日 本 数 学 会

2011年度秋季総合分科会

函数論分科会
講演アブストラクト

2011年9月28日〜10月1日

於　信州大学

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
   函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする．

2. 委員会の任務
   (a) 函数論分科会評議員候補者を選出する．
   (b) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦．
   (c) 科研費基盤研究（審査区分（１））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼．
   (d) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる．
   (e) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する．
   (f) 分科会の行事 (たとえば，シンポジウムの開催等) について決定する．
   (g) 次期委員会委員候補者の推薦．
   (h) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する．

3. 委員会の構成及び委員の選出 · 任期
   (a) 委員の定数は特に定めないが 10 名程度をもって構成する．必要に応じ追加，削減できる．
   (b) 委員の任期は春季学会から２年間とする．再任は妨げないが，原則として再々任は認めない．
   (c) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う．
      i. 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する．その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する．
      ii. 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する．

4. 委員会の開催及び議決
   (a) 委員会は評議員が召集する．
   (b) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する．
   (c) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する．必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる．
   (d) 案件の議決は投票によってはならない．決定できない時は懸案事項として次回に繰越す．緊急事項については評議員に処置を一任する．

5. 函数論分科会委員会における評議員の任務
   (a) 委員会の司会をする．
   (b) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する．
   (c) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する．
   (d) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する．

付 則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する．
付 則　この規則の改正は，1996 年８月１日より施行する．

函　数　論

9月30日(金)　第Ⅳ会場

9:00〜12:00

14:15〜15:40

15 P. Harjulehto (Univ. of Helsinki)* Iterated maximal functions in variable exponent Lebesgue spaces · · · · · 15
P. Hästö (Univ. of Oulu)
水 田 義 弘 (広 島 工 大 工)
下 村 哲 (広 島 大 教 育)

16:00〜17:00 特別講演

木 坂 正 史 (京大人間環境)♯ 超越整函数の Fatou 集合, Julia 集合の位相的性質について

10月1日(土) 第IV会場

10:00〜12:00

16 古 島 幹 雄 (熊 本 大 理)♯ Hirzebruch 曲面と $\mathbb{C}^2$ のコンパクト化 · 15

17 大 嶋 康 裕 (崇 城 大 工)♯ フェルマー 3 次曲面についての一注意 · 10
古 島 幹 雄 (熊 本 大 理)

18 阿 部 幸 隆 (富 山 大 理 工)* トロイダル群と代数体について · 15

19 青 砥 禎 彦 (東 工 大 理 工)* Holomorphic equivalence of toric hyperkaehler manifolds with compact complex submanifolds · 10

20 田 島 愼 一 (筑波大数理物質)* 対数的ベクトル場とホロノミー D-加群 I · 15

21 田 島 愼 一 (筑波大数理物質)* 対数的ベクトル場とホロノミー D-加群 II · 10
中 村 弥 生 (近 畿 大 理 工)

22 田 島 愼 一 (筑波大数理物質)* 非孤立特異点の versal I-unfoldings と局所コホモロジー · · · · · · · · · · · · · · 10

23 鍋 島 克 輔 (徳 島 大 総 合)♯ 半擬斉次孤立特異点に付随する代数的局所コホモロジーについて · · · · · · 15
田 島 愼 一 (筑波大数理物質)

14:30〜15:30 特別講演

山 ノ 井 克 俊 (東 工 大 理 工)* 有理型関数の第二主要定理について

An elementary problem for harmonic univalent functions

Toshio Hayami (Kwansei Gakuin University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

For a continuous complex-valued function $h(z) = u(x,y) + iv(x,y) \quad (z = x + iy)$, we say that $h(z)$ is harmonic in a simply connected domain $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ if both $u(x,y)$ and $v(x,y)$ are real harmonic in $\mathbb{D}$, that is, $u(x,y)$ and $v(x,y)$ satisfy the Laplace's equations

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{and} \quad \Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

In any simply connected domain $\mathbb{D}$, we can write $h(z) = f(z) + \overline{g(z)}$, where $f(z)$ and $g(z)$ are analytic in $\mathbb{D}$. These functions $f(z)$ and $g(z)$ are called the analytic part and the co-analytic part of $h(z)$, respectively.

The Jacobian $\mathcal{J}_h$ of $h = u + iv$ is defined by $\mathcal{J}_h = u_x v_y - u_y v_x$ or

$$\mathcal{J}_h(z) = \left| \frac{\partial h(z)}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial h(z)}{\partial \overline{z}} \right|^2 = |f'(z)|^2 - |g'(z)|^2 .$$

Then, many mathematicians investigated the univalence for harmonic functions. Lewy [4] has given the following.

Remark 1 A harmonic mapping h is locally univalent in a neighborhood of a point $z_0 \in \mathbb{D}$ if and only if the Jacobian $\mathcal{J}_h(z) \neq 0$ at z_0.

A necessary and sufficient condition for harmonic functions $h(z)$ to be locally univalent and sense preserving in $\mathbb{D}$ is $\mathcal{J}_h(z) > 0$ $(z \in \mathbb{D})$ which is equivalent to $|g'(z)| < |f'(z)|$ (see [1]). Furthermore, Mocanu [5] has shown the following sufficient condition for the univalence of harmonic functions.

Remark 2 Let $f(z)$ and $g(z)$ be holomorphic functions in a domain $\mathbb{D}$. If the function $f(z)$ is convex and $|g'(z)| < |f'(z)|$ $(z \in \mathbb{D})$, then the harmonic function $h(z) = f(z) + \overline{g(z)}$ is univalent and sense preserving in $\mathbb{D}$.

The function $w(z)$ given by

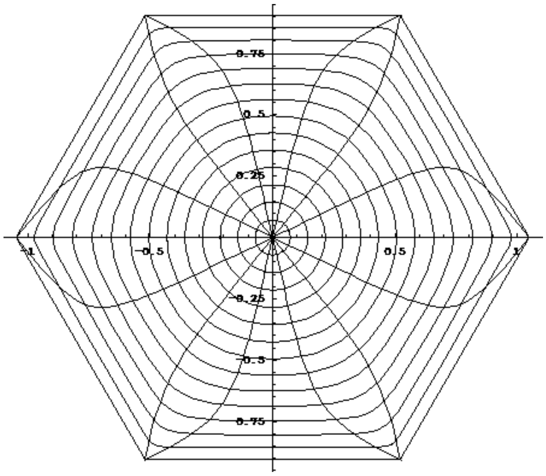
$$w(z) = \frac{g'(z)}{f'(z)}$$

is called the second dilatation of $h(z)$. It follows from the sense preserving property that $|w(z)| < 1$. Therefore, we discuss harmonic functions $h(z) = f(z) + \overline{g(z)}$ with $w(z) = z^{n-1}$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$. This shows that $h(z)$ is well defined if an analytic function $f(z)$ is given.

When $\mathbb{D}$ is the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, if we take special functions

$$f(z) = \frac{1}{3}\left\{\frac{i}{2}\log\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right) + \frac{ie^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\log\left(\frac{1-ie^{-i\frac{\pi}{3}}z}{1+ie^{-i\frac{\pi}{3}}z}\right) + \frac{ie^{i\frac{2\pi}{3}}}{2}\log\left(\frac{1-ie^{-i\frac{2\pi}{3}}z}{1+ie^{-i\frac{2\pi}{3}}z}\right)\right\}$$

and $g(z)$ satisfying $g'(z) = z^4 f'(z)$, then $h(z)$ is univalent and maps $\mathbb{U}$ onto the region inside of the following hexagon.



In this talk, we discuss a problem related to the elementary transform of harmonic functions.

Problem 1 For each analytic function $f(z)$ in certain domains with $f(0) = 0$ and $f'(0) = 1$, can we find the largest domain $\mathbb{D}_c$, such that the harmonic function $h_c(z) = f_c(z) + \overline{g_c(z)}$, where $f_c(z) = \dfrac{1}{c}f(cz)$, with $g_c'(z) = z^{n-1}f_c'(z)$, is univalent for all $c \in \mathbb{D}_c$?

References

[1] J. Clunie and T. Sheil-Small, *Harmonic univalent functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **9**(1984), 3–25.

[2] P. L. Duren, *Harmonic Mappings in the Plane*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[3] T. Hayami and S. Owa, *Hypocycloid of* $n+1$ *cusps harmonic function*, Bull. Math. Anal. Appl. Submitted.

[4] H. Lewy, *On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **42**(1936), 689–692.

[5] P. T. Mocanu, *Sufficient conditions of univalency for complex functions in the class* C^1, Rev. d'Anal. Numeér. et de Théorie Approx. **10**(1981), 75–81.

[6] P. T. Mocanu, *Three-cornered hat harmonic functions*, Complex Variables, **54**(2009), 1079–1084.

Some properties for certain class concerned with univalent functions

Kazuo Kuroki (Kinki University)
Toshio Hayami (Kwansei Gakuin University)
Neslihan Uyanik (Atatürk University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

For a positive integer n, let $\mathcal{A}_n$ denote the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z : z \in \mathbb{C} \text{ and } |z| < 1\}$. In particular, we write $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$. The subclass of $\mathcal{A}$ consisting of all univalent functions $f(z)$ in $\mathbb{U}$ is denoted by $\mathcal{S}$. In 1972, Ozaki and Nunokawa proved a univalence criterion for $f(z) \in \mathcal{A}$ as follows.

Lemma 1 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$\left| \frac{z^2 f'(z)}{\big(f(z)\big)^2} - 1 \right| < 1 \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

then $f(z) \in \mathcal{S}$.

Further, let $\mathcal{T}_n(\mu)$ be the class of functions $f(z) \in \mathcal{A}_n$ which satisfy the inequality

$$\left| \frac{z^2 f'(z)}{\big(f(z)\big)^2} - 1 \right| < \mu \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some real number μ with $0 < \mu \leqq 1$ and $\mathcal{T}_n(1) = \mathcal{T}_n$. According to Lemma 1, it is clear that $\mathcal{T}_n(\mu) \subset \mathcal{T}_n \subset \mathcal{S}$.

A function $f(z) \in \mathcal{A}$ is said to be starlike of order α in $\mathbb{U}$ if it satisfies

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z f'(z)}{f(z)} \right) > \alpha \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some real number α with $0 \leqq \alpha < 1$. We denote by $\mathcal{S}^*(\alpha)$ the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of all functions $f(z)$ which are starlike of order α in $\mathbb{U}$.

In the present talk, we deduce several properties for $f(z) \in \mathcal{T}_n$ as follows.

Theorem 1 *If $f(z) \in \mathcal{T}_n$ with $n \neq 1$, then*

$$(i) \quad \left| \frac{z}{f(z)} - 1 \right| < \frac{1}{n-1} \qquad (z \in \mathbb{U})$$

$$(ii) \quad \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0 \ for \ |z| < \left\{ \frac{(n-1)^2}{(n-1)^2+1} \right\}^{\frac{1}{2n}}$$

$$(iii) \quad \operatorname{Re} f'(z) > 0 \ for \ |z| < \left\{ \frac{(n-1)\sqrt{(n-1)^2+8}-(n-1)^2}{4} \right\}^{\frac{1}{n}}.$$

Moreover, we discuss starlikeness of order α for $f(z) \in \mathcal{T}_n(\mu)$.

Theorem 2 *If $f(z) \in \mathcal{A}_n$ with $n \neq 1$ satisfies*

$$\left| \frac{z^2 f'(z)}{\left(f(z)\right)^2} - 1 \right| < \frac{(n-1)(1-\alpha)}{\sqrt{(n-1+\alpha)^2+(1-\alpha)^2}} \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some real number α with $0 \leqq \alpha < 1$, then $f(z) \in \mathcal{S}^*(\alpha)$.

Remark 1 According to Theorem 2, the class $\mathcal{T}_n(\mu)$ is a subclass of $\mathcal{S}^*(\alpha)$ for

$$0 < \mu \leqq \frac{(n-1)(1-\alpha)}{\sqrt{(n-1+\alpha)^2+(1-\alpha)^2}},$$

where $n \neq 1$ and $0 \leqq \alpha < 1$.

References

[1] S. Ozaki and M. Nunokawa, *The Schwarzian derivative and univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **33** (1972), 392–394.

[2] V. Singh, *On a class of univalent functions*, Internat. J. Math. Math. Sci. **23** (12) (2000), 855–857.

Subordination problems for starlikeness of analytic functions

Hitoshi Shiraishi (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)
Toshio Hayami (Kwansei Gakuin University)
Kazuo Kuroki (Kinki University)
H. M. Srivastava (University of Victoria)

Let $\mathcal{A}_n$ denote the class of functions

$$f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \dots \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

that are analytic in the open unit disk $\mathbb{U}$ with $a_{n+1} \neq 0$ and $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_1$.

If $f(z) \in \mathcal{A}_n$ satisfies

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some real α ($0 \leqq \alpha < 1$), then we say that $f(z)$ is starlike of order α in $\mathbb{U}$ and written by $f(z) \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ and $\mathcal{S}^* \equiv \mathcal{S}^*(0)$.

Let $f(z)$ and $g(z)$ be analytic in $\mathbb{U}$. Then $f(z)$ is said to be subordinate to $g(z)$ if there exists an analytic function $w(z)$ in $\mathbb{U}$ satisfying $w(0) = 0$, $|w(z)| < 1$ $(z \in \mathbb{U})$ and such that $f(z) = g(w(z))$. We denote this subordination by

$$f(z) \prec g(z) \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

In particular, if $g(z)$ is univalent in $\mathbb{U}$, then the subordination

$$f(z) \prec g(z) \qquad (z \in \mathbb{U})$$

is equivalent to $f(0) = g(0)$ and $f(\mathbb{U}) \subset g(\mathbb{U})$.

The basic tool for considering our problems is the following lemma due to Miller and Mocanu (*Second-order differential inequalities in the complex plane*, J. Math. Anal. Appl. **65**(1978), 289-305.).

Lemma 1. *Let the function $w(z)$ defined by*

$$w(z) = a_n z^n + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \dots \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

be analytic in $\mathbb{U}$ with $w(0) = 0$. If $|w(z)|$ attains its maximum value on the circle $|z| = r$ at a point $z_0 \in \mathbb{U}$, then there exists a real number $k \geqq n$ such that

$$\frac{z_0 w'(z_0)}{w(z_0)} = k.$$

Applying Lemma 1, we derive

Theorem 1. *If $f(z) \in \mathcal{A}_n$ satisfies*

$$f'(z)\left(\frac{z}{f(z)}\right)^{1+\mu} \prec 1+\lambda z \qquad (z \in \mathbb{U})$$

and

$$F(z) = z\left[\frac{c-\mu}{z^{c-\mu}}\int_0^z \left(\frac{t}{f(t)}\right)^{\mu} t^{c-\mu-1}dt\right]^{-\frac{1}{\mu}} \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some complex numbers λ, μ, and c such that $\mathrm{Re}(c-\mu) < n$*, then*

(i) $\quad F(z) \in \mathcal{S}^*$ *for* $|c-\mu||\lambda| \leqq \dfrac{|n-\mu||n-(c-\mu)|}{\sqrt{|n-\mu|^2+|\mu|^2}}$.

(ii) $\quad F(z) \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ *where*

$$\alpha \leqq \begin{cases} \dfrac{1-|\lambda_1|}{1+|\lambda_2|} & \left(0<|\lambda_1| \leqq \dfrac{|n-\mu|}{|n-\mu|+|\mu|}\right) \\ \dfrac{1-(|\lambda_1|^2+|\lambda_2|^2)}{2(1-|\lambda_2|^2)} & \left(\dfrac{|n-\mu|}{|n-\mu|+|\mu|} \leqq |\lambda_1| \leqq \dfrac{|n-\mu|}{\sqrt{|n-\mu|^2+|\mu|^2}}\right) \end{cases},$$

$$|\lambda_1| = |\lambda|\frac{|c-\mu|}{|n-(c-\mu)|},\ |\lambda_2| = |\lambda_1|\frac{|\mu|}{|n-\mu|} \ \textit{and } \mathrm{Re}(\mu) < \frac{n}{2}.$$

(iii) $\quad \left|\dfrac{zF'(z)}{F(z)} - 1\right| < \dfrac{(|n-\mu|+|\mu|)|c-\mu||\lambda|}{|n-(c-\mu)||n-\mu| - |c-\mu||\mu||\lambda|} \leqq 1$ $(z \in \mathbb{U})$ *where* $|c-\mu||\lambda| \leqq \dfrac{|n-(c-\mu)||n-\mu|}{|n-\mu|+2|\mu|}$ *and* $\mathrm{Re}(\mu) < \dfrac{n}{2}$.

References

[1] P. L. Duren, *Univalent Functions*, Springer-verlag, New York, Berlin, Heiderberg, Tokyo (1983).

[2] S. S. Miller and P. T. Mocanu, *Second-order differential inequalities in the complex plane*, J. Math. Anal. Appl. **65**(1978), 289-305.

[3] S. S. Miller and P. T. Mocanu, *Differential Subordinations*, Theory and Applications. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 225. Marcel Dekker, Inc., New York, 2000.

[4] M. Obradović, *A class of univalent functions*, Hokkaido Math. J. **27**(1998), 329-335.

[5] S. Ponnusamy and V. Singh, *Convolution properties of some classes of analytic functions*, J. Math. Sci. **89**(1998), 1008-1020.

$L^{(\alpha)}$–conjugates on parabolic Bergman spaces

菱川洋介 (岐阜高専・一般), 西尾昌治 (阪市大・理), 山田雅博 (岐阜大・教育)

H を $(n+1)$ 次元実ユークリッド空間の上半空間とする. すなわち, $H = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}; x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$ とする. $0 < \alpha \leq 1$ に対し, 放物型作用素 $L^{(\alpha)}$ は, $L^{(\alpha)} = \partial_t + (-\Delta_x)^\alpha$ と定義される. ここで, $\partial_t = \partial/\partial t$, Δ_x は x に関するラプラシアンを表す. H 上の連続関数 u が $L^{(\alpha)}$-調和であるとは, 超関数の意味で $L^{(\alpha)}u = 0$ となるときをいう. $1 \leq p < \infty$, $\lambda > -1$ に対して, 放物型ベルグマン空間 $\boldsymbol{b}_\alpha^p(\lambda)$ を次のように定義する.

$$\boldsymbol{b}_\alpha^p(\lambda) := \{u; H \text{ 上 } L^{(\alpha)}\text{-調和}, \|u\|_{L^p(\lambda)} := \left(\int_H |u(x,t)|^p t^\lambda dV(x,t)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$$

ここで, dV は H 上のルベーグ測度を表す. 注意として, $\boldsymbol{b}_{1/2}^p(\lambda)$ は Ramey, Yi [4] で研究されている調和ベルグマン空間となる.

実数 κ に対し, $\mathcal{D}_t^\kappa = (-\partial_t)^\kappa$ を κ 次の分数冪微分作用素, $\mathcal{FC}^\kappa$ は $\mathcal{D}_t^\kappa \varphi$ が定義可能であるような $\mathbb{R}_+$ 上の関数 φ からなる関数族を表す. $\partial_j = \partial/\partial x_j$ とする.

本講演では放物型ベルグマン空間上の $L^{(\alpha)}$-共役に関して得られた結果を述べる. 研究の背景の一つとして, Ramey-Yi[4] による調和ベルグマン空間上の調和共役に関する研究がある. 我々は [1] においてその拡張を試み, 放物型ベルグマン空間上の α-放物型共役関数を導入した. しかし, α-放物型共役関数は常に存在するとは限らない, また元の関数と必ずしも同じ関数空間に属するとは限らないなどの問題点もあった. ここでは α-放物型共役関数の定義を改良し, その点を修正してみた.

はじめに, 調和共役の定義を述べる. 論文 [3] によると, 調和共役は次の一般化された Cauchy-Riemann の方程式によって定義される.

定義 A ([3]). u を H 上の関数とする. $(v_1, \cdots, v_n)$ が u の調和共役であるとは, $(v_1, \cdots, v_n, u)$ が次の式を満たすときをいう.

$$\partial_j v_k = \partial_k v_j \qquad (1 \leq j, k \leq n), \tag{1.1}$$

$$\partial_j u = -\mathcal{D}_t v_j \qquad (1 \leq j \leq n), \tag{1.2}$$

$$\mathcal{D}_t u = \sum_{j=1}^n \partial_j v_j. \tag{1.3}$$

次に, α-放物型共役関数の定義を述べる. 特に, $\alpha = 1/2$ のとき, 定義 B は定義 A になることを注意しておく.

定義 B ([1]). u を H 上の関数とする. $(v_1, \cdots, v_n)$ が u の α-放物型共役関数であるとは, $v_j \in C^1(H)$ かつ, $(v_1, \cdots, v_n, u)$ が (1.1), (1.2) と次の式を満たすときをいう.

$$\mathcal{D}_t^{\frac{1}{\alpha}-1} u = \sum_{j=1}^n \partial_j v_j. \tag{1.3'}$$

放物型ベルグマン空間上の α-放物型共役関数について, 次の結果を得ている.

定理 A ([1]). $0 < \alpha \leq 1$, $1 \leq p < \infty$, $\lambda > -1$, $u \in \boldsymbol{b}_\alpha^p(\lambda)$ とする. α, p, λ が $\eta = p(\frac{1}{2\alpha} - 1) + \lambda > -1$ を満たすならば, u の α-放物型共役関数 $(v_1, \cdots, v_n)$ で $v_j \in \boldsymbol{b}_\alpha^p(\eta)$ を満たすものが唯一存在する. さらに, u に依存しない定数 $C > 0$ が存在して, 次を満たす.

$$C^{-1}\|u\|_{L^p(\lambda)} \leq \sum_{j=1}^{n} \|v_j\|_{L^p(\eta)} \leq C\|u\|_{L^p(\lambda)}.$$

ここで, $\alpha = 1$, $p = 2$, $\lambda = 0$ とすると, $\eta = -1$ となり, $\boldsymbol{b}_\alpha^p(-1) = \{0\}$ であることから, $\boldsymbol{b}_1^2(0)$ の関数は一般に α-放物型共役関数を持たない. そこで, 我々は [2] を参考に, 次のように $L^{(\alpha)}$-共役を定義してみた.

定義 1. u を H 上の関数とする. $(v_1, \cdots, v_n)$ が u の $L^{(\alpha)}$-共役であるとは, $v_j(x, \cdot), u(x, \cdot) \in \mathcal{FC}^{\frac{1}{2\alpha}}$ かつ, $(v_1, \cdots, v_n, u)$ が次を満たすときをいう.

$$\partial_j v_k = \partial_k v_j \qquad (1 \leq j, k \leq n), \tag{N.1}$$

$$\partial_j u = -\mathcal{D}_t^{\frac{1}{2\alpha}} v_j \qquad (1 \leq j \leq n), \tag{N.2}$$

$$\mathcal{D}_t^{\frac{1}{2\alpha}} u = \sum_{j=1}^{n} \partial_j v_j. \tag{N.3}$$

最後に, 我々の主結果を述べる.

