日本数学会

2011年度年会

函数論分科会
講演アブストラクト

2011年3月

於　早稲田大学

函 数 論

22日(火) 第IX会場

9:00〜11:40

1 西本勝之 (デカルト出版)* A four multiple infinite sum obtained by means of N-fractional calculus 15

2 西本勝之 (デカルト出版)* Production of some fractional differintegral equations in N-fractional calculus 15

3 下田穣 (近畿大総合理工)♯, N. Uyanik (Ataturk Univ.), 尾和重義 (近畿大理工) Notes on radius properties of p-valently starlike functions 15

4 白石將 (近畿大総合理工)♯, 尾和重義 (近畿大理工) Sufficient conditions for strongly Carathéodory functions 15

5 黒木和雄 (近畿大総合理工)♯, 早味俊夫 (近畿大総合理工), N. Uyanic (Ataturk Univ.), 尾和重義 (近畿大理工) Some properties for certain class of univalent functions 15

6 早味俊夫 (近畿大総合理工)♯, 尾和重義 (近畿大理工) Hypocycloid of n+1 cusps harmonic function 15

7 西脇純一 (摂南大工)♯, 尾和重義 (近畿大理工) An application of convolution integral 15

8 照井章 (筑波大数理物質)♯, 田島慎一 (筑波大数理物質) 行列の最小消去多項式候補を利用した固有ベクトル計算 10

9 山田雅博 (岐阜大教育)*, 菱川洋介 (岐阜高専) Representing and interpolating sequences on parabolic Bloch type spaces 15

10 戸田暢茂 (名工大*)* Notes to the defect relation of holomorphic curves 15

14:15〜15:50

11 橋本康史 (九州先端科学技術研)♯ 合同部分群に関する length spectrum の重複度について 15

12 中村豪 (愛知工大工)♯ Compact non-orientable surfaces of genus 5 with extremal metric discs 15

13 小森洋平 (阪市大理)♯ Thurston コンパクト化の有限次元での実現問題 15

14 松崎克彦 (早大教育)* Conjugation of uniformly L^2-symmetric homeomorphisms to Fuchsian groups 15

15 志賀啓成 (東工大理工)♯ On the number of holomorphic families of Riemann surfaces 15

16 志賀啓成 (東工大理工)♯ Holomorphic motions and monodromy 15

16:00〜17:00 特別講演

木坂正史 (京大人間環境)♯ 超越整函数の Fatou 集合, Julia 集合の位相的性質について

23日(水)　第IX会場

10:00〜12:00

14:15〜15:10

15:20〜16:20　特別講演

A Four Multiple Infinite Sum obtained by Means of N- Fractional Calculus

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press Co.

Abstract

In this article a four multiple infinite sum derived by means of N- fractional calculus is reported. That is, the result below is reported for example.

Theorem 1. *Let*

$$M = M(\alpha,\beta,\gamma\,;k,m) = \frac{(-1)^{k+m}[-\alpha]_k[-\beta]_m[-\gamma]_m\Gamma(k-\alpha+\gamma-m)}{k!\cdot m!\,\Gamma(k-\alpha)} ,$$

$$K = K(\alpha,\gamma,\delta,\varepsilon\,;k,m,n) = \frac{(-1)^n[-\varepsilon]_n[m-\delta]_n\,\Gamma(k-m-n+\varepsilon+\gamma-\alpha)}{n!\,\Gamma(k-m+\gamma-\alpha)} ,$$

$$L = L(\mu,a,b;k,m,n,p) = \frac{(-1)^p[-\mu]_p[-b]_p[\Gamma(\mu-p-a)}{p!\,\Gamma(-a)} \quad \begin{pmatrix} a = m+n-k+\alpha-\beta-\gamma, \\ b = \gamma+\varepsilon-m-n. \end{pmatrix}$$

$$P = P(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\sin\pi\alpha\cdot\sin\pi(\gamma-\alpha-\beta)}{\sin\pi(\alpha+\beta)\cdot\sin\pi(\gamma-\alpha)} , \qquad (|P(\alpha,\beta,\gamma)| = A < \infty)$$

and

$$R = R(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon) = P(\alpha,\beta,\gamma)P(\alpha-\gamma,\delta,\varepsilon), \quad (|P(\alpha-\gamma,\delta,\varepsilon)| = A' < \infty) .$$

$$\left|\frac{\Gamma(k-\alpha+\gamma-m)}{\Gamma(k-\alpha)}\right| < \infty , \qquad \left|\frac{\Gamma(k-m-n+\varepsilon+\gamma-\alpha)}{\Gamma(k-m+\gamma-\alpha)}\right| < \infty .$$

When $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\mu \notin Z_0^+$, *we have the following four-multiple infinite sums.*

$$\sum_{k,m,n,p=0}^{\infty} M\cdot K\cdot L\cdot\left(\frac{-c}{z}\right)^k\left(\frac{z}{z-c}\right)^{m+n+p} = P(\alpha-\gamma-\varepsilon,\gamma+\varepsilon,\mu)R.$$

$$\times\frac{\Gamma(\varepsilon+\gamma-\alpha-\delta)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)\Gamma(\mu-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha-\delta)\Gamma(-\alpha-\beta)\Gamma(-\alpha)}\left(\frac{z-c}{z}\right)^{\alpha-\gamma-\varepsilon-\mu} ,$$

where

$|\Gamma(\varepsilon+\gamma-\alpha-\delta)/\Gamma(\gamma-\alpha-\delta)|$, $|\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)/\Gamma(-\alpha-\beta)|$, $|\Gamma(\mu-\alpha)/\Gamma(-\alpha)| < \infty$

and

$$|\Gamma(\mu-p-a)/\Gamma(-a)| < \infty, \quad |-c/z| < 1, \quad |z/z-c| < 1 .$$

Production of Some Fractional Differintegral Equations in N- Fractional Calculus

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press Co.

Abstract

In this article homogeneous fractional differintegral equations

1) $$\varphi_\gamma - \varphi \cdot a^\gamma \left(1 + \frac{\gamma}{a(z-b)}\right) = 0, \quad (a(z-b) \neq 0),$$

2) $$\varphi_{\gamma+2} - \varphi_{\gamma+1} \cdot a - \varphi_\gamma \cdot \left(\frac{a^2}{a(z-b)+\gamma}\right) = 0, \quad (a(z-b)+\gamma \neq 0),$$

and nonhomogeneous ones

3) $$\varphi_{\gamma+1} - \varphi_\gamma \cdot \frac{\gamma+1}{z-b} = (\cos z)_\gamma \left((z-b) + \frac{\gamma^2+\gamma}{z-b}\right), \quad ((z-b) \neq 0),$$

and

4) $$\varphi_{\gamma+2} - \varphi_{\gamma+1} \cdot \frac{\gamma+2}{z-b} + \varphi_\gamma \cdot \frac{(\gamma+1)(\gamma+2)}{(z-b)^2}$$

$$= -(\sin z)_\gamma (z-b) - (\cos z)_\gamma \cdot \frac{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}{(z-b)^2}, \quad ((z-b) \neq 0),$$

are discussed in the field of N- fractional calculus; where

$$\varphi \in \boldsymbol{F} = \{\varphi ; 0 \neq |\varphi_\gamma| < \infty, \gamma \in \boldsymbol{R}\}, \quad (\varphi = \varphi(z)).$$

Particular solutions are given by

$$\varphi = e^{az}(z-b)$$

to the equations 1) and 2), and

$$\varphi = (\sin z)(z-b)$$

to the equations 3) and 4), respectively, without the consideration of the arbitrary constants for integrations.

Notes on radius properties of p-valently starlike functions

Yutaka Shimoda (Kinki University)
Neslihan Uyanik (Atatürk University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}_p$ be the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n \qquad (p = 1, 2, 3, \cdots)$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. For $f(z) \in \mathcal{A}_p$, we say that $f(z) \in \mathcal{U}_p(\lambda)$ if it satisfies $\dfrac{f(z)}{z^p} \neq 0$ $(z \in \mathbb{U})$ and

$$\left| z^2 \left(\frac{z^{p-1}}{f(z)} - \frac{1}{z} \right)'' \right| \leqq \lambda \quad (z \in \mathbb{U})$$

for some real $\lambda > 0$.

When $p = 1$, Obradović and Ponnusamy [1] have introduced the class $\mathcal{U}_1(\lambda)$ of $f(z)$ which satisfy

$$\left| z^2 \left(\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{z} \right)' \right| \leqq \lambda \quad (z \in \mathbb{U}).$$

This is equivalent to

$$\left| \frac{z^2 f'(z)}{f(z)^2} - 1 \right| \leqq \lambda \quad (z \in \mathbb{U}).$$

Thus, if $\lambda < 1$, then $f(z)$ satisfying

$$\left| \frac{z^2 f'(z)}{f(z)^2} - 1 \right| < 1 \quad (z \in \mathbb{U})$$

is univalent in $\mathbb{U}$ by Ozaki and Nunokawa [2].

In the present talk, we write

$$\frac{z^p}{f(z)} = 1 + \sum_{n=p+1}^{\infty} b_n z^{n-p}$$

for $f(z) \in \mathcal{A}_p$. It follows that
$b_1 = -a_{p+1}$, $b_2 = a_{p+1}^2 - a_{p+2}$ and $b_3 = 2a_{p+1}a_{p+2} - a_{p+3} - a_{p+1}^3$.

Let $\mathcal{S}_p^*(\alpha)$ be the subclass of $\mathcal{A}_p$ consisting of all functions $f(z)$ which satisfy

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha \quad (z \in \mathbb{U})$$

for some real α $(0 \leqq \alpha < p)$. Further, let $\mathcal{S}_{1,p}^*(\alpha)$ be the subclass of $\mathcal{S}_p^*(\alpha)$ consisting of $f(z)$ with

$$\frac{z^p}{f(z)} = 1 + \sum_{n=p+1}^{\infty} b_n z^{n-p} \neq 0$$

and

$$b_n = |b_n| e^{i(n-p)\theta} \ (n = p+1, p+2, p+3, \cdots).$$

Lemma 1 *If $f(z) \in \mathcal{A}_p$ with*

$$\frac{z^p}{f(z)} = 1 + \sum_{n=p+1}^{\infty} b_n z^{n-p} \neq 0 \quad (z \in \mathbb{U})$$

satisfies

$$\sum_{n=p+3}^{\infty} (n-p-1)(n-p-2)|b_n| \leqq \lambda$$

for some real $\lambda > 0$, then $f(z) \in \mathcal{U}_p(\lambda)$.

Lemma 2 *If $f(z) \in \mathcal{S}_{1,p}^*(\alpha)$ with*

$$\frac{z^p}{f(z)} = 1 + \sum_{n=p+1}^{\infty} b_n z^{n-p} \neq 0 \quad (z \in \mathbb{U}),$$

then

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} (n+\alpha-2p)|b_n| \leqq p-\alpha.$$

Theorem 1 *Let $f(z) \in \mathcal{S}_{1,p}^*(\alpha)$ $(p-1 \leqq \alpha < p)$ and $\delta \in \mathbb{C}$ $(|\delta| < 1)$. Then $\delta^{-p} f(\delta)$ belongs to the class $\mathcal{U}_p(\lambda)$ for $0 < |\delta| \leqq |\delta_0(\lambda)|$, where $|\delta_0| = |\delta_0(\lambda)|$ is the smallest positive root of the equation*

$$\frac{|\delta|^3 \sqrt{2(1+1|\delta|^2)}}{(1-|\delta|^2)^2} \sqrt{p-\alpha-\sum_{n=p+1}^{p+2}(n+\alpha-p)} = \lambda.$$

References

[1] M. Obradovć and S. Ponnusamy, Radius properties for subclasses of univalent functions, Analysis **25**(2005), 183 – 188

[2] S. Ozaki and M. Nunokawa, The Schwarzian derivative and univalent functions, Proc. Amer. Math. Soc. **33**(1972), 392 – 394

Sufficient conditions for Strongly Carathéodory functions

Hitoshi Shiraishi (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{H}[a,n]$ denote the class of functions $p(z)$ of the form

$$p(z) = a + \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

which are analytic in $\mathbb{U}$, where $a \in \mathbb{C}$.

If $p(z) \in \mathcal{H}[a,n]$ satisfies

$$|\arg\{p(z)\}| < \frac{1}{2}\mu \qquad (0 < \mu \leqq 1)$$

in $\mathbb{U}$, then we say that $p(z)$ is Strongly Carathéodory function of order μ and written by $\mathcal{STP}(\mu)$.

Also, let $\mathcal{A}_n$ denote the class of functions

$$f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \dots \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

that are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ and $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_1$.

Further, let the class $\mathcal{STS}(\mu)$ of $f(z) \in \mathcal{A}_n$ be defined by

$$\mathcal{STS}(\mu) = \left\{ f(z) \in \mathcal{A}_n : \left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| < \frac{\pi}{2}\mu,\ 0 < \mu \leqq 1 \right\}$$

and $\mathcal{S}^* \equiv \mathcal{STS}(1)$. This class $\mathcal{STS}(\mu)$ was considered by Shiraishi and Owa [1].

Let $f(z)$ and $g(z)$ be analytic in $\mathbb{U}$. Then $f(z)$ is said to be subordinate to $g(z)$ if there exists an analytic function $w(z)$ in $\mathbb{U}$ satisfying $w(0) = 0$, $|w(z)| < 1$ $(z \in \mathbb{U})$ and $f(z) = g(w(z))$. We denote this subordination by

$$f(z) \prec g(z) \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

Denote by $\mathcal{Q}$ the class of functions $q(\zeta)$ that are analytic and injective on $\overline{\mathbb{U}} \setminus \mathbb{E}(q)$, where

$$\mathbb{E}(q) = \left\{ \zeta \in \partial\mathbb{U} : \lim_{z \to \zeta}\{q(z)\} = \infty \right\},$$

and such that $q'(\zeta) \neq 0$ $(\zeta \in \partial\mathbb{U} \setminus \mathbb{E}(q))$.

Futher, let the subclass of $\mathcal{Q}$ for which $q(0) = a$ be denoted by $\mathcal{Q}(a)$.

To proove our main results, we need the following lemma due to Miller and Mocanu [3].

Lemma 1 (Miller and Mocanu lemma). *Let $q(\zeta) \in \mathcal{Q}(a)$ and let $h(z) \in \mathcal{H}[a,n]$ with $h(z) \not\equiv a$. If $h(z) \not\prec q(\zeta)$, then there exist points $z_0 \in \mathbb{U}$ and $\zeta_0 \in \partial\mathbb{U} \setminus \mathbb{E}(q)$ for which*

$$h(z_0) = q(\zeta_0)$$

and

$$z_0 h'(z_0) = m\zeta_0 q'(\zeta_0) \qquad (m \geqq n \geqq 1).$$

Applying Lemma 1, we derive

Theorem 1. *Let*

$$g : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$$

with

$$A = \inf_{z\in\mathbb{U}} \{\mathrm{Re}(g(z))\cos\alpha - |\mathrm{Im}(g(z))\sin\alpha|\} > 0 \qquad (z \in \mathbb{U}) \tag{1}$$

for $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. If $p(z) \in \mathcal{H}[1,n]$ satisfies

$$\mathrm{Re}(p(z) + g(z)zp'(z)) > \frac{1}{2nA}((\cos\alpha + 2nA)\sin^2\alpha - n^2A^2\cos\alpha) \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

then

$$|\arg\{p(z)\}| < \frac{\pi}{2} - |\alpha| \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

Putting $p(z) = \dfrac{zf'(z)}{f(z)} = 1 + na_{n+1}z^n + \dots$ $(f(z) \in \mathcal{A}_n)$ and $\dfrac{\pi}{2}\mu = \dfrac{\pi}{2} - |\alpha|$ in Theorem 1, we have

Corollary 1. *Let*

$$g : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$$

with

$$A = \inf_{z\in\mathbb{U}} \left\{\mathrm{Re}(g(z))\sin\frac{\pi}{2}\mu - \left|\mathrm{Im}(g(z))\cos\frac{\pi}{2}\mu\right|\right\} > 0 \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for $0 < \mu \leqq 1$. If $f(z) \in \mathcal{A}_n$ satisfies

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} + g(z)\frac{zf'(z)}{f(z)}\left(1 - \frac{zf'(z)}{f(z)} + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right)$$
$$> \frac{1}{2nA}\left(\left(\sin\frac{\pi}{2}\mu + 2nA\right)\cos^2\frac{\pi}{2}\mu - n^2A^2\sin\frac{\pi}{2}\mu\right) \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

then $f(z) \in \mathcal{STS}(\mu)$.

