \in \mathcal{V})$, $E_i^* > 0$ を満たす $E_i^* \in L \otimes \mathbb{Q}$ が存在する．$d = |\det I(E)|$ とおくと $dE_i^* \in L$ である．$f \in H^0(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}) \setminus \{0\}$ の因子 $\mathrm{div}_{\widetilde{X}}(f)$ の E に台を持つ部分を $(f)_E$ と表す．

定義 4.1. グラフ Γ の端点に対応する既約因子 E_i を end とよぶ．$\mathcal{E}$ により end たちの集合を表す：$\mathcal{E} = \{E_i \mid (E - E_i) \cdot E_i = 1\}$.

各 $E_i \in \mathcal{E}$ に対し，ある $f_i \in H^0(\mathcal{O}_{\widetilde{X}})$ と $\widetilde{X}$ 上の既約因子 C_i が存在して $\mathrm{div}_{\widetilde{X}}(f_i) = d(E_i^* + C_i)$，$(f_i)_E = dE_i^*$ となるとき，$\widetilde{X}$ は end curve condition (ECC) を満たすという．この C_i は $C_i \cdot E = C_i \cdot E_i = 1$ を満たしている．

Splice quotient 特異点は Neumann と Wahl によって導入された ([16], [17])．それらは擬斉次特異点の概念を大きく拡張したものであり，普遍アーベル被覆が splice type といわれる完全交叉特異点になるものとして定義された．擬斉次特異点のほかに有理型特異点や最小楕円型特異点も splice quotient 特異点である ([20])．彼らの理論より splice quotient 特異点のグラフを実現する定義式を構成することが出来ることは重要である．

Neumann と Wahl によって次の特徴づけが得られている ([18]. cf. [22])

定理 4.2. (X, o) が *splice quotient* 特異点であるための条件は最小良特異点解消が *ECC* を満たすことである．

4.1. 幾何種数公式

Splice quotient 特異点の場合は $\mathrm{pc}(H_G)$ が Γ から計算できる．それを述べるために記号を導入する．$L^* = \sum_{w \in \mathcal{V}} \mathbb{Z}E_w^*$, $H = L^*/L$ とおくと ($H \cong H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ となる)，交点数から自然に導かれる pairing

$$\theta\colon H \times L^* \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\exp(2\pi\sqrt{-1}\,\bullet)} \mathbb{C}^*$$

がある．δ_w によって Γ の頂点 w から出る辺の数を表し，$a_{vw}=-E_v^*\cdot E_w^*$ とおき，

$$H_{\Gamma,v}(t)=\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\prod_{w\in\mathcal{V}}\left(1-\theta(h,E_w^*)\,t^{a_{vw}}\right)^{\delta_w-2}$$

と定める．$H_{\Gamma,v}(t)$ は Γ と v によって定まる不変量である．a_{vw} は整数とは限らないが，次が成り立つ．

定理 4.3 ([21]). (X,o) が *splice quotient* 特異点ならば，$H_{\Gamma,v}(t)=H_G(t)$ であり，

1. $p_g(X,o)=\mathrm{pc}(H_{\Gamma,v})+\sum_{i=1}^m p_g(X',x_i)$,

2. 各 (X',x_i) も *Splice quotient* 特異点である．

これにより p_g は Γ から具体的に計算できる．

Splice quotient 特異点を少し拡張したものを考える．

定義 4.4. $\mathcal{M}=\sum_{E_i\in\mathcal{E}}\mathbb{Z}_{\geq 0}E_i^*$ とおく．任意のサイクル $D\in L\cap\mathcal{M}$ に対し，ある $f\in H^0(\mathcal{O}_{\widetilde{X}})$ が存在して $(f)_E=D$ となるとき，$\widetilde{X}$ は weak end curve condition を満たすという．

ECC は weak ECC を導くことがわかる．

定理 4.5. $\widetilde{X}$ が *weak ECC* を満たすならば，

1. $p_g(X,o)=\mathrm{pc}(H_G)+\sum_{i=1}^m p_g(X',x_i)$.