定理 1. $0 < \alpha \leq 1$, $1 \leq p < \infty$, $\lambda > -1$, $u \in \boldsymbol{b}_\alpha^p(\lambda)$ とする. このとき, u の $L^{(\alpha)}$-共役 $(v_1, \cdots, v_n)$ で $v_j \in \boldsymbol{b}_\alpha^p(\lambda)$ を満たすものが唯一存在する. さらに, u に依存しない定数 $C > 0$ が存在して, 次を満たす.

$$C^{-1}\|u\|_{L^p(\lambda)} \leq \sum_{j=1}^{n} \|v_j\|_{L^p(\lambda)} \leq C\|u\|_{L^p(\lambda)}.$$

References

[1] Y. Hishikawa, M. Nishio, and M. Yamada, *A conjugate system and tangential derivative norms on parabolic Bergman space,* Hokkaido Math. J., **39** (2010), 85–114.

[2] E. Kochneff and Y. Sagher, *Conjugate temperatures*, J. Approx. Theory, **70** (1992), 39–49.

[3] E. M. Stein and G. Weiss, On the theory of harmonic functions of several variables I. The theory of H^p-spaces, Acta Math., **103** (1960), 25–62.

[4] W. Ramey and H. Yi, *Harmonic Bergman functions on half-spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **348** (1996), 633–660.

Positive Toeplitz operators of finite rank on the parabolic Bergman spaces

西尾昌治 (阪市大・理), 鈴木紀明 (名城大・理工), 山田雅博 (岐阜大・教育)

We consider the α-parabolic operator

$$L^{(\alpha)} := \frac{\partial}{\partial t} + (-\Delta_x)^\alpha$$

on the upper half space $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$, where $\Delta_x := \partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_n}^2$ denotes the Laplacian on the x-space $\boldsymbol{R}^n$ and $0 < \alpha \le 1$. Here we denote by $X = (x,t)$ a point in $\boldsymbol{R}_+^{n+1} = \boldsymbol{R}^n \times (0,\infty)$. We denote by $(\boldsymbol{b}_\alpha^2(\lambda), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ the Hilbert space

$$\boldsymbol{b}_\alpha^2(\lambda) := \{u \in C(\boldsymbol{R}_+^{n+1}) \cap L^2(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V^\lambda) | L^{(\alpha)}u = 0 \text{ in the sense of distributions}\},$$

where $\lambda > -1$, and V^λ denotes the $(n+1)$-dimensional weighted Lebesgue measure $t^\lambda\, dxdt$ on $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$, with $L^2(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V^\lambda)$-inner product $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Since for $X \in \boldsymbol{R}_+^{n+1}$ the point evaluation $u \mapsto u(X) : \boldsymbol{b}_\alpha^2(\lambda) \to \boldsymbol{R}$ is bounded, the orthogonal projection from $L^2(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V^\lambda)$ to $\boldsymbol{b}_\alpha^2(\lambda)$ is represented as an integral operator by a kernel $R_{\alpha,\lambda}$, which is called the α-parabolic Bergman kernel. Formally, positive Toeplitz operators are defined by

$$(T_\mu^\lambda u)(X) := \int R_{\alpha,\lambda}(X,Y)\, u(Y)\, d\mu(Y)$$

with symbol μ, which are positive Radon measures on $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$.

Positive Toeplitz operators have been discussed in the theory of parabolic Bergman spaces $\boldsymbol{b}_\alpha^p$ under some growth condition for symbol measures μ. For example, the smallness, i.,e., boundedness ([3]), compactness ([4]) and Schatten classes ([5, 6]) have been discussed. In these situation, an extreme smallness of operators is of finite rank. In addition, in [6], they needed a compactly supported positive measure whose Toeplitz operator is of infinite rank. Then, in this talk, we shall discuss the rank of positive Toeplitz operators and the purpose is to characterize positive Toeplitz operators of finite rank, without assuming that the supports of symbol measures are compact. In the theory of the classical holomorphic Bergman spaces on the unit disc in the complex plane, Luecking [2] solved the problem for complex measures with compact support. A generalization to higher dimensions is given by Choe [1].

Definition 1. Let $\lambda > -1$ be real and $\mu \ge 0$ be a Radon measure on $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$. Assume that $\boldsymbol{b}_\alpha^2(\lambda) \cap L^2(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, \mu)$ is dense in $\boldsymbol{b}_\alpha^2(\lambda)$. Then a positive self-adjoint operator $\boldsymbol{T}_\mu^\lambda$ on $\boldsymbol{b}_\alpha^2$ can be defined by the relation

$$\langle\sqrt{\boldsymbol{T}_\mu^\lambda}\, u, \sqrt{\boldsymbol{T}_\mu^\lambda}\, v\rangle = \int uv\, d\mu$$

for $u, v \in \boldsymbol{b}_\alpha^2(\lambda) \cap L^2(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, \mu)$. We call $\boldsymbol{T}_\mu^\lambda$ the Toeplitz operator with symbol μ.

REMARK 1. If a measure μ satisfies a growth condition

$$\int (1 + t + |x|^{2\alpha})^{\tau}\, d\mu(x,t) < \infty \tag{1}$$

with some constant $\tau \in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{b}_{\alpha}^{2}(\lambda) \cap L^2(\boldsymbol{R}_{+}^{n+1}, \mu)$ is dense in $\boldsymbol{b}_{\alpha}^{2}(\lambda)$.

REMARK 2. If $\mathrm{supp}(\mu)$ is compact, then $\boldsymbol{T}_{\mu}^{\lambda}$ is bounded.

Theorem 1. *Let $\lambda > -1$ and μ be a positive Radon measure on $\boldsymbol{R}_{+}^{n+1}$. If there exists a dense subspace $\mathcal{D}$ in $\boldsymbol{b}_{\alpha}^{2}(\lambda)$ such that $\mathcal{D} \subset \mathrm{Dom}(\boldsymbol{T}_{\mu}^{\lambda})$ and $\dim \boldsymbol{T}_{\mu}^{\lambda}\mathcal{D} < \infty$, then μ is a finite linear combination of point masses: $\#\mathrm{supp}(\mu) = \dim \boldsymbol{T}_{\mu}^{\lambda}\mathcal{D}$.*

Finally, we shall make some remarks on the relation with the Carleson inclusion

$$\iota_{\mu}^{\lambda} : \boldsymbol{b}_{\alpha}^{2}(\lambda) \to L^2(\boldsymbol{R}_{+}^{n+1}, \mu) : u \mapsto u,$$

which is a closed operator.

REMARK 3. If a measure $\mu \geq 0$ satisfies the growth condition (1) for some $\tau \in \boldsymbol{R}$, then $\boldsymbol{T}_{\mu}^{\lambda} = (\iota_{\mu}^{\lambda})^{*}\, \iota_{\mu}^{\lambda}$.

REMARK 4. Let $\lambda > -1$. Then for a measure $\mu \geq 0$, if ι_{μ}^{λ} is bounded, then the measure $\mu \geq 0$ satisfies the growth condition (1) with $\tau < -\left(\frac{n}{2\alpha} + 1\right) - \lambda$ and $\boldsymbol{T}_{\mu}^{\lambda}$ is bounded. Moreover, $\|\boldsymbol{T}_{\mu}^{\lambda}\| \leq \|\iota_{\mu}^{\lambda}\|^2$ and

$$\boldsymbol{T}_{\mu}^{\lambda} u(X) = \int R_{\alpha,\lambda}(X,Y) u(Y)\, d\mu(Y).$$

REMARK 5. Let $\lambda > -1$ and $\mu \geq 0$ satisfy the growth condition (1) for some $\tau \in \boldsymbol{R}$. Then if $\boldsymbol{T}_{\mu}^{\lambda}$ is bounded, ι_{μ}^{λ} is bounded and $\|\iota_{\mu}^{\lambda}\| \leq \sqrt{\|\boldsymbol{T}_{\mu}^{\lambda}\|}$.

References

[1] B. R. Choe, *On higher dimensional Luecking's theorem*, J. Math. Soc. Japan, **61** No. 1 (2009), 213–224.

[2] D. H. Luecking, *Finite rank Toeplitz operators on the Bergman space*, Proc. Amer. Math. Soc., **136** (2008), 1717–1723.

[3] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, *Toeplitz operators and Carleson measures on parabolic Bergman spaces*, Hokkaido Math. J., **36**, No. 3 (2007), 563–583.

[4] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, *Compact Toeplitz operators on parabolic Bergman spaces*, Hiroshima Math. J., **38** (2008), 177–192.

[5] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, *Weighted Berezin transformations with application to the Schatten class Toeplitz operators on parabolic Bergman spaces*, Kodai math. J., **32** (2009), 501–520.

[6] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, *Schatten class Toeplitz operators on the parabolic Bergman space II*, to appear in Kodai math. J..

Minimal thinness for parabolic functions

田中　真樹 (千葉大学大学院・理学研究科)
柳下　稔 (千葉大学大学院・理学研究科)

この講演では, $n+1$ 次元ユークリッド空間 R^{n+1} 内のスラブ $R^n \times (0,T)(T \in (0,\infty])$ における minimally thin for parabolic functions について定義し, そして, この概念に関連した境界極限定理を述べる.

まず, minimally thin for parabolic functions について定義する. なお, minimally thin for harmonic functions については, Aikawa[1] や Zhang[3] により, 定義されている. 以下, $Y = (y,0) \in R^n \times \{0\}$ とし, Y についての Gauss-Weierstrass 核として,

$$p(X,y) = (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{\|x-y\|^2}{4t}\right), \quad X=(x,t) \in R^n \times (0,T)$$

と定める.

定義. $M \subset R^n \times (0,T)$, $Y=(y,0) \in R^n \times \{0\}$ とする. 次の (1), (2) を満たすような $R^n \times (0,T)$ 上非負値パラボリック関数 (熱方程式の解)u が存在するとき, M は Y で minimally thin for parabolic functions であるという.
(1)M 上で, $u \geq p(\cdot, y)$
(2)$u(X_0) < p(X_0, y)$ を満たすような $X_0 \in R^n \times (0,T)$ が存在する.

M は Y で minimally thin for parabolic functions であれば, M は Y で coparabolic minimal thin([2], p. 378) である.

次に, この定義に関連した境界極限定理について述べる.
まず, coparabolic minimal thin に関連する境界極限定理として, 次の Fatou-Näim-Doob の定理 ([2], p. 357) が知られている.

定理 A. v は $R^n \times (0,T)$ 上正値パラボリック関数, u は $R^n \times (0,T)$ 上非負値優パラボリック関数 ([2], p. 277) とする. このとき, $R^n \times \{0\}$ 内の μ_v についてほ

とんど至るところでの点 $Y=(y,0)$ に対し, Y で coparabolic minimal thin となるような $R^n \times (0,T)$ 内の部分集合 E があって,

$$\lim_{X \in R^n \times (0,T)-E,\ X \to Y} \frac{u(X)}{v(X)} = f(y).$$

ただし, μ_v は v の表現測度とし ([2], p. 290), f は, u の最大パラボリック劣関数の表現測度 ν_u の μ_v について絶対連続な部分のラドン・ニコディムの微分とする.

これから述べる定理は, 定理 A で, 分子の関数が非負値パラボリック関数に制限されると, minimally thin for parabolic functions な集合の外からの極限となることを示している. しかし, 分母の関数は Gauss-Weierstrass 核に制限されている.

定理. u は $R^n \times (0,T)$ 上非負値パラボリック関数, μ_u は u の表現測度, $Y=(y,0) \in R^n \times \{0\}$ とする. このとき, Y で minimally thin for parabolic functions であるような $R^n \times (0,T)$ 内の部分集合 E があって,

$$\lim_{X \in R^n \times (0,T)-E,\ X \to Y} \frac{u(X)}{p(X,y)} = \mu_u(\{Y\}).$$

minimally thin for harmonic functions に関する境界極限定理では, 分母の関数を一般の正値調和関数としており ([1], [3]), 証明に Harnack の不等式が使われている. パラボリック関数についての Harnack の不等式は調和関数のそれとは, 様子が異なっているので ([2], p. 277), 分母の関数を一般の正値パラボリック関数にしたものについて, 成立しているかどうかは不明である.

参考文献

[1] Aikawa. H, *Sets of determination for harmonic function in an NTA domains*, J. Math. Soc. Japan 48(1996), 299-315.

[2] Doob J. L, *Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart*, Springer-Verlag, New York, 1984.

[3] Zhang X, *Harmonic functions and sets of determination*, PhD thesis, Mc. Gill University, 1996.

Riemann 面上有界 Dirichlet 有限調和関数の Banach 空間

中 井　三 留（名工大・名誉教授）

双曲的開 Riemann 面 R 上の調和関数全体の線型空間 $H(R)$ の重要な部分空間として, 有界調和関数全体 $HB(R)$, Dirichlet 有限, 即ち, R 上の Dirichlet 積分有限調和関数全体 $HD(R)$ の 2 空間を考える. $HB(R)$ は norm

$$\|u\|_{HB} := \sup_R |u| \tag{1}$$

で Banach 空間である. $HD(R)$ も又 norm

$$\|u\|_{HD} := \sqrt{|u(a)|^2 + \int_R du \wedge *du} \tag{2}$$

により Banach 空間, そして実際は Hilbert 空間となる, 但し参照点 $a \in R$ の取り方に本質的には依存しない. これ等の Banach 空間に対して次の表を得た (反射性については [4], 可分性については [7]; 更に [5] 参照):

空間	$HB(R)$ (有限次元)	$HB(R)$ (無限次元)	$HD(R)$ (次元無条件)
反射性	yes	no	yes
可分性	yes	no	yes

この表は Riemann 面の分類問題にも有用な働きをする. 有限 n 次元 Banach 空間は全て $\mathbb{R}^n$ に同相線型同型で従って反射的でも可分でもある事を常に念頭に置く.

$HB(R)$ と $HD(R)$ に加えて, 空間 $HBD(R) := HB(R) \cap HD(R)$ もしばしば考察され有力な道具として利用される. これは常に norm

$$\|u\|_{HBD} := \sup_R |u| + \sqrt{\int_R du \wedge *du} \tag{3}$$

の Banach 空間として扱う. 反射性や可分性について, “両親”$HB(R)$ と $HD(R)$ の “子供” として $HBD(R)$ は一体どちらの性質をより多く受け継いでいるか.

$$HBD(\mathbb{W}_X) = HX(\mathbb{W}_X), \quad \dim HBD(\mathbb{W}_X) = \infty \quad (X = B, D) \tag{4}$$

となる Riemann 面 $\mathbb{W}_X$ $(X = B, D)$ が存在する (B については [2], D については [6]). 従って $HBD(\mathbb{W}_B)$ $(= HB(\mathbb{W}_B))$ は反射的でも可分でもないが $HBD(\mathbb{W}_D)$ $(= HD(\mathbb{W}_D))$ は反射的かつ可分である. この様にこの問題の結論は Riemann 面の構造に深く依存する分より興味深い. しかし例え最も簡単な Riemann 面である単位円板 $\mathbb{D}$ でも, 又更に $HBD(\mathbb{D})$ の同型表現である Banach 空間, 即ち,

$$\operatorname*{ess.sup}_{\partial\mathbb{D}} |f| + \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(e^{is}) - f(e^{it})|^2}{|e^{is} - e^{it}|^2} ds dt} < \infty \tag{5}$$

を f の norm とする $\partial\mathbb{D}$ 上の Borel 関数 f 全体の Banach 空間で考えても, $HBD(\mathbb{D})$ が反射的か否か, 又可分か否かの決定はあまり容易とは思えない.

$\mathbb{W}_B$ と $\mathbb{W}_D$ はこの問題に於いて対極にある存在であるが, この両者を分ける特徴的性質は何かと考えて条件

(6) $$HBD(R) < HD(R) \quad (\text{真部分集合})$$

を満たす Riemann 面 R の範疇を考える, 即ち, 非有界 Dirichlet 有限調和関数を持つ Riemann 面の族である. R の Royden 調和境界 δR と, その上の容量 (詳しくは変分的 2 容量) を考える時 ([3]), (6) は δR が容量零の点を含む事と同値である. $\mathbb{W}_B$ は (6) を満たす典型例, $\mathbb{W}_D$ は (6) を満たさぬ典型例である. 実はこの条件 (6) が我々の問題の答えを与える.

定理 **7.** 次の **4** 条件は互いに同値である：
(a) Banach 空間 $\boldsymbol{HBD(R)}$ は反射的でない；
(b) Banach 空間 $\boldsymbol{HBD(R)}$ は可分でない；
(c) Riemann 面 $\boldsymbol{R}$ は非有界 **Dirichlet** 有限調和関数を持つ；
(d) Riemann 面 $\boldsymbol{R}$ の **Royden** 調和境界は容量零の点を含む**.**

平面領域や種数有限の Riemann 面は無論のこと例え無限種数でも把手が Royden 調和境界に集積しないと言う条件を満たす殆有限種数の Riemann 面と呼ばれる族を昔導入した ([1]). R が殆有限種数の Riemann 面であるとその調和境界 δR の全ての点の容量は零であることが最近示せた. 従って次のことが言える.

系 **8. Riemann** 面 $\boldsymbol{R}$ が双曲的でしかも殆有限種数である様な末端部を持つとすると**,** その上の **Banach** 空間 $\boldsymbol{HBD(R)}$ は反射的でも可分でもない**.** 特に**,** 上で問うた **Banach** 空間 $\boldsymbol{HBD}(\mathbb{D})$ は反射的でも可分でもないと言うのが答えである**.**

参 照 文 献

[1] M. Nakai: *Genus and Classification of Riemann Surfaces*, Osaka Math. J., **14**(1962), 153-180.
[2] M. Nakai: *Spectral resolutions of bounded harmonic functions*, Proceeding of the Workshop on Potential Theory in Akita 2008, 81-104.
[3] M. Nakai: *Extremal functions for capacities*, J. Math. Soc. Japan, **61**(2009), 345-361.
[4] M. Nakai: *Nonreflexivity of Banach spaces of bounded harmonic functions on Riemann surfaces*, Proc. Japan Acad., Ser. A, **87**(2011), 1-4.
[5] M. Nakai: *Banach spaces of harmonic functions on Riemann surfaces*, Hokkaido Univ. Tech. Rep. Series in Math., **147**(2011), 49-54.
[6] M. Nakai: *Surfaces carrying sufficiently many Dirichlet finite harmonic functions that are automatically bounded*, J. Math. Soc. Japan (to appear).
[7] M. Nakai: *Nonseparability of Banach spaces of bounded harmonic functions on Riemann surfaces*, Preprint.

On Dirichlet polyhedra for generalized simplex groups

小森　洋平　(阪市大理)[*1]
梅本 悠莉子　(阪市大理)[*2]

すべての面角が鋭角であるような n 次元双曲空間 $\mathbb{H}^n$ 内の n-単体 Δ を 1 つ固定する。(ただしいくつかの頂点は無限遠境界にあってもよい。) Δ の $n+1$ 個の面を含む超平面 を $L_1, L_2, \cdots, L_{n+1}$ とし、L_i に関する鏡映変換を R_i とする。

Δ の任意の内点 p を 1 つ固定して、$H_i := \{x \in \mathbb{H}^n \mid d(x,p) \leq d(x, R_i(p))\}$ とすると、$\Delta := \cap_{i=1}^{n+1} H_i$ と表せる。L_k に含まれない Δ の頂点を v_k とする。

Proposition 1. $n+1$ 個の点 $R_1(p), R_2(p), \cdots, R_{n+1}(p)$ から等距離にある点がただ 1 つ存在する。この点を q とすると、q は Δ の内点になる。□

任意の $k = 1, 2, \cdots, n+1$ に対し、

$$\Delta_k := \{x \in \mathbb{H}^n \mid d(x,p) \leq d(x, R_k(p)),\ d(x, R_k(p)) \leq d(x, R_i(p))\ (i \neq k)\}$$

と定義する。特に $\Delta_k \subset \Delta$ である。

Proposition 2. Δ_k は Δ の v_k 以外の n 個の頂点と q を頂点に持つ n-単体である。$\Delta = \cup_{i=1}^{n+1} \Delta_i$ かつ $i \neq j$ に対し、$\Delta_i \cap \Delta_j \subset \{x \in \mathbb{H}^n \mid d(x, R_i(p)) = d(x, R_j(p))\}$ となる。特に $vol(\Delta) = \sum_{i=1}^{n+1} vol(\Delta_i)$ を満たす。□

この命題より以下のことが分かる。面角が π/p (p は自然数か無限大) のとき、$n+1$ 個の鏡映変換 $\{R_i\}$ は $\mathbb{H}^n$ の等長変換群の離散部分群 G を生成する。G の向きを保つ指数 2 の部分群 Γ について、点 p を基点とする Dirichlet 多面体 $D_p(\Gamma)$ は次のように表される。

Theorem 1. $D_p(\Gamma) = \{x \in \mathbb{H}^n \mid d(x,p) \leq d(x, R_i R_j(p)), (\forall i \neq j)\} = \Delta \cup (\cup_{i=1}^{n+1} R_i(\Delta_i))$. 特に $D_p(\Gamma)$ は $n(n+1)$ 個の面を持つ凸多面体である。□

References

[1] Alan Beardon, *The Geometry of Discrete Groups*, Graduate Texts in Mathematics 91, Springer.

[2] Svetlana Katok, *Fuchsian Groups*, Chicago Lectures in Mathematics.

[3] John Ratcliffe, *Foundations of hyperbolic manifolds*, Graduate Texts in Mathematics 149, Springer.