References

[1] H. Shiraishi and S. Owa, *Some sufficient problems for certain univalent functions*, Far East J. Math. Sci. **30**(2008), 147-155.

[2] I. H. Kim and N. E. Cho, *Sufficient conditions for Carathéodory functions*, Comput. Math. Appl. **59**(2010), 2067-2073.

[3] S. S. Miller and P. T. Mocanu, *Differential Subordinations*, Theory and applications. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 225. Marcel Dekker, Inc., New York, 2000.

Some properties for certain class of univalent functions

Kazuo Kuroki (Kinki University)
Toshio Hayami (Kinki University)
Neslihan Uyanik (Atatürk University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

For a positive integer n, let $\mathcal{A}_n$ denote the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z : z \in \mathbb{C} \text{ and } |z| < 1\}$. In particular, we write $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$. The subclass of $\mathcal{A}$ consisting of all univalent functions $f(z)$ in $\mathbb{U}$ is denoted by $\mathcal{S}$. In 1972, Ozaki and Nunokawa proved an univalence criterion for $f(z) \in \mathcal{A}$ as follows.

Lemma 1 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$\left| \frac{z^2 f'(z)}{(f(z))^2} - 1 \right| < 1 \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

then $f(z)$ is univalent in $\mathbb{U}$, which means that $f(z) \in \mathcal{S}$.

Further, let $\mathcal{T}_n(\mu)$ be the class of functions $f(z) \in \mathcal{A}_n$ which satisfy the inequality

$$\left| \frac{z^2 f'(z)}{(f(z))^2} - 1 \right| < \mu \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some real number μ with $0 < \mu \leqq 1$. According to Lemma 1, it is clear that $\mathcal{T}_n(\mu) \subset \mathcal{S}$.

A function $f(z) \in \mathcal{A}$ is said to be starlike of order α in $\mathbb{U}$ if it satisfies

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z f'(z)}{f(z)} \right) > \alpha \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some real number α with $0 \leqq \alpha < 1$. We denote by $\mathcal{S}^*(\alpha)$ the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of all functions $f(z)$ which are starlike of order α in $\mathbb{U}$.

In the present talk, we deduce several properties for $f(z) \in \mathcal{T}_n$ as follows.

Theorem 1 *If $f(z) \in \mathcal{T}_n$ with $n \neq 1$, then*

$$(i) \quad \left| \frac{z}{f(z)} - 1 \right| < \frac{1}{n-1} \qquad (z \in \mathbb{U})$$

$$(ii) \quad \mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0 \ for \ |z| < \left\{ \frac{(n-1)^2 - (n-1)\sqrt{(n-1)^2 - 1}}{2} \right\}^{\frac{1}{2n}}$$

$$(iii) \quad \mathrm{Re}\, f'(z) > 0 \ for \ |z| < \left\{ \frac{(n-1)\sqrt{(n-1)^2 + 8} - (n-1)^2}{4} \right\}^{\frac{1}{n}}.$$

Moreover, we discuss starlikeness of order α for $f(z) \in \mathcal{T}_n(\mu)$.

Theorem 2 *If $f(z) \in \mathcal{A}_n$ with $n \neq 1$ satisfies*

$$\left| \frac{z^2 f'(z)}{\left(f(z)\right)^2} - 1 \right| < \frac{(n-1)(1-\alpha)}{\sqrt{(n-1+\alpha)^2 + (1-\alpha)^2}} \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some real number α with $0 \leqq \alpha < 1$, then $f(z) \in \mathcal{S}^*(\alpha)$.

Remark 1 According to Theorem 2, the class $\mathcal{T}_n(\mu)$ is a subclass of $\mathcal{S}^*(\alpha)$ for

$$0 < \mu \leqq \frac{(n-1)(1-\alpha)}{\sqrt{(n-1+\alpha)^2 + (1-\alpha)^2}},$$

where $n \neq 1$ and $0 \leqq \alpha < 1$.

References

[1] S. Ozaki and M. Nunokawa, *The Schwarzian derivative and univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **33** (1972), 392–394.

[2] V. Singh, *On a class of univalent functions*, Internat. J. Math. Math. Sci. **23** (12) (2000), 855–857.

Hypocycloid of $n+1$ cusps harmonic function

Toshio Hayami (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

For holomorphic functions $f(z)$ and $g(z)$ in a simply connected domain D, a complex-valued harmonic function $h(z)$ is given by $h(z) = f(z)+\overline{g(z)}$. The theory and applications of harmonic mappings were discussed by Duren [1]. Then, Mocanu [3] has shown the following result for the univalence of harmonic functions.

Remark 1 Let $f(z)$ and $g(z)$ be holomorphic functions in a domain D. If the function $f(z)$ is convex in D and

$$|g'(z)| < |f'(z)| \qquad (z \in D),$$

then the harmonic function $h(z) = f(z) + \overline{g(z)}$ is univalent and sense preserving in D.

In fact, for holomorphic functions

$$f(z) = z \quad \text{and} \quad g(z) = \frac{1}{n}z^n \qquad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, considering the harmonic function $h(z)$ given by

$$h(z) = f(z) + \overline{g(z)} = z + \frac{1}{n}\overline{z}^n,$$

it is clear that $f(z) = z$ is convex in $\mathbb{U}$, $|g'(z)| < |f'(z)|$ $(z \in \mathbb{U})$ and $h(z)$ is univalent and sense preserving in $\mathbb{U}$. This harmonic function $h(z)$ satisfies

$$\mathrm{Re}\left(\frac{Dh(z)}{h(z)}\right) > 0 \qquad (z \in \mathbb{U})$$

where

$$Dh(z) = z\frac{\partial h(z)}{\partial z} - \overline{z}\frac{\partial h(z)}{\partial \overline{z}},$$

which means that $h(z)$ is also starlike in $\mathbb{U}$ (see, [2]). Furthermore, it is well-known that $h(z)$ maps $\mathbb{U}$ onto the region inside a hypocycloid of $n+1$ cusps (for detail, [1, p. 115]).

In the present talk, we discuss the condition for harmonic functions $h(z)$ to be univalent and sense preserving in $\mathbb{U}$, and to map $\mathbb{U}$ onto the region inside a hypocycloid of $n+1$ cusps.

Theorem 1 *Let $f(z)$ be holomorphic in the closed unit disk $\overline{\mathbb{U}}$, with $f'(z) \neq 0$ for all $z \in \overline{\mathbb{U}}$ and let*

$$F(t) = (n+1)t + 2\arg(f'(e^{it})) \qquad (-\pi \leqq t < \pi), \quad n = 2, 3, 4, \cdots .$$

If for each $k \in K = \left\{0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm \left[\frac{n+3}{2}\right]\right\}$ where $[\ ]$ denote the Gauss symbol, the equation

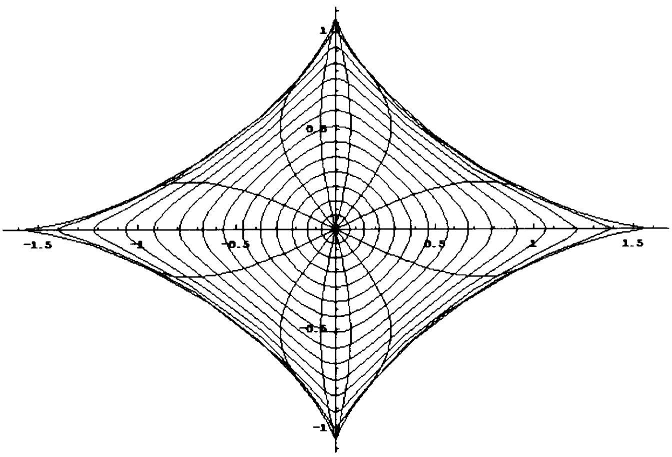
$$F(t) = 2k\pi$$

has at most a single root in $[-\pi, \pi)$ and for any $k \in K$ there exist exactly $(n+1)$ such roots in $[-\pi, \pi)$, then the harmonic function

$$h(z) = f(z) + \overline{g(z)}$$

with $g'(z) = z^{n-1}f'(z)$ is univalent in $\mathbb{U}$, sense preserving and the image of $\mathbb{U}$ by $h(z)$ is a hypocycloid of $n+1$ cusps.

Example 1 Let $f(z) = z + \dfrac{1}{6}z^3$. Then, $f(z)$ satisfies the condition of Theorem 1 with $n = 3$. Therefore, the harmonic function $h(z) = z + \dfrac{1}{6}z^3 + \dfrac{1}{3}\overline{z}^3 + \dfrac{1}{10}\overline{z}^5$ is univalent in $\mathbb{U}$, sense preserving and the image of $\mathbb{U}$ by $h(z)$ is a hypocycloid of four cusps.



The image of $\mathbb{U}$ by $h(z) = z + \dfrac{1}{6}z^3 + \dfrac{1}{3}\overline{z}^3 + \dfrac{1}{10}\overline{z}^5$

References

[1] P. L. Duren, *Harmonic Mappings in the Plane*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[2] P. T. Mocanu, *Starlikeness and convexity for non-analytic functions in the unit disc*, Mathematica (Cluj) **22**(1980), 77–83.

[3] P. T. Mocanu, *Sufficient conditions of univalency for complex functions in the class* C^1, Rev. d'Anal. Numeér. et de Théorie Approx. **10**(1981), 75–81.

[4] P. T. Mocanu, *Three-cornered hat harmonic functions*, Complex Var. Elliptic Equ. **54**(2009), 1079–1084.

An application of convolution integral

Junichi Nishiwaki (Setsunan University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}$ denote the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

that are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. A function $f(z) \in \mathcal{A}$ is said to be starlike of order α in $\mathbb{U}$ if it satisfies

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some α $(0 \leqq \alpha < 1)$. The class of starlike functions $f(z)$ of order α is denoted by $\mathcal{S}^*(\alpha)$ and $\mathcal{S}^*(0) \equiv \mathcal{S}^*$.

Lemma 1 *if $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies the following coefficient inequality:*

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha)|a_n| \leqq 1 - \alpha$$

for some α $(0 \leqq \alpha < 0)$, then $f(z) \in \mathcal{S}^*$.

We define the subclass $\mathcal{T}^*(\alpha)$ of $\mathcal{S}^*(\alpha)$ consisting of functions $f(z)$ which satisfy the coefficient inequality (1.1).

For functions $f_j(z) \in \mathcal{A}$ $(j = 1, 2)$ given by

$$f_j(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n,j} z^n \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

the Hadamard product (or convolution) of $f_1(z)$ and $f_2(z)$ is defined by

$$(f_1 * f_2)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n,1} a_{n,2} z^n.$$

Furthemore, We also define the convolution integral of $f_1(z)$ and $f_2(z)$ below:

$$(f_1 \circledast f_2)(z) = \int_0^z \frac{(f_1 * f_2)(t)}{t} = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{n,1} a_{n,2}}{n} z^n.$$

In our present investigation, we aim at presenting some interesting application of convolution integral. For functions $f_j(z) \in \mathcal{A}$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$ given by

$$f_j(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n,j} z^n \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

Bernardi integral is defined by

$$B_m(z) = \frac{1+c_m}{z^{c_m}} \int_0^z t^{c_m - 1} f(t)dt \qquad (c_m > -1),$$

and by making use of above operator, we consider the new application of convolurion integral operator as following:

$$\begin{aligned}(B_1 * B_2)(z) &= \frac{1+c_1}{z^{c_1}} \int_0^z t^{c_1-1} f(t)dt * \frac{1+c_2}{z^{c_2}} \int_0^z t^{c_2-1} f(t)dt \\ &= z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1+c_1)(1+c_2)}{(n+c_1)(n+c_2)} a_{n,1} a_{n,2} z^n.\end{aligned}$$

Hence we see the application of convolution integral of $f_1(z)$, $f_2(z)$, $\cdots$ and $f_m(z)$ below:

$$(B_1 * \cdots * B_m)(z) = \frac{1+c_1}{z^{c_1}} \int_0^z t^{c_1-1} f(t)dt * \cdots * \frac{1+c_m}{z^{c_m}} \int_0^z t^{c_m-1} f(t)dt.$$

For functions $f_j(z) \in \mathcal{A}$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$, the familiar Hölder-type inequality assumes the form

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{m} |a_{n,j}| \right) \leqq \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{n=2}^{\infty} |a_{n,j}|^{p_j} \right)^{\frac{1}{p_j}},$$

where $p_j > 1$ $(j = 1, 2, 3, \cdots, m)$ and $\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j} \geqq 1$.

Theorem 1 *If $f_j(z) \in \mathcal{T}^*(\alpha_j)$ for each $j = 1, 2, \cdots, m$, then $(B_1 * \cdots * B_m) \in \mathcal{T}^*(\beta)$ with*

$$\beta = 1 - \frac{\prod_{j=1}^{m} (1-\alpha_j)(1+c_j)}{\prod_{j=1}^{m} (2-\alpha_j)(2+c_j) - \prod_{j=1}^{m} (1-\alpha_j)(1+c_j)}$$

References

[1] P. L. Duren *Univalent functions*, A series of Comprehensive studies in Mathematics 259, Springer-verlag, New York, Berlin, Heiderberg, Tokyo (1983).

[2] J. Nishiwaki and S. Owa, *An application of Hölder inequality for convolutions*, Bull. Allahabad Math. Soc. **23**(2008) 235-244.

[3] S. Owa and H. M. Srivastava, *Some generalized convolution properties associated with certain subclasses of analytic functions*, J. Inequl. Pure. Appl. Math. **3** Article42(2002), 1-13.

[4] A. Schild and H. Silverman, *Convolution of univalent functions with negative coefficients*, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. **29**(1975), 99-107.

[5] H. Silverman, *Univalent functions with negative coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc. **51**(1975), 109-116.

行列の最小消去多項式候補を利用した固有ベクトル計算

照井　章　(筑波大学)*1
田島　慎一　(筑波大学)*2

これまでに, 著者 (田島) ら [2] は, 行列とその特性多項式が与えられており, かつ特性多項式が既約で, すべての固有値が相異なる場合に, 固有ベクトルを固有値の多項式として厳密に計算する効率的な算法を与えた. 行列のスペクトル分解の理論により, 着目している固有値に属する固有ベクトルは, その固有値におけるレゾルベントの留数値から求まる射影行列の列ベクトルによって与えられるが, この算法では, 留数計算を, 特性多項式を用いた多項式の計算に帰着させて行うことにより, 行列のスペクトル分解を並列に計算するとともに, 固有ベクトルを従来より大幅に効率的に計算可能であることを示した.

これと並行して, 著者 (田島) [1] は, レゾルベントの留数解析に基づき, 行列の最小消去多項式を用いて, 行列のスペクトル分解を効率的に求める算法を与えた. この算法では, 行列の最小多項式を用いる場合と比較して, 行列のスペクトル分解をより効率的に計算可能になる. さらに, 行列の最小消去多項式の計算をより効率化するため, 最小消去多項式候補を効率的に計算した上で, 最小消去多項式を計算する算法を提案している.

本稿では, これらの研究成果に基づき, 行列の最小消去多項式候補を用いて, 行列の固有ベクトルを効率的に計算する算法を提案する.