2. 各 (X',x_i) の最小良特異点解消も *weak ECC* を満たす．

4.2. Casson 不変量予想とその一般化

幾何種数公式の加法性には，p_g の値を求めること以外にも応用がある．(X,o) が smoothing をもつとし，F を Milnor ファイバーとする．$H_2(F,\mathbb{Z})$ のランクを Milnor 数とよび μ と表す．また，その符号数を σ と表す．Laufer, Durfee, Steenbrink の結果より，Gorenstein 特異点に対して次が成り立つ ([6], [2], [23]).

$$\mu=12p_g+Z_K^2+\#\mathcal{V}-b_1(\Sigma),\qquad \sigma+8p_g+Z_K^2+\#\mathcal{V}=0. \tag{4.1}$$

ここで，$Z_K^2+\#\mathcal{V}$ は特異点解消によらない位相的不変量である．たとえば，超曲面特異点 $\{f=0\}$ に対して，

$$\mu=\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\{x,y,z\}/(\partial f/\partial x,\partial f/\partial y,\partial f/\partial z)$$

が成り立つので，Γ が得られれば p_g が計算できる．

次の予想は Neumann-Wahl の Casson 不変量予想といわれる ([15]).

$$(X,o)\text{ が完全交叉特異点で }\Sigma\text{ がホモロジー球面ならば}\lambda=\sigma/8.$$

ここで λ は Σ の Casson 不変量である．(X,o) が Brieskorn 超曲面の場合は Fintushel-Stern [3] により，Brieskorn 完全交叉のときは Neumann-Wahl と福原・松本・坂本 [4]

により独立に解決された．これらは Casson 不変量の加法性を用いている．(4.1) より等式 $\lambda=\sigma/8$ は

$$p_g+\lambda+\frac{K^2+\#\mathcal{V}}{8}=0$$

と同値である．Némethi–Nicolaescu はこれを一般化し，リンクが有理ホモロジー球面の場合に次を予想した ([11]).

$\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点 に対して次が成り立つ．

$$p_g(X,o)+\mathrm{sw}(\Sigma)+\frac{Z_K^2+\#\mathcal{V}}{8}=0,$$

ここで $\mathrm{sw}(\Sigma)$ はリンクの Seiberg–Witten 不変量で Γ から 直接計算でき ([11])，Σ がホモロジー球面のときは $\mathrm{sw}(\Sigma)=\lambda$ が成り立つ．また，この式にあらわれる不変量は smoothability の仮定を必要としない．Némethi–Nicolaescu は星形グラフを持つ splice quotient 特異点を含むいくつかの場合にこれを証明したが([11], [12], [13], [9], [10])，その後反例が見つかった ([7])．したがって，どのような特異点がこれを満たすかということが問題になる．

定理 4.6. *Splice quotient* 特異点に対して *Seiberg–Witten* 不変量予想は成り立つ．とくに *Casson* 不変量予想も成り立つ．

これは幾何種数の公式と次の公式により，星形グラフを持つ場合に帰着される．この定理においては，splice quotient 特異点であることは仮定しない．

定理 4.7 (Braun–Némethi [1])**.** Σ_i, $\mathcal{V}_i$, Z_i^2 を (X',x_i) に対して Σ, $\mathcal{V}$, Z_K^2 と同様に定めたものとすると，次が成り立つ．

$$\mathrm{sw}(\Sigma)+\frac{Z_K^2+\#\mathcal{V}}{8}=-\,\mathrm{pc}(H_{\Gamma,v})+\sum_{i=1}^{m}\left(\mathrm{sw}(\Sigma_i)+\frac{Z_i^2+\#\mathcal{V}_i}{8}\right).$$

上で述べた反例は $H_1(\Sigma,\mathbb{Z})=0$ を満たさない．実際，Casson 不変量予想は今も未解決である．

参考文献

[1] Gábor Braun and András Némethi, *Surgery formula for Seiberg-Witten invariants of negative definite plumbed 3-manifolds*, J. Reine Angew. Math. **638** (2010), 189–208.