[4] 梅本悠莉子、*On Dirichlet fundamental domains for Fuchsian groups*, 2010 年度修士論文 (大阪市立大学理学部)

[*1] e-mail: komori@sci.osaka-cu.ac.jp
[*2] e-mail: yuriko.ummt.77@gmail.com

Trace parameters for Teichmüller spaces

中西　敏浩　(島根大学総合理工学部)
中村　豪　　(愛知工業大学工学部)

$\mathcal{T}(g,m)$を(g,m)型リーマン面のTeichmüller空間とする(ただしmはpunctureではなく，境界曲線の個数)。以下$2g-2+m>0$を仮定する。このとき$\mathcal{T}(g,m)$は(g,m)型マーキングつきFuchs群の変形空間と見なされる。すなわちΓを表示

$$(A_1,B_1,...,A_g,B_g,C_1,...,C_m:(\prod_{j=1}^{g}A_jB_jA_j^{-1}B_j^{-1})C_1\cdots C_m=1)$$

をもつ群とすると

$$\mathcal{T}(g,m)=\{\rho:\Gamma\to PSL(2,\mathbb{R}):\rho\text{は中への同型で}\rho(\Gamma)\text{は}(g,m)\text{型Fuchs群}\}/\overset{conj}{\sim}$$

Γの元γは$\mathcal{T}(g,m)$上の関数$\tau_\gamma([\rho])=|\mathrm{tr}\rho(\gamma)|$を定める。次の結果が知られている。

定理 1 Γの有限個の元$\gamma_1,...,\gamma_N$が存在して$(\tau_{\gamma_1},...,\tau_{\gamma_N}):\mathcal{T}(g,m)\to\mathbb{R}^N$は埋め込みである。

写像$(\tau_{\gamma_1},...,\tau_{\gamma_N})$が埋め込みになる$\gamma_1,...,\gamma_N$の組があるような$N$の最小数$N(g,m)$を見つける問題を考える(とくに$m=0$のとき，この問題はSeppälä-Sorvaliの問題と呼ばれていた)。明らかに$N(g,m)\geq 6g-6+3m=\dim\mathcal{T}(g,m)$である。Schmutz([3])や奥村([2])らの研究によってこの問題はすでに解かれていて

$$N(g,m)=\begin{cases}6g-6+3m & (m>0\text{のとき})\\ 6g-5 & (m=0\text{のとき})\end{cases}.$$

この講演では上の問題を再び取り上げ，$\tau=(\tau_{\gamma_1},...,\tau_{\gamma_N})$ $(N=N(g,m))$が埋め込みになるような組を与える。とくに$m=0$のときはパラメータ数$N(g,0)$は$\dim\mathcal{T}(g,0)+1$であるから，$\tau(\mathcal{T}(g,0))\subset\mathbb{R}^N$は余次元1の部分空間であるが，その部分空間を定める関係式を具体的に表示することも講演の目標である。

例として，種数3の閉曲面のタイヒミュラー空間を取り上げると，フックス群の標準生成系$(A_1,B_1,A_2,B_2,A_3,B_3)$ $(\mathrm{tr}A_j>0,\ \mathrm{tr}B_j>0)$に対して次のようなトレースを選ぶと，これらは$\mathcal{T}(3,0)$の大域的座標系を与える。

$$\begin{array}{lll}a_1=\mathrm{tr}A_1, & b_1=\mathrm{tr}B_1, & z_1=\mathrm{tr}A_1B_1,\\ a_2=\mathrm{tr}A_2, & b_2=\mathrm{tr}B_2, & z_2=\mathrm{tr}A_2B_2,\\ x_2=-\mathrm{tr}B_1A_1^{-1}B_1^{-1}A_2, & y_2=-\mathrm{tr}A_1A_2, & w_2=\mathrm{tr}A_2E_3,\\ u_3=\mathrm{tr}E_1A_3B_3A_3^{-1}, & v_3=\mathrm{tr}E_1A_3B_3^2, & w_3=\mathrm{tr}E_1A_3B_3,\\ z_3=\mathrm{tr}A_3B_3 & & \end{array}\qquad(1)$$

ここで $E_k = A_k B_k A_k^{-1} B_k^{-1}$, $k = 1, 3$. さらに $e_1 = a_1 b_1 z_1 - a_1^2 - b_1^2 - z_1^2 + 2$, $e_2 = a_2 b_2 z_2 - a_2^2 - b_2^2 - z_2^2 + 2$,

$$\begin{aligned}
d_2 &= \frac{1}{2}\left(-2a_2 + a_2 b_1^2 - a_1 x_2 - a_1 y_2 - a_1 a_2 b_1 z_1 + a_2 z_1^2\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sqrt{}\,\big[(2a_2 - a_2 b_1^2 + a_1 x_2 + a_1 y_2 + a_1 a_2 b_1 z_1 - a_2 z_1^2)^2 \\
&\quad -4(a_2^2 - 4b_1^2 + a_1^2 b_1^2 + b_1^4 + a_1 a_2 x_2 + x_2^2 + +a_1 a_2 y_2 - 2x_2 y_2 + a_1^2 x_2 y_2 + b_1^2 x_2 y_2 \\
&\quad + y_2^2 + 4a_1 b_1 z_1 - a_1^3 b_1 z_1 - 2a_1 b_1^3 z_1 - a_1 b_1 x_2 y_2 z_1 - 4z_1^2 + a_1^2 z_1^2 + 2b_1^2 z_1^2 + a_1^2 b_1^2 z_1^2 \\
&\quad + x_2 y_2 z_1^2 - 2a_1 b_1 z_1^3 + z_1^4\big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_3 &= \frac{1}{2}\left(-a_2 d_2 - 2e_1 + b_2^2 e_1 - a_2 w_2 - a_2 b_2 e_1 z_2 + e_1 z_2^2\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sqrt{}\,\big[(a_2 d_2 + 2e_1 - b_2^2 e_1 + a_2 w_2 + a_2 b_2 e_1 z_2 - e_1 z_2^2)^2 \\
&\quad -4(-4b_2^2 + a_2^2 b_2^2 + b_2^4 + d_2^2 + a_2 d_2 e_1 + e_1^2 - 2d_2 w_2 + a_2^2 d_2 w_2 + b_2^2 d_2 w_2 + a_2 e_1 w_2 \\
&\quad + w_2^2 + 4a_2 b_2 z_2 - a_2^3 b_2 z_2 - 2a_2 b_2^3 z_2 - a_2 b_2 d_2 w_2 z_2 \\
&\quad -4z_2^2 + a_2^2 z_2^2 + 2b_2^2 z_2^2 + a_2^2 b_2^2 z_2^2 + + d_2 w_2 z_2^2 - 2a_2 b_2 z_2^3 + z_2^4\big]
\end{aligned}$$

とおくと (1) は次をみたす。

$$\begin{aligned}
&2 + e_1 e_2 + e_3 - u_3^2 - v_3^2 + w_3^2 + u_3 v_3 z_3 + (1/2)(e_1 + e_2) w_3 z_3 \\
&-w_3 \sqrt{(2 + e_3)(4 - u_3^2 - v_3^2 + u_3 v_3 z_3 - z_3^2) + (1/4)(e_1 - e_2)^2 (z_3^2 - 4)} = 0
\end{aligned} \tag{2}$$

一般の $g(\geq 2)$ についても座標がみたすのは RC(Ruler-Compass) 方程式 ([1]) である。

参考文献

[1] Luo, Feng, Geodesic length functions and Teichmüller spaces, Differential Geom. **48** (1998), 275–317.

[2] Okumura, Y., Global real analytic length parameters for Teichmüller spaces, Hiroshima Math. J., **26** (1996), 165–179.

[3] Schmutz, P., Die Parametrisierung des Teichmüllerraumes durch geodätische Längenfunktionen, Comment. Math. Helvet., **68** (1993), 278–288.

[4] Seppälä, M. and T. Sorvali, On geometric parametrizations of Teichmüller spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser.A I Math,. **10**, (1985), 515–526.

タイヒミュラー距離に関する測地線および概測地線の極限について

宮地 秀樹　(大阪大学大学院理学研究科)*

1. タイヒミュラー空間の Gardiner-Masur コンパクト化

1.1. タイヒミュラー空間と極値的長さ

X を面積有限な双曲的リーマン面とし，$T(X)$ を X のタイヒミュラー空間とする．$T(X)$ の点は X と擬等角同値なリーマン面 Y と擬等角写像 $f: X \to Y$ の対 (Y, f) の同値類である．$\mathcal{S}$ を X 上の非自明，非周辺的（non-peripheral) な単純閉曲線のホモトピー類の集合とする．X 上の測地線層の空間を $\mathcal{MF}$ と書き，射影的測地線層の空間を $\mathcal{PMF}$ と表す．

$\alpha \in \mathcal{S}$ を X 上の曲線族と考える．$y = (Y, f) \in T(X)$ に対して，Y 上の曲線族 $f(\alpha)$ の極値的長さを $\mathrm{Ext}_y(\alpha)$ と書く．$y_1, y_2 \in T(X)$ に対して，

$$d_T(y_1, y_2) = \frac{1}{2} \log \sup_{\alpha \in \mathcal{S}} \frac{\mathrm{Ext}_{y_1}(\alpha)}{\mathrm{Ext}_{y_2}(\alpha)}$$

により定義される $T(X)$ 上の距離を**タイヒミュラー距離**と呼ぶ（cf. [2]）．タイヒミュラー距離は完備である．

1.2. Gardiner-Masur コンパクト化

論文 [1] 写像において，F. Gardiner と H. Masur は写像

$$\Phi_{GM} : T(X) \ni y \mapsto [\mathcal{S} \ni \alpha \mapsto \mathrm{Ext}_y(\alpha)^{1/2}] \in \mathrm{P}\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$$

埋め込みであり,像は相対コンパクトであることを示した．像の閉包をタイヒミュラー空間の **Gardiner-Masur コンパクト化**と呼ぶ．閉包内における像の補集合を **Gardiner-Masur 境界**と呼び $\partial_{GM} T(X)$ と書く．

2. 主結果

2.1. 概測地線と Busemann 点

$T \subset [0, \infty)$ を 0 を含む非有界集合とする．写像 $\gamma : T \to T(X)$ が次を満たすとき**概測地線（almost geodesic)** と呼ばれる：$\gamma(0) = x_0$ であり，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$t \geq s \geq N$ であれば

$$|d_T(\gamma(0), \gamma(s)) + d_T(\gamma(s), \gamma(t) - t| < \epsilon$$

を満たすような $N > 0$ が存在する．測地線は概測地線である．Liu と Su の結果により Gardiner-Masur コンパクト化はホロ関数コンパクト化（horofunction

---

本研究は科研費 (課題番号:21540177) の助成を受けたものである。
* 〒560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-1 大阪大学大学院理学研究科数学専攻
e-mail: miyachi@math.sci.osaka-u.ac.jp

compactification）である（[3]）．したがって任意の概測地線は$\partial_{GM}T(X)$に極限点を持つ（[8]を参照せよ．なお，タイヒミュラー距離に関する概測地線の極限の存在についてはホロ関数コンパクト化の一般論を用いない簡単な証明がある．[6]及び[7]を見よ）．概測地線の極限点となる境界点を**Busemann点**と呼ぶ．

定理 1 ([7]). $T(X)$の複素次元が2以上のとき，$\partial_{GM}T(X)$には*Busemann*点でない境界点が存在する．

この系として次を得る．

系 1. $T(X)$の複素次元が2以上のとき，距離空間$(T(X), d_T)$はCAT(0)空間ではない．

なお，この系はMasurの定理（[4]）からもわかるが，証明は異なる．

2.2. タイヒミュラー測地線の極限点

$x_0 = (X, id)$をタイヒミュラー空間$T(X)$の基点とする．$[F] \in \mathcal{PMF}$に対して，x_0から発するFのHubbard-Masur微分（Fが単純閉曲線のときはJenkins-Strebel微分）に関するタイヒミュラー測地線を$R_F : [0, \infty) \to T(X)$と書く．任意の$[F] \in \mathcal{PMF}$に対して，極限$\mathcal{G}_{x_0}([F]) := \lim_{t\to\infty} \Phi_{GM} \circ R_F(t)$が存在する．

定理 2 ([6]). $\mathcal{G}_{x_0} : \mathcal{PMF} \to \partial_{GM}T(X)$は単射である．しかし連続ではない．

定理1により写像$\mathcal{G}_{x_0}$は全射ではない（このことは[5]内の結果からもわかる）．写像$\mathcal{G}_{x_0}$の連続点については次がわかる．

定理 3 ([6]). $F \in \mathcal{MF} - \{0\}$が一意的エルゴード的もしくは単純閉曲線であれば，写像$\mathcal{G}_{x_0}$は$[F] \in \mathcal{PMF}$において連続であり，逆写像$\mathcal{G}_{x_0}^{-1}$は$\mathcal{G}_{x_0}([F])$において連続である．

参考文献

[1] F. Gardiner and H. Masur, Extremal length geometry of Teichmüller space. Complex Variables Theory Appl. **16** (1991), no. 2-3, 209–237.

[2] S. Kerckhoff, The asymptotic geometry of Teichmüller space, Topology **19** (1980), 23–41.

[3] L. Liu and W. Su, The horofunction compactification of Teichmüller metric, preprint, ArXiv.org : `http://arxiv.org/abs/1012.0409`.

[4] H. Masur, On a class of geodesics in Teichmüller space, Ann. of Math. **102** (1975), 205–221.

[5] H. Miyachi, Teichmüller rays and the Gardiner-Masur boundary of Teichmüller space. Geom. Dedicata **137** (2008), 113–141.

[6] H. Miyachi, Teichmüller rays and the Gardiner-Masur boundary of Teichmüller space II, submitted.

[7] H. Miyachi, Teichmüller space has non-Busemann points, submitted.

[8] M. Rieffel, Group C^*-algebra as compact quantum metric spaces, Doc. Math. 7 (2002), 605–651.

多項式の無限合成で構成される 概周期関数

小島　彰太　(立教大理)*

1. Introduction

はじめに関数の合成を扱う上で便利な記号を定義する.

$$f(x) \circ g(x) = f(g(x)),$$

$$\mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{N} f_n(x) = f_1(x) \circ f_2(x) \circ \cdots \circ f_N(x) = f_1(f_2(\cdots f_N(x)\cdots)).$$

また,

$$\mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{\infty} f_n(x) := \lim_{N\to\infty} \mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{N} f_n(x)$$

と定める. この記法を用いると, 三角関数は次のように表示できる.

$$\frac{1}{2}(\cos(2x) - 1) = \left(\mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{x^2}{4^n} \right) \right) \circ (-x^2).$$

これから, 一般の実数列 $\{c_n\}$ に対して, 関数

$$\Lambda(x) = \left(\mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{\infty} \left(x + c_n x^2 \right) \right) \circ (-x^2)$$

を考える時, 実数列 c_n が 4^{-n} に近いならば, 関数 $\Lambda(x)$ は三角関数 $\cos x$ に近い性質を持つだろうと期待できる. 特に今, 周期に注目するとき $\Lambda(x)$ は周期に近い性質を持つだろうと期待する. 実際 ε_n を

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$$

が収束し,

$$\varepsilon_{n+1} \leq 4\varepsilon_n \quad (\text{for all} \quad n \geq 1)$$

を満たす非負実数列として

$$c_n = \frac{1}{4^n + \varepsilon_n}$$

とおくと, この c_n に対して, 上の $\Lambda(x)$ は概周期と呼ばれる周期に近いものを持つ関数となる: 任意の整数 N とすべての実数 x に対して

$$|\Lambda(x) - \Lambda(x + N\pi)| \leq 2 \sum_{n=1+\mathrm{ord}_2 N}^{\infty} \varepsilon_n$$

が成り立つ. ここで記号 $\mathrm{ord}_2 N$ は, d を奇数として $N = d\, 2^{\mathrm{ord}_2 N}$ によって定まるものとする.

* e-mail: 09rc001d@rikkyo.ac.jp

最小消去多項式を用いた行列スペクトル分解の並列算法

小原功任　(金沢大学理工研究域)
田島慎一　(筑波大学数理物質研究科)

われわれは行列のスペクトル分解に関して, レゾルベントの留数解析に基づいた exact な, つまり近似を用いないアルゴリズムを提案した ([1, 2]). この方法は最小消去多項式を利用することでさらに高速化することができる. 本予稿では, 特に計算機への応用という観点から, この方法の並列算法について述べる.

以下, A を有理数を要素とする n 次正方行列とし, $\pi(x)$ を A の最小多項式とする. また E を単位行列とする. $\pi(x)$ の根, すなわち A の固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ とし, V_i を λ_i に対応する $\mathbf{C}^n$ の不変部分空間とする. このとき, 行列 A は互いに可換な行列の組 $\{P_1, \cdots, P_m; D_1, \cdots, D_m\}$ で次のように表される.

$$E = P_1 + \cdots + P_m$$
$$A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_m P_m + D_1 + \cdots + D_m$$
$$P_i \text{ は } V_i \text{ への射影行列}, D_i \text{ は巾零行列}$$

この分解を A のスペクトル分解という. λ_i は代数的数であり, P_i, D_i は $\mathbf{Q}(\lambda_i)$ の元を要素とする行列となる. したがってこれらは計算機上で厳密に表現することが可能である.

行列値複素関数 $R(z) = (zE - A)^{-1}$ を A のレゾルベントというが, $z = \lambda_i$ のまわりでローラン展開したとき

$$R(z) = \cdots + \frac{1}{(z-\lambda_i)^2} D_i + \frac{1}{z-\lambda_i} P_i + \sum_{k=0}^{\infty} B_k (z-\lambda_i)^k$$

と表わされることが知られている.

また, 最小多項式 $\pi(x)$ に対して 2 変数多項式 $\Psi(x, y) = (\pi(x) - \pi(y))/(x - y)$ を考えると, 簡単な計算からレゾルベントが

$$R(z) = \frac{1}{\pi(z)} \Psi(zE, A)$$

という表現を持つことが分かる. ローラン展開から, 射影行列 P_i は $z = \lambda_i$ のまわりを反時計回りに一周する曲線 C_i に沿った周回積分で表わされ, 次の形になる.

$$P_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_i} R(z) dz = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_i} \Psi(zE, A) \frac{1}{\pi(z)} dz$$

さらに $1/\pi(z)$ の代数的局所コホモロジー類が多項式 $b(z)$ を用いて

$$\left[\frac{1}{\pi(z)}\right] = \left[b(z)\frac{\pi'(z)}{\pi(z)}\right]$$

と書けたとすると ($\pi(z)$ が無平方なら互除法でも計算できる),

$$P_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_i} b(z)\Psi(zE,A)\frac{\pi'(z)}{\pi(z)}dz = b(\lambda_i)\Psi(\lambda_i E, A)$$

となる. したがって, この算法において必要なものは, 最小多項式, 代数的局所コホモロジー類, および行列多項式の計算であり, 時間のかかる行列の変形操作は必要ないので極めて高速な計算方法を与えている. また計算量を決めるパラメータは行列のサイズ n と最小多項式の次数 $\deg \pi$ であることも分かる. $\Psi(x,y)$ の全次数が $\deg \pi - 1$ であることにも注意する.

さて現在では, 研究室で利用するような計算機であってもマルチコアの CPU を搭載していることが普通になり, 並列計算するための環境に容易に手が届くようになってきた. われわれの算法では行列多項式計算を行うが, この部分は行列を列ごとに (あるいは行ごとに) 分解することで容易に並列化できる.

さらに算法を振り返ると, 列ごとに分解するのであれば, 最小多項式は必要なく, 最小多項式の適当な因子で十分である. つまり, 基本列ベクトル $\boldsymbol{e}_j$ に対して, $\pi_j(A)\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{0}$ となる多項式 $\pi_j(x)$ があれば算法は成立する. 明らかに $\deg \pi_j \leq \deg \pi$ であるので, 高速化できたことになる. 一般に最小多項式を行列 A から直接に計算する方法は知られていないので, 特性多項式から計算することになる. 同様に最小消去多項式 π_j も特性多項式から計算することになるが, この計算は確率的な方法を組み合わせることで高速化でき, しかも並列化も可能である. したがってわれわれのスペクトル分解法ではほとんどの部分で並列化が可能である. われわれは, この算法を計算機代数システム Risa/Asir に実装し実験したが, 並列化効率が極めてよいことも分かった. 講演では, この exact な行列スペクトル分解法の並列算法について述べる.

参考文献

[1] K. Ohara and S. Tajima: Spectral Decomposition and Eigenvectors of Matrices by Residue Calculus, Proceedings of the Joint Conference of ASCM 2009 and MACIS 2009, COE Lecture Note **22**, Kyushu University, 137–140.

[2] 小原功任・田島慎一: レゾルベントを用いた行列のスペクトル分解と固有ベクトル計算, 函数論分科会講演アブストラクト, 67–68, 2009 年 9 月.

[3] 小原功任・田島慎一: 行列のスペクトル分解・固有ベクトル計算の並列化, 数理研講究録 **1666**(2009), 65–68.

[4] 小原功任・田島慎一: 最小消去多項式を用いた行列スペクトル分解計算の並列化, 数理研講究録投稿中.

[5] 田島慎一・奈良洸平: 最小消去多項式候補とその応用, 数理研講究録投稿中.

13

Maximal functions, Riesz potentials and Sobolev embeddings on Musielak-Orlicz-Morrey spaces of variable exponent in $\mathbf{R}^N$

水田 義弘　広島工業大学・工学部
中井 英一　茨城大学・理学部
大野 貴雄　大分大学・教育福祉科学部
下村 哲　広島大学大学院・教育学研究科

$f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$ に対して，極大関数 Mf を次で定義する:

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| \, dy$$

ここに，$|B(x,r)|$ は $B(x,r)$ の Lebesgue 測度を表す．次の事実はよく知られている．

定理 A. $p > 1, 0 < \nu \leq N$ に対して，ある定数 $C > 0$ が存在して，

$$\|Mf\|_{L^{p,\nu}(\mathbf{R}^N)} \leq C\|f\|_{L^{p,\nu}(\mathbf{R}^N)}.$$

ここに，

$$\|f\|_{L^{p,\nu}(\mathbf{R}^N)} = \sup_{x\in\mathbf{R}^n, r>0} \left(\frac{r^\nu}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p \, dy \right)^{1/p}.$$

α $(0 < \alpha < N)$ 次の Riesz ポテンシャル

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbf{R}^N} |x-y|^{\alpha-N} f(y) \, dy$$

を考える．ここに，f は可測関数で $I_\alpha|f| \not\equiv \infty$ と仮定する．

定理 B (Sobolev の不等式). $1 < p < \nu/\alpha$ に対して，ある定数 $C > 0$ が存在して，

$$\|I_\alpha f\|_{L^{p^*,\nu}(\mathbf{R}^N)} \leq C\|f\|_{L^{p,\nu}(\mathbf{R}^N)}.$$

ここに，$1/p^* = 1/p - \alpha/\nu$.