行列Aを, 整数を要素にもつn次正方行列とし, Eを単位行列とする. Aの特性多項式$\chi_A(\lambda)$は次式の形で, 整数上の既約因数分解をあらかじめ求めているものとする.

$$\chi_A(\lambda) = f_1(\lambda)^{m_1} f_2(\lambda)^{m_2} \qquad f_p(\lambda)^{m_p} \qquad f_q(\lambda)^{m_q}. \tag{1}$$

本稿で提案する算法の目的は, 式 (1) のある既約因子$f_p(\lambda)$ $(1 \le p \le q)$に対し, $f_p(\alpha) = 0$ をみたすAの固有値$\lambda = \alpha$に属する固有ベクトルを求めることである. なお, 本稿では, $m_p = 1$, すなわち, 注目する固有値の重複度は1と仮定する (従来の算法 [2] のように, χ_A全体が既約である必要はない).

多項式$f_p(\lambda)$に対し, 有理式$\Psi_p(x, y)$を$\Psi_p(x, y) = (f_p(x) - f_p(y))/(x - y)$で定義する. $\Psi_p(x, y)$は実際には多項式になることに注意する.

$\boldsymbol{e}_j = {}^t(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$を, 第$j$成分が1に等しい$n$次単位ベクトルとする. Aの第j列の最小消去多項式$\pi_{A,j}(\lambda)$は, イデアル$\{P(\lambda) \mid P(A)\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{0}\}$のモニックな生成元として定義される. ここで, $\pi_{A,j}(\lambda)$は$f_p(\lambda)$を因子にもつと仮定

キーワード：レゾルベント, 留数解析, スペクトル分解, 最小消去多項式

[1] 305-8571 茨城県つくば市天王台 1-1-1 筑波大学 大学院数理物質科学研究科 数学専攻
e-mail: terui@math.tsukuba.ac.jp
web: http://researchmap.jp/aterui
[2] 305-8571 茨城県つくば市天王台 1-1-1 筑波大学 大学院数理物質科学研究科 数学専攻
e-mail: tajima@math.tsukuba.ac.jp

し, $\pi_{A,j}(\lambda) = f_p(\lambda)\ \ g_{j,p}(\lambda)$ と表す (すなわち, $g_{j,p}(\lambda)$ は $f_p(\lambda)$ 以外の $\pi_{A,j}(\lambda)$ の因子の積である).

このとき, 以下の命題が成り立つ.

命題 1. $\chi_A(\lambda)$, $f_p(\lambda)$, $\Psi_p(x, y)$, $\pi_{A,j}(\lambda)$ を上記で与えられる多項式とする. このとき, 列ベクトル $\rho(\lambda)$ を

$$\rho(\lambda) = \Psi_p(A, \lambda E) g_{j,p}(A) \boldsymbol{e}_j$$

によって定めると, $f_p(\alpha) = 0$ をみたす A の固有値 $\lambda = \alpha$ に対し, 列ベクトル $\rho(\alpha)$ は

$$A\ \ \rho(\alpha) = \alpha\ \ \rho(\alpha),$$

をみたす. すなわち $\rho(\alpha)$ は A の固有値 $\lambda = \alpha$ に属する固有ベクトルである. □

さて, 本稿の算法では, 最小消去多項式**候補**を用いて固有ベクトル計算を行う. よって, 与えられた最小消去多項式候補が, 実際に最小消去多項式であることを確認する必要がある. 本稿で提案する最小消去多項式候補を用いた固有ベクトル計算は, 以下の流れになる.

1. [**固有ベクトル候補の計算**] 注目している A の固有値 $\lambda = \alpha$, A の第 j 列の最小消去多項式候補 $P_j(\lambda) = f_p(\lambda)\ \ g_{j,p}(\lambda)$ に対し
$$\rho(\alpha) = \Psi_p(A, \alpha E)\ g_{j,p}(A)\ \boldsymbol{e}_j \tag{2}$$
を計算する.

2. [**最小消去多項式のチェック**] $P_j(\lambda)$ が A の第 j 列の最小消去多項式になるかどうかをチェックする. 具体的には
$$P_j(A)\ \boldsymbol{e}_j = f_p(A)\ g_{j,p}(A)\ \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{0} \tag{3}$$
が成り立つことを確かめる.

本算法の特徴の一つは, 固有ベクトル候補の計算を先に行い, 引き続いて最小消去多項式のチェックを行っていることである. これは, 式 (2) の $\Psi_p(A, \alpha E)$ を Horner 法で計算すると, さらに 1 ステップの Horner 法の計算で, 式 (3) の $f_p(A)$ が導かれる事実に基づく. 実際の算法では, 式 (2), (3) の計算において, 行列・ベクトル積の Horner 法を用いることにより, さらなる計算の効率化を図っている.

参考文献

[1] 田島慎一. 微分作用素を用いたレゾルベントの留数解析と行列のスペクトル分解. *Computer Algebra — Design of Algorithms, Implementations and Applications*, 数理解析研究所講究録. 京都大学数理解析研究所, 2010. 印刷中.

[2] 田島慎一, 樋口水紀. レゾルベントを用いた固有ベクトル計算. *Computer Algebra — Design of Algorithms, Implementations and Applications*, 数理解析研究所講究録, 第 1666 巻, pp. 57–64. 京都大学数理解析研究所, October 2009.

Representing and interpolating sequences on parabolic Bloch type spaces

菱川　洋介 (岐阜高専・一般学科)
山田　雅博 (岐阜大・教育)

H を $n+1$ 次元実ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}(n \geq 1)$ の上半空間とする。すなわち $H := \{(x,t) = (x_1, \ldots, x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1}; x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$ とする。$0 < \alpha \leq 1$ に対し，$L^{(\alpha)} = \partial_t + (-\Delta_x)^\alpha$ とする。ここで，$\partial_t = \partial/\partial t$，$\partial_j = \partial/\partial x_j$ $\Delta_x = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$ は x に関するラプラシアンである。また，H 上の連続関数 u が $L^{(\alpha)}$-調和であるとは，超関数の意味で $L^{(\alpha)}u = 0$ となるときをいう。

$m(\alpha) := \min\{1, 1/(2\alpha)\}$，$\sigma > -m(\alpha)$ に対し，放物型 Bloch type 空間 $\mathcal{B}_\alpha(\sigma)$ を次のように定義する。

$$\mathcal{B}_\alpha(\sigma) := \{u \in C^1(H) \mid u \text{ は } L^{(\alpha)}\text{-調和}, \|u\|_{\mathcal{B}_\alpha(\sigma)} < \infty\}$$

ここで，

$$\|u\|_{\mathcal{B}_\alpha(\sigma)} := |u(0,1)| + \sup_{(x,t)\in H} t^\sigma \left\{ t^{\frac{1}{2\alpha}} |\nabla_x u(x,t)| + t|\partial_t u(x,t)| \right\}$$

および $\nabla_x = (\partial_1, \ldots, \partial_n)$ である。また，

$$\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma) := \{u \in \mathcal{B}_\alpha(\sigma) \mid u(0,1) = 0\}$$

とする。特に，$\alpha = 1/2$ かつ $\sigma = 0$ のとき，$\mathcal{B}_{1/2}(0)$ は，調和 Bloch 空間になることがわかっている。放物型 Bloch type 空間 $\mathcal{B}_\alpha(\sigma)$ は，[2] において導入され，この論文でこれらの空間の基本的な性質について研究された。

まず，論文 [2] において示された再生公式について述べることにしよう。論文 [2] では，より一般的な形の再生公式が述べられているが，ここでは簡単な場合についてだけ述べる。まず，$W^{(\alpha)}(x,t)$ を $L^{(\alpha)}$ の基本解とする。また，$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ および $k \in \mathbb{N}_0$ とする。このとき，$X = (x,t), Y = (y,s) \in H$ に対し，

$$\omega_\alpha^k(X;Y) = \omega_\alpha^k(x,t;y,s) := (-\partial_t)^k W^{(\alpha)}(x-y, t+s) - (-\partial_t)^k W^{(\alpha)}(-y, 1+s)$$

と書くことにする。また，これ以降 $0 < \alpha \leq 1$，$\sigma > -m(\alpha)$，および $k \in \mathbb{N}_0$ は $k > \sigma$ をみたすとする。

<u>$\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ における再生公式</u>

全ての $u \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ に対し，以下が成立する。

$$u(x,t) = \frac{-1}{k!} \int_H \partial_t u(y,s) \omega_\alpha^k(x,t;y,s) s^k dV(y,s), \qquad (x,t) \in H$$

ここで，dV は H 上の Lebesgue 体積測度である。

我々は，この再生公式の discrete version を得たい，すなわち atomic 分解とも呼ばれる形式を得たいと考え，それらが得られる点列とはどのようなものかについて研究した。以下で主要な結果を述べる。$\mathbb{X} = \{X_j\} = \{(x_j, t_j)\}$ を H の点列とし，$\{\lambda_j\} \in \ell^\infty$ に対し，

$$U_\sigma^k\{\lambda_j\}(X) := \sum_j \lambda_j t_j^{\frac{n}{2\alpha}+k-\sigma} \omega_\alpha^k(X; X_j), \quad X \in H$$

と書くことにする。全ての $u \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ に対し，$\{\lambda_j\} \in \ell^\infty$ が存在して $u(X) = U_\sigma^k\{\lambda_j\}(X)$ と書ける，すなわち $U_\sigma^k : \ell^\infty \to \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ が全射ならば我々の欲する再生公式の discrete version が得られたと考える。よって，このようなことが起こる条件について調べていきたい。

まず，U_σ^k の有界性について得られた結果を述べる。$Y = (y, s) \in H$ および $0 < \delta < 1$ に対し，$S_\delta^{(\alpha)}(Y) \subset H$ を α-放物型 cylinder とする。これは，点 Y を中心とする近傍のようなものである。点列 $\{X_j\}$ が α-放物型の意味で δ-separated であるとは，$S_\delta^{(\alpha)}(X_i) \cap S_\delta^{(\alpha)}(X_j) = \emptyset$ $(i \neq j)$ なるときをいう。また，$\widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha,0}(\sigma)$ を放物型 little Bloch type 空間（定義は，割愛するが，$\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ の部分空間であることは注意しておく）とし，$c_0 := \left\{\{\lambda_j\} \in \ell^\infty; \lim_{j\to\infty} \lambda_j = 0\right\}$ とする。下の定理 1 および定理 2 は，より一般的な形で得られていることを付記しておく。

<u>定理 1.</u>

$U_\sigma^k : \ell^\infty \to \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ が有界かつ U_σ^k が c_0 を $\widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha,0}(\sigma)$ へ写すための必要十分条件は，$\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \cup \quad \cup \mathbb{X}_M$ と $\mathbb{X}$ が点列 $\mathbb{X}_i$ の有限和に分解できて，各点列 $\mathbb{X}_i$ が α-放物型の意味で δ-separated となっていることである。

次に，$U_\sigma^k : \ell^\infty \to \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ が全射となるための十分条件を得たので，それについて述べる。

<u>定理 2.</u>

十分小さな $0 < \delta < 1$ について，$H = \cup_j S_\delta^{(\alpha)}(X_j)$ であり，かつ $0 < \varepsilon < \delta$ が存在して $\{X_j\}$ が α-放物型の意味で ε-separated ならば，全ての $u \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ に対し，$\{\lambda_j\} \in \ell^\infty$ が存在して $u(X) = U_\sigma^k\{\lambda_j\}(X)$ と書ける，すなわち我々の欲する再生公式の discrete version が得られる。このとき，さらに全ての $u \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha,0}(\sigma)$ に対し，$\{\lambda_j\} \in c_0$ が存在して $u(X) = U_\sigma^k\{\lambda_j\}(X)$ となることも成立している。

References

[1] Y. Hishikawa, Representing sequences on parabolic Bergman spaces, to appear in J. Korean Math. Soc..

[2] Y. Hishikawa and M. Yamada, Function spaces of parabolic Bloch type, to appear in Hiroshima Mathematical Journal.

[3] M. Nishio, K. Shimomura and N. Suzuki, α-parabolic Bergman spaces, Osaka J. Math. **42**(2005), 133–162.

Notes to the defect relation of holomorphic curves

戸田　暢茂

1. Introduction **(a)** Let $f = [f_1, \quad , f_{n+1}]$ be a holomorphic curve from $\boldsymbol{C}$ into $P^n(\boldsymbol{C})$ with a reduced representation

$$(f_1, \quad , f_{n+1}) \ : \ \boldsymbol{C} \ \rightarrow \ \boldsymbol{C}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{0}\},$$

where n is a positive integer. We suppose that f is linearly non-degenerate over $\boldsymbol{C}$ and transcendental. Let $T(r, f)$ be its characteristic function and for $\boldsymbol{a} = (a_1, \quad , a_{n+1}) \in \boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$, we put $(\boldsymbol{a}, f) = a_1 f_1 + \quad + a_{n+1} f_{n+1}$ and we use the notations $N(r, \boldsymbol{a}, f), N_n(r, \boldsymbol{a}, f), \delta(\boldsymbol{a}, f)$ and $\delta_n(\boldsymbol{a}, f)$ as usual. Let $S(r, f)$ be any quantity satisfying

$$S(r, f) = o(T(r, f)) \ \ (r \rightarrow \infty; \ r \notin E),$$

where E is a subset of $(0, \infty)$ of finite linear measure.

(b) Let X be a subset of $\boldsymbol{C}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ in $N-$subgeneral position satisfying $\#X \geq 2N - n + 1$, where N is an integer such that $N \geq n$.

Defect Relation. $\sum_{\boldsymbol{a} \in X} \delta_n(\boldsymbol{a}, f) \leq 2N - n + 1. \qquad (1)$

We are interested in a holomorphic curve f for which the equality holds in (1). Let $X^1 = \{\boldsymbol{a} \in X \mid \delta_n(\boldsymbol{a}, f) = 1\}$. Then, $X^1 \leq 2N - n + 1$.

For any non-empty, finite subset S of X, we denote by $d(S)$ the dimension of the subspace generated by elements of S.

Theorem A. Suppose that the equality holds in (1). Then, we have the following results.

(I) ([1,Theorem 3.2]) If $d(X^1) = n + 1$, then $\#X^1 = 2N - n + 1$.

(II) ([3,Theorem 6.1]) If (i) $N > n = 2m$ ($m \in \boldsymbol{N}$) and (ii) $d(X^1) \leq n$, then

$$\#X^1 = d(X^1) + N - n.$$

In this talk we consider the set X with an additional condition:

Condition A. For any $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in X$, $\boldsymbol{a} \neq c\boldsymbol{b}$ ($c \in \boldsymbol{C}$).

We denote by X_o the set X satisfying Condition A. We put

$$X_o^1 = \{\boldsymbol{a} \in X_o \mid \delta_n(\boldsymbol{a}, f) = 1\}.$$

The purpose of this talk is to estimate the defect relation for some holomorphic curves and $\#X_o^1$ etc.

2. Results

I. When $N > n = 2$, we have the defect relation

$$\Sigma_{\boldsymbol{a} \in X_o} \delta_2(\boldsymbol{a}, f) \leq 2N - 5/4 (= 2N - n + 1 - 1/2n|_{n=2}).$$

II. For $n \geq 3$, there are a transcendental holomorphic curve f linearly non-degenerate over $\boldsymbol{C}$ and a set X_o such that $\Sigma_{\boldsymbol{a} \in X_o} \delta(\boldsymbol{a}, f) = 2N - n + 1$.

III. Let $\mathcal{M}_f = \{\varphi \mid \text{meromorphic in } |z| < \infty;\ T(r, \varphi) = S(r, f)\}$. If f is linearly non-degenerate over $\mathcal{M}_f$, then we have the followings:

(a) $\# X_o^1 \leq n + 1$. (b) For any $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n+2} \in X_o$,

$$\limsup_{r \to \infty} (\Sigma_{j=1}^{n+2} N_n(r, \boldsymbol{a}_j, f))/T(r, f) > 0.$$

(c) When $N > n = 2m$ $(m \geq 2)$, $\Sigma_{\boldsymbol{a} \in X_o} \delta_n(\boldsymbol{a}, f) < 2N - n + 1$.