[2] A. H. Durfee, *The signature of smoothings of complex surface singularities*, Math. Ann. **232** (1978), no. 1, 85–98.

[3] R. Fintushel and R. J. Stern, *Instanton homology of Seifert fibred homology three spheres*, Proc. London Math. Soc. (3) **61** (1990), no. 1, 109–137.

[4] S. Fukuhara, Y. Matsumoto, and K. Sakamoto, *Casson's invariant of Seifert homology 3-spheres*, Math. Ann. **287** (1990), no. 2, 275–285.

[5] Kazuhiro Konno, *Chain-connected component decomposition of curves on surfaces*, J. Math. Soc. Japan **62** (2010), no. 2, 467–486.

[6] H. Laufer, *On μ for surface singularities*, Several complex variables, Part 1, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 30, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1977, pp. 45–49.

[7] I. Luengo-Velasco, A. Melle-Hernández, and A. Némethi, *Links and analytic invariants of superisolated singularities*, J. Algebraic Geom. **14** (2005), no. 3, 543–565.

[8] A. Némethi, *"Weakly" elliptic Gorenstein singularities of surfaces*, Invent. Math. **137** (1999), no. 1, 145–167.

[9] A Némethi, *On the Ozsváth-Szabó invariant of negative definite plumbed 3-manifolds*, Geom. Topol. **9** (2005), 991–1042 (electronic).

[10] A. Némethi, *Graded roots and singularities*, Singularities in geometry and topology, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007, pp. 394–463.

[11] A. Némethi and L. I. Nicolaescu, *Seiberg-Witten invariants and surface singularities*, Geom. Topol. **6** (2002), 269–328.

[12] ———, *Seiberg-Witten invariants and surface singularities, II. Singularities with good* $\mathbb{C}^*$*-action*, J. London Math. Soc. (2) **69** (2004), no. 3, 593–607.

[13] ———, *Seiberg-Witten invariants and surface singularities: splicings and cyclic covers*, Selecta Math. (N.S.) **11** (2005), no. 3-4, 399–451.

[14] W. D. Neumann, *A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities and degenerating complex curves*, Trans. Amer. Math. Soc. **268** (1981), no. 2, 299–344.

[15] W. D. Neumann and J. Wahl, *Casson invariant of links of singularities*, Comment. Math. Helv. **65** (1990), 58–78.

[16] ———, *Complete intersection singularities of splice type as universal abelian covers*, Geom. Topol. **9** (2005), 699–755.

[17] ———, *Complex surface singularities with integral homology sphere links*, Geom. Topol. **9** (2005), 757–811.

[18] ———, *The end curve theorem for normal complex surface singularities*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **12** (2010), no. 2, 471–503.

[19] T. Okuma, *Numerical Gorenstein elliptic singularities*, Math. Z. **249** (2005), 31–62.

[20] ———, *Universal abelian covers of certain surface singularities*, Math. Ann. **334** (2006), 753–773.

[21] ———, *The geometric genus of splice-quotient singularities*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), 6643–6659.

[22] ———, *Another proof of the end curve theorem for normal surface singularities*, J. Math. Soc. Japan **62** (2010), 1–11.

[23] J. Steenbrink, *Mixed Hodge structures associated with isolated singularities*, Singularities, Part 2 (P. Orlik, ed.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 40, Amer. Math. Soc., 1983, pp. 513–536.

[24] M. Tomari, *A* p_g*-formula and elliptic singularities*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **21** (1985), 297–354.

[25] M. Tomari and K.-i. Watanabe, *Filtered rings, filtered blowing-ups and normal two-dimensional singularities with "star-shaped" resolution*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **25** (1989), 681–740.

[26] T. Tomaru, *On Gorenstein surface singularities with fundamental genus* $p_f \geq 2$ *which satisfy some minimality conditions*, Pacific J. Math. **170** (1995), no. 1, 271–295.

[27] 泊昌孝, *2次元正規特異点についての一つのサーベイ*, 「退化, 被覆, 特異点の代数幾何とトポロジー」報告集, 1996, pp. 144–165.