本講演では，定理 A, B の拡張を行う．このために，変動指数 $p(\cdot)$ は

(p1) $1 < \inf_{x\in\mathbf{R}^N} p(x) \leq \sup_{x\in\mathbf{R}^N} p(x) < \infty$;

(p2) $|p(x) - p(y)| \leq C/\log(1/|x-y|) \qquad (|x-y| < 1/e)$;

(p3) $|p(x) - p(y)| \leq C/\log(e+|x|) \qquad (|y| \geq |x|/2)$

を満たし，変動指数 $q(\cdot)$ は，

(q1) $-\infty < \inf_{x\in\mathbf{R}^N} q(x) \leq \sup_{x\in\mathbf{R}^N} q(x) < \infty$;

(q2) $|q(x) - q(y)| \leq C/\log(\log(1/|x-y|)) \qquad (|x-y| < 1/e^2)$

を満たすものを考え，$\Phi(x,t) = t^{p(x)}(\log(c_0+t))^{q(x)}$ とする．可測関数 $\nu(\cdot), \beta(\cdot)$ は

(ν1) $0 < \inf_{x\in\mathbf{R}^N} \nu(x) \le \sup_{x\in\mathbf{R}^N} \nu(x) \le N$;

(β1) $-\infty < \inf_{x\in\mathbf{R}^N} \beta(x) \le \sup_{x\in\mathbf{R}^N} \beta(x) < \infty$;

(β2) $t^{\nu(x)}(\log(e+t))^{\beta(x)} \le Ct^N \qquad (x \in \mathbf{R}^N, t \ge 1)$

を満たすものを考え，$\kappa(x,r) = r^{\nu(x)}(\log(e+r+1/r))^{\beta(x)}$ とする．このとき，

$$\|f\|_{L^{\Phi,\kappa}(\mathbf{R}^N)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \sup_{x\in\mathbf{R}^N, r>0} \frac{\kappa(x,r)}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} \Phi(y,|f(y)|/\lambda)dy \le 1\right\} < \infty$$

を満たす $\mathbf{R}^N$ 上の可測関数 f からなる関数空間を $L^{\Phi,\kappa}(\mathbf{R}^N)$ とする ([1], [2]).

定理 1. ある定数 $C > 0$ が存在して，

$$\|Mf\|_{L^{\Phi,\kappa}(\mathbf{R}^N)} \le C\|f\|_{L^{\Phi,\kappa}(\mathbf{R}^N)}.$$

$\Psi(x,t) = \left\{t(\log(e+t))^{q(x)/p(x)}(\log(e+t+1/t))^{\alpha(x)\beta(x)/\nu(x)}\right\}^{p^*(x)}$ とする．ここに，$1/p^*(x) = 1/p(x) - \alpha(x)/\nu(x)$ とし，さらに，条件

(α1) $0 < \inf\limits_{x\in\mathbf{R}^N} \alpha(x) \le \sup\limits_{x\in\mathbf{R}^N} \alpha(x) < N$;

(ν2) $|\nu(x) - \nu(y)| \le C/\log(e+|x|) \qquad (|y| \ge |x|/2)$;

($\nu\alpha$1) $\operatorname*{ess\,inf}\limits_{x\in\mathbf{R}^N}(\nu(x)/p(x) - \alpha(x)) > 0$;

($\nu\alpha$2) $\operatorname*{ess\,inf}\limits_{x\in\mathbf{R}^N\setminus B(0,1)}(\nu(x)/p(\infty) - \alpha(x)) > 0 \qquad (\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = p(\infty))$

を満たすとする．

定理 2. $\mathbf{R}^N$ 上の可測関数 f は $\|f\|_{L^{\Phi,\kappa}(\mathbf{R}^N)} \le 1$ を満たすものとする．このとき，ある定数 $C > 0$ が存在して，

$$\sup_{z\in\mathbf{R}^N, r>0} \frac{\kappa(z,r)}{|B(z,r)|}\int_{B(z,r)} \Psi(x,|I_{\alpha(x)}f(x)|)\, dx \le C.$$

本報告の結果は，[3] による．また定理 1, 2 は，より一般の Φ, κ に拡張できる．

参考文献

[1] D. Cruz-Uribe and A. Fiorenza, $L\log L$ results for the maximal operator in variable L^p spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), 2631–2647.

[2] Y. Mizuta, E. Nakai, T. Ohno and T. Shimomura, Riesz potentials and Sobolev embeddings on Morrey spaces of variable exponent, to appear in Complex Var. Elliptic Equ.

[3] Y. Mizuta, E. Nakai, T. Ohno and T. Shimomura, Maximal functions, Riesz potentials and Sobolev embeddings on Musielak-Orlicz-Morrey spaces of variable exponent in $\mathbf{R}^n$, to appear in Rev. Mat. Complut.

Boundedness of maximal operators and Sobolev's inequality on Musielak-Orlicz-Morrey spaces

前田 文之　広島大学名誉教授
水田 義弘　広島工業大学・工学部
大野 貴雄　大分大学・教育福祉科学部
下村 哲　広島大学大学院・教育学研究科

本講演では，Musielak-Orlicz-Morrey 空間における極大作用素 M の有界性と，それを用いた $\alpha(\cdot)$ $(0 < \alpha(\cdot) < N)$ 次の Riesz ポテンシャル $I_{\alpha(x)}f(x)$ の Sobolev の不等式について紹介する．

関数 $\Phi(x,t) = t\phi(x,t)$ は次を満たすものを考える：

(Φ1) $\phi(\,\cdot\,,t)$ は $\mathbf{R}^N$ 上可測関数で $\phi(x,\,\cdot\,)$ は $[0,\infty)$ 上連続関数である;

(Φ2) 定数 $A_1 \geq 1$ が存在して，$A_1^{-1} \leq \phi(x,1) \leq A_1 \quad (x \in \mathbf{R}^N)$;

(Φ3) $\phi(x,\cdot)$ は $\mathbf{R}^N$ 上一様仮似増加関数である．つまり，定数 $A_2 \geq 1$ が存在して，

$$\phi(x,t) \leq A_2\phi(x,s) \quad (x \in \mathbf{R}^N, 0 \leq t < s);$$

(Φ4) 定数 $A_3 \geq 1$ が存在して，$\phi(x,2t) \leq A_3\phi(x,t) \quad (x \in \mathbf{R}^N, t > 0)$;

(Φ5) ${}^\forall\gamma > 0$ に対して，定数 $B_\gamma \geq 1$ が存在して，

$$\phi(x,t) \leq B_\gamma\phi(y,t) \quad (|x-y| \leq \gamma t^{-1/N}, t \geq 1);$$

(Φ6) 関数 $g \in L^1(\mathbf{R}^N)(0 \leq g(x) < 1)$ と定数 $B_\infty \geq 1$ が存在して，

$$B_\infty^{-1}\Phi(x,t) \leq \Phi(x',t) \leq B_\infty\Phi(x,t) \quad (|x'| \geq |x|, g(x) \leq t \leq 1);$$

($\Phi3^*$) ある $\varepsilon_0 > 0$ に対して，$t \mapsto t^{-\varepsilon_0}\phi(x,t)$ は $(0,\infty)$ 上一様仮似増加関数である．

さらに，関数 $\kappa(x,r)$ は次を満たすものを考える：

(κ1) 定数 $Q_1 \geq 1$ が存在して，$\kappa(x,2r) \leq Q_1\kappa(x,r) \quad (x \in \mathbf{R}^N, r > 0)$;

(κ2) ある $\varepsilon > 0$ に対して，$r \mapsto r^{-\varepsilon}\kappa(x,r)$ は $(0,\infty)$ 上一様仮似増加関数である；

(κ3) 定数 $Q_2 \geq 1$ が存在して，

$$Q_2^{-1}\min(1,\, r^N) \leq \kappa(x,r) \leq Q_2\max(1,\, r^N) \quad (x \in \mathbf{R}^N, r > 0).$$

このとき，

$$\|f\|_{L^{\Phi,\kappa}(\mathbf{R}^N)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \sup_{x\in\mathbf{R}^N, r>0}\frac{\kappa(x,r)}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}\Phi(y,|f(y)|/\lambda)dy \leq 1\right\} < \infty$$

を満たす $\mathbf{R}^N$ 上の可測関数 f からなる関数空間を $L^{\Phi,\kappa}(\mathbf{R}^N)$ とする ([2, 3])．

定理 1. ある定数 $C > 0$ が存在して，

$$\|Mf\|_{L^{\Phi,\kappa}(\mathbf{R}^N)} \leq C\|f\|_{L^{\Phi,\kappa}(\mathbf{R}^N)}.$$

以下では，

(α1) $0 < \inf_{x\in\mathbf{R}^N} \alpha(x) \le \sup_{x\in\mathbf{R}^N} \alpha(x) < N$;

(κ4) $\kappa(x,\cdot)$ は連続関数である

を仮定し，$\Phi(x,t), \kappa(x,r)$, $\alpha(x)$ の間には次の関係があるとする:

($\Phi\kappa\alpha$) ある $\varepsilon > 0$ に対して，$r \mapsto r^{\varepsilon+\alpha(x)}\Phi^{-1}(x,\kappa(x,r)^{-1})$ は $(0,\infty)$ 上一様仮似減少関数である．ここに，$F^{-1}(x,s) = \sup\{t > 0\,; F(x,t) < s\}$.

さらに，次を満たす関数 $\Phi_\infty(t) = t\phi_\infty(t)$ の存在を仮定する：

(Φ_∞1) 定数 $\tilde{B}_\infty \ge 1$ が存在して，$\tilde{B}_\infty^{-1}\Phi(x,t) \le \Phi_\infty(t) \le \tilde{B}_\infty\Phi(x,t) \quad (g(x) \le t \le 1)$;

(Φ_∞2) 定数 $c_\infty \ge 1$ が存在して，$\Phi_\infty(g^*(x)) \le c_\infty(1+|x|)^{-N} \quad (x \in \mathbf{R}^N)$．ここに，$g^*(x) = \max\bigl(g(x),\, Mg(x)\bigr)$；

($\Phi_\infty\kappa$) ある $0 < \gamma < N$ に対して，$r \mapsto r^\gamma\Phi_\infty^{-1}(\kappa(x,r)^{-1})$ は $[1,\infty)$ 上一様仮似増加関数である;

($\Phi_\infty\kappa\alpha$) ある $\varepsilon > 0$ に対して，$r \mapsto r^{\varepsilon+\alpha(x)}\Phi_\infty^{-1}(\kappa(x,r)^{-1})$ は $[1,\infty)$ 上一様仮似減少関数である．

関数 $\Psi(x,t)$ は次を満たすものを考える：

(Ψ1) $\Psi(\cdot,t)$ は $\mathbf{R}^N$ 上可測関数で $\Psi(x,\cdot)$ は $[0,\infty)$ 上連続関数である;

(Ψ2) $\Psi(x,\cdot)$ は $[0,\infty)$ 上一様仮似増加関数である;

(Ψ3) 定数 $A_4 \ge 1$ が存在して，

$$\Psi\left(x, t\kappa^{-1}(x,\Phi(x,t)^{-1})^{\alpha(x)}\right) \le A_4\Phi(x,t) \quad (x \in \mathbf{R}^N, t > 0).$$

定理 2. ある定数 $C > 0$ が存在して，$\|f\|_{L^{\Phi,\kappa}(\mathbf{R}^N)} \le 1$ を満たす任意の $f \in L^{\Phi,\kappa}(\mathbf{R}^N)$ に対し，

$$\sup_{z\in\mathbf{R}^N, r>0} \frac{\kappa(z,r)}{|B(z,r)|}\int_{B(z,r)} \Psi(x, |I_{\alpha(x)}f(x)|/C)\, dx \le 1.$$

本報告の結果は，[1] による．また定理 2 は，より一般な核関数のポテンシャルの場合に拡張できる．

参考文献

[1] F-Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Boundedness of maximal operators and Sobolev's inequality on Musielak-Orlicz-Morrey spaces, preprint.

[2] Y. Mizuta, E. Nakai, T. Ohno and T. Shimomura, Maximal functions, Riesz potentials and Sobolev embeddings on Musielak-Orlicz-Morrey spaces of variable exponent in $\mathbf{R}^n$, to appear in Rev. Mat. Complut.

[3] J. Musielak, Orlicz Spaces and Modular Spaces, Lecture Notes in Math. **1034**, Springer-Verlag, 1983.

Iterated maximal functions in variable exponent Lebesgue spaces

Petteri Harjulehto University of Helsinki
Peter Hästö University of Oulu
水田 義弘 広島工業大学・工学部
下村 哲 広島大学大学院・教育学研究科

Based on Diening [2], Cruz-Uribe, Fiorenza and Neugebauer [1] and Nekvinda [6] established, independently, that the maximal operator is bounded on $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ provided p is log-Hölder continuous and satisfies $1 < p^- \equiv \inf_{x\in\mathbb{R}^n} p(x) \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n} p(x) \equiv p^+ < \infty$. In this talk, we discuss the iterated Hardy–Littlewood maximal operator in variable exponent Lebesgue spaces with exponent allowed to reach the value 1.

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an open set. For $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ and $A \subset \mathbb{R}^n$ with positive finite measure we write

$$f_A = \fint_A f(y)\,dy := |A|^{-1}\int_{A\cap\Omega} f(y)\,dy.$$

By M we denote the centered Hardy–Littlewood maximal operator, $Mf(x) = \sup_{r>0} |f|_{B(x,r)}$.

Let $p\colon \Omega \to [1,\infty)$ be a measurable function, which we call a variable exponent. To consider the boundedness of the maximal operator when $p^- = 1$, it is necessary to move beyond Lebesgue spaces with variable exponent, to the framework of Musielak–Orlicz spaces. Recall that the Orlicz–Musielak space with modular $\Phi(x,t)$ is defined by the Luxemburg type-norm

$$\|f\|_{L^\Phi(\Omega)} := \inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega \Phi\Big(x, \frac{f(x)}{\lambda}\Big)\,dx \leqslant 1\right\}.$$

The following function plays an important role:

$$\psi_p(t) := \begin{cases} \log(e+|t|), & \text{for } |t| < e^{p'} - e \\ 2p' - \frac{e^{p'}}{e+|t|}p', & \text{for } |t| \geqslant e^{p'} - e. \end{cases}$$

Note that $t \mapsto t^p\psi_p(t)$ is convex on $[0,\infty)$ and that

$$\frac{1}{2}\psi_p(t) \leqslant \min\left\{p', \log(e+|t|)\right\} \leqslant \psi_p(t).$$

To describe the result, we introduce the abbreviation $\|f\|_{L^{p(\cdot)}\Psi(\cdot,L)\psi^k_{p(\cdot)}(L)}$ for the Musielak–Orlicz space with modular

$$\Phi(x,t) = |t|^{p(x)}\Psi(x,|t|)\psi^k_{p(x)}(t)\ (k \in \mathbb{Z}^+).$$

We assume that Ψ is a function of logarithmic type such that Φ is convex. More specifically:

($\Psi1$) there exists $c_1 > 0$ such that $\Psi(x,t^2) \leqslant c_1\Psi(x,t)$ for $x \in \Omega$ and $t \geqslant 1$;
($\Psi2$) there exists $c_2 > 0$ such that $\Psi(x,t) \leqslant c_2\Psi(y,t)$ when $x \in \Omega$, $y \in B(x,r) \cap \Omega$ and $t \in [1, r^{-n}]$;

(Ψ3) $\inf_x \Psi(x,0) > 0$ and $\sup_x \Psi(x,t) < \infty$ for every $t \geqslant 0$; and
(Ψ4) $t \mapsto \Psi(x,t)$ is increasing on $[0,\infty)$.

Let $\alpha \in C(\Omega)$. We say that α is log-Hölder continuous if there exists $c_{\log} > 0$ so that

$$|\alpha(x) - \alpha(y)| \leqslant \frac{c_{\log}}{\log(e + 1/|x-y|)}$$

for all $x, y \in \Omega$.

Theorem 1. *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded open domain, let $p\colon \Omega \to \mathbb{R}$ be* log-*Hölder continuous with $1 \leqslant p^- \leqslant p^+ < \infty$, and suppose that Ψ satisfies conditions* (Ψ1)–(Ψ4). *Then*

$$\|M^k f\|_{L^{p(\cdot)}\Psi(\cdot,L)(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L^{p(\cdot)}\Psi(\cdot,L)\psi^k_{p(\cdot)}(L)(\Omega)}.$$

Theorem 2. *Let $B \subset \mathbb{R}^n$ be a ball, and let $p\colon B \to \mathbb{R}$ be* log-*Hölder continuous with $1 \leqslant p^- \leqslant p^+ < \infty$. Then*

$$M^k f \in L^{p(\cdot)}(B) \quad \text{if and only if} \quad f \in L^{p(\cdot)}\psi^k_{p(\cdot)}(L)(B).$$

References

[1] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza and C. J. Neugebauer: The maximal function on variable L^p spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **28** (2003), 223–238; **29** (2004), 247–249.

[2] L. Diening: Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$, *Math. Inequal. Appl.* **7** (2004), no. 2, 245–254.

[3] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, Y. Mizuta and T. Shimomura: Maximal functions in variable exponent spaces: limiting cases of the exponent, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **34** (2009), 503-522.

[4] P. Harjulehto, P. Hästö, Y. Mizuta and T. Shimomura, Iterated maximal functions in variable exponent Lebesgue spaces, to appear in *Manuscripta Math.*

[5] Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura: Sobolev's inequalities and vanishing integrability for Riesz potentials of functions in the generalized Lebesgue space $L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}$, *J. Math. Anal. Appl.* **345** (2008), no. 1, 70–85.

[6] A. Nekvinda: Hardy-Littlewood maximal operator on $L^{p(x)}(\mathbb{R})$, *Math. Inequal. Appl.* **7** (2004), no. 2, 255–265.

[7] L. Pick and M. Růžička: An example of a space $L^{p(x)}$ on which the Hardy-Littlewood maximal operator is not bounded, *Expo. Math.* **19** (2001), 369–371.

[8] E. M. Stein: *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.

超越整函数のFatou集合，Julia集合の位相的性質について

木坂　正史　(京都大学大学院 人間・環境学研究科)*

概　　要

本講演では超越整函数のFatou集合，Julia集合の位相的性質について概説する．具体的には

・Julia集合の連結性
・Julia集合の局所連結性
・Fatou成分の連結度
・Julia成分の位相的性質

について今までに知られている結果と今後の課題，またこれらの研究に関連して出てくる未解決問題のいくつかについて解説する．

1. 準備

f を超越整函数，即ち，複素平面 $\mathbb{C}$ 全体で正則で多項式ではないものとし，f^n で f の n 回合成を表すものとする．複素力学系の研究で最も基本的な不変集合である **Fatou集合 $F(f)$**，**Julia 集合 $J(f)$** は次で定義される：

$$\begin{aligned} F(f) &:= \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ のある近傍 } U \text{ が存在し}, \{f^n|_U\}_{n=1}^{\infty} \text{ が正規族となる}\}, \\ J(f) &:= \mathbb{C} \setminus F(f). \end{aligned}$$

ただし $\{f^n|_U\}$ が正規族であるとは $\{f^n|_U\}$ の任意の部分列が広義一様収束部分列を含むことをいう．定義により $F(f)$ は開集合，また $J(f)$ は閉集合である．f が多項式（また一般に有理函数）の場合，$J(f)$ は $\mathbb{C}$ (また一般に Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) のコンパクト集合となるが，$f$ が超越整函数の場合は $J(f)$ は $\mathbb{C}$ のコンパクトでない閉集合，よって特に非有界集合となる．$J(f)$ に無限遠点 ∞ を付け加えて $\widehat{\mathbb{C}}$ の部分集合と考えることも可能ではある．この定義は超越有理型函数の場合に採用されている ([**Ber**]) し，またJulia集合の収束の問題を考える場合に採用されることもある（[**Ki1**]，[**Kr**]，[**KrK**] などを参照）．このように定義すると $J(f)$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ のコンパクト集合となり，$J(f)$ は扱いやすくなる（§2.1 参照）．しかし超越整函数 f の力学系としての自然な相空間は複素平面 $\mathbb{C}$ であり Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ ではない．なぜなら ∞ は f の真性特異点であるから f を $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の力学系として自然に拡張することはできないからである．

次の結果は基本的である．

命題 1.1. (1)　$F(f)$ と $J(f)$ は**完全不変 (completely invariant)**，即ち

$$f(F(f)) \subseteq F(f),\ f^{-1}(F(f)) \subseteq F(f), \quad f(J(f)) \subseteq J(f),\ f^{-1}(J(f)) \subseteq J(f)$$

2010 Mathematics Subject Classification: 37F10, 30D05
キーワード：超越整函数, Fatou集合，Julia集合，Fatou成分，Julia成分
* 〒606-8501 京都市左京区吉田二本松町 京都大学大学院 人間・環境学研究科 数理科学講座
e-mail: kisaka@math.h.kyoto-u.ac.jp

を満たす.
(2) $F(f^n) = F(f), \quad J(f^n) = J(f)$.

注意 1.2. Picard の除外値を持つような f（例えば e^z）に対しては (1) で真の包含関係となることがあるが，その差は 1 点である．また Picard の除外値を持たない場合は常に等号が成立する.

定義 1.3. (1) $F(f)$ の連結成分 U を f の **Fatou 成分 (Fatou component)** という.
(2) Fatou 成分 U が任意の $m, n \in \mathbb{N}$, $(m \neq n)$ に対して $f^m(U) \cap f^n(U) = \emptyset$ を満たすとき，**遊走領域 (wandering domain)** という.
(3) $f^{n_0}(U) \subseteq U$ を満たす $n_0 \in \mathbb{N}$ があるとき，U を周期 n_0 の**周期成分 (periodic component)** という（ただし n_0 は $f^n(U) \subseteq U$ なる n のうち最小のもの）.
(4) $f^m(U)$ $(m \in \mathbb{N})$ が周期成分であるとき，U を**前周期成分 (preperiodic component)** という．また周期成分と前周期成分を総称して**終局周期成分 (eventually periodic component)** という.

f が多項式（または一般に有理函数）のときには遊走領域は存在しない（Sullivan の No Wandering Domain Theorem [**Su**, p.404, Theorem 1]）が，超越整函数のときには遊走領域をもつ場合が多々知られている（[**Ba1**]，[**Ba3**]，[**Ba5**]，[**Ba6**]，[**BD2**]，[**Ber**]，[**Do**]，[**EL1**]，[**EL2**]，[**KS**] 等参照）．周期成分については次が成立する（例えば [**Ber**] 参照）:

定理 1.4 (周期成分の分類定理). 超越整函数 f の Fatou 集合の周期成分 U は次の 4 つに分類される（ただし n_0 を U の周期とする）:

1. $z_0 \in U$ で $f^{n_0}(z_0) = z_0$，$|(f^{n_0})'(z_0)| < 1$ を満たすものが存在し，任意の $z \in U$ は $f^{n_0 k}(z) \to z_0$, $(k \to \infty)$ を満たす．点 z_0 を **吸引周期点 (attracting periodic point)** といい，U を**吸引域 (attractive basin)** という.