IV. Let $P_o = \{\boldsymbol{a} \in X_o \mid (\boldsymbol{a}, f) \text{ has at most a finite number of zeros}\}$. If f is linearly non-degenerate over $\boldsymbol{C}(z)$, then we have the followings:

(a) $\# P_o \leq n + 1$. (b) For any $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n+2} \in X_o$,

$$\lim_{r \to \infty} (\Sigma_{j=1}^{n+2} N_n(r, \boldsymbol{a}_j, f) / \log r = \infty.$$

V. For $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{C}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ with multiplicity μ we put

$$\mu_n(\boldsymbol{a}, f) = (1 - n/\mu)^+ = 1 - n/\max(\mu, n),$$

where μ is the multiplicity of the zeros of $(\boldsymbol{a}, f)$ (see [2]) and we set

$$M_o^1 = \{\boldsymbol{a} \in X_o \mid \mu_n(\boldsymbol{a}, f) = 1\}.$$

Then, we have the followings:

(a) $\# M_o^1 \leq n + 1$. (b) For any $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n+2} \in X_o$, at least one of $(\boldsymbol{a}_j, f)$ $(j = 1, \ldots, n + 2)$ has zeros.

(c) Suppose that $d(X_o^1) \geq 1$ and that $N > n \geq 3$. Then,

$$\Sigma_{\boldsymbol{a} \in X_o} \mu_n(\boldsymbol{a}, f) < 2N - n + 1.$$

(d) Suppose that $N > n = 2m$ $(m \geq 2)$. Then,

$$\Sigma_{\boldsymbol{a} \in X_o} \mu_n(\boldsymbol{a}, f) < 2N - n + 1.$$

References

[1] N. Toda: On holomorphic curves extremal for the truncated defect relation and some applications. Proc. Japan Acad., Ser. A, 81-6(2005), 99-104.

[2] N. Toda: On holomorphic curves extremal for the μ_n-defect relation. Kodai Math. J., 30(2007), 111-130.

[3] N. Toda: On the truncated defect relation for holomorphic curves. Kodai Math. J., 32(2009), 352-289.

合同部分群に関するlength spectrumの重複度について

橋本康史 (九州先端科学技術研究所)*

まず，$H := \{x + y\sqrt{-1} \mid y > 0\}$ を複素上半平面，Γ を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の離散部分群で，対応するリーマン面 $\Gamma\backslash H$ の体積が有限であるようなものとする．次に，$\mathrm{Prim}(\Gamma)$ を Γ の素な双曲的共役類の集合とし，$\mathrm{Tr}(\Gamma) := \{\mathrm{tr}\gamma \mid \gamma \in \mathrm{Prim}(\Gamma)\}$，$m_\Gamma(t) := \#\{\gamma \in \mathrm{Prim}(\Gamma) \mid \mathrm{tr}\gamma = t\}$ とおく．このとき，$\mathrm{tr}\gamma$ は $\gamma \in \mathrm{Prim}(\Gamma)$ に対応する $\Gamma\backslash H$ 上の素測地線の長さを用いてあらわされるので，$\{(t, m_\Gamma(t))\}_{t\in\mathrm{Tr}(\Gamma)}$ は $\Gamma\backslash H$ 上のlength spectrumと同一視される．これは，リーマン面の特徴づけという点で，重要な意味をもち，実際に，2つの種数2以上のコンパクトリーマン面に対して，length spectrum が一致することと，ラプラシアンのスペクトルが一致することが同値であることが知られている [4].

さて，重複度 $m_\Gamma(t)$ に対しては，どんな Γ に対しても $\{m_\Gamma(t)\}$ が非有界であること [6] や，$m_\Gamma(t)$ の和が

$$\sum_{t\in\mathrm{Tr}(\Gamma),t<x} m_\Gamma(t) \sim \mathrm{li}(x^2) := \int_2^x \frac{dt}{\log t} \sim \frac{x^2}{2\log x}$$

という増大度をもつこと（素測地線定理，[3] など）がわかっている．また，Γ が数論的（arithmetic）であるときは，

$$\#\{t \in \mathrm{Tr}\Gamma, t < x\} < \exists c_1 x \quad \text{as} \quad x \to \infty$$

で，重複度 $m_\Gamma(t)$ の t に対する増大度が $\exists c_2 t/\log t$ に近く，Γ が非数論的（non-arithmetic）なときは，

$$\#\{t \in \mathrm{Tr}\Gamma, t < x\} \gg x \quad \text{as} \quad x \to \infty$$

で，重複度 $m_\Gamma(t)$ の増大度は $t/\log t$ よりも本質的に小さいと考えられているが，これについては，まだ厳密な証明は得られていない．

本講演では，Γ が $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群である場合の $m_\Gamma(t)$ の増大度を調べる．このような Γ に対して，$\mathrm{Tr}\Gamma$ は $\mathbb{Z}_{\geq 3}$ の部分集合で，$m_\Gamma(t)$ が原始的不定値二元二次形式の狭義類数を用いて記述できる（[8],[2] など）ため，他の Γ と比べて，length spectrum が「よくわかっている」場合であるといえる．実際に，Bogomolny-Leyvraz-Schmit [1] は，$\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の場合に次のような漸近公式を導いた．

$$\sum_{t\in\mathrm{Tr}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})),t<x} m_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(t)^2 \sim c^{(2)}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\mathrm{li}_2(x^3) \quad \text{as} \quad x \to \infty.$$

本研究は文科省科研費若手 (B) 20740027 の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 11M36,11F72
キーワード：リーマン面，length spectrum，合同部分群
* 〒814-0001 福岡市早良区百道浜 2-1-22 7階
e-mail: hasimoto@isit.or.jp

ここで，$\mathrm{li}_2(x) := \int_2^x (\log t)^{-2} dt$，$c^{(2)}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} > 0$は素数に関するある種のオイラー積で記述できる定数である．実は，この漸近式に関する[1]の証明は，数学的には全く厳密ではないが，のちにPeter [5]によって補完されている．この漸近式は，$m_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(t)$の平均的な増大度が，おおよそ$t/\log t$くらいであり，$t/\log t$とのずれが主要項の係数$c^{(2)}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$にあらわれているといえる．加えて，係数$c^{(2)}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$は，Rudnick [7]によって与えられた，ラプラシアンのスペクトルの分布に関する公式にあらわれることから，同様の漸近公式を拡張・一般化し，その係数を明示的にあらわすことは，重要であるといえる．

本稿では，[1]と[5]によって得られたこのような2乗和に関する漸近式を，任意のモジュラー群の合同部分群に対して，次のように拡張できたので，その結果とアプローチの仕方について報告する．

定理. Γを$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$の合同部分群，$\mathrm{k} \geq 1$を整数とする．このとき，次が成り立つ．

$$\pi^{(k)}_\Gamma(x) := \sum_{3 \leq t < x} m_\Gamma(t)^k \sim c^{(k)}_\Gamma \mathrm{li}_k(x^{k+1}).$$

ここで，$\mathrm{li}_k(x) := \int_2^x (\log t)^{-k} dt$である．また，係数$c^{(k)}_\Gamma$は，主合同部分群$\Gamma(n)$と

$$\alpha_\Gamma(\delta; n) := \frac{\#\{\gamma \in \Gamma\Gamma(n)/\Gamma(n) \mid \mathrm{tr}\gamma \equiv \delta \bmod n\}}{\#\Gamma\Gamma(n)/\Gamma(n)}$$

を用いて以下のように記述できる．

$$c^{(k)}_\Gamma = \prod_p \left(\lim_{l \to \infty} p^l \sum_{0 \leq \delta \leq p^l - 1} \alpha_\Gamma(\delta; p^l)^k \right)$$

参考文献

[1] E. Bogomolny, F. Leyvraz and C. Schmit, *Distribution of eigenvalues for the modular group*, Commun. Math. Phys. **176** (1996), 575–617.

[2] Y. Hashimoto, *Arithmetic expressions of Selberg's zeta functions for congruence subgroups*, J. Number Theory, **122** (2007) p.324–335.

[3] D. Hejhal, *The Selberg trace formula of* PSL(2, $\mathbb{R}$) *I, II*, Springer Lec. Notes in Math. **548, 1001** Springer-Verlag (1976, 1983).

[4] H. Huber, *Zur analytischen Theorie hyperbolischer Raumformen und Bewegungsgruppen I, II*, Math. Ann. **138** (1959), 1–26, **142** (1961), 385–398 and **143** (1961), 463–464.

[5] M. Peter, *The correlation between multiplicities of closed geodesics on the modular surface*, Commun. Math. Phys. **225** (2002), 171–189.

[6] B. Randol, *The length spectrum of a Riemann surface is always of unbounded multiplicity*, Proc. Amer. Math. Soc. **78** (1980), 455–456.

[7] Z. Rudnick, *A central limit theorem for the spectrum of the modular group*, Ann. Henri Poincare. **6** (2005), 863-883.

[8] P. Sarnak, *Class numbers of indefinite binary quadratic forms*, J. Number Theory, **15** (1982), 229–247.

Compact non-orientable surfaces of genus 5 with extremal metric discs

Gou Nakamura (Aichi Institute of Technology)

A compact non-orientable surface S of genus $g \geqq 3$ has the unit disc $\mathbb{D}$ as its universal covering surface, where genus g means the number of cross caps. The hyperbolic metric on S is the one induced by the hyperbolic metric on $\mathbb{D}$. In [1] C. Bavard showed that if a disc of hyperbolic radius $r > 0$ is isometrically embedded in S, then r satisfies the inequality

$$\cosh r \leqq \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{6-6\chi_g}}, \tag{1}$$

where χ_g denotes the Euler characteristic, that is, $\chi_g = 2 - g$. (It is also shown in [1] that the inequality (1) holds for orientable ones of genus $g \geq 2$ (the number of hundles). Compact surfaces containing a disc of the largest possible radius for its genus are called *extremal surfaces*, and the disc is also said to be extremal.

Our problem is to find non-orientable extremal surfaces containing more than one extremal disc. Previous research revealed that non-orientable extremal surfaces of genus greater than 6 contain a unique extremal disc ([2]) and that those of genus 3 or 4 contain at most two extremal discs ([2], [3]). The purpose of this talk is to report on the case of genus 5.

Theorem. There exist 3627 non-orientable extremal surfaces of genus 5. They contain at most two extremal discs, and 17 of them contain exactly two extremal discs. For these 17 surfaces, the center of an extremal disc and the group of automorphisms are listed in Table 1, where π denotes the projection from $\mathbb{D}$ onto each surface.

To represent the centers in Table 1, we adopt the fundamental region as the regular 24-gon centrally located in $\mathbb{D}$ such that the arguments of vertices are $(2k-1)\pi/24$, $k = 1, \ldots, 24$.

Surface	Centers of extremal discs	$\mathrm{Aut}^{\pm}$
S_1	$\pi(0)$, $\pi\left(\frac{1-\sqrt{2}+(\sqrt{2}-\sqrt{3}-2)i}{\sqrt{6(\sqrt{2}+\sqrt{6}-2)}}\right)$	$\mathbb{Z}_2$
S_2, S_3, S_4, S_5	$\pi(0)$, $\pi\left(\frac{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{6}-2}}{2}\, i\right)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
S_6, S_7, S_8, S_9	$\pi(0)$, $\pi\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}+i\sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}}{2\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{3}+1}}\right)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}	$\pi(0)$, $\pi\left(\frac{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{6}-2}(\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}+i\sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1})}{4\sqrt{(2+\sqrt{3})(\sqrt{2}-1)}}\right)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
S_{14}, S_{15}, S_{16}, S_{17}	$\pi(0)$, $\pi\left(\frac{1+(\sqrt{2}-\sqrt{3})i}{\sqrt{2}+\sqrt{6}-2}\right)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Table 1: 17 surfaces

Example. Figure 1 shows a fundamental region of a non-orientable extremal surface S_1 of genus 5 containing two extremal discs. Lines (resp. dotted lines) indicate side-pairings by orientation-preserving (resp. reversing) mappings; bullets (•) denote the points to be the center of an extremal disc.

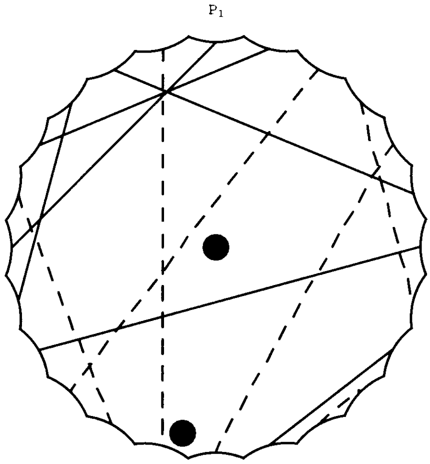


Figure 1: P_1 is a fundamental region of S_1

References

[1] C. Bavard, *Disques extrémaux et surfaces modulaires*, Ann. de la Fac. des Sciences de Toulouse V (1996), no. 2, 191–202.

[2] E. Girondo and G. Nakamura, *Compact non-orientable hyperbolic surfaces with an extremal metric disc*, Conform. Geom. Dyn. 11 (2007), 29–43.

[3] G. Nakamura, *Compact non-orientable surfaces of genus 4 with extremal metric discs*, Conform. Geom. Dyn. 13 (2009), 124–135.

Thurston コンパクト化の有限次元での実現問題

小森　洋平　(阪市大理)*1
Matthieu Gendulphe　(Fribourg 大学)*2

1. Thurston コンパクト化の有限次元での実現問題

任意の (g,n) 型の双曲的なリーマン面 R 上の単純閉測地線の長さすべてを同次座標に用いれば、R のタイヒミュラー空間 $T(R)$ を無限次元射影空間に埋め込むことができ、像は相対コンパクトになる。また単純閉測地線との交点数すべてを同次座標に用いれば、R 上の射影的測度付葉層の空間 $PMF(R)$ を同じ無限次元射影空間に埋め込むことができ、像はちょうどタイヒミュラー空間 $T(R)$ の像の境界に一致することが知られている (Thurston コンパクト化と Thurston 境界：[1] 参照)。このプロセスを有限次元射影空間で実現できないかという問題があり、タイヒミュラー空間と同じ次元の有限次元射影空間で Thurston コンパクト化が実現できるという予想がある ([2])。今回は向き付け不可能な種数 3 の曲面 Σ_3^-、すなわち 3 つの射影平面の連結和の場合にこの問題を考察した。

2. 向き付け不可能な種数 3 の曲面 Σ_3^-

Σ_3^- 上の双曲構造を 1 つ固定し、それを X とする。

Proposition 1. $X-\sigma$ が 1 つ穴空きトーラスになるような、単純閉測地線 σ がただ 1 つ存在する。

Proposition 2. γ を σ と異なる X 上の単純閉測地線とする。

1. γ が向き付け可能ならば、$\gamma\cap\sigma=\emptyset$.
2. γ が向き付け不可能ならば、$\gamma\cap\sigma$ は 1 点集合。
3. σ と異なる X 上の単純閉測地線 γ' がただ 1 つ存在して、$\gamma\cap\gamma'=\emptyset$ かつ、γ と γ' は逆の向き付けを持つ。このような γ' を γ の <u>双対</u> という。

Definition 1. X 上の向き付け可能な 3 つの単純閉測地線 (α,β,γ) が <u>三角形</u> であるとは、それぞれの幾何的交点数がすべて 1 であることとする。

Theorem 1. (α,β,γ) を Σ_3^- 上の三角形、α',β',γ' をそれぞれ α,β,γ の双対とする。

1. 次の写像は $Teich(\Sigma_3^-)$ から $P(R^4)$ への埋め込みを与える。

$$\begin{aligned} L: Teich(\Sigma_3^-) &\longrightarrow P(R^4) \\ X &\longmapsto (\ell_\alpha(X):\ell_\beta(X):\ell_\gamma(X):\ell_{\alpha'+\beta'+\gamma'}(X)) \end{aligned}$$

[1] e-mail: komori@sci.osaka-cu.ac.jp
[2] e-mail: matthieu.gendulphe@unifr.ch

2. その像は次式で定義される単体になる。

$$\Delta := \left\{ (a:b:c:d) \in P(R^4) \quad | \quad b+c>a,\ c+a>b,\ a+b>c \text{ and } d>0 \right\}.$$

3. 次の写像は $PMF(\Sigma_3^-)$ から $P(R^4)$ への埋め込みを与える。その像は Δ の境界に一致する。

$$\begin{array}{rcl} I : PMF(\Sigma_3^-) & \longrightarrow & P(R^4) \\ \mathcal{F} & \longmapsto & (i_\alpha(\mathcal{F}) : i_\beta(\mathcal{F}) : i_\gamma(\mathcal{F}) : i_{\alpha'+\beta'+\gamma'}(\mathcal{F})) \end{array}$$

3. ３点穴開き射影空間

３点穴開き射影空間のタイヒミュラー空間についても上記の同様の結果が得られる（[3])。

参考文献

[1] A. Fathi, F. Laudenbach and V. Poenaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces, Séminaire Orsay*, Asterisque 66-67, (1991/1979).