2. $z_0 \in \partial U$ で $f^{n_0}(z_0) = z_0$ (**注**：$n_1 | n_0$ なる n_1 で $f^{n_1}(z_0) = z_0$ となる可能性あり)，$(f^{n_0})'(z_0) = 1$ を満たすものが存在し，任意の $z \in U$ は $f^{n_0 k}(z) \to z_0$, $(k \to \infty)$ を満たす．点 z_0 を**放物型周期点 (parabolic periodic point)** といい，U を**放物型吸引域 (parabolic basin)** という.

3. $z_0 \in U$ で $f^{n_0}(z_0) = z_0$，$(f^{n_0})'(z_0) = e^{2\pi i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ を満たすものが存在し，$f^{n_0}|U$ は単位円板 $\mathbb{D}$ 上の無理数回転写像 $z \mapsto e^{2\pi i\theta}z$ に解析的共役となる．z_0 を**無理的中立周期点 (irrationally indifferent periodic point)** といい，U を **Siegel 円板 (Siegel disk)** という.

4. 任意の $z \in U$ は $f^{n_0 k}(z) \to \infty$, $(k \to \infty)$ を満たす．U を **Baker 領域 (Baker domain)** という.

注意 1.5. 超越整函数の場合には Herman 環は存在しない．これは多項式の場合と同様で，最大値原理を用いて示すことができる.

定義 1.6. $f'(c)=0$ なる点，即ち**臨界点 (critical point)** c の像 $f(c)$ を**臨界値 (critical value)** という．またある曲線 $L(t)$ $(0 \le t < 1)$ で

$$\lim_{t\to 1} L(t)=\infty, \quad \lim_{t\to 1} f(L(t))=p.$$

を満たすものが存在するとき，p を**漸近値 (asymptotic value)** という．臨界値と漸近値およびそれらの集積点を**特異値 (singular value)** といい，特異値全体の集合を **sing($\boldsymbol{f^{-1}}$)** で表す．これは f^{-1} のある分枝が近傍でうまく定義できないような点全体である．また

$$P(f) := \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\operatorname{sing}(f^{-1}))}.$$

を f の **post-singular set** という．

2. Julia集合の連結性

2.1. $\boldsymbol{J(f)\cup\{\infty\}\subset\widehat{\mathbb{C}}}$ の連結性

$J(f)\subset\mathbb{C}$ の連結性を議論する前に $J(f)\cup\{\infty\}\subset\widehat{\mathbb{C}}$ の連結性について述べる．$J(f)\cup\{\infty\}$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ のコンパクト集合になるので次の一般原理が使える ([**Bea**, p.81, Proposition 5.1.5])．

命題 2.1. $K\subset\widehat{\mathbb{C}}$ をコンパクト集合とする．次は同値である：
 (i) K は連結． (ii) K の補集合 K^c の各成分は単連結．

これを $K=J(f)\cup\{\infty\}$ として適用する．それには $K^c=F(f)$ の各成分，即ち各Fatou成分が単連結であるかどうかを見る必要がある．ここで，

定義 2.2. 領域 $U\subset\mathbb{C}$ の**連結度 (connectivity) conn($\boldsymbol{U}$)** を

$$\operatorname{conn}(U) := \widehat{\mathbb{C}}\setminus U \text{ の連結成分の個数}$$

と定義する（$\operatorname{conn}(U)=\infty$ もあり得る）．

Fatou成分の連結度については次が知られている ([**Ber**, p.165, Theorem 9] 参照)．

命題 2.3. $F(f)$ の終局周期成分は単連結である．

よって多重連結なFatou成分は必然的に遊走領域になるが，これは次の結果から常に有界になる（[**Ba2**]）．

定理 2.4 (Baker, 1975). 非有界なFatou成分は単連結である．

以上のことなどから次が示される（[**Ki3**, p.191, Theorem 1]）．

定理 2.5 (K, 1998). 次は同値である：
 (1) $J(f)\cup\{\infty\}\subset\widehat{\mathbb{C}}$ は連結である． (2) f は多重連結な遊走領域を持たない．

よって多重連結な遊走領域を持たないような状況下では$J(f) \cup \{\infty\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ は連結である．そのための十分条件をいくつか挙げる：

系 2.6 (K, 1998). 以下のいずれかの条件下で $J(f) \cup \{\infty\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ は連結である：
(1) $f \in B := \{f \mid \mathrm{sing}(f^{-1})$ は有界集合$\}$.
(2) f は非有界なFatou成分をもつ.
(3) 曲線 $L(t)$ $(0 \leq t < 1)$ で $\lim_{t \to 1} L(t) = \infty$ を満たし，$f|L$ が有界となるものが存在する．特にこの条件は f が有限な漸近値を持つときには満たされる.

2.2. $J(f) \subset \mathbb{C}$ の連結性

次に $J(f) \subset \mathbb{C}$ の連結性について考察する．fが多項式のときには次の有名な原理がある（[**Bea**, p.202, Theorem 9.5.1]）.

命題 2.7. f が多項式のとき，次は同値である.
(i) $J(f)$ は連結.　(ii) ∞ 以外の f の任意の臨界点の軌道は有界.

ところが f が超越整函数のときは次の例が示すように，この原理は成り立たない.

例 2.8. (1) （[**DG**]) 指数函数 $E_\lambda(z) := \lambda e^z$ が吸引不動点 p_λ を持つとき（例えば $0 < \lambda < 1/e$），p_λ の吸引域U_λ は非有界で完全不変になり $F(E_\lambda)$ と一致する．このとき $J(E_\lambda)$ は非連結である．更に詳しく，$\varphi : \mathbb{D} \to U_\lambda$ をU_λ のRiemann写像とし，

$$\Theta_\infty := \{e^{i\theta} \mid \varphi(e^{i\theta}) := \lim_{r \nearrow 1} \varphi(re^{i\theta}) = \infty\} \subset \partial\mathbb{D}$$

と置くと Θ_∞ は $\partial\mathbb{D}$ で稠密である.
(2) 指数函数 $E_\lambda(z) := \lambda e^z$ の唯一の特異値 0 が $E_\lambda^n(0) \to \infty$ $(n \to \infty)$ を満たすとき（例えば $\lambda > 1/e$），$J(E_\lambda) = \mathbb{C}$ となり，特に $J(E_\lambda)$ は連結である（[**De**, p.295] 参照）.

よって全く別の方法を考える必要がある．そこでfが非有界なFatou成分を持つかどうかで場合分けして考える.

(I) fが非有界なFatou成分を持たない場合

次が成り立つ（[**Ki3**, p.192, Theorem 2]）:

定理 2.9 (K, 1998). すべてのFatou成分が有界かつ単連結であれば $J(f)$ は連結である.

次は定理2.5と定理2.9から直ちに従う（[**Ki3**, p.192, Corollary 2]）.

系 2.10 (K, 1998). fのFatou成分はすべて有界であるとする．このとき $J(f) \subset \mathbb{C}$ が連結であることと$J(f) \cup \{\infty\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ が連結であることは同値である.

注意 2.11. f のFatou成分がすべて有界になるための条件が以下のようにいろいろと知られている：

(i) ([**Ba4**, Theorem 2]) $1 < {}^{\exists}p < 3,\ \log M(r) = O((\log r)^p)\ (r \to \infty)$，ただし

$$M(r) := \sup_{|z|=r} |f(z)|.$$

(ii) ([**St**, Theorem B]) ${}^{\exists}\varepsilon \in (0,1),\ \log\log M(r) < \dfrac{(\log r)^{\frac{1}{2}}}{(\log\log r)^{\varepsilon}}$ $(r:$ 十分大$)$.

(iii) ([**St**, Theorem C]) f の位数 $\rho(f) \leq 1/2$ で $\dfrac{\log M(2r)}{\log M(r)} \to {}^{\exists}c,\ (r \to \infty)$，ただし

$$\rho(f) := \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r}.$$

条件 (ii) は条件 (i) を弱めたものになっている．これらの条件がどこまで緩められるかは大問題であり，次のように予想されている（[**Ba4**]）.

予想 A (Baker)： $\rho(f) < 1/2$，または $\rho(f) = 1/2$ で minimal type (即ち，$\limsup\limits_{r\to\infty} \dfrac{\log M(r)}{r^{\rho(f)}} = 0$）なら f の Fatou 成分はすべて有界である．

この予想に関しては数多くの研究があるが今のところ未解決である．歴史的経緯を含めて [**H**] に詳しい解説があるので参照せよ.

(II) f が非有界な Fatou 成分 U を持つ場合

このとき定理 2.4 より U は単連結なので Riemann 写像 $\varphi : \mathbb{D} \to U$ が考えられる．そこで

$$\Theta_\infty := \{e^{i\theta} \mid {}^{\exists}\lim_{r\nearrow 1} \varphi(re^{i\theta}) =: \varphi(e^{i\theta}) = \infty\} \subset \partial\mathbb{D}$$

と置く．もし $\sharp\Theta_\infty \geq 2$ とすると

$$\varphi\Big(\{re^{i\theta_1} \mid 0 \leq r < 1\} \cup \{re^{i\theta_2} \mid 0 \leq r < 1\}\Big) \subset U, \quad (\theta_1, \theta_2 \in \Theta_\infty,\ \theta_1 \neq \theta_2)$$

は φ が等角なので $F(f)$ 内の Jordan 曲線となり，$J(f)$ を $\mathbb{C}$ 内の 2 つの相対的な開集合に分ける．よって $J(f)$ は非連結となる．以下の結果（[**Ki3**, Main Theorem]）は Θ_∞ に対するものであり，その系として特に $J(f)$ の非連結性が従う.

定理 2.12 (K, 1998). f を超越整函数，U を非有界な周期的 Fatou 成分でその周期を n_0 とする．次の条件を考える：

(A) $\infty \in \partial U$ は U から到達可能 (accessible)，即ち，ある連続曲線 $\gamma(t)$ $(0 \leq t < 1) \subset U$ で $\lim\limits_{t\to 1} \gamma(t) = \infty$ となるものが存在.

(B) ある点 $q \in \partial U$ で $q \notin P(f^{n_0})$ を満たすものと，曲線 $C(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ で $C(t) \subset U$ $(0 \leq t < 1)$，$C(1) = q$ を満たし，ある $m_0 \in \mathbb{N}$ に対し $f^{m_0}(C) \supset C$ となるものが存在する.

そこで次のいずれかを仮定する：

(1) U は吸引域で (A)，(B) を満たす.

(2) U は放物型吸引域で (A)，(B) を満たす.

(3) U はSiegel円板で (A) を満たす.

(4) U はBaker領域で (B) を満たし，$f^{n_0}|U$ は単葉ではない.

このとき，(1)，(2)，(3) の場合は Θ_∞ は $\partial\mathbb{D}$ で稠密である．(4) の場合は Θ_∞ は $\partial\mathbb{D}$ で稠密か，または $\overline{\Theta_\infty}$ は $\partial\mathbb{D}$ のある完全集合を含む.

特に いずれの場合も $J(f)$ は非連結である.

一方，f が非有界なFatou成分を持ち，しかも $J(f) \subset \mathbb{C}$ が連結になることもある（[**Ki3**, p.194, Theorem 4]）.

例 2.13 (K, 1998). $f(z) = 2 - \log 2 + 2z - e^z$ は不変なBaker領域 U で $f|U$ が単葉になるものを持ち，$J(f)$ は連結である.

その後，定理2.12は次のように改良された（[**BD1**, p.439, Theorem 1.1, Theorem 1.2, Corollary 1.3]）.

定理 2.14 (Baker-Domínguez, 1999). 定理2.12は条件(B)なしで成り立つ.

注意 2.15. (1) 条件(A)を満たさない非有界な周期的Fatou成分の例は知られていない．またBaker領域は常に (A) を満たすことが知られている（[**Ba7**, Theorem 2]）．そこで，

予想 B： 非有界な周期的Fatou成分 U について，∞ は U 内から到達可能である．特に定理2.12は条件(A), (B) なしで成立する.

(2) この結果ではBaker領域のときだけは他の場合に比べて少し緩い結論しか得られていない．Baker領域の Θ_∞ については $\partial\mathbb{D}$ で稠密になるような例は知られている（例えば $f(z) = z + 1 + e^{-z}$ ([**BD1**, §7])）が，稠密にならないような例は知られていない．そこで，

予想 C： Baker領域U で $f^{n_0}|U$ が単葉ではないものに対し，Θ_∞ は $\partial\mathbb{D}$ で稠密である.

3. $J(f)$ の局所連結性

この節では$J(f)$の局所連結性について考察する．fが多項式（または一般に有理函数）のときは例えば次の有名な結果がある.

命題 3.1. f を多項式（または一般に有理函数）とし，$J(f)$ は連結であるとする．もし f が双曲型（hyperbolic）であれば $J(f)$ は局所連結である.

ところが f が超越整函数のときは一般にはこのことは期待できない．特に f が非有界な周期的Fatou成分を持つ場合には次が成り立つ（[**Ki2**, p.115, Theorem B]）.

定理 3.2 (K, 1997). f が非有界な周期的Fatou成分Uを持つとし，Uは次のいずれかであると仮定する：

(1) 吸引域，　(2) 放物型吸引域，　(3) Siegel円板，

(4) Baker領域で $f^{n_0}|U$ が d 対 1 $(1 \leq d < \infty)$ となるもの（n_0 は U の周期）.
このとき $J(f) \cup \{\infty\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ は局所連結でない．また$J(f) \subset \mathbb{C}$ も局所連結でない.

証明には主に次の２つを用いる.

定理 3.3 ([W]). コンパクト集合 $K \subset \widehat{\mathbb{C}}$ が局所連結であることと

(i) K^c $(= K$ の補集合) の各連結成分の境界が局所連結,

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して K^c の連結成分で直径が ε より大きいものは有限個,

の２条件が満たされることとは同値である。

定理 3.4 (K, 1997 [Ki2]). f が非有界な周期的Fatou成分Uを持つとし，Uは次のいずれかであると仮定する：

(1) 吸引域，　(2) 放物型吸引域，　(3) Siegel円板，

(4) Baker領域で $f^{n_0}|U$ が d 対 1 $(2 \leq d < \infty)$ となるもの（n_0 は U の周期）.
このとき $\partial U \cup \{\infty\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ は局所連結でない．また$\partial U \subset \mathbb{C}$ も局所連結でない.

その後，定理3.2はBakerとDomínguezによって次の更に強い結果に拡張された（[**BD2**, p.374, Theorem E]）.

定理 3.5 (Baker-Domínguez, 2000). f が非有界な周期的Fatou成分Uを持つとし，Uは次のいずれかであると仮定する：

(1) 吸引域，　(2) 放物型吸引域，　(3) Siegel円板，

(4) Baker領域で $f^{n_0}|U$ は単葉ではない（n_0 は U の周期）.
このとき $J(f) \subset \mathbb{C}$ は**任意の点で**局所連結でない.

以上をまとめると次のようになる：

定理 3.6. fが非有界な周期的Fatou成分Uを持つとき $J(f) \subset \mathbb{C}$ は局所連結でない.

一方，f が非有界なFatou成分を持たない場合には$J(f) \subset \mathbb{C}$ が局所連結となることもある（[**M**, p.272, Theorem 7]）.

定理 3.7 (Morosawa, 1999). $g_a(z) := ae^a\{z-(1-a)\}e^z$ $(a > 1)$ とすると $J(g_a)$ は局所連結であり，更にSierpinski carpetである.

[**M**] では$J(f) \subset \mathbb{C}$ が局所連結となるための十分条件が挙げられているが（[**M**, p.268, Theorem 2]，詳細は略），これはfが多項式（または一般に有理函数）のときの結果（命題3.1）の類似である.

4. Fatou成分の連結度

§2 で述べたとおり，多重連結な Fatou 成分は有界な遊走領域であることがわかるが，そのようなものの最初の例はBakerによって与えられた（以下の 2 つの結果（[**Ba1**, p.206 Statement (A), p.210 Theorem 1]，[**Ba3**, p.174, Theorem]）による）.

定理 4.1 (Baker, 1963 [Ba1]). 超越整函数 $g(z)$ で多重連結なFatou成分 U（即ち，$\mathrm{conn}(U) \geq 2$ を満たす）を持つものが存在する．具体的には

$$g(z) = Cz^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{r_n}\right)$$

がそうである．ただし $C > 0,\ r_1 > 1$ は

$$C \exp\left(\frac{2}{r_1}\right) < 1, \quad Cr_1 > 1$$

を満たす定数であり，r_n は漸化式

$$r_{n+1} = Cr_n^2\left(1 + \frac{r_n}{r_1}\right)\left(1 + \frac{r_n}{r_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{r_n}{r_n}\right), \quad n = 1, 2, \cdots$$

で定義される.

定理 4.2 (Baker, 1976 [Ba3]). 定理4.1の多重連結なFatou成分 U は遊走領域である.

この例の遊走領域の連結度は明らかではなかったが，その後Bakerは同様の手法を用いて無限連結（即ち $\mathrm{conn}(U) = \infty$）な遊走領域を構成した（[**Ba6**, p.164, Theorem 2]）.

定理 4.3 (Baker, 1985 [Ba6]). 超越整函数 $g(z)$ で無限連結な遊走領域 U（即ち，$\mathrm{conn}(U) = \infty$ を満たす）を持つものが存在する．具体的には

$$g(z) = C^2 \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{r_j}\right)^2$$

がそうである．ただし $C > 0,\ r_1 > 1$ は

$$0 < C < \frac{1}{4e^2}, \quad 2^{n_0 - 1}C > 2r_1,\ (n_0\text{はある自然数})$$

を満たす定数であり，r_n は $1 \leq n \leq n_0$ に対して

$$r_{n+1} > 2r_n\ (n < n_0)$$

を満たすように定義し，$n > n_0$ に対しては漸化式

$$r_{n+1} = C^2\left(1 + \frac{r_n}{r_1}\right)^2\left(1 + \frac{r_n}{r_2}\right)^2\cdots\left(1 + \frac{r_n}{r_n}\right)^2, \quad n = n_0, n_0 + 1, \cdots$$

で定義される.

この時点では次の問題が未解決であった：

問題 4.4 (Bergweiler, [Ber, Question 7]). 有限な連結度をもつ遊走領域は存在するか？詳しくは，$p \in \mathbb{N}$ に対し，$\mathrm{conn}(U) = p$ となる遊走領域は存在するか？

まず一般に U を遊走領域としたとき，$\mathrm{conn}(f^n(U))$ について次が成立する（[**KS**, p.219, Theorem A]）．

定理 4.5 (K-Shishikura, 2008). 超越整函数 f が遊走領域 U を持つとき，連結度 $\mathrm{conn}(f^n(U))$ は十分大きな n に対しては一定値であり，それは $1, 2$ または ∞ である（これを U の**終局連結度 (eventual connectivity)** という）．終局連結度が 1 のときは $\mathrm{conn}(U) = 1$ である．また終局連結度が 2 のときは十分大きな任意の n に対して $f : f^n(D) \to f^{n+1}(D)$ 円環領域間の被覆写像である．

問題 4.4 に対する答えは次で与えられる（[**KS**, p.219〜220, Theorem B, Theorem C]）．

定理 4.6 (K-Shishikura, 2008). (1) 超越整函数 f で遊走領域 U を持ち，$f^n(U)$ が任意の $n \geq 0$ に対し 2 重連結になるものが存在する．
(2) 任意の $p \in \mathbb{N}$ に対し超越整函数 f で遊走領域 U を持ち，$\mathrm{conn}(U) = p$, $\mathrm{conn}(f^n(U)) = 2$ ($^\forall n \geq 1$) を満たすものが存在する

証明は Baker のように無限積表示で例を与えるのではなく，擬等角手術（quasi-conformal surgery）の方法による．よって f の具体的な表示はない．

最近，Bergweiler と Zheng が定理 4.1 の遊走領域が無限連結であることを示したと発表している（[**BerZ**, p.3, Theorem 1.2 後のコメント]).

5. Julia 成分の位相的性質

§2 の定理 2.9 より，$J(f)$ が非連結なら f は非有界な Fatou 成分かまたは多重連結な Fatou 成分を持つことがわかる．この節では後者の場合に $J(f)$ の連結成分について考察する．

定義 5.1. (1) Julia 集合の連結成分を **Julia 成分 (Julia component)** という．
(2) $z \in J(f)$ が任意の Fatou 成分 U に対して $z \notin \partial U$ を満たすとき，z を**埋蔵点 (buried point)** という．
(3)

$$J_0(f) := \{z \in J(f) \mid z\,\text{は埋蔵点}\}$$

を**剰余 Julia 集合 (residual Julia set)** という．
(4) Julia 成分 C が $C \subset J_0(f)$ を満たすとき，C を**埋蔵成分 (buried component)** という．

f が多重連結な遊走領域を持つときには，すべての Julia 成分が有界になることがわかる．一般に C を Julia 成分とすると $f(C)$ も Julia 成分になり，その軌道 $\{f^n(C)\}_{n=0}^{\infty}$ が考えられるが，これが有界であるときには C の位相的性質について次が示せる（[**Ki6**]．部分的な結果については [**Ki4**], [**Ki5**] を参照）．

定理 5.2 (K). f を超越整函数で多重連結な遊走領域をもつものとし，C をJulia成分で有界な軌道を持つものとする．このとき

(1) ある多項式 g が存在し，C は $J(g)$ のあるJulia成分に擬等角写像により同相になる．

(2) C が full (即ち，補集合 $C^c = \mathbb{C} \setminus C$ が連結) ならば，C は埋蔵成分である．

(3) C が遊走Julia成分 (即ち，$f^m(C) \cap f^n(C) = \emptyset$, ${}^\forall m \neq n$) ならばC は1点埋蔵成分 (buried singleton component) である．

(4) 反発周期点 p に対し，pを含むJulia成分を$C(p)$で表すことにする．$C(p)$ が fullなら$C(p)$ は埋蔵成分である．$C(p)$ が fullでなければ，補集合 $C(p)^c$ の成分はある吸引域，放物型吸引域，またはSiegel円板とその逆像たちから成る．p はある吸引域，放物型吸引域，またはSiegel円板の境界に無い限り，埋蔵点である．

最近Osborneは定理5.2の証明で用いられる方法により，f のfast escaping set

$$A(f) := \{z \in \mathbb{C} \mid {}^\exists L \in \mathbb{N},\ {}^\forall n \in \mathbb{N},\ |f^{n+L}(z)| \geq M^n(R,f)\}$$

がspider's webになる場合に，その補集合の連結成分について定理5.2と同様の結果を得ている（詳細は略．[**O**]参照）．

注意 5.3. (1) いつ $J_0(f) \neq \emptyset$ となるか，即ち，いつ埋蔵点が存在するかについては完全には明らかになっていない．fが有理函数のときには次の予想が有名である：

予想 D (Makienko)： fが有理函数のとき，$J_0(f) \neq \emptyset$ となるのは$F(f)$に完全不変成分が存在しないとき，かつそのときに限る．

fが超越整函数のときには f のクラスを制限すれば同様の予想が考えられるが，一般のfについては定かではない．そこで，

問題 E ： fが超越整函数のとき，$J_0(f) \neq \emptyset$ となるための必要十分条件を与えよ．

この問題については[**DF**]に詳しい解説があるので参照せよ

(2) Julia成分 C の軌道が非有界のときの結果は皆無のようである．そこで，

問題 F ： 非有界な軌道を持つJulia成分の位相的性質について調べよ．

(3) この節で扱わなかった場合，即ち，$J(f)$ が非連結で f が非有界なFatou成分を持つ場合にもJulia成分に関する結果はいくつかある（[**DF**]）．しかしそれらは具体的なfに対するものであり，一般的にはほとんど何も分かっていないと思われる．そこで，

問題 G ： $J(f)$ が非連結で f が非有界なFatou成分を持つ場合について，Julia成分の位相的性質を調べよ．

参考文献

[**Ba1**] I. N. Baker, Multiply connected domains of normality in iteration theory, *Math. Zeitschr.* **81** (1963), 206–214.