[2] U. Hamenstädt, *Parametrizations of Teichmüller space and its Thurston boundary*, in "Geometric analysis and nonlinear partial di erential equations" (S. Hildebrandt, H. Karcher, eds.), Springer, Berlin 2003, 81-88.

[3] 小森 洋平, *Cook Hats and Crowns*, 日本数学会２０１０年度秋期総合分科会（名古屋大学)

CONJUGATION OF UNIFORMLY L^2-SYMMETRIC HOMEOMORPHISMS TO FUCHSIAN GROUPS

KATSUHIKO MATSUZAKI
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SCHOOL OF EDUCATION
WASEDA UNIVERSITY

Let $\mathbb{D}$ be the unit disk and $S^1 = \partial\mathbb{D}$ its boundary. A homeomorphism $g : S^1 \to S^1$ is called *quasisymmetric* if g is the boundary extension of some quasiconformal homeomorphism $\tilde{g} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. As an equivalent characterization, g is quasisymmetric if and only if there is a constant $M \geq 1$ such that

$$\frac{1}{M} \leq m_g(x,t) := \frac{g(x+t)-g(x)}{g(x)-g(x-t)} \leq M$$

for every $x \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ and $t > 0$, where $g(x+t)-g(x)$ and $g(x)-g(x-t)$ are well defined to be a positive real number. We denote the group of all quasisymmetric homeomorphisms of S^1 onto S^1 by $\mathrm{QS}(S^1)$. For each $g \in \mathrm{QS}(S^1)$, we define

$$\mathcal{K}(g) = \inf_{\tilde{g}} \frac{1+\|\mu_{\tilde{g}}\|_\infty}{1-\|\mu_{\tilde{g}}\|_\infty},$$

where $\mu_{\tilde{g}}(z) = \bar{\partial}\tilde{g}(z)/\partial\tilde{g}(z)$ is the complex dilatation of the quasiconformal homeomorphism $\tilde{g}$ of $\mathbb{D}$ and the infimum is taken over all such extension $\tilde{g}$ of g.

A homeomorphism $g : S^1 \to S^1$ is called *symmetric* if g is the boundary extension of some asymptotically conformal homeomorphism $\tilde{g}$ of $\mathbb{D}$ onto $\mathbb{D}$. Here $\tilde{g}$ is called asymptotically conformal if the complex dilatation $\mu_{\tilde{g}}(z)$ vanishes at the boundary S^1, which means that $\lim_{r\to 1} \operatorname{ess.sup}_{|z|>r} |\mu_{\tilde{g}}(z)| = 0$. Then g is symmetric if and only if there exists a positive function $\varepsilon(t)$ of $t > 0$ with $\lim_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$ such that $\{1+\varepsilon(t)\}^{-1} \leq m_g(x,t) \leq 1+\varepsilon(t)$ for every $x \in S^1$. A subgroup of $\mathrm{QS}(S^1)$ consisting of all symmetric homeomorphisms is denoted by $\mathrm{Sym}(S^1)$.

A homeomorphism $g : S^1 \to S^1$ is called L^2-symmetric if g is the boundary extension of some quasiconformal homeomorphism $\tilde{g}$ of $\mathbb{D}$ onto $\mathbb{D}$ such that

$$\|\mu_{\tilde{g}}\|_2 := \int_{\mathbb{D}} |\mu_{\tilde{g}}(z)|^2 \rho(z)^2 dxdy < \infty,$$

where $\rho(z)|dz|$ is the hyperbolic metric on $\mathbb{D}$. We set $\kappa_2(g) = \inf_{\tilde{g}} \|\mu_{\tilde{g}}\|_2$. It is known that any L^2-symmetric homeomorphism is symmetric and the set $\mathrm{Sym}_2(S^1)$ of all L^2-symmetric homeomorphisms constitutes a subgroup of $\mathrm{Sym}(S^1)$ (Cui [1]).

We consider a discrete subgroup G of $\mathrm{QS}(S^1)$ in the compact-open topology. If $\mathcal{K}(g)$ is uniformly bounded for every $g \in G$, then we say that G is a *quasisymmetric group*. Moreover, when every element g of a quasisymmetric group G belongs to

$\mathrm{Sym}(S^1)$, we say that G is a *symmetric group*. In addition, if $\kappa_2(g)$ is uniformly bounded for every $g \in G$, we say that G is a *uniformly L^2-symmetric group*. A fundamental result concerning the conjugation of quasisymmetric groups is the following, which is due to Markovic [2].

Theorem 1. *Every quasisymmetric group G is conjugate to a Fuchsian group by a quasisymmetric homeomorphism of S^1.*

On the other hand, an analogous fact does not hold for symmetric groups [3].

Proposition 2. *A symmetric group G is not necessarily conjugate to a Fuchsian group by a symmetric homeomorphism of S^1.*

In this talk, we consider what additional condition to a symmetric group G gives the conjugation to a Fuchsian group by a symmetric homeomorphism, and develop certain results for uniformly L^2-symmetric groups.

Navas [4] proved that, for a symmetric group G, if every element of G is of C^3 smoothness and satisfies a certain uniform boundedness condition, then G is conjugate to a Fuchsian group by a C^3-diffeomorphism of S^1. We apply our results to a study of symmetric groups of $C^{1+\alpha}$ for $\alpha > 1/2$.

References

[1] G. Cui, *Integrably asymptotic affine homeomorphisms of the circle and Teichmüller spaces*, Sci. China Ser. A **43** (2000), 267–279.

[2] V. Markovic, *Quasisymmetric groups*, J. Amer. Math. Soc. **19** (2006), 673–715.

[3] K. Matsuzaki, *Symmetric groups that are not the symmetric conjugates of Fuchsian groups*, In the tradition of Ahlfors and Bers, V, Contemporary Math. **510**, pp. 239–247, Amer. Math. Soc., 2010.

[4] A. Navas, *On uniformly quasisymmetric groups of circle diffeomorphisms*, Ann. Acad. Sci. Fenn. **31** (2006), 437–462.

On the number of holomorphic families of Riemann surfaces

志賀　啓成　(東工大理工)*

1. Introductionおよび準備

Xを双曲型で有限型リーマン面とする．Bをパラメータ空間とする(g,n)型リーマン面の局所非自明なholomorphic familiesの個数は有限個であることが知られている．(ただし$2g-2+n>0$とする.) 本講演では，この個数をBの単射半径で評価した結果を報告する．

議論はタイヒミュラー空間に持ち込んでおこなう．そのための準備を述べる．

(M,π,X)をリーマン面X上の(g,n)型のリーマン面のholomorphic familyとする．すなわち，Mは2次元複素多様体で，$\pi: M\to X$は正則写像で$\pi^{-1}(x)$が任意の$x\in X$で(g,n)型のリーマン面になっているものである．したがって，Xの普遍被覆面たる上半平面$\mathbb{H}$から(g,n)型のリーマン面のタイヒミュラー空間$T(g,n)$への正則写像ΦおよびXを表現するフックス群Γ_Xから写像類群$Mod(g,n)$への準同型θが存在して，

$$\Phi(\gamma(z))=\theta(\gamma)(\Phi(z)) \qquad (\gamma\in\Gamma_X, z\in\mathbb{H})$$

が成立する．θはholomorphic familyのmonodromyと呼ばれる．さらに(M,π,X)は局所非自明とすれば，Φは非定数となる．考察のkeyになるのは以下の二つの補題である．

Proposition 1.1 ([1]). (M_j,π_j,X) $(j=1,2)$をX上の(g,n)型のリーマン面の二つの*holomorphic families*とする．それぞれの*monodromy*をθ_1,θ_2とする．このとき(M_1,π_1,X)と(M_2,π_2,X)が*holomorphic families*として同値であるための必要十分条件はθ_1とθ_2が$Mod(g,n)$の共役を除き同一になることである．

次の補題を述べるために言葉を一つ用意する．

Definition 1.1. 部分群$G\subset Mod(g,n)$に対して，(g,n)型のリーマン面上に互いに素な測地線の組$C=\{c_1,\dots,c_m\}$が存在して，Gの任意の元に対して（ホモトピークラスとして）Cが保存されるとき，Gはreducibleという．そのようなCが存在しないときGはirreducibleであるという．

Proposition 1.2 ([2]). 局所非自明な*holomorphic family* (M,π,X)に対して，その*monodromy* θの像 $\theta(\Gamma_X)\subset Mod(g,n)$は*irreducible*である．

本研究は科研費(課題番号:22340028)の助成を受けたものである。
キーワード：Holomorphic family of Riemann surface, Teichmüller space
〒152-8551 東京都目黒区大岡山　東京工業大学大学院理工学研究科
e-mail: shiga@math.titech.ac.jp

2. Results

本講演では以下の結果を報告する.

Theorem 2.1. X を (p,k) 型リーマン面とし，その単射半径の下限を $r>0$ とすると，X 上の (g,n) 型のリーマン面の局所非自明な *holomorphic families* の個数は $A\exp\{Br^{-C}|\log r|\}$ 以下である. ここに A,B,C は p,k,g,n にのみ依存する正数である.

さらに特殊な場合には単射半径を用いずに評価出来る.

Theorem 2.2. X が $(1,1)$ 型のリーマン面とすると，X 上の $(1,n)$ $(n>0)$ 型のリーマン面の *holomorphic families* の個数は n^A 以下である. ここに $A>0$ は絶対定数である.

参考文献

[1] Y. Imayoshi and H. Shiga, A niteness theorem for holomorphic families of Riemann surfaces, in “Holomorphic Functions and Moduli II ”, 11, Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg London Paris Tokyo, 207–219, 1988.

[2] H. Shiga, On the monodromies of holomorphic families of Riemann surfaces and modular transformations, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **122** (1997), 541–549.

Holomorphic motions and monodromy

志賀　啓成　(東工大理工)[*1]
M. Beck　(CUNY)
Y. P. Jiang　(CUNY)
S. Mitra　(CUNY)

1. Introduction

Let V be a connected complex manifold with a base point x_0 and E a closed subset of the Riemann sphere. We always assume that E contains $0, 1$ and ∞. A map $\varphi : V \times E \to \hat{\mathbb{C}}$ is called a holomorphic motion of E over V if it satisfies the following conditions :

1. $\varphi(x_0, z) = z$ for every $z \in E$;
2. For any fixed $z \in E$, $\varphi(\ , z)$ is a holomorphic function on V ;
3. For any fixed $x \in V$, $\varphi(x,\ )$ is an injection on E.

A holomorphic motion φ is called normalized if $\varphi(x,\ )$ fixes $0, 1$ and ∞ for any $x \in V$. In this talk, we assume that holomorphic motions are normalized since it does not lose generality.

One of the important problems of holomorphic motions is an extension problem, that is, to find conditions for a holomorphic motion of E over V to be extended to a holomorphic motion of the Riemann sphere over E. A celebrated theorem of Slodkowski says that every holomorphic motion of E over the unit disk in the complex plane is extended to a holomorphic motion of the Riemann sphere over the unit disk, while there exist a simply connected higher dimensional manifold V and a holomorphic motion over V such that the holomorphic motion cannot be extended to a holomorphic motion of the Riemann sphere. We consider the problem in the case where V is a Riemann surface.

2. Results

First, we introduce two definitions about a holomorphic motion φ.

Definition 2.1. For $z \in E - 0, 1, \infty$, $\varphi(\ , z)$ is a holomorphic map from V to $X := \mathbb{C} - \{0, 1, \infty\}$. Thus, the map gives a homomorphism τ_z from $\pi_1(V)$ to $\pi_1(X)$. We call τ_z the trace monodromy for z.

本研究は科研費(課題番号:22340028)の助成を受けたものである。
キーワード：Holomorphic motion
[1] 〒152-8551 東京都目黒区大岡山　東京工業大学大学院理工学研究科
e-mail: `shiga@math.titech.ac.jp`

Definition 2.2. Suppose that E consists of n points. Then, a holomorphic motion φ of E over a Riemann surface B gives a holomorphic family of Riemann surfaces of type $(0, n)$ over B and the holomorphic family defines a homomorphism θ from $\pi_1(B)$ to $Mod(0, n)$, the mapping class group of Riemann surfaces of type $(0, n)$. We call θ the monodromy of the holomorphic motion.

It is not hard to see that both the trace monodromy and the monodromy of a holomorphic motion are trivial if the holomorphic motion is extended to a holomorphic motion of the Riemann sphere. The problem we consider is whether the converse is true or not. We present some answers to the problem.

Let K be an AB-removable compact subset of the unit disk Δ and put $\Delta_K := \Delta - K$. The following theorem states that the triviality of the monodromy implies the extendability of holomorphic families over Δ_K.

Theorem 2.1. *A holomorphic motion φ of E over Δ_K is extended to a holomorphic motion of the Riemann sphere over Δ_K if and only if for any finite subset E' of E, the monodromy of a holomorphic motion restricted φ to E' is trivial.*

Next, we consider the case where the trace monodromy is trivial. If the complement of E is not topologically simple, we may construct a counter example as follows.

Theorem 2.2. *Suppose that there exists a connected component of the complement of E such that it is neither simply connected nor conformally equivalent to the punctured disk Δ^*. Then, there exists a holomorphic motion of E over Δ^* such that it cannot be extended to a holomorphic motion of the Riemann sphere over Δ^* while the trace monodromy τ_z is trivial for any z in E.*

Finally, we show that every holomorphic motion of E can be extended if the complement of E is topologically simple.

Theorem 2.3. *If every connected component of the complement of E is either simply connected or conformally equivalent to the punctured disk, then every holomorphic motion of E over Δ_K is extended to a holomorphic motion of the Riemann sphere over Δ_K.*

参考文献

[1] S. Mitra and H. Shiga, Extensions of holomorphic motions and holomorphic families of isomorphisms of Möbius groups, to appear in Osaka Math. J.

[2] Z. Slodokowski, Holomorphic motions and polynomial hulls, Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991), 347-355.

超越整函数のFatou集合，Julia集合の位相的性質について

木坂　正史　(京都大学大学院 人間・環境学研究科)*

概　要

本講演では超越整函数のFatou集合，Julia集合の位相的性質について概説する．具体的には

- Julia集合の連結性
- Julia集合の局所連結性
- Fatou成分の連結度
- Julia成分の位相的性質

について今までに知られている結果と今後の課題，またこれらの研究に関連して出てくる未解決問題のいくつかについて解説する．

1. 準備

f を超越整函数，即ち，複素平面 $\mathbb{C}$ 全体で正則で多項式ではないものとし，f^n で f の n 回合成を表すものとする．複素力学系の研究で最も基本的な不変集合である **Fatou集合 $F(f)$**，**Julia 集合 $J(f)$** は次で定義される：

$$
\begin{aligned}
F(f) &:= \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ のある近傍 } U \text{ が存在し}, \{f^n|_U\}_{n=1}^{\infty} \text{ が正規族となる}\}, \\
J(f) &:= \mathbb{C} \setminus F(f).
\end{aligned}
$$

ただし $\{f^n|_U\}$ が正規族であるとは $\{f^n|_U\}$ の任意の部分列が広義一様収束部分列を含むことをいう．定義により $F(f)$ は開集合，また $J(f)$ は閉集合である．f が多項式（また一般に有理函数）の場合，$J(f)$ は $\mathbb{C}$ (また一般にRiemann球面 $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$)のコンパクト集合となるが，$f$ が超越整函数の場合は $J(f)$ は $\mathbb{C}$ のコンパクトでない閉集合，よって特に非有界集合となる．$J(f)$ に無限遠点 ∞ を付け加えて $\widehat{\mathbb{C}}$ の部分集合と考えることも可能ではある．この定義は超越有理型函数の場合に採用されている ([**Ber**]) し，またJulia集合の収束の問題を考える場合に採用されることもある（[**Ki1**]，[**Kr**]，[**KrK**] などを参照）．このように定義すると $J(f)$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ のコンパクト集合となり，$J(f)$ は扱いやすくなる（§2.1 参照）．しかし超越整函数 f の力学系としての自然な相空間は複素平面 $\mathbb{C}$ でありRiemann球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ ではない．なぜなら ∞ は f の真性特異点であるから f を $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の力学系として自然に拡張することはできないからである．

次の結果は基本的である．

命題 1.1. (1) $F(f)$ と $J(f)$ は**完全不変 (completely invariant)**，即ち

$$f(F(f)) \subseteq F(f),\ f^{-1}(F(f)) \subseteq F(f), \quad f(J(f)) \subseteq J(f),\ f^{-1}(J(f)) \subseteq J(f)$$

2010 Mathematics Subject Classification: 37F10, 30D05
キーワード：超越整函数, Fatou集合，Julia集合，Fatou成分，Julia成分
* 〒606-8501 京都市左京区吉田二本松町 京都大学大学院 人間・環境学研究科 数理科学講座
e-mail: kisaka@math.h.kyoto-u.ac.jp

を満たす.
(2) $F(f^n) = F(f), \quad J(f^n) = J(f)$.

注意 1.2. Picardの除外値を持つような f（例えば e^z）に対しては(1)で真の包含関係となることがあるが，その差は1点である．またPicardの除外値を持たない場合は常に等号が成立する．

定義 1.3. (1) $F(f)$ の連結成分 U を f の**Fatou 成分 (Fatou component)**という．
(2) Fatou成分 U が任意の $m, n \in \mathbb{N}$, $(m \neq n)$ に対して $f^m(U) \cap f^n(U) = \emptyset$ を満たすとき，**遊走領域 (wandering domain)** という．
(3) $f^{n_0}(U) \subseteq U$ を満たす $n_0 \in \mathbb{N}$ があるとき，U を周期 n_0 の**周期成分 (periodic component)**という（ただし n_0 は $f^n(U) \subseteq U$ なる n のうち最小のもの）．
(4) $f^m(U)$ $(m \in \mathbb{N})$ が周期成分であるとき，U を**前周期成分 (preperiodic component)**という．また周期成分と前周期成分を総称して**終局周期成分 (eventually periodic component)** という．

f が多項式（または一般に有理函数）のときには遊走領域は存在しない（SullivanのNo Wandering Domain Theorem [**Su**, p.404, Theorem 1]）が，超越整函数のときには遊走領域をもつ場合が多々知られている（[**Ba1**]，[**Ba3**]，[**Ba5**]，[**Ba6**]，[**BD2**]，[**Ber**]，[**Do**]，[**EL1**]，[**EL2**]，[**KS**] 等参照）．周期成分については次が成立する（例えば [**Ber**] 参照）：

定理 1.4 (周期成分の分類定理). 超越整函数 f のFatou集合の周期成分 U は次の4つに分類される（ただし n_0 を U の周期とする）：

1. $z_0 \in U$ で $f^{n_0}(z_0) = z_0$，$|(f^{n_0})'(z_0)| < 1$ を満たすものが存在し，任意の $z \in U$ は $f^{n_0 k}(z) \to z_0$, $(k \to \infty)$ を満たす．点 z_0 を **吸引周期点 (attracting periodic point)** といい，U を**吸引域 (attractive basin)** という．

2. $z_0 \in \partial U$ で $f^{n_0}(z_0) = z_0$ (注：$n_1 | n_0$ なる n_1 で $f^{n_1}(z_0) = z_0$ となる可能性あり)，$(f^{n_0})'(z_0) = 1$ を満たすものが存在し，任意の $z \in U$ は $f^{n_0 k}(z) \to z_0$, $(k \to \infty)$ を満たす．点 z_0 を**放物型周期点 (parabolic periodic point)** といい，U を**放物型吸引域 (parabolic basin)** という．

3. $z_0 \in U$ で $f^{n_0}(z_0) = z_0$，$(f^{n_0})'(z_0) = e^{2\pi i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ を満たすものが存在し，$f^{n_0}|U$ は単位円板 $\mathbb{D}$ 上の無理数回転写像 $z \mapsto e^{2\pi i\theta} z$ に解析的共役となる．z_0 を**無理的中立周期点 (irrationally indifferent periodic point)** といい，U を**Siegel円板 (Siegel disk)** という．

4. 任意の $z \in U$ は $f^{n_0 k}(z) \to \infty$, $(k \to \infty)$ を満たす．U を **Baker 領域 (Baker domain)** という．

注意 1.5. 超越整函数の場合にはHerman環は存在しない．これは多項式の場合と同様で，最大値原理を用いて示すことができる．

定義 1.6. $f'(c)=0$ なる点，即ち**臨界点 (critical point)** c の像 $f(c)$ を**臨界値 (critical value)** という．またある曲線 $L(t)$ $(0 \le t < 1)$ で

$$\lim_{t\to 1} L(t) = \infty, \quad \lim_{t\to 1} f(L(t)) = p.$$

を満たすものが存在するとき，p を**漸近値 (asymptotic value)** という．臨界値と漸近値およびそれらの集積点を**特異値 (singular value)** といい，特異値全体の集合を $\mathbf{sing^{-1}}(\boldsymbol{f})$ で表す．これは f^{-1} のある分枝が近傍でうまく定義できないような点全体である．また

$$P(f) := \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\mathrm{sing}(f^{-1}))}.$$

を f の **post-singular set** という．

2. Julia集合の連結性

2.1. $J(f) \cup \{\infty\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ の連結性

$J(f) \subset \mathbb{C}$ の連結性を議論する前に $J(f) \cup \{\infty\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ の連結性について述べる．$J(f) \cup \{\infty\}$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ のコンパクト集合になるので次の一般原理が使える ([**Bea**, p.81, Proposition 5.1.5])．

命題 2.1. $K \subset \widehat{\mathbb{C}}$ をコンパクト集合とする．次は同値である：
(i) K は連結． (ii) K の補集合 K^c の各成分は単連結．

これを $K = J(f) \cup \{\infty\}$ として適用する．それには $K^c = F(f)$ の各成分，即ち各 Fatou 成分が単連結であるかどうかを見る必要がある．ここで，

定義 2.2. 領域 $U \subset \mathbb{C}$ の**連結度 (connectivity) conn($\boldsymbol{U}$)** を

$$\mathrm{conn}(U) := \widehat{\mathbb{C}} \setminus U \text{ の連結成分の個数}$$

と定義する（$\mathrm{conn}(U) = \infty$ もあり得る）．

Fatou 成分の連結度については次が知られている ([**Ber**, p.165, Theorem 9] 参照)．

命題 2.3. $F(f)$ の終局周期成分は単連結である．

よって多重連結な Fatou 成分は必然的に遊走領域になるが，これは次の結果から常に有界になる（[**Ba2**]）．

定理 2.4 (Baker, 1975). 非有界な Fatou 成分は単連結である．

以上のことなどから次が示される（[**Ki3**, p.191, Theorem 1]）．

定理 2.5 (K, 1998). 次は同値である：
(1) $J(f) \cup \{\infty\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ は連結である． (2) f は多重連結な遊走領域を持たない．

よって多重連結な遊走領域を持たないような状況下では$J(f)\cup\{\infty\}\subset\widehat{\mathbb{C}}$ は連結である．そのための十分条件をいくつか挙げる：

系 2.6 (K, 1998). 以下のいずれかの条件下で $J(f)\cup\{\infty\}\subset\widehat{\mathbb{C}}$ は連結である：
(1) $f\in B:=\{f\mid \mathrm{sing}(f^{-1})$ は有界集合$\}$.
(2) f は非有界なFatou成分をもつ.
(3) 曲線 $L(t)$ $(0\le t<1)$ で $\lim_{t\to 1}L(t)=\infty$ を満たし，$f|L$ が有界となるものが存在する．特にこの条件は f が有限な漸近値を持つときには満たされる.

2.2. $J(f)\subset\mathbb{C}$ の連結性

次に $J(f)\subset\mathbb{C}$ の連結性について考察する．fが多項式のときには次の有名な原理がある（[**Bea**, p.202, Theorem 9.5.1]）.

命題 2.7. f が多項式のとき，次は同値である.
(i) $J(f)$ は連結．　(ii) ∞ 以外の f の任意の臨界点の軌道は有界.

ところが f が超越整函数のときは次の例が示すように，この原理は成り立たない.

例 2.8. (1) （[**DG**]）指数函数 $E_\lambda(z):=\lambda e^z$ が吸引不動点 p_λ を持つとき（例えば $0<\lambda<1/e$），p_λ の吸引域U_λ は非有界で完全不変になり $F(E_\lambda)$ と一致する．このとき $J(E_\lambda)$ は非連結である．更に詳しく，$\varphi:\mathbb{D}\to U_\lambda$ をU_λ の Riemann 写像とし，

$$\Theta_\infty:=\{e^{i\theta}\mid \varphi(e^{i\theta}):=\lim_{r\nearrow 1}\varphi(re^{i\theta})=\infty\}\subset\partial\mathbb{D}$$

と置くと Θ_∞ は $\partial\mathbb{D}$ で稠密である.
(2) 指数函数 $E_\lambda(z):=\lambda e^z$ の唯一の特異値 0 が $E_\lambda^n(0)\to\infty$ $(n\to\infty)$ を満たすとき（例えば $\lambda>1/e$），$J(E_\lambda)=\mathbb{C}$ となり，特に $J(E_\lambda)$ は連結である（[**De**, p.295] 参照）.

よって全く別の方法を考える必要がある．そこでfが非有界なFatou 成分を持つかどうかで場合分けして考える.

(I) fが非有界なFatou成分を持たない場合

次が成り立つ（[**Ki3**, p.192, Theorem 2]）：

定理 2.9 (K, 1998). すべてのFatou成分が有界かつ単連結であれば $J(f)$ は連結である.

次は定理2.5と定理2.9から直ちに従う（[**Ki3**, p.192, Corollary 2]）.

系 2.10 (K, 1998). fのFatou成分はすべて有界であるとする．このとき $J(f)\subset\mathbb{C}$ が連結であることと $J(f)\cup\{\infty\}\subset\widehat{\mathbb{C}}$ が連結であることは同値である.

注意 2.11. f のFatou成分がすべて有界になるための条件が以下のようにいろいろと知られている：

(i) ([**Ba4**, Theorem 2]) $1 < {}^{\exists}p < 3$, $\log M(r) = O((\log r)^p)$ $(r \to \infty)$, ただし

$$M(r) := \sup_{|z|=r} |f(z)|.$$

(ii) ([**St**, Theorem B]) ${}^{\exists}\varepsilon \in (0,1)$, $\log\log M(r) < \dfrac{(\log r)^{\frac{1}{2}}}{(\log\log r)^{\varepsilon}}$ $(r$: 十分大$)$.

(iii) ([**St**, Theorem C]) f の位数 $\rho(f) \leq 1/2$ で $\dfrac{\log M(2r)}{\log M(r)} \to {}^{\exists}c$, $(r \to \infty)$, ただし

$$\rho(f) := \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r}.$$

条件 (ii) は条件 (i) を弱めたものになっている．これらの条件がどこまで緩められるかは大問題であり，次のように予想されている（[**Ba4**]）．

予想 A (Baker)： $\rho(f) < 1/2$, または $\rho(f) = 1/2$ で minimal type (即ち, $\displaystyle\limsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{r^{\rho(f)}} = 0$) なら f の Fatou 成分はすべて有界である．

この予想に関しては数多くの研究があるが今のところ未解決である．歴史的経緯を含めて [**H**] に詳しい解説があるので参照せよ．

(II) f が非有界な Fatou 成分 U を持つ場合

このとき定理 2.4 より U は単連結なので Riemann 写像 $\varphi : \mathbb{D} \to U$ が考えられる．そこで

$$\Theta_\infty := \{e^{i\theta} \mid {}^{\exists}\lim_{r\nearrow 1} \varphi(re^{i\theta}) =: \varphi(e^{i\theta}) = \infty\} \subset \partial\mathbb{D}$$

と置く．もし ${}^{\sharp}\Theta_\infty \geq 2$ とすると

$$\varphi\Big(\{re^{i\theta_1} \mid 0 \leq r < 1\} \cup \{re^{i\theta_2} \mid 0 \leq r < 1\}\Big) \subset U, \quad (\theta_1, \theta_2 \in \Theta_\infty,\ \theta_1 \neq \theta_2)$$

は φ が等角なので $F(f)$ 内の Jordan 曲線となり，$J(f)$ を $\mathbb{C}$ 内の 2 つの相対的な開集合に分ける．よって $J(f)$ は非連結となる．以下の結果（[**Ki3**, Main Theorem]）は Θ_∞ に対するものであり，その系として特に $J(f)$ の非連結性が従う．

定理 2.12 (K, 1998). f を超越整函数，U を非有界な周期的 Fatou 成分でその周期を n_0 とする．次の条件を考える：

(A) $\infty \in \partial U$ は U から到達可能 (accessible)，即ち，ある連続曲線 $\gamma(t)$ $(0 \leq t < 1) \subset U$ で $\displaystyle\lim_{t\to 1} \gamma(t) = \infty$ となるものが存在．

(B) ある点 $q \in \partial U$ で $q \notin P(f^{n_0})$ を満たすものと，曲線 $C(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ で $C(t) \subset U$ $(0 \leq t < 1)$, $C(1) = q$ を満たし，ある $m_0 \in \mathbb{N}$ に対し $f^{m_0}(C) \supset C$ となるものが存在する．

そこで次のいずれかを仮定する：

(1) U は吸引域で (A)，(B) を満たす．

(2) U は放物型吸引域で (A)，(B) を満たす．

(3) U はSiegel円板で (A) を満たす．

(4) U はBaker領域で (B) を満たし，$f^{n_0}|U$ は単葉ではない．

このとき，(1)，(2)，(3) の場合は Θ_∞ は $\partial\mathbb{D}$ で稠密である．(4) の場合は Θ_∞ は $\partial\mathbb{D}$ で稠密か，または $\overline{\Theta_\infty}$ は $\partial\mathbb{D}$ のある完全集合を含む．

特に いずれの場合も $J(f)$ は非連結である．

一方，f が非有界なFatou成分を持ち，しかも $J(f) \subset \mathbb{C}$ が連結になることもある（[**Ki3**, p.194, Theorem 4]）．

例 2.13 (K, 1998). $f(z) = 2 - \log 2 + 2z - e^z$ は不変なBaker領域 U で $f|U$ が単葉になるものを持ち，$J(f)$ は連結である．

その後，定理2.12は次のように改良された（[**BD1**, p.439, Theorem 1.1, Theorem 1.2, Corollary 1.3]）．

定理 2.14 (Baker-Domínguez, 1999). 定理2.12は条件 (B) なしで成り立つ．

注意 2.15. (1) 条件 (A) を満たさない非有界な周期的Fatou成分の例は知られていない．またBaker領域は常に (A) を満たすことが知られている（[**Ba7**, Theorem 2]）．そこで，

予想 B：非有界な周期的Fatou成分 U について，∞ は U 内から到達可能である．特に定理2.12は条件 (A), (B) なしで成立する．

(2) この結果ではBaker領域のときだけは他の場合に比べて少し緩い結論しか得られていない．Baker領域の Θ_∞ については $\partial\mathbb{D}$ で稠密になるような例は知られている（例えば $f(z) = z + 1 + e^{-z}$ ([**BD1**, §7])）が，稠密にならないような例は知られていない．そこで，

予想 C：Baker領域 U で $f^{n_0}|U$ が単葉ではないものに対し，Θ_∞ は $\partial\mathbb{D}$ で稠密である．

3. $J(f)$ の局所連結性

この節では $J(f)$ の局所連結性について考察する．f が多項式（または一般に有理函数）のときは例えば次の有名な結果がある．

命題 3.1. f を多項式（または一般に有理函数）とし，$J(f)$ は連結であるとする．もし f が双曲型（hyperbolic）であれば $J(f)$ は局所連結である．

ところが f が超越整函数のときは一般にはこのことは期待できない．特に f が非有界な周期的Fatou成分を持つ場合には次が成り立つ（[**Ki2**, p.115, Theorem B]）．

定理 3.2 (K, 1997). f が非有界な周期的Fatou成分Uを持つとし，Uは次のいずれかであると仮定する：

(1) 吸引域， (2) 放物型吸引域， (3) Siegel円板，

(4) Baker領域で $f^{n_0}|U$ が d 対 1 $(1 \leq d < \infty)$ となるもの（n_0 は U の周期）.