[**Ba2**] I. N. Baker, The domains of normality of an entire function, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. ,* **1,** (1975), no.2, 277–283.

[**Ba3**] I. N. Baker, An entire function which has wandering domains, *J. Austral. Math. Soc. (Series A)* **22** (1976), 173–176.

[**Ba4**] I. N. Baker, The iteration of polynomials and transcendental entire functions, *J. Austral. Math. Soc. (Series A)* **30** (1981), 483–495.

[**Ba5**] I. N. Baker, Wandering domains in the iteration of entire functions, *Proc. London Math. Soc. (3),* **49** (1984), 563–576.

[**Ba6**] I. N. Baker, Some entire functions with multiply-connected wandering domains, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **5** (1985), 163–169.

[**Ba7**] I. N. Baker, Infinite limits in the iteration of entire functions, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **8** (1988), 503–507.

[**BD1**] I. N. Baker and P. Domínguez, Boundaries of unbounded Fatou components of entire functions, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **24** (1999), no. 2, 437–464.

[**BD2**] I. N. Baker and P. Domínguez, Some connectedness properties of Julia sets, *Complex Variables Theory Appl.* **41** (2000), no. 4, 371–389.

[**Bea**] A. F. Beardon, *Iteration of Rational Functions*, Springer-Verlag, New York, Berlin and Heidelberg, 1991.

[**Ber**] W. Bergweiler, Iteration of meromorphic functions, *Bull. AMS* **29** No.2 (1993), 151–188.

[**BerZ**] W. Bergweiler and J. H. Zheng, On the uniform perfectness of the boundary of multiply connected wandering domains, *preprint*, arXiv:1011.5318v1.

[**De**] R. L. Devaney, e^z : Dynamics and bifurcations, *Internat. J. Bif. & Chaos* **1,** No.2 (1991), 287–308.

[**DG**] R. L. Devaney and L. R. Goldberg, Uniformization of attracting basins for exponential maps, *Duke. Math. J.* **55** No.2 (1987), 253–266.

[**Do**] P. Domínguez, Connectedness properties of Julia sets of transcendental entire functions,*Complex Variables Theory Appl.* **32** (1997), no. 3, 199–215.

[**DF**] P. Domínguez and N. Fagella, Residual Julia sets of rational and transcendental functions, *Transcendental dynamics and complex analysis*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **348**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (2008), 138–164.

[**EL1**] A. E. Eremenko and M. Yu. Lyubich, Examples of entire functions with pathological dynamics, *J. London Math. Soc. (2)* **36** (1987), 458–468.

[**EL2**] A. E. Eremenko and M. Yu. Lyubich, The dynamics of analytic transformations, *Leningrad Math. J.* **1** No.3 (1990), 563–634.

[**H**] A. Hinkkanen, Entire functions with bounded Fatou components,*Transcendental dynamics and complex analysis*, London Math. Soc. Lecture Note Ser.**348**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (2008), 187–216.

[**Ki1**] M. Kisaka, Local uniform convergence and convergence of Julia sets, *Nonlinearity* **8** (1995), 273–281.

[**Ki2**] M. Kisaka, On the local connectivity of the boundary of unbounded periodic

Fatou components of transcendental functions, *Complex dynamical systems and related areas (Kyoto, 1996). Su-rikaisekikenkyu-sho Ko-kyu-roku* **988** (1997), 113–119.

[**Ki3**] M. Kisaka, On the connectivity of Julia sets of transcendental entire functions, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **18** (1998), no. 1, 189–205.

[**Ki4**] M. Kisaka, Some properties of Julia sets of transcendental entire functions with multiply-connected wandering domains, *Complex Dynamics and its Related Topics, RIMS Koukyuuroku,* **1586** (2008), 26-31.

[**Ki5**] M. Kisaka, On disconnected Julia sets of semihyperbolic transcendental entire functions, *Proceedings of the 16th International Congerence of Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications*, Edited by Junesang Choi et al., Baeyang Printing, Gyeongju, (2009), 148-153.

[**Ki6**] M. Kisaka, Julia components of transcendental entire functions with multiply-connected wandering domains, *preprint.*

[**KS**] M. Kisaka and M. Shishikura, On multiply connected wandering domains of entire functions,*Transcendental dynamics and complex analysis*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **348**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (2008), 217–250.

[**Kr**] B. Krauskopf, Convergence of Julia sets in the approximation of λe^z by $\lambda\left(1+\frac{z}{d}\right)^d$, *Internat. J. Bif. & Chaos* **3** (1993), 257–270.

[**KrK**] B. Krauskopf and H. Kriete, Hausdorff convergence of Julia sets, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **6** (1999), no. 1, 69–76.

[**M**] S. Morosawa, Local connectedness of Julia sets for transcendental entire functions, *Nonlinear analysis and convex analysis (Niigata, 1998)*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, (1999), 266–273.

[**O**] J. W. Osborne, The structure of spider's web fast escaping set, *preprint*, arXiv:1011.0359v1.

[**St**] G. M. Stallard, The iteration of entire functions of small growth, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **114** (1993), 43–55.

[**Su**] D. Sullivan, Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains, *Ann. of Math. (2)* **122** (1985), no. 3, 401–418.

[**W**] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, AMS Colloquium Publications, **28,** 1942.

Hirzebruch 曲面と $\mathbb{C}^2$ のコンパクト化

石田明男・古島幹雄 *

Abstract

非特異コンパクト複素曲面 M および M における純余次元 1 の解析的部分集合 C で $M-C \cong \mathbb{C}^2$（双正則同型）なる組 (M, C) を $\mathbb{C}^2$ のコンパクト化と呼ぶ．そのとき，C の既約成分の数は M の第 2 ベッチ数 $\mathrm{b}_2(M)$ に等しい．また，各既約成分は nodes を持たぬ有理曲線である事が分かる．$\mathrm{b}_2(M)=1$ の時は，$M \cong \mathbb{P}^2$ かつ $C \cong \mathbb{P}^1$ は射影直線である．$\mathrm{b}_2(M)=2$ の時は

(1) $M \cong \mathbb{F}_m$（Hirzebruch 曲面）

(2) $C = C_1 \cup C_2$ かつ $\mathrm{Sing}\, C = C_1 \cap C_2 = \{p\}$（one point）

であることが知られている．$\mathrm{b}_2(M)=1$ の場合と違って，$\mathrm{b}_2(M)=2$ の場合は，C_1, C_2 が必ずしも非特異でない例が Brenton 氏によって与えられている．本講演では，この Brenton 氏の例の一般的な構成を通して，アフィン平面内の直線の線形化に関する Abhyankar-Moh-Suzuki の定理との関係について報告したい．

フェルマー３次曲面についての一注意

大嶋康裕　(崇城大学工学部)[*1]
古島幹雄 *　(熊本大学理学部)[*2]

Abstract

射影空間 $\mathbb{P}^3 := \mathbb{P}^3_{(\mathbb{C})}$ 内の３次曲面 S_3 の有理性については広く知られている．本講演では，特に，フェルマー３次曲面

$$S_{\mathcal{F}} := \left\{(w_0 : w_1 : w_2 : w_3) \in \mathbb{P}^3 \ : \ w_0^3 + w_1^3 + w_2^3 + w_3^3 = 0\right\}$$

について $\mathbb{P}^2$ から $S_{\mathcal{F}}$ への双有理写像を具体的に与える事によりその有理性を示す．実際，$\mathbb{P}^2$ の同次座標を $(z_0 : z_1 : z_2)$ とおくとき，双有理写像

$$\Phi := (f_0 : f_1 : f_2 : f_3) : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow S_{\mathcal{F}}(\hookrightarrow \mathbb{P}^3)$$

を

$$\begin{cases} f_0 = & \dfrac{2\rho+1}{3}\ z_0^2 z_1 - \dfrac{\rho+2}{3}\ z_1^2 z_2 - \dfrac{\rho-1}{3}\ z_0 z_2^2 \\ f_1 = & -\dfrac{2\rho+1}{3}\ z_0^2 z_2 + \dfrac{\rho+2}{3}\ z_1 z_2^2 + \dfrac{\rho-1}{3}\ z_0 z_1^2 \\ f_2 = & -\dfrac{\rho-1}{3}\ z_0^2 z_2 - \dfrac{\rho+2}{3}\ z_1 z_2^2 + \dfrac{2\rho+1}{3}\ z_0 z_1^2 \\ f_3 = & \dfrac{\rho-1}{3}\ z_0^2 z_1 + \dfrac{\rho+2}{3}\ z_1^2 z_2 - \dfrac{2\rho+1}{3}\ z_0 z_2^2 \end{cases}$$

で与えれば

$$f_0^3 + f_1^3 + f_2^3 + f_3^3 = 0$$

を得る．但し，$\rho = \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$.

[*1] 〒860-0082 熊本県熊本市池田 4-22-1 崇城大学 工学部 総合教育（数学教室）
[*2] 〒860-8555 熊本県熊本市黒髪 2-39-1 熊本大学 理学部 数学教室

トロイダル群と代数体について

阿部　幸隆
富山大学大学院理工学研究部（理学）

CM 体は虚数乗法をもつアーベル多様体の理論で扱われる．これを一般の代数体で考えて得られた結果を報告する（[1]）．

K を $n+m$ 次の代数体で $2m$ 個の複素埋め込み $\varphi_i, \overline{\varphi_i} : K \to \mathbb{C}$ $(i = 1, \ldots, m)$ と $n-m$ 個の実埋め込み $\psi_j : K \to \mathbb{R}$ $(j = 1, \ldots, n-m)$ をもつものとする．これらの埋め込みにより次の写像が定義される：

$$\Psi : K \longrightarrow \mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \subset \mathbb{C}^n, \quad a \longmapsto (a^{\varphi_1}, \ldots, a^{\varphi_m}, a^{\psi_1}, \ldots, a^{\psi_{n-m}})$$

$\mathfrak{o}_K$ を K の整数環とし，$\Gamma := \Psi(\mathfrak{o}_K)$ とおくと，Γ は $\mathbb{C}^n$ の階数 $n+m$ の離散部分群になる．そこで，$X = \mathbb{C}^n/\Gamma$ とおくと，X はトロイダル群になる（[2]）．

L を K のすべての共役体の合併体とし，K_0 を L にふくまれる最大の実代数体とする．アーベル多様体の定義におけるエルミート形式を一般化し，$\Gamma \times \Gamma$ 上 $\mathfrak{o}_{K_0}$-valued で $\mathbb{C}^m_\Gamma$ 上正であるエルミート形式が存在するとき，X は $\mathfrak{o}_{K_0}$-quasi-abelian variety であると言う．

Theorem 1 代数体 K から上のようにして定義された X は $\mathfrak{o}_{K_0}$-*quasi-abelian variety* である．

トロイダル群 X の自己準同型写像全体を $\mathrm{End}(X)$ とし，

$$\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X) := \mathrm{End}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

とおく．X が 0 と X 以外にトロイダル部分群をもたないとき，X は単純であると言う．X が単純であるならば，$\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ は $\mathbb{Q}$ 上の多元体になる．

$K, \varphi_i, \psi_j, K_0, \Psi$ を上の通りとしたとき，次が成り立つ．

Theorem 2 階数 $n+m$ である K の任意の $\mathbb{Z}$-加群 $\mathfrak{m}$ に対し，$X = \mathbb{C}^n/\Psi(\mathfrak{m})$ は $\mathfrak{o}_{K_0}$-*quasi-abelian variety* になる．また，$R := \{\mu \in K; \mu\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}\}$ は K の　階数 $n+m$ の環であり，　$\iota(\mu) := \mathrm{diag}[\mu^{\varphi_1}, \ldots, \mu^{\varphi_m}, \mu^{\psi_1}, \ldots, \mu^{\psi_{n-m}}]$ は $\mathrm{End}(X)$ の元である．さらに，X が単純であるとき，$\iota : R \longrightarrow \mathrm{End}(X)$ は同型 $\iota : K \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ に拡張される．($\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ がこのような ι により K と同型になるとき，X は $(K; \{\varphi_i, \psi_j\})$ 型であると言う．)

逆に $(K; \{\varphi_i, \psi_j\})$ 型の単純 $\mathfrak{o}_{K_0}$-*quasi-abelian variety* は上のようにして与えられる．

Theorem 3 X が $(K; \{\varphi_i, \psi_j\})$ 型の単純 $\mathfrak{o}_{K_0}$-*quasi-abelian variety* ならば，

$$\dim H^q(X, \mathcal{O}) < \infty \quad (q \geqq 1)$$

である．

参考文献

[1] Y. Abe, $\mathfrak{o}_{K_0}$-quasi-abelian varieties with complex multiplication, to appear in Forum Mathmaticum

[2] A. Andreotti e F. Gherardelli, “Seminario di Geometria”, Anno 1972-73, II, Pubbl. Centro di Analisi Globale, Firenze, 1973.

Holomorphic equivalence of toric hyperkähler manifolds with compact complex submanifolds

青砥 禎彦　　東工大理工

本講演では, コンパクトな複素部分多様体が埋め込まれたトーリック超ケーラー多様体上の複素構造の同値性について論ずる.

4 元数空間 $\mathbb{H}^N$ は自然な複素構造 $\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{J},\ \boldsymbol{K}$ に関してケーラーであり, 実トーラス T^N が右から作用する. T^N の部分トーラス K のリー環 $\mathfrak{k}$ の双対を $\mathfrak{k}^*$ とし, $\mathfrak{k}^*_{\mathbb{C}}$ を $\mathfrak{k}^*$ の複素化とする. K の作用の $\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{J},\ \boldsymbol{K}$ に関する運動量写像を $\mu_{\boldsymbol{I}},\ \mu_{\boldsymbol{J}},\ \mu_{\boldsymbol{K}} : \mathbb{H}^N \to \mathfrak{k}^*$ とし, 超ケーラー運動量写像を

$$\mu = (\mu_{\boldsymbol{I}}, \mu_{\mathbb{C}} = \mu_{\boldsymbol{J}} + \sqrt{-1}\mu_{\boldsymbol{K}}) : \mathbb{H}^N \to \mathfrak{k}^* \times \mathfrak{k}^*_{\mathbb{C}}$$

とする. $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{k}^* \times \mathfrak{k}^*_{\mathbb{C}}$ を μ の正則値とするとき $X(\alpha,\beta) = \mu^{-1}(\alpha,\beta)/K$ をトーリック超ケーラー多様体という. $X(\alpha,\beta)$ は非コンパクト実 $4n$ 次元で $T^n = T^N/K$ が自然に作用するが, 通常のトーリック多様体ではない.

各点 $p = (p_1, p_2, p_3) \in S^2$ に対し $\boldsymbol{I}_p = p_1\boldsymbol{I} + p_2\boldsymbol{J} + p_3\boldsymbol{K}$ とおく. $(X(\alpha,\beta), \boldsymbol{I}_p)$ がアフィン多様体の構造を持たないような $p \in S^2$ 全体の集合を $\mathcal{C}_{(\alpha,\beta)} \subset S^2$ とする. [1] において, $p,\ q \in \mathcal{C}_{(\alpha,\beta)}$ で $\boldsymbol{I}_p$ と $\boldsymbol{I}_q$ が双正則にならないものが存在する例をあたえた. 今回, トーリック超ケーラー多様体上に不変量を定義することで $\boldsymbol{I}_p$ と $\boldsymbol{I}_q (p,\ q \in \mathcal{C}_{(\alpha,\beta)})$ が双正則かどうかを判定することができるようになったので報告をしたい.

$\iota : \mathfrak{k} \to \mathfrak{t}^N$ を包含写像, $\pi : \mathfrak{t}^N \to \mathfrak{t}^n$ を自然な射影とし, $\beta \in \mathfrak{k}^*_{\mathbb{C}}$ の持ち上げ $b \in (\mathfrak{t}^N_{\mathbb{C}})^*,\ \beta = \iota^* b,$ を一つとる. 各 $i = 1, \ldots, N$ に対して, $(\mathfrak{t}^n)^*,\ (\mathfrak{t}^n_{\mathbb{C}})^*$ の超平面をそれぞれ

$$H_i = \{x \in (\mathfrak{t}^n)^* | \langle x, \pi(e_i)\rangle = 0\},\ H_i^{\mathbb{C}} = \{x \in (\mathfrak{t}^n_{\mathbb{C}})^* | \langle x, \pi(e_i)\rangle = -\langle b, e_i\rangle\}$$

と定義する. ここで $\{e_1, \ldots, e_N\}$ は $\mathfrak{t}^N$ の自然な基底である. $\{1, \ldots, N\}$ の部分集合 F が

$$F = \{i \,|\, H_i \times H_i^{\mathbb{C}} \supset \bigcap_{j \in F}(H_j \times H_j^{\mathbb{C}})\}$$

をみたすとき F を β–flat であるという. また β–flat F の元 i が

$$\pi(e_i) \notin \mathrm{span}\{\pi(e_j) \,|\, j \in F \setminus \{i\}\}$$

をみたすとき i を coloop であるという.

F を coloop のない β−flat とする. $\mathfrak{t}^F := \mathrm{span}\{e_j \,|\, j \in F\}$ とおく. $\iota_1 : \mathfrak{k} \cap \mathfrak{t}^F \to \mathfrak{k}$ および $\iota_2 : \mathfrak{k} \cap \mathfrak{t}^F \to \mathfrak{t}^F$ を包含写像とする. $(\iota_1)^*\alpha$ の持ち上げ $a \in (\mathfrak{t}^F)^*$, $(\iota_1)^*\alpha = (\iota_2)^*a$, を一つとって固定する. 各 $i \in F$ に対して $(\pi(\mathfrak{t}^F))^*$ の超平面を

$$\bar{H}_i = \{x \in (\pi(\mathfrak{t}^F))^* \,|\, \langle x, \pi(e_i)\rangle = -\langle a, e_i\rangle\}$$

によって定義する. 超平面配置 $\{\bar{H}_i \,|\, i \in F\}$ によって $(\pi(\mathfrak{t}^F))^*$ は有限個の cell に分割される. 有界な cell のうちで極大なもの全体を頂点集合とし, 頂点 σ と τ が $\bar{\sigma} \cap \bar{\tau} \neq \emptyset$ のとき σ と τ を結ぶものとする. 次に各頂点 σ と各辺 $\sigma\tau$ をそれぞれ $\bar{\sigma}$ と $\bar{\sigma} \cap \bar{\tau}$ に対応するトーリック多様体でラベル付けする. こうして得られるグラフを G^F であらわす. coloop のない β−flat のなす集合に包含関係による順序を入れ, この順序関係による Hasse 図形の各頂点 F を G^F でラベル付けしたものを $D_{X(\alpha,\beta)}$ であらわす.

このとき以下の定理が成り立つ.

定理 $(X(\alpha,\beta), \boldsymbol{I})$ と $(X(\alpha',\beta'), \boldsymbol{I})$ が双正則のとき $D_{X(\alpha,\beta)} = D_{X(\alpha',\beta')}$ が成り立つ.

この定理により, $\boldsymbol{I}_p$ と $\boldsymbol{I}_q (p,\ q \in \mathcal{C}_{(\alpha,\beta)})$ が双正則かどうかを多くの例で判定することができる. 講演ではいくつかの具体例を示したい.

参考文献

[1] On toric hyperkähler manifolds with compact complex submanifolds, Kodai Math. J. **31** (2008), 359–384.

[2] Holomorphic equivalence of toric hyperkähler manifolds with compact complex submanifolds, in preparation.

対数的ベクトル場とホロノミーD-加群 I

田島　慎一　(筑波大学)*

1. 超曲面に沿う対数的ベクトル場

$\mathbb{C}^n$ の原点 O の近傍 X において正則な函数 $f(z)=f(z_1,z_2,...,z_n)$ であり, 原点 O を特異点として持つものが与えられたとする. f の定める超曲面を $F=\{z\in X\mid f(z)=0\}$ とおく.

正則函数係数の正則ベクトル場 v であり, 条件 $v(f)\in(f)$ を満たすものを F に沿う対数的ベクトル場と呼ぶ. ただし, (f) は, f が $\mathcal{O}_X$ において生成するイデアルを表す. 超曲面 F に沿う対数的ベクトル場のなす層を $\mathcal{D}er_X(-\log F)$ とおく.

いま, $\mathcal{O}_X$ 上, 次のベクトル場

$$f\frac{\partial}{\partial z_i}\ (i=1,2,...,n),\quad \frac{\partial f}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial z_i}-\frac{\partial f}{\partial z_i}\frac{\partial}{\partial z_j}\ (i<j)$$

により生成されるような対数的ベクトル場は自明であるということにする. さらに, ふたつの対数的ベクトル場 $v,v'\in\mathcal{D}er_X(-\log F)$ の差$v-v'$ が自明であるとき, $v\sim v'$ と表す. $\mathcal{D}er_X(-\log F)$ にこの同値関係 $\sim$ を入れた剰余 $\mathcal{D}er_X(-\log F)/\sim$ について考える. 超曲面 F の Tjurina 数を τ で表す:

$$\tau=\dim_C(\mathcal{O}_{X,O}/(f,\frac{\partial f}{\partial z_1},\frac{\partial f}{\partial z_2},...,\frac{\partial f}{\partial z_n}).$$

定理 1 $\dim_C(\mathcal{D}er_X(-\log F)/\sim)=\tau.$

2. 超曲面に台を持つホロノミーD-加群

いま, $[\frac{1}{f}]=\frac{1}{f}\ mod\ \mathcal{O}_X$ とおき, この $[\frac{1}{f}]$ を F に台を持つ代数的局所コホモロジー $\mathcal{H}^1_{[F]}(\mathcal{O}_X)$ の要素と見做す. X 上の正則関数を係数に持つ線形偏微分作用素全体のなす層を $\mathcal{D}_X$ で表す. $\mathcal{H}^1_{[F]}(\mathcal{O}_X)$ は $\mathcal{D}_X$ 加群の構造を持ち, さらにホロノミーD-加群となる.