このとき $J(f) \cup \{\infty\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ は局所連結でない．また $J(f) \subset \mathbb{C}$ も局所連結でない.

証明には主に次の２つを用いる.

定理 3.3 ([W]). コンパクト集合 $K \subset \widehat{\mathbb{C}}$ が局所連結であることと

(i) K^c ($= K$ の補集合) の各連結成分の境界が局所連結,

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して K^c の連結成分で直径が ε より大きいものは有限個,

の２条件が満たされることとは同値である。

定理 3.4 (K, 1997 [Ki2]). f が非有界な周期的Fatou成分Uを持つとし，Uは次のいずれかであると仮定する：

(1) 吸引域， (2) 放物型吸引域， (3) Siegel円板，

(4) Baker領域で $f^{n_0}|U$ が d 対 1 $(2 \leq d < \infty)$ となるもの（n_0 は U の周期）.

このとき $\partial U \cup \{\infty\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ は局所連結でない．また $\partial U \subset \mathbb{C}$ も局所連結でない.

その後，定理3.2はBakerとDomínguezによって次の更に強い結果に拡張された（[**BD2**, p.374, Theorem E]）.

定理 3.5 (Baker-Domínguez, 2000). f が非有界な周期的Fatou成分Uを持つとし，Uは次のいずれかであると仮定する：

(1) 吸引域， (2) 放物型吸引域， (3) Siegel円板，

(4) Baker領域で $f^{n_0}|U$ は単葉ではない（n_0 は U の周期）.

このとき $J(f) \subset \mathbb{C}$ は**任意の点で**局所連結でない.

以上をまとめると次のようになる：

定理 3.6. fが非有界な周期的Fatou成分Uを持つとき $J(f) \subset \mathbb{C}$ は局所連結でない.

一方，f が非有界なFatou成分を持たない場合には$J(f) \subset \mathbb{C}$ が局所連結となることもある（[**M**, p.272, Theorem 7]）.

定理 3.7 (Morosawa, 1999). $g_a(z) := ae^a\{z-(1-a)\}e^z$ $(a > 1)$ とすると $J(g_a)$ は局所連結であり，更にSierpinski carpetである.

[**M**] では$J(f) \subset \mathbb{C}$ が局所連結となるための十分条件が挙げられているが（[**M**, p.268, Theorem 2]，詳細は略），これはfが多項式（または一般に有理函数）のときの結果（命題3.1）の類似である.

4. Fatou成分の連結度

§2 で述べたとおり，多重連結なFatou成分は有界な遊走領域であることがわかるが，そのようなものの最初の例はBakerによって与えられた（以下の2つの結果（[**Ba1**, p.206 Statement (A), p.210 Theorem 1]，[**Ba3**, p.174, Theorem]）による）.

定理 4.1 (Baker, 1963 [Ba1]). 超越整函数 $g(z)$ で多重連結なFatou成分 U（即ち，$\mathrm{conn}(U) \geq 2$ を満たす）を持つものが存在する．具体的には

$$g(z) = Cz^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{r_n}\right)$$

がそうである．ただし $C > 0$, $r_1 > 1$ は

$$C \exp\left(\frac{2}{r_1}\right) < 1, \quad Cr_1 > 1$$

を満たす定数であり，r_n は漸化式

$$r_{n+1} = Cr_n^2\left(1 + \frac{r_n}{r_1}\right)\left(1 + \frac{r_n}{r_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{r_n}{r_n}\right), \quad n = 1, 2, \cdots$$

で定義される.

定理 4.2 (Baker, 1976 [Ba3]). 定理4.1の多重連結なFatou成分 U は遊走領域である.

この例の遊走領域の連結度は明らかではなかったが，その後Bakerは同様の手法を用いて無限連結（即ち $\mathrm{conn}(U) = \infty$）な遊走領域を構成した（[**Ba6**, p.164, Theorem 2]）.

定理 4.3 (Baker, 1985 [Ba6]). 超越整函数 $g(z)$ で無限連結な遊走領域 U（即ち，$\mathrm{conn}(U) = \infty$ を満たす）を持つものが存在する．具体的には

$$g(z) = C^2 \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{r_j}\right)^2$$

がそうである．ただし $C > 0$, $r_1 > 1$ は

$$0 < C < \frac{1}{4e^2}, \quad 2^{n_0 - 1}C > 2r_1, \ (n_0\text{はある自然数})$$

を満たす定数であり，r_n は $1 \leq n \leq n_0$ に対して

$$r_{n+1} > 2r_n \ (n < n_0)$$

を満たすように定義し，$n > n_0$ に対しては漸化式

$$r_{n+1} = C^2\left(1 + \frac{r_n}{r_1}\right)^2\left(1 + \frac{r_n}{r_2}\right)^2\cdots\left(1 + \frac{r_n}{r_n}\right)^2, \quad n = n_0, n_0 + 1, \cdots$$

で定義される.

この時点では次の問題が未解決であった：

問題 4.4 (Bergweiler, [Ber, Question 7]). 有限な連結度をもつ遊走領域は存在するか?詳しくは，$p \in \mathbb{N}$ に対し，$\mathrm{conn}(U) = p$ となる遊走領域は存在するか?

まず一般に U を遊走領域としたとき，$\mathrm{conn}(f^n(U))$ について次が成立する（[**KS**, p.219, Theorem A]）．

定理 4.5 (K-Shishikura, 2008). 超越整函数 f が遊走領域 U を持つとき，連結度 $\mathrm{conn}(f^n(U))$ は十分大きな n に対しては一定値であり，それは $1, 2$ または ∞ である（これを U の**終局連結度 (eventual connectivity)** という）．終局連結度が 1 のときは $\mathrm{conn}(U) = 1$ である．また終局連結度が 2 のときは十分大きな任意の n に対して $f : f^n(D) \to f^{n+1}(D)$ 円環領域間の被覆写像である．

問題4.4に対する答えは次で与えられる（[**KS**, p.219〜220, Theorem B, Theorem C]）．

定理 4.6 (K-Shishikura, 2008). (1) 超越整函数 f で遊走領域 U を持ち，$f^n(U)$ が任意の $n \geq 0$ に対し 2 重連結になるものが存在する．
(2) 任意の $p \in \mathbb{N}$ に対し超越整函数 f で遊走領域 U を持ち，$\mathrm{conn}(U) = p$, $\mathrm{conn}(f^n(U)) = 2$ $({}^\forall n \geq 1)$ を満たすものが存在する

証明はBakerのように無限積表示で例を与えるのではなく，擬等角手術（quasi-conformal surgery）の方法による．よって f の具体的な表示はない．

最近，Bergweiler と Zheng が定理4.1の遊走領域が無限連結であることを示したと発表している（2010.11.12, workshop "Transcendental dynamics" における J.Zheng 氏の講演「Some problems on transcendental dynamics」による）．

5. Julia成分の位相的性質

§2の定理2.9より，$J(f)$ が非連結なら f は非有界なFatou成分かまたは多重連結なFatou成分を持つことがわかる．この節では後者の場合に $J(f)$ の連結成分について考察する．

定義 5.1. (1) Julia集合の連結成分を**Julia成分 (Julia component)** という．
(2) $z \in J(f)$ が任意のFatou成分 U に対して $z \notin \partial U$ を満たすとき，z を**埋蔵点 (buried point)** という．
(3)

$$J_0(f) := \{z \in J(f) \mid z \text{ は埋蔵点}\}$$

を**剰余Julia集合 (residual Julia set)** という．
(4) Julia成分 C が $C \subset J_0(f)$ を満たすとき，C を**埋蔵成分 (buried component)** という．

f が多重連結な遊走領域を持つときには，すべてのJulia成分が有界になることがわかる．一般に C を Julia 成分とすると $f(C)$ も Julia 成分になり，その軌道

$\{f^n(C)\}_{n=0}^{\infty}$ が考えられるが，これが有界であるときには C の位相的性質について次が示せる（[**Ki6**]．部分的な結果については [**Ki4**], [**Ki5**] を参照）．

定理 5.2 (K). f を超越整函数で多重連結な遊走領域をもつものとし，C を Julia 成分で有界な軌道を持つものとする．このとき

(1) ある多項式 g が存在し，C は $J(g)$ のある Julia 成分に擬等角写像により同相になる．

(2) C が full (即ち，補集合 $C^c = \mathbb{C} \setminus C$ が連結) ならば，C は埋蔵成分である．

(3) C が遊走 Julia 成分 (即ち，$f^m(C) \cap f^n(C) = \emptyset$, $^\forall m \neq n$) ならば C は 1 点埋蔵成分 (buried singleton component) である．

(4) 反発周期点 p に対し，p を含む Julia 成分を $C(p)$ で表すことにする．$C(p)$ が full なら $C(p)$ は埋蔵成分である．$C(p)$ が full でなければ，補集合 $C(p)^c$ の成分はある吸引域，放物型吸引域，または Siegel 円板とその逆像たちから成る．p はある吸引域，放物型吸引域，または Siegel 円板の境界に無い限り，埋蔵点である．

最近 Osborne は定理 5.2 の証明で用いられる方法により，f の fast escaping set

$$A(f) := \{z \in \mathbb{C} \mid {}^\exists L \in \mathbb{N},\ {}^\forall n \in \mathbb{N},\ |f^{n+L}(z)| \geq M^n(R, f)\}$$

が spider's web になる場合に，その補集合の連結成分について定理 5.2 と同様の結果を得ている（詳細は略．[**O**] 参照）．

注意 5.3. (1) いつ $J_0(f) \neq \emptyset$ となるか，即ち，いつ埋蔵点が存在するかについては完全には明らかになっていない．f が有理函数のときには次の予想が有名である：

予想 D (Makienko)： f が有理函数のとき，$J_0(f) \neq \emptyset$ となるのは $F(f)$ に完全不変成分が存在しないとき，かつそのときに限る．

f が超越整函数のときには f のクラスを制限すれば同様の予想が考えられるが，一般の f については定かではない．そこで，

問題 E：f が超越整函数のとき，$J_0(f) \neq \emptyset$ となるための必要十分条件を与えよ．

この問題については [**DF**] に詳しい解説があるので参照せよ

(2) Julia 成分 C の軌道が非有界のときの結果は皆無のようである．そこで，

問題 F ：非有界な軌道を持つ Julia 成分の位相的性質について調べよ．

(3) この節で扱わなかった場合，即ち，$J(f)$ が非連結で f が非有界な Fatou 成分を持つ場合にも Julia 成分に関する結果はいくつかある（[**DF**]）．しかしそれらは具体的な f に対するものであり，一般的にはほとんど何も分かっていないと思われる．そこで，

問題 G ：$J(f)$ が非連結で f が非有界な Fatou 成分を持つ場合について，Julia 成分の位相的性質を調べよ．

参考文献

[**Ba1**] I. N. Baker, Multiply connected domains of normality in iteration theory, *Math. Zeitschr.* **81** (1963), 206–214.

[**Ba2**] I. N. Baker, The domains of normality of an entire function, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.* , **1,** (1975), no.2, 277–283.

[**Ba3**] I. N. Baker, An entire function which has wandering domains, *J. Austral. Math. Soc. (Series A)* **22** (1976), 173–176.

[**Ba4**] I. N. Baker, The iteration of polynomials and transcendental entire functions, *J. Austral. Math. Soc. (Series A)* **30** (1981), 483–495.

[**Ba5**] I. N. Baker, Wandering domains in the iteration of entire functions, *Proc. London Math. Soc. (3),* **49** (1984), 563–576.

[**Ba6**] I. N. Baker, Some entire functions with multiply-connected wandering domains, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **5** (1985), 163–169.

[**Ba7**] I. N. Baker, Infinite limits in the iteration of entire functions, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **8** (1988), 503–507.

[**BD1**] I. N. Baker and P. Domínguez, Boundaries of unbounded Fatou components of entire functions, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **24** (1999), no. 2, 437–464.

[**BD2**] I. N. Baker and P. Domínguez, Some connectedness properties of Julia sets, *Complex Variables Theory Appl.* **41** (2000), no. 4, 371–389.

[**Bea**] A. F. Beardon, *Iteration of Rational Functions*, Springer-Verlag, New York, Berlin and Heidelberg, 1991.

[**Ber**] W. Bergweiler, Iteration of meromorphic functions, *Bull. AMS* **29** No.2 (1993), 151–188.

[**De**] R. L. Devaney, e^z : Dynamics and bifurcations, *Internat. J. Bif. & Chaos* **1,** No.2 (1991), 287–308.

[**DG**] R. L. Devaney and L. R. Goldberg, Uniformization of attracting basins for exponential maps, *Duke. Math. J.* **55** No.2 (1987), 253–266.

[**Do**] P. Domínguez, Connectedness properties of Julia sets of transcendental entire functions,*Complex Variables Theory Appl.* **32** (1997), no. 3, 199–215.

[**DF**] P. Domínguez and N. Fagella, Residual Julia sets of rational and transcendental functions, *Transcendental dynamics and complex analysis*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **348**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (2008), 138–164.

[**EL1**] A. E. Eremenko and M. Yu. Lyubich, Examples of entire functions with pathological dynamics, *J. London Math. Soc. (2)* **36** (1987), 458–468.

[**EL2**] A. E. Eremenko and M. Yu. Lyubich, The dynamics of analytic transformations, *Leningrad Math. J.* **1** No.3 (1990), 563–634.

[**H**] A. Hinkkanen, Entire functions with bounded Fatou components, *Transcendental dynamics and complex analysis*, London Math. Soc. Lecture Note Ser.**348**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (2008), 187–216.

[**Ki1**] M. Kisaka, Local uniform convergence and convergence of Julia sets, *Nonlinearity* **8** (1995), 273–281.

[**Ki2**] M. Kisaka, On the local connectivity of the boundary of unbounded periodic Fatou components of transcendental functions, *Complex dynamical systems and related areas (Kyoto, 1996). Su-rikaisekikenkyu-sho Ko-kyu-roku* **988** (1997), 113–

119.

[**Ki3**] M. Kisaka, On the connectivity of Julia sets of transcendental entire functions, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **18** (1998), no. 1, 189–205.

[**Ki4**] M. Kisaka, Some properties of Julia sets of transcendental entire functions with multiply-connected wandering domains, *Complex Dynamics and its Related Topics, RIMS Koukyuuroku,* **1586** (2008), 26-31.