さて, $\mathcal{D}_X$ に属す高々一階の偏微分作用素であり, 代数的局所コホモロジー類 $[\frac{1}{f}]$ をannihilate するもの全体を考え,

$$\mathcal{L}^{(1)}_{\mathcal{D}_X}([\frac{1}{f}])=\{P\in\mathcal{D}_X\mid P([\frac{1}{f}])=0,ord(P)\leq 1\}$$

キーワード：logarithmic vector fields, holonomic D-modules
* 〒305-8571 つくば市天王台1-1-1　筑波大学 大学院数理物質科学研究科
e-mail: tajima@math.tsukuba.ac.jp

とおき, この$\mathcal{L}^{(1)}_{\mathcal{D}_X}([\frac{1}{f}])$ により生成される左 D-イデアルを $\mathcal{A}nn^{(1)}_{\mathcal{D}_X}([\frac{1}{f}])$ で表す. 対応するホロノミー D-加群

$$\mathcal{M}^{(1)} = \mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn^{(1)}_{\mathcal{D}_X}([\frac{1}{f}])$$

を考える.

一般に, $\mathbb{C}^n$ の原点 O を通る超平面 H であり, 正則函数 f を H に制限して得られる正則函数 $f|H$ のミルナー数が（この様にして得られるミルナー数の）最小となるとき, 超平面 H は generic であるということにする. また, この $f|H$ のミルナー数を, $\mu^{(n-1)}$ で表すことにする ($\mu^{(n-1)}$ は, 所謂 local Euler obstruction と直接関係する）. f 自体のミルナー数を μ とおく.

定理 2 ホロノミー系 $\mathcal{M}^{(1)}$ の原点における重複度（特性多様体の成分 $T^*_O X$ の重複度）は, $\mu - \tau + \mu^{(n-1)}$ に等しい.

注 一般に, 1973 年の柏原 [3] の結果より, ホロノミー系 $\mathcal{H}^1_{[F]}(\mathcal{O}_X)$ の原点における重複度は, $\mu^{(n-1)}$ に等しいことが従う.

代数的局所コホモロジー類 $[\frac{1}{f}]$ の $\mathcal{D}_X$ における annihilators のなすイデアル層を $\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}_X}([\frac{1}{f}])$ とおく. 定理の応用として次の系（[2] の結果の別証明）を得る.

系 次は同値.

(i) $\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}_X}([\frac{1}{f}]) = \mathcal{A}nn^{(1)}_{\mathcal{D}_X}([\frac{1}{f}])$

(ii) f は quasi-homogeneous.

参考文献

[1] A. S. Dubson : Calcul des invariants numériques des singularites et applications, Sonderforschungsbereich **40**, Theoretische Mathematik, Univ. Bonn (1981).

[2] M. Grange, M. Schulze : Quasihomogeneity of isolated hypersurface singularities and logarithmic cohomology, Manuscripta Math. **121** (2006), 411–416.

[3] M. Kashiwara : Index theorem for a maximally overdetermined system of linear differential equations, Proc. Japan. Acad. **49** (1973), 803–804.

[4] K. Saito : Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen, Invent. Math. **14** (1971), 123–142.

[5] S. Tajima, Y. Nakamura : Algebraic local cohomology classes attached to quasi-homogeneous hypersurface isolated singularities, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **41** (2005), 1–10.

対数的ベクトル場とホロノミーD-加群 II

田島　慎一　(筑波大学)[*1]
中村　弥生　(近畿大学)[*2]

1. 局所コホモロジー

「対数的ベクトル場とホロノミーD-加群 I」で用いたものと同じ記号を使う．ただし, $\mathbb{C}^n$ の座標系 $(z_1, z_2, ..., z_n)$ は, 正則函数 f に対し, 超平面 $H = \{z \mid z_1 = 0\}$ が generic となるものとする.

原点に台をもつ局所コホモロジーの層, $\mathcal{H}^n_{\{O\}}(\mathcal{O}_X)$ を用いて,

$$H_{T_f} = \{\eta \in \mathcal{H}^n_{\{O\}}(\mathcal{O}_X) \mid f\eta = \frac{\partial f}{\partial z_1}\eta = \frac{\partial f}{\partial z_2}\eta = \cdots = \frac{\partial f}{\partial z_n}\eta = 0\},$$

$$H_{\Gamma_f} = \{\eta \in \mathcal{H}^n_{\{O\}}(\mathcal{O}_X) \mid f\eta = \frac{\partial f}{\partial z_2}\eta = \cdots = \frac{\partial f}{\partial z_n}\eta = 0\},$$

と定め,

$$\mathcal{A}_{X,O} = \{a \in \mathcal{O}_{X,O} \mid aH_{\Gamma_f} \subseteq H_{T_f}\}$$

とおく．次は明らか.

補題 $\mathcal{A}_{X,O} = \{a \in \mathcal{O}_{X,O} \mid a\frac{\partial f}{\partial z_1} \in (f, \frac{\partial f}{\partial z_2}, \frac{\partial f}{\partial z_3}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial z_n})\}$.

いま, $a(z) \in \mathcal{A}_{X,O}$ とする．この時, 補題より,

$$v = a(z)\frac{\partial}{\partial z_1} + a_2(z)\frac{\partial}{\partial z_2} + \cdots + a_n(z)\frac{\partial}{\partial z_n}$$

なる形の対数的ベクトル場 $v \in \mathcal{D}er_X(-\log F)$ が存在することになる．ここで, いま更に $a(z)$ がイデアル $(f, \frac{\partial f}{\partial z_2}, \frac{\partial f}{\partial z_3}, ..., \frac{\partial f}{\partial z_n})$ に属さないとすると, このベクトル場 v は自明でないことに注意する.

補題 $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}_{X,O}/(f, \frac{\partial f}{\partial z_2}, \frac{\partial f}{\partial z_3}, ..., \frac{\partial f}{\partial z_n}) = \tau$

これらの補題より**定理 1** を得る．また, [3] を用いることで**定理 2** を得る.

2. 対数的ベクトル場の具体的構成法

$\mathcal{O}_{X,O}$ 加群として, H_{Γ_f} を生成する局所コホモロジー類 $\gamma \in H_{\Gamma_f}$ を取り, $\sigma = \frac{\partial f}{\partial z_1}\gamma$ とおく．この局所コホモロジー類 σ の annihilator を

$$Ann_{\mathcal{O}_X}(\sigma) = \{h \in \mathcal{O}_{X,O} \mid h\sigma = 0\}$$

キーワード：algebraic local cohomology

*1 〒305-8571 つくば市天王台1-1-1　筑波大学 大学院数理物質科学研究科
e-mail: `tajima@math.tsukuba.ac.jp`
*2 〒577-8502 東大阪市小若江3-4-1 近畿大学理工学部理学科
e-mail: `yayoi@math.kindai.ac.jp`

で表す. 次が成り立つ.

補題 $\mathcal{A}_{X,O} = Ann_{\mathcal{O}_X}(\sigma)$

従って, 局所コホモロジー類 $\gamma \in H_{\Gamma_f}$ から局所コホモロジー類 $\sigma \in \mathcal{H}^n_{\{O\}}(\mathcal{O}_X)$ を求め, その annihilators $Ann_{\mathcal{O}_X}(\sigma)$ を決定することで, 超曲面 F に沿う対数的ベクトル場が構成できる.

$\mathcal{A}nn^{(1)}_{\mathcal{D}_X}([\frac{1}{f}])$ の構成法も同様である.

3. E_{12} 特異点

いま $X \subset \mathbb{C}^2$, $f(x,y) = x^3 + y^7 + xy^5$ とおく. $\mu = 12, \tau = 11$ となる. 超平面 $H = \{y = 0\}$ は generic であり, $\mu^{(1)} = 2$ を得る. $H_{\Gamma_f} = \{\eta \mid f\eta = \frac{\partial f}{\partial x}\eta = 0\}$ の次元は $12 + 2 = 14$ に等しい.

論文 [5] の計算法で, H_{Γ_f} の $\mathcal{O}_X$ 加群としての生成元

$$\gamma = [\frac{1}{x^2y^7}] - \frac{1}{3}[\frac{1}{x^4y2}] + \frac{2}{9}[\frac{1}{x^3y^4}] - \frac{2}{3}[\frac{1}{xy^9}]$$

を得る. $\sigma = \frac{\partial f}{\partial y}\gamma$ より次を得る.

$$\sigma = \frac{1}{3}[\frac{1}{xy^3}] + 7[\frac{1}{x^2y}]$$

これより, $Ann_{\mathcal{O}_X}(\sigma) = (xy, 21y^2 - x)$ を得る. ここで, 例えば, $21y^2 - x$ に対応する対数的ベクトル場として

$$v = (45y^2 + 211xy^2 - 10x^2 + 1323xy)\frac{\partial}{\partial x} + (4y + 27)(21y^2 - x)\frac{\partial}{\partial y}$$

を構成できる.

参考文献

[1] F.J. Calderón Moreno, D. Mond, L. Narváez Macarro, F. J. Castro Jiménez : Logarithmic cohomology of the complement of plane curve, Comment. Math. Helv. **77** (2002), 24–38.

[2] F. J. Castro-Jiménez, J. M. Ucha : Explicit comparison theorems for D-modules, J. Symbolic Compt. **32** (2001), 677–685.

[3] Lê Dũng Tráng : Calcul du nombre de cycles évanouissants d'une hypersurface complexe, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **23**, 4 (1973), 261–270.

[4] K. Saito : Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect I A **27** (1980), 266–291.

[5] S. Tajima, Y. Nakamura, K. Nabeshima : Standard bases and algebraic local cohomology for zero-dimensional ideals, Adv. Studies in Math. **56**, (2009), 341–361.

[6] J. M. Wahl : Derivations, automorphisms and deformations of quasi-homogeneous singularities, Proc. Symposia in Pure Math. **40** (1983), Part 2, 613–624.

非孤立特異点の versal I-unfoldings と局所コホモロジー

田島　慎一　(筑波大学)*

1. 序

R. Pellikaan, T. de Jong, D. van Straten, A. Zaharia, J. Fernández de Bobadilla らは, 1983年に発表された D. Siersma の先駆的仕事を一般化し, 特異点集合が零次元でなく, 孤立していない特異点を持つ正則関数に対する Morse化, 即ち, versal I-unfoldings の理論を展開した. 本講演では, 代数的局所コホモロジーを用いることで, versal I-unfoldings において重要な諸量をアルゴリズミックに求めることが可能であることを報告する. この計算法では, 準素イデアル分解やスタンダード基底計算を必要としない点を予め注意しておきたい. ここでは, Morse化に関する理論的枠組みは Pellilaan [2] に従うことにする.

2. 準備

X は $\mathbb{C}^n$ の原点 O の近傍を表すとし, $\mathcal{O}_X$ は X 上の正則関数のなす層を表すとする. イデアル $I \subset \mathcal{O}_X$ に対し, I の primitive イデアル $\displaystyle\int I$ を,

$$\int I = \{g \in \mathcal{O}_X \mid (g) + J_g \subset I\}$$

で定める. ただし, J_g は $g(z) = g(z_1, z_2, ..., z_n)$ のヤコビイデアル $(\frac{\partial g}{\partial z_1}, \frac{\partial g}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial z_n})$ を表す.

正則関数係数の正則ベクトル場全体のなす層を Θ_X で表し, $\tau_{I,e}(f)$ を

$$\tau_{I,e}(f) = \{v(f) \mid v \in \Theta_X,\ v(I) \subseteq I\}$$

で定める.

注 $\tau_{I,e}(f)$ は, イデアル I を保つような正則な automorphism 全体がなすpseudo 群 による $f \in \int I$ の軌道 $Orb_I(f) \subset (J_f) \cap (\int I)$ の接空間に相当する.

与えられた $f \in \int I$ が Pellikaan の意味で I-有限確定的（通常の Mather 理論の自然な拡張）であるとすると, $(\int I)/\tau_{I,e}(f)$ は有限次元ベクトル空間となる. 以下,

$$c_{I,e}(f) = \dim_C((\int I)/\tau_{I,e}(f))$$

を, 単に $q = c_{I,e}(f)$ で表す.

キーワード : non-isolated singularities, local cohomology
* 〒305-8571 つくば市天王台1-1-1　筑波大学 大学院数理物質科学研究科
e-mail: tajima@math.tsukuba.ac.jp

T は, $\mathbb{C}^q$ の原点 O の開近傍, $\mathcal{O}_{X\times T}$ は $X\times T$ 上の正則関数のなす層を表すとする. Pellikaan [2] は次の結果を示した.

定理 $f(z)\in\int I$ に対し, $F(z,t)\in\mathcal{O}_{X\times T}$ は,

$$F(z,0)=f(z), F\in(\int I)\mathcal{O}_{X\times T}$$

を満たすとする. この時, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\tau_{I,e}(f)+(\frac{\partial F}{\partial t_1}|_{t=0},\frac{\partial F}{\partial t_2}|_{t=0},\ldots,\frac{\partial F}{\partial t_q}|_{t=0})\mathcal{O}_X=\int I$

(ii) F は f の versal I-unfolding.

3. 計算例

論文 [4], [1] に与えた方法を拡張することで, $(\int I)/\tau_{I,e}(f)$ の双対に対応する代数的局所コホモロジーを求めることができる.

いま, X は $\mathbb{C}^2$ の原点の近傍, $I=(y), f(x,y)=xy^3+x^7y^2$ とする. この時, $\int I=(y^2)$, $\tau_{I,e}(f)=(y^3+7x^6y^2,3xy^3+2x^7y^2)$, $q=7$ である.

$(\int I)/\tau_{I,e}(f)$ の双対ベクトル空間の基底として次の代数的局所コホモロジー類を得る.

$$[\frac{1}{xy^3}],[\frac{1}{x^2y^3}],[\frac{1}{x^3y^3}],[\frac{1}{x^4y^3}],[\frac{1}{x^5y^3}],[\frac{1}{x^6y^3}],[\frac{1}{x^7y^3}]-7[\frac{1}{xy^4}]$$

対応する単項式 $y^2,xy^2,x^2y^2,x^3y^2,x^4y^2,x^5y^2$ および x^6y^2 (または y^3) を用いて, f の versal I-unfolding

$$F(x,y,t)=f+(t_0+t_1x+t_2x^2+t_3x^3+t_4x^4+t_5x^5+t_6x^6)y^2$$

を得る.

参考文献

[1] 鍋島克輔, 中村弥生, 田島慎一：代数的局所コホモロジーの計算法とそれを用いたスタンダード基底・グレブナ基底計算について, 京都大学数理解析研究所講究録掲載予定.

[2] R. Pellikaan : Finite determinancy of functions with non-isolated singularities, Proc. London Math. Soc. (3) **57** 357–382 (1988).

[3] D. Siersma : Isolated line singularities, Proc. Symposia in Pure Math. **40** (1983), Part 2, 485–496.

[4] S. Tajima, Y. Nakamura, K. Nabeshima : Standard bases and algebraic local cohomology for zero-dimensional ideals, Adv. Studies in Math. **56** (2009), 341–361.

半擬斉次孤立特異点に付随する代数的局所コホモロジーについて

鍋島克輔　(徳島大学)[*1]
田島慎一　(筑波大学)[*2]

孤立特異点（のヤコビイデアル）に付随する代数的局所コホモロジーを求める計算法は論文[1, 2, 3, 4]において紹介されている。

ここでは, 半擬斉次多項式で定義される孤立特異点の場合を考える。半擬斉次多項式で定義される孤立特異点の場合, 重みベクトルからポアンカレ多項式を簡単に求めることができる。このポアンカレ多項式より, 孤立特異点に付随する基底代数的局所コホモロジーの "重み付き次数" が決定できる（[1]）。ここで, 項順序として重みと両立するものを考えれば, 代数的局所コホモロジーを求める効率の良い計算法を確立することができる。本講演では, この計算法について述べる。

論文[4]にある一般的な基底代数的極局所コホモロジー計算では, まず, 基底のinitial項の決定から行われる。この方法では, initial項になる可能性のある項を逐次チェックしていく。他方, 半擬斉次多項式で定義される孤立特異点の場合, ポアンカレ多項式を使うことで基底のすべてのinitial項の "重み次数", "基底の元の数" がわかる。これらの事柄を利用することで基底代数的局所コホモロジーの計算効率化が図られる。

例えば, 2変数多項式 $f(x,y) = x^3 + y^7 + bxy^5 \in \mathbb{C}[x,y]$ によって定義される E_{12} 特異点を考える（b:パラメータ）。ここで, 変数xに重み$\mathbf{7}$, 変数yに重み$\mathbf{3}$と置く。このとき, fの擬斉次部（重み付き斉次パート）は $f_0(x,y) = x^3 + y^7$ であり重み付き次数は$\mathbf{21}$である。この重みベクトル$(7,3)$からなるポアンカレ多項式$p(t)$は以下となる。

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{t^{21-7}-1}{t^7-1} \cdot \frac{t^{21-3}-1}{t^3-1} \\ &= 1 + t^3 + t^6 + t^7 + t^9 + t^{10} + t^{12} + t^{13} + t^{15} + t^{16} + t^{19} + t^{22} \end{aligned}$$

このポアンカレ多項式の各項の次数に重み次数 $7+3=10$ を加えた12個の数値

$$10, 13, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 26, 29, 32$$

本研究において, 第一著者は科学研究費 (課題番号:22740065), 第二著者は科学研究費 (課題番号:21740108) の助成を受けている。
2010 Mathematics Subject Classification: 14B15, 14F10
キーワード：semi quasi-homogeneous isolated singularities, Grothendieck local duality, algebraic local cohomology
[*1] 〒770-8502　徳島市南常三島町1-1 徳島大学総合科学部
e-mail: nabesima@ias.tokushima-u.ac.jp
[*2] 〒305-8571　つくば市天王台1-1-1 筑波大学大学院数理物質研究科
e-mail: tajima@math.tsukuba.ac.jp

が $f_0(x,y)$ からなる基底代数的局所コホモロジーの重み付き次数となる。また, 個数12はミルナー数を表し, 基底となる元は12個あることを示している。

この情報と擬斉次部 f_0 より, 効率的に f_0 の基底代数的局所コホモロジー W_0 を計算することができる。(ここで, 集合 W_0 の任意の元の多項式表現は擬斉次多項式である。) 多項式 f に付随する基底代数的局所コホモロジーは W_0 の元を "initial 項" または "initial 部" として持つことが分かっており, この情報を利用することにより f の基底代数的局所コホモロジーは効率的に計算される。

計算の概略

Input: $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$: (原点に孤立特異点を持つ) 半擬斉次多項式,
Output: f の基底代数的局所コホモロジー。

(1) $f = f_0 + g$ と f を分ける。ここで, f_0 はある重みベクトルに対しての擬斉次部である。

(2) 重みベクトルからポアンカレ多項式を計算する。

(3) ポアンカレ多項式の情報を利用し f_0 の基底代数的局所コホモロジー W_0 を計算する。

(4) W_0 の情報を使い f の基底代数的局所コホモロジーを計算する。

この計算法では, 定義多項式にパラメータを持つ場合にパラメータ依存性の場合分けが容易である。また, μ-constant deformation への応用が可能となる。

参考文献

[1] Y. Nakamura and S. Tajima, On weighted-degrees for algebraic local cohomologies associated with semiquasihomogeneous singularities, Advanced Studies in Pure Mathematics, **46**, pp. 105 – 117, (2007).

[2] S. Tajima and Y. Nakamura, Algebraic local cohomology class attached to quasi-homogeneous isolated hypersurface singularities. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **41**, pp.1 – 10, (2005) .

[3] S. Tajima and Y. Nakamura, Annihilating ideals for an algebraic local cohomology class. Journal of Symbolic Computation **44**, pp.435 – 448, (2009) .

[4] S. Tajima, Y. Nakamura and K. Nabeshima, Standard bases and algebraic local cohomology for zero dimensional ideals, Advanced Studies in Pure Mathematics **56**, pp. 341 – 361, (2009).

有理型関数の第二主要定理について

山ノ井 克俊

1　はじめに

第二主要定理とは，複素平面上の定数でない有理型関数は高々二つの値を除いてすべての値をとる，という有名な Picard の小定理を精密化，定量化したものです．これは 1920 年代に Rolf Nevanlinna によって確立されたもので，今日 Nevanlinna 理論とよばれるものの主要な主張になっています．Nevanlinna 理論に関する研究は今日まで多岐にわたりますが，その中には Nevanlinna 自身によって出された問題が出発点になっている研究も少なくありません．この講演では，Nevanlinna 理論に関する一般的な事柄から始めて，以下に挙げるトピックスを中心にお話します：

- 第二主要定理の動標的 (Moving target) への拡張
- 関数体上の Diophantus 問題との関係
- 高階導関数の零点に関する Gol'dberg 予想

2　Nevanlinna 理論

有理型関数は，無限遠が真性特異点でない特別な状況として有理関数を含みます．そして有理型関数の性質は，有理関数の性質の一般化として捉えると理解しやすいことが多くあります．Nevanlinna 理論もその一つです．そこで有理関数の場合と対比させながら，Nevanlinna 理論の紹介をします.（詳しくは，[1], [2], [5], [11], [12], [13] などを参照してください.）

まず一般的な記号の定義を二つします.

1. リーマン球面の面積要素:

$$\omega = \frac{1}{(1+|z|^2)^2}\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}dz \wedge d\bar{z}.$$

これはリーマン球面の面積が 1 になるよう，正規化されています.

2. 原点を中心とする半径 r の円盤:

$$\mathbb{C}(r) = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < r\}.$$

さて，これから Nevanlinna 理論において最も重要な役割をはたす，半径 r に関する三つの関数を定義します．

(清水-Ahlfors の) 位数関数:

$$\boxed{T(r,f) = \int_1^r S(t)\frac{dt}{t}.}$$

ここで

$$S(t) = \int_{\mathbb{C}(t)} f^*\omega$$

とおきました．これは，有理型関数の定義する被覆面 $f : \mathbb{C}(t) \to \widehat{\mathbb{C}}$ の被覆の平均枚数をあらわします．

(例) もし f が有理関数ならば

$$\lim_{t\to\infty} S(t) = \deg\ f.$$

したがって，$r \to \infty$ のとき

$$T(r,f) = (\deg\ f) \times \log r + O(1)$$

となります．

個数関数：点 $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して，

$$\boxed{N(r,a,f) = \int_1^r n(t,a)\frac{dt}{t}.}$$

ここで，

$$n(t,a) = \sum_{z\in\mathbb{C}(t)} \mathrm{ord}_z f^*(a)$$

とおきました．これは $\mathbb{C}(t)$ のなかにある方程式 $f(z) = a$ の解の重複度をこめた数です．

（例） もし f が有理関数ならば

$$\lim_{t\to\infty} n(t,a) = \sum_{z\in\mathbb{C}} \mathrm{ord}_z f^*(a).$$

したがって，$r \to \infty$ のとき

$$N(r,a,f) = \left(\sum_{z\in\mathbb{C}} \mathrm{ord}_z f^*(a)\right) \times \log r + O(1)$$

となります．

接近関数：点 $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して，

$$\boxed{m(r,a,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\frac{1}{[f(re^{i\theta}),a]}d\theta.}$$

ここで，

$$[x,y] = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}}$$

はリーマン球面の弦距離です．接近関数は，f による半径 r の円周 $\partial\mathbb{C}(r)$ の像が点 a に平均的にどれくらい近づいているかを測っています．

(例)：もし f が有理関数ならば，　$r \to \infty$ で

$$m(r,a,f) = (\mathrm{ord}_\infty f^*(a)) \times \log r + O(1)$$

となります．

さて f が有理関数ならば，すべての点 $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} f^*\omega &= \deg f \\ &= \sum_{z\in\mathbb{C}} \mathrm{ord}_z f^*(a) + \mathrm{ord}_\infty f^*(a).\end{aligned}$$

となります．よって，すべての辺に $\log r$ をかければ，有理関数に対して次の関係が得られます：

$$T(r,f) = N(r,a,f) + m(r,a,f) + O(1).$$

この関係が一般に正しい，というのが Nevanlinna 理論の最初の主張です．

定理 1 (第一主要定理, Nevanlinna, Shimizu, Ahlfors) f を定数でない有理型関数とすると，すべての $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ について

$$T(r,f) = N(r,a,f) + m(r,a,f) + O(1).$$

次に節をあらためて，この講演の主題である第二主要定理の紹介をします．ちなみに Nevanlinna 理論の主定理は二つで，第三主要定理というのはありません．

3　第二主要定理

まず，個数関数を変形したものを導入します．

打ち切り個数関数：点 $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して，

$$\boxed{\overline{N}(r,a,f) = \int_1^r \overline{n}(t,a)\frac{dt}{t}.}$$

ここで

$$\overline{n}(t,a) = \sum_{z\in\mathbb{C}(t)} \min\{1, \mathrm{ord}_z f^*(a)\}$$

とおきました．これは $\mathbb{C}(t)$ の中にある方程式 $f(z)=a$ の解の数を重複度を考慮せずに数えたものです．

さらに

$$\boxed{N_1(r,a,f)=N(r,a,f)-\overline{N}(r,a,f)}$$

とおきます．これは点 a の上にある f の分岐点を数えています．

さて，もし f が有理関数ならば, リーマン・フルビッツの公式から

$$\underbrace{m(r,f(\infty),f)+\sum_{a\in\widehat{\mathbb{C}}}N_1(r,a,f)}_{([f:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}\text{ の分岐点の個数}]+1)\times\log r}=\left(2-\frac{1}{\deg\, f}\right)T(r,f)+O(1)$$

という等式が得られます．一般には次のような不等式が成立します:

定理 2 (Nevanlinna の第二主要定理) f を $\mathbb{C}$ 上定義された定数でない有理型関数とする．$a_1,\ldots,a_q\in\widehat{\mathbb{C}}$ を相異なる点とすると，$r\to\infty$ のときに不等式

$$\sum_{i=1}^{q}m(r,a_i,f)+\sum_{a\in\widehat{\mathbb{C}}}N_1(r,a,f)\le 2T(r,f)+o(T(r,f)) \tag{3.1}$$

が測度有限の除外集合の外で成り立つ．

リーマン・フルビッツの公式が等式であるのと比較すると，第二主要定理は不等式になっています．これは仕方のないことですが，以下のような工夫をすることで第二主要定理を等式にすることもできます．すなわち，第二主要定理の左辺の $\displaystyle\sum_{i=1}^{q}m(r,a_i,f)$ を次の関数で置き換えます：

$$\bar{m}_q(r,f)=\sup_{(a_1,\cdots,a_q)\in(\hat{\mathbb{C}})^q}\int_0^{2\pi}\max_{1\le i\le q}\log\frac{1}{[f(re^{i\theta}),a_i]}\frac{d\theta}{2\pi}.$$

このとき次が成り立ちます（[20]）．

定理 3 f を $\mathbb{C}$ 上で定義された超越的な有理型関数とする．関数 $q:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{N}$ は次をみたすとする：

$$q(r)\sim\left\{\log^{+}\left(\frac{T(r,f)}{\log r}\right)\right\}^{20}.$$

このとき，$r\to\infty$ において漸近的な等式

$$\bar{m}_{q(r)}(r,f)+\sum_{a\in\widehat{\mathbb{C}}}N_1(r,a,f)=2T(r,f)+o(T(r,f))$$

が対数密度 0 の除外集合の外で成り立つ．

さて，第二主要定理の評価式 (3.1) に第一主要定理を用いると

$$(q-2)T(r,f)\le\sum_{i=1}^{q}\overline{N}(r,a_i,f)+o(T(r,f)) \tag{3.2}$$

が導かれます．このように書き換えると評価としては少し弱くなりますが，これもしばしば第二主要定理とよばれます．さらにリーマン球上に因子 $D=(a_1)+\cdots+(a_q)$ を導入して，$(q-2)T(r,f)$ が直線束 $K_{\hat{\mathbb{C}}}(D)$（ここで $K_{\hat{\mathbb{C}}}$ はリーマン球の標準束）に対応する位数関数であることに注意すると (3.2) 式は

$$T_{f,K_{\hat{\mathbb{C}}}(D)}(r) \le \overline{N}_{f,D}(r) + o(T(r,f))$$

と書くこともできます．この形の評価式をこれから拡張します．

4　第二主要定理の曲線族への拡張

第二主要定理の一つの一般化を与えるために次のような可換図式の状況を考えます：

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B & \xrightarrow[g]{} & M \end{array} \tag{4.1}$$

ここで，X, M は滑らかな複素射影多様体で，射 $p: X \to M$ は全射であって，一般の点 $a \in M$ に対してファイバー $p^{-1}(x)$ はコンパクトリーマン面であるとします．$\pi_Y: Y \to \mathbb{C}$, $\pi_B: B \to \mathbb{C}$ は複素平面の有限被覆空間で，$\pi_B \circ \pi = \pi_Y$ とします．f と g は正則写像です．

いま X の被約な因子 $D \subset X$ が与えられたとき，M 上の真代数的部分集合 $Z = Z(X,M,p,D) \subsetneqq M$ を次の性質をみたす最小の代数的集合として定義します．すなわち

1. $M\backslash Z$ 上では p は滑らかな射になり，

2. 各点 $x \in M\backslash Z$ に対して，ファイバー $p^{-1}(x)$ 上に D を引き戻すと被約である．

もちろん，この Z は X,M,p,D のみに依存して決まります．また可換図式 (4.1) の正則写像 f が以下の条件をみたすとき，図式 (4.1) は非退化と呼ぶことにします：

$$f(Y) \not\subset D \cup p^{-1}(Z).$$

このとき第二主要定理の一般化として次が成り立ちます（[19]）．

定理 4 L と E をそれぞれ X と M 上の豊富な直線束として，$\varepsilon > 0$ を任意の正数とする．このとき定数 $C = C(X,M,p,D,L,E,\varepsilon)$ が存在して，非退化な図式 (4.1) に対して不等式

$$T_{f,K_X(D)}(r) \le \overline{N}_{f,D}(r) + N_{\mathrm{ram}\,\pi_Y}(r) + \varepsilon T_{f,L}(r) + C\left\{T_{g,E}(r) + N_{\mathrm{ram}\,\pi_B}(r)\right\}$$

が測度有限の除外集合の外で成り立つ．ただし K_X は X の標準束をあらわす．

以下にみるようにこの結果から幾つかの結果を統一的に導くことができます．その前に定理に出てきた記号の説明をします．

まず有限被覆空間 $\pi_Y : Y \to \mathbb{C}$ に対して，

$$N_{\mathrm{ram}\pi_Y}(r) = \frac{1}{\deg \pi_Y} \int_1^r \left\{ \sum_{y \in \pi_Y^{-1}(\mathbb{C}(t))} \mathrm{ord}_y \mathrm{ram}\pi_Y \right\} \frac{dt}{t}.$$

ここで $\mathrm{ram}\pi_Y$ は被覆写像 π_Y の分岐因子です．次に複素射影多様体 X と正則写像 $f : Y \to X$ を考えます．X 上の直線束 L に対して，

$$T_{f,L}(r) = \frac{1}{\deg \pi_Y} \int_1^r \int_{\pi_Y^{-1}(\mathbb{C}(t))} f^* c_1(L) \frac{dt}{t} + O(1)$$

とします．ここで $c_1(L)$ は L に滑らかな計量を入れた上での曲率形式ですが，計量の入れ方には有界な関数を除いて，依存しません．最後に X の被約な因子 D に対して

$$\overline{N}_{f,D}(r) = \frac{1}{\deg \pi_Y} \int_1^r \# \left\{ \pi_Y^{-1}(\mathbb{C}(t)) \cap f^{-1} D \right\} \frac{dt}{t}$$

とおきます．

（例 1） $X = \hat{\mathbb{C}}$, $M =$ 一点, $B = \mathbb{C}$, $g =$ 定数 という状況では，図式 (4.1) は正則写像（すなわち代数型関数）$f : Y \to \hat{\mathbb{C}}$ を考えることに他なりません．このとき定理 4 から

$$T_{f,K_{\hat{\mathbb{C}}}(D)}(r) \le \overline{N}_{f,D}(r) + N_{\mathrm{ram}\pi_Y}(r) + \varepsilon T_{f,L}(r)$$

が測度有限の除外集合の外で成り立つがわかります．これは Selberg による第二主要定理の代数型関数への一般化です．X を一般のコンパクトリーマン面にすることもでき，その場合は野口潤次郎先生の高次元第二主要定理の一次元の場合になります．

（例 2）Nevanlinna は著書 ([10]) の中で，第二主要定理で考えていた定数 a_i を $\mathbb{C}$ 上の有理型関数 $a_i(z)$ におきかえるとどうなるか，という問題を出しました．この問題は Osgood [14] と Steinmetz [15] によって独立に解決しました．それは分岐項 $N_1(r, a_i, f)$ を含まないものだったのですが，定理 4 によってその点を解決できます．

定理 5 $f(z)$,$a_1(z), \dots, a_q(z)$ を相異なる $\mathbb{C}$ 上の有理型関数とする．ただし $f(z)$ は定数でないとする．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して定数 $C(q, \varepsilon) > 0$ が存在して，$r \to \infty$ のときに不等式

$$\sum_{i=1}^q m(r, a_i, f) + \sum_{i=1}^q N_1(r, a_i, f) \le (2 + \varepsilon) T(r, f) + C(q, \varepsilon) \left(\sum_{i=1}^q T(r, a_i) \right)$$

が測度有限の除外集合の外で成り立つ.

ここで，$m(r, a, f)$ と $N_1(r, a, f)$ は a が有理型関数のときには次のように定義を拡張します．まず接近関数にかんしては

$$m(r, a, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{[f(re^{i\theta}), a(re^{i\theta})]} d\theta.$$

次に $N_1(r,a,f)$ に関しては，$f=g/h$ と $a=b/c$ を共通零点をもたない整関数による分数表示として，$n(r,a,f)$ を $\mathbb{C}(r)$ 内の整関数 $cg-bh$ の重複度を込めた零点の数とします．あとは a が定数の場合と同じように定義します．ちなみに第一主要定理は

$$m(r,a,f)+N(r,a,f)=T(r,f)+T(r,a)+O(1)$$

という形に拡張されます．

定理 4 から定理 5 を導くには，図式 (4.1) として以下を考えればよいのです：

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C} & \xrightarrow{(f,a_1,\dots,a_q)} & (\mathbb{P}^1)^{q+1} \\
{\scriptstyle \mathrm{id}_{\mathbb{C}}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle (\text{2nd proj},\dots,(q+1)\text{th proj})} \\
\mathbb{C} & \xrightarrow[(a_1,\dots,a_q)]{} & (\mathbb{P}^1)^q
\end{array}$$

ここで，$D=\{(x_1,\dots,x_{q+1})\in(\mathbb{P}^1)^{q+1}; x_1=x_i \text{ for some } i=2,\dots,q+1\}$ とします．

（例 3）定理 4 は Y,B がコンパクトリーマン面で f,g が代数的な場合でも面白い帰結を与えます．すなわち，図式 (4.1) として次の状況を考えることで Vojta によって提起された関数体上の Diophantus 問題の解答が得られます．

$$\begin{array}{ccc}
Y & \xrightarrow{f} & X \\
{\scriptstyle \pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\
B & \xrightarrow[\mathrm{id}_B]{} & B
\end{array}$$

ただし Y,B はコンパクトリーマン面，X は代数曲面，f は代数的，$D=\emptyset$．

このとき

$$\lim_{r\to\infty} T_{f,K_X(D)}(r)/\log r=\deg\ f^*K_X/\deg\pi_Y,$$

$$\overline{N}_{f,D}(r)=0,$$

$$\lim_{r\to\infty} N_{\mathrm{ram}\pi_Y}(r)/\log r=2(\mathrm{genus}(Y)-1)/\deg\pi_Y+2,\quad \text{etc.}$$

従って，定理 4 を適用すると，任意の正数 $\varepsilon>0$ に対して，ε, L, $p:X\to M$ だけで決まり，$\pi:Y\to B$, f には依存しない定数 $C>0$ が存在して次が成り立つことが分かります：

$$\deg\ f^*K_X\le 2\mathrm{genus}(Y)+\varepsilon\deg\ f^*L+C\deg\pi.$$

ここで，L は X 上の豊富な直線束です．Vojta はこれより少し弱い形の不等式を証明したうえで，この不等式を予想として提起していました（[16]）．

5 Gol'dberg 予想 [20]

第二主要定理の右辺の主要項は $2T(r,f)$ ですが，残余項を評価するのは重要な問題です．Gol'dberg 予想に定理 5 のような第二主要定理の動標的への拡張を適用するためにも，残余項を評価することが大切になります．そのために $a_1,\dots,a_q$ として一般の有理型関数を考えるのをやめて，有理関数だけを考えることにします．そこで $\mathcal{R}_d$ を d 次以下の有理関数全体の集合とします．これは，∞ という定数関数を含むと理解します．

定理 6 f を複素平面上の超越的な有理型関数, d を自然数とする．このとき f と d だけに依存して決まる測度有限な集合 $E_{f,d} \subset \mathbb{R}_{>0}$ が存在して次が成り立つ: q 個の異なる有理関数 $a_1, \ldots, a_q \in \mathcal{R}_d$ と正数 $\varepsilon > 0$ に対して，評価式

$$\int_0^{2\pi} \max_{1\le i\le q} \log \frac{1}{[f(re^{i\theta}), a_i(re^{i\theta})]} \frac{d\theta}{2\pi} + \sum_{1\le i\le q} N_1(r, a_i, f) \le (2+\varepsilon)T(r,f) + \frac{q^{17}}{\varepsilon^4} T(r)^{\frac{4}{5}} (\log r)^{\frac{1}{5}}$$

が $r \in \mathbb{R}_{>0} \backslash E_{f,d}$ に対して成り立つ．

定理 5 と比較すると，誤差項の係数の中で q^{17} が q の多項式オーダーで評価されていることがまず重要です．((5.1) を参照)．定理 5 では $C(q,\varepsilon)$ という漠然とした定数でした．また除外集合 $E_{f,d}$ が $a_1, \ldots, a_q$ に依存しないことも重要です．このような $a_1, \ldots, a_q$ に依存しない一様な評価が得られることが，左辺初項の接近関数を和 $\sum$ から最大 max に変更した利点です．

次に定理 3 を有理関数を標的とする状況に適合させます．そのために次のような $\bar{m}_q(r,f)$ の一般化を考えます：

$$\bar{m}_{d,q}(r,f) = \sup_{(a_1,\cdots,a_q)\in(\mathcal{R}_d)^q} \int_0^{2\pi} \max_{1\le i\le q} \log \frac{1}{[f(re^{i\theta}), a_i(re^{i\theta})]} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

これを下から評価する，というのが次の主張です．

定理 7 ($\bar{m}$ の下からの評価) f を $\mathbb{C}$ 上で定義された超越的な有理型関数，k を自然数とする．関数 $q : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{N}$ は次をみたすとする：

$$q(r) \sim \left[\log^+ \left(\frac{T(r,f)}{\log r}\right)\right]^{20}.$$

このとき，$r \to \infty$ において不等式

$$2T(r,f) + (k-1)\overline{N}(r,\infty,f) \le \bar{m}_{k-1,q(r)}(r,f) + N(r,0,f^{(k)}) + N_1(r,\infty,f) + o(T(r,f))$$

が対数密度 0 の除外集合の外で成り立つ．

さて，定理 6 と定理 7 から次の結果を証明することができます（$k=2$ がもともとの Gol'dberg 予想）.

定理 8 (Gol'dberg 予想) f を複素平面上で定義された超越的な有理型関数とする．このとき, $r \to \infty$ において不等式

$$(k-1)\overline{N}(r,\infty,f) \le N(r,0,f^{(k)}) + o(T(r,f))$$

が対数密度 0 の除外集合の外で成り立つ．

これは大雑把にいうと，f の高階微分は極よりたくさんの零点をもつことを主張します．Frank-Weissenborn は f の極がすべて単純なときにこれを示しています （[3]）．もともと Gol'dberg 予想は Mues 予想 ([9]) という別の予想を証明するために考えられたもので，定理 8 から Mues 予想も証明されます.

定理 6 と定理 7 から定理 8 を証明するには次のようにします．まず定理 6 より，$E_{f,k-1}$ の外で左辺の上限をとることより

$$\bar{m}_{k-1,q}(r,f) + N_1(r,\infty,f) \leq (2+\varepsilon)T(r,f) + \frac{q^{17}}{\varepsilon^4}T(r)^{\frac{4}{5}}(\log r)^{\frac{1}{5}}$$

となります．あとは定理 3 にあらわれた $q(r)$ に対して

$$q(r)^{17}T(r)^{\frac{4}{5}}(\log r)^{\frac{1}{5}} = o(T(r)) \tag{5.1}$$

に注意すると

$$\bar{m}_{k-1,q(r)}(r,f) + N_1(r,\infty,f) \leq 2T(r,f) + o(T(r,f))$$

が測度有限な除外集合の外で成り立つことが分かります．この評価を定理 7 の右辺に適用すれば，定理 8 が得られます．

参考文献

[1] W. Cherry and Z. Ye, *Nevanlinna's theory of value distribution. The second main theorem and its error terms*, Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[2] A. Gol'dberg and I. Ostrovskii, *Value distribution of meromorphic functions*, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[3] G. Frank and G. Weissenborn, *Rational deficient functions of meromorphic functions*, Bull. London Math. Soc. **18** (1986), no. 1, 29-33.

[4] W. K. Hayman, *Picard values of meromorphic functions and their derivatives*, Ann. of Math. (2) **70** 1959 9–42.

[5] W. K. Hayman, *Meromorphic Functions*, Oxford University Press, 1964.

[6] W. K. Hayman and J. Miles, *On the growth of a meromorphic function and its derivatives*, Complex Variables Theory Appl. **12** (1989), no. 1-4, 245–260.

[7] K. Ishizaki, *Some remarks on results of Mues about deficiency sums of derivatives*, Arch. Math. (Basel) **55** (1990), no. 4, 374-379.

[8] J. Langley, *The second derivative of a meromorphic function of finite order*, Bull. London Math. Soc. **35** (2003), no. 1, 97–108.

[9] E. Mues, *Uber eine Defekt- und Verzweigungsrelation fur die Ableitung meromorpher Funktionen*, Manuscripta Math. **5** (1971), 275-297.

[10] R. Nevanlinna, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, Gauthier-Villars, Paris, 1929.

[11] R. Nevanlinna, *Analytic Functions*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **162**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[12] 野口潤次郎, 多変数ネヴァンリンナ理論とディオファントス近似, 共立出版.

[13] J. Noguchi and T. Ochiai, *Geometric function theory in several complex variables*, Transl. Math. Mon. **80**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1990.

[14] Ch. Osgood, *Sometimes effective Thue-Siegel-Roth-Nevanlinna bounds, or better*, J. Number Theory **21** (1985), 347-399.

[15] N. Steinmetz, *Eine Varallgemeinerung des zweiten Nevanlinnaschen Hauptsatzes*, J. Rein Angew. Math. **368** (1986), 131-141.

[16] P. Vojta, *On algebraic points on curves*, Compositio Math. **78** (1991), 29-36.

[17] K. Yamanoi, *The second main theorem for small functions and related problems*, Acta Math. **192** no.2 (2004), 225-294.

[18] K. Yamanoi, *Defect relation for rational functions as targets*, Forum Math. **17** (2005), no. 2, 169–189.

[19] K. Yamanoi, *On the truncated small function theorem in Nevanlinna theory*, Internat. J. Math. **17** no. 4 (2006) 417-440.

[20] K. Yamanoi, *Zeros of higher derivatives of meromorphic functions*, preprint.

[21] L. Yang, *Precise estimate of total deficiency of meromorphic derivatives*, J. Analyse Math. **55** (1990), 287-296.

[22] L. Yang, *Value distribution theory*, Springer-Verlag, Berlin; Science Press, Beijing, 1993.

函数論分科会委員会委員
投票用紙

以下の委員候補者（２０１２年４月から２０１４年３月まで任期２年）のうち適任と思われる者に ◯，不適任と思われる者に × を付して下さい．一括信任（不信任）の場合は該当欄に御記入下さい．

	一 括 信 任
	小森 洋平
	中西 敏浩
	増本 誠
	諸澤 俊介
	米田 力生

任期中の委員は石崎克也，奥山裕介，下村哲，高山茂晴，辻 元，本田竜広, 山田雅博，山ノ井克俊，平地健吾です．他に適任と思われる方がいましたら，２名以内ご推薦下さい．
ただし，規則により， 相川弘明，宍倉光広 は被推薦者になれません．

なお，投票は学会開催中に函数論分科会会場，それ以降は１０月９日必着で

〒 153-8914　東京都目黒区駒場 3-8-1
東京大学 大学院数理科学研究科
平地　健吾
(函数論分科会連絡責任評議員)

宛に郵送してください．