[**Ki5**] M. Kisaka, On disconnected Julia sets of semihyperbolic transcendental entire functions, *Proceedings of the 16th International Congerence of Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications*, Edited by Junesang Choi et al., Baeyang Printing, Gyeongju, (2009), 148-153.

[**Ki6**] M. Kisaka, Julia components of transcendental entire functions with multiply-connected wandering domains, in preparation.

[**KS**] M. Kisaka and M. Shishikura, On multiply connected wandering domains of entire functions, *Transcendental dynamics and complex analysis*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **348**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (2008), 217–250.

[**Kr**] B. Krauskopf, Convergence of Julia sets in the approximation of λe^z by $\lambda\left(1+\frac{z}{d}\right)^d$, *Internat. J. Bif. & Chaos* **3** (1993), 257–270.

[**KrK**] B. Krauskopf and H. Kriete, Hausdorff convergence of Julia sets, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **6** (1999), no. 1, 69–76.

[**M**] S. Morosawa, Local connectedness of Julia sets for transcendental entire functions, *Nonlinear analysis and convex analysis (Niigata, 1998)*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, (1999), 266–273.

[**O**] J. W. Osborne, The structure of spider's web fast escaping set, preprint.

[**St**] G. M. Stallard, The iteration of entire functions of small growth, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **114** (1993), 43–55.

[**Su**] D. Sullivan, Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains, *Ann. of Math. (2)* **122** (1985), no. 3, 401–418.

[**W**] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, AMS Colloquium Publications, **28,** 1942.

Symmetries of Julia sets of polynomial skew products on $\mathbf{C}^2$

Kohei Ueno
(Toba National College of Maritime Technology)

1 Introduction

The symmetries of the Julia sets of polynomials was studied by Beardon [1] and others. We generalize his results of polynomials in [1] to those of polynomial skew products. The results below improve some results in [3].

A polynomial skew product on $\mathbf{C}^2$ is a polynomial map on $\mathbf{C}^2$ of the form $f(z,w) = (p(z), q(z,w))$. Let

$$\begin{cases} p(z) = a_\delta z^\delta + a_{\delta-1}z^{\delta-1} + \cdots + a_0, \\ q_z(w) = b_d(z)w^d + b_{d-1}(z)w^{d-1} + \cdots + b_0(z), \end{cases}$$

and let b_d be a polynomial of degree $l \geq 0$. We assume that $\delta \geq 2$ and $d \geq 2$. The dynamics of f consists of the dynamics of p on the base space and the dynamics on fibers: $f^n(z,w) = (p^n(z), Q_z^n(w))$, where $Q_z^n(w) = q_{p^{n-1}(z)} \circ \cdots \circ q_{p(z)} \circ q_z(w)$. Let J_p and K_p be the Julia and filled Julia sets of p, respectively. Favre and Guedj [2] proved that the limit $G_z(w) = \lim_{n\to\infty} d^{-n} \log^+ |Q_z^n(w)|$ exists on $K_p \times \mathbf{C}$. Let $K_z = \{w : G_z(w) = 0\}$. In this talk, we define a Julia set J'_f of f as

$$\bigcup_{z \in J_p} \{z\} \times \partial K_z.$$

We say that J'_f has symmetries if some nonelementary maps preserve it. In this talk, we consider the following symmetries: $\Gamma_f = \{\gamma \in S : \gamma(J'_f) = J'_f\}$, where

$$S = \left\{ \gamma \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 z + c_2 \\ c_3 w + c_4(z) \end{pmatrix} : \begin{array}{l} c_1, c_2, c_3 \text{ are constants} \\ c_4 \text{ is a polynomial in } z \end{array} \right\}.$$

Since J_p and K_z are compact for some $z \in J_p$, if $\gamma \in \Gamma_f$, then $|c_1| = |c_3| = 1$.

2 Results

We first show that the symmetries of J_f' are conjugate to rotational products by the rational map $h(z,w) = (z-\zeta, w-\zeta_z)$, where

$$\zeta = -\frac{a_{\delta-1}}{\delta a_\delta} \text{ and } \zeta_z = -\frac{b_{d-1}(z)}{d b_d(z)}.$$

Then we characterize the symmetries of J_f' as the maps in S that satisfy certain functional equations including the iterates of f. Using these results, we can classify the polynomial skew products whose Julia sets have infinitely many symmetries:

Theorem 1. *A polynomial skew product whose Julia set has infinitely many symmetries is polynomially conjugate to one of the following:*

1. $f(z,w) = (z^\delta, z^l w^d)$,
2. $f(z,w) = (z^\delta, q(w))$,
3. $f(z,w) = (p(z), b_d(z)w^d)$,
4. $f(z,w) = (z^\delta, q(z,w))$, *and f is semiconjugate to* $(z^\delta, q(1,w))$ *by* $\pi(z,w) = (z^s, z^r w)$ *for some nonzero integers s and r. If $l = 0$, then $\delta = d$. If $l \neq 0$, then $\delta \neq d$ and $l/(\delta - d) = s/r$.*

References

[1] A. F. Beardon, *Symmetries of Julia sets*, Bull. London Math. Soc., **22**, 576-582, 1990.

[2] C. Favre and V. Guedj, *Dynamique des applications rationnelles des espaces multiprojectifs*, Indiana Univ. Math. J., **50**, 881-934, 2001.

[3] K. Ueno, *Symmetries of Julia sets of nondegenerate polynomial skew products on* $\mathbf{C}^2$, Michigan Math. J., **59**, 153-168, 2010.

E-mail: kueno@toba-cmt.ac.jp

An invariant surface of a fixed indeterminate point for rational mappings

Tomoko Shinohara [1]

Tokyo Metropolitan College of Industrial Technology

In this talk, we consider a local dynamical structure of a rational mapping F of $\mathbf{P}^3$ near the set I of indeterminate points of F. Using a blow up, we will construct a surface V which contains I and is invariant by F.

First, prepare some notation and terminology. Let F be a meromorphic mapping on U which is a neighborhood of the origin of $\mathbf{C}^3$ with a set I of indeterminate points of F. In general, if p is an indeterminate point, then $\bigcap_{U_p} \overline{F(U_p \setminus \{p\})}$ is not a single point, where the intersection is taken over all open neighborhoods U_p of p. So, no de nition of the image $F(p)$ makes the mapping F be continuous. Moreover, if $p \in \bigcap_{U_p} \overline{F(U_p \setminus \{p\})}$, we call it a *fixed indeterminate point*. It can be seen from the de nition that a xed indeterminate point has a recurrent property, hence we expect a local dynamical structure at this point.

It is known that $\dim I = 0, 1$. If $\dim I = 0$, then we can construct generalized Cantor bouquet (see [1]). In the following, we consider the case that $\dim I = 1$. To simplify our discussion, put

$$I := \{(x_1, x_2, x_3) \in U \mid x_2 = 0, x_3 = 0\}.$$

Let $X_1 := \left\{(x_1, x_2, x_3) \times [l_2 : l_3] \in U \times \mathbf{P}^1 \mid x_3 l_2 - x_2 l_3 = 0\right\}$ be a subset of $U \times \mathbf{P}^1$. Then, X_1 is a subvariety of $U \times \mathbf{P}^1$ and covered by the following two coordinate charts $\{(U_1^j, \mu_1^j)\}_{j=2,3}$

$$U_1^2 := \left\{(x_1, x_2, x_3) \times [l_2 : l_3] \in X_1 \mid x_3 = \frac{l_3}{l_2} x_2\right\},$$

$$\mu_1^2 : U_1^2 \to \mathbf{C}^3, (x_1, x_2, x_3) \times [l_2 : l_3] \mapsto \left(x_1, x_2, \frac{l_3}{l_2}\right),$$

$$U_1^3 := \left\{(x_1, x_2, x_3) \times [l_2 : l_3] \in X_1 \mid x_2 = \frac{l_2}{l_3} x_3\right\},$$

$$\mu_1^3 : U_1^2 \to \mathbf{C}^3, (x_1, x_2, x_3) \times [l_2 : l_3] \mapsto \left(x_1, \frac{l_2}{l_3}, x_3\right).$$

Definition 1. *The map $\pi_1 : X_1 \to U$ defined by restricting the first projection $U \times \mathbf{P}^1 \to U$ is called the blow up of U along I and $E_1 := \pi^{-1}(I) = I \times \mathbf{P}^1$ is called the exceptional divisor.*

It is remarked here that $\pi_1 : X_1 \setminus E_1 \to U \setminus \{I\}$ is biholomorphic and

$$\pi_1|_{U_1^2}(z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2, z_2 z_3), \quad U_1^2 \cap E_1 = \left\{(z_1, z_2, z_3) \in U_1^2 \mid z_2 = 0\right\}.$$

[1] E-mail address: sinohara@s.metro-cit.ac.jp.
This research is supported by MEXT Grant-in-Aid for Young Scientists(B)No. 22740113.

Set $\tilde{F}_1 := F \circ \pi_1 : X_1 \to U$. Assume that F satis es the following assumption.

$$
(A.1)\begin{cases}
(1)\ \tilde{F}_1 \text{ is holomorphic on a neighborhood of } E_1, \\
(2)\ \tilde{F}_1(E_1) \ni (0,0,0),\ \{p_1\} = \tilde{F}_1^{-1}(0,0,0),\ p_1 = (0,0,a_1^3) \in U_1^2,\ \pi_1(p_1) = (0,0,0), \\
(3) \text{ there is an open neighborhood } N_1 \text{ of } p_1 \text{ such that} \\
\qquad \tilde{F}_1|_{N_1} : N_1 \to \tilde{F}_1(N_1) \text{ is biholomorphic.} \\
(4)\ I_1 := \tilde{F}_1^{-1}\left(I \cap \tilde{F}_1(N_1)\right),\ I_1 \subset E_1 \cap U_1^2 \text{ there is a holomorphic function } \psi_1 \\
\qquad \text{such that } I_1 = \{(z_1, z_2, z_3) \in U_1^2 \mid z_2 = 0,\ z_3 = \psi_1(z_1)\ \ |z_1| < \epsilon_1\}.
\end{cases}
$$

Let $X_2 := \left\{(z_1, z_2, z_3) \times [l_2 : l_3] \in N_1 \times \mathbf{P}^1 \mid z_2 l_3 = (z_3 - \psi_1(z_1)) l_2\right\}$ be a subset of $N_1 \times \mathbf{P}^1$. The map $\pi_2 : X_2 \to N_1$ is called the blow up of N_1 along I_1. Set $F_1 := \pi_1^{-1} \circ \tilde{F}_1 : N_1 \to X$ and $\tilde{F}_2 := F_1 \circ \pi_2 : X_2 \to X_1$. Then, the following claim holds.

$$
(A.2)\begin{cases}
(1)\ \tilde{F}_2 \text{ is holomorphic on a neighborhood of } E_2 := \pi_2^{-1}(I_1). \\
(2)\ \tilde{F}_2(E_2) \ni p_1,\ \{p_2\} = \tilde{F}_1^{-1}(p_1),\ \pi_2(p_2) = p_1, \\
\quad \text{if } p_2 \in U_2^2, \text{ then one can put } p_2 := (0,0,a_3^2) \in U_2^2. \\
(3) \text{ there is an open neighborhood } N_2 \text{ of } p_2 \text{ such that} \\
\qquad \tilde{F}_2|_{N_2} : N_2 \to \tilde{F}(N_2) \text{ is biholomorphic.} \\
(4)\ I_2 := \tilde{F}_2^{-1}\left(I_1 \cap \tilde{F}_2(N_2)\right),\ I_2 \subset E_2, \text{ there is a holomorphic function } \psi_2 \\
\qquad \text{such that } I_2 = \{(y_1, y_2, y_3) \in U_2^2 \mid y_2 = 0,\ y_3 = \psi_2(y_1)\ \ |y_1| < \epsilon_2\}.
\end{cases}
$$

If $p_n \in U_n^2 \cap E_n$ for every $n \in \mathbf{N}$, we can repeat this process inductively and obtain the sequence of sets

$$
I_n := \tilde{F}_{n-1}^{-1}\left(I_{n-1} \cap \tilde{F}_{n-1}(N_{n-1})\right) = \left\{(y_1, 0, y_3) \in U_n^2 \cap E_n \mid y_3 = \psi_n(y_1)\ \ |y_1| < \epsilon_n\right\}.
$$

Here, we set $\psi_n(y_1) = \sum_{i \geq 0} a_{in} y_1^i$. Using the sequence $\{I_n\}$, one can characterize the set of points whose orbit is bounded.

Theorem A. *For any $m \in \mathbf{N}$ and sufficiently small open neighborhood N_p^m of $p = (0,0,0)$, there exists some open neighborhood N_m of p_m such that*

$$
\bigcap_{k \geq 1}^{\infty} F^{-k}(N_p^m) \cap N_p^m \subset \pi \circ \quad \pi_m(N_m) \cap N_p^m.
$$

Put $V = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in U \mid x_3 = \sum_{i,j \geq 0} b_{ij} x_1^i x_2^j\right\}$.

Theorem B. *V is non-empty, $V \supset I$ and V is invariant by F if and only if $b_{ij} = a_{ij}$ for all $i, j \geq 0$.*

References

[1] T. Shinohara, *Another construction of a Cantor bouquet at a fixed indeterminate point*, Kyoto J. Math. 50(2010), no.1, 205 224.

平面曲線に沿う正則ベクトル場,
局所コホモロジーとホロノミック系

田島　慎一　(筑波大学)*

1. 局所コホモロジー

$\mathbb{C}^2$ の原点 $O=(0,0)$ の近傍 X において定義された既約な平面曲線 $C=\{(x,y)\mid f(x,y)=0\}$ であり，原点を特異点として持つものが与えられたとする．原点に台をもつ局所コホモロジーの層，$\mathcal{H}^2_{\{O\}}(\mathcal{O}_X)$ を用いて，

$$H_{T_f}=\{\eta\in\mathcal{H}^2_{\{O\}}(\mathcal{O}_X)\mid f\eta=\frac{\partial f}{\partial x}\eta=\frac{\partial f}{\partial y}\eta=0\},$$

$$H_{\Delta_f}=\{\eta\in\mathcal{H}^2_{\{O\}}(\mathcal{O}_X)\mid f\eta=\frac{\partial f}{\partial y}\eta=0\},$$

と定め，

$$\mathcal{A}_{X,O}=\{a\in\mathcal{O}_{X,O}\mid aH_{\Delta_f}\subseteq H_{T_f}\}$$

とおく．$\mathcal{O}_{X,O}$ 加群として，H_{Δ_f} を生成する局所コホモロジー類 $\sigma\in H_{\Delta_f}$ を取り，$\gamma=\frac{\partial f}{\partial x}\sigma$ とおく．この局所コホモロジー類 γ の annihilator を

$$Ann_{\mathcal{O}_X}(\gamma)=\{h\in\mathcal{O}_{X,O}\mid h\gamma=0\}$$

で表す．次が成り立つ．

補題 $\mathcal{A}_{X,O}=Ann_{\mathcal{O}_X}(\gamma)$

補題 ([5]) $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{A}_{X,O}/(f,\frac{\partial f}{\partial y})=\dim_{\mathbb{C}}H_{T_f}$ (Tjurina 数と等しい)

注意 $H_{\Delta_f},\sigma,\gamma,Ann_{\mathcal{O}_X}(\gamma)$ 等は [4] に与えた方法で計算可能.

2. 正則ベクトル場と torsion diferentials

定義より，イデアル $\mathcal{A}_{X,O}$ に属す正則関数 $a(x,y)$ に対し,

$$a(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}=c(x,y)f(x,y)$$

を満たす正則関数 $b(x,y),c(x,y)$ が存在する．従って，ベクトル場

$$v=a(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

は, 平面曲線 C を invariant variety として持つことになる．特に, イデアル $(f,\frac{\partial f}{\partial y})$ に属さないような $a(x,y)$ が定める正則ベクトル場は，非自明であることに注意.

キーワード : torsion differentials, holonomic D-modules

* 〒305-8571 つくば市天王台 1-1-1　筑波大学 大学院数理物質科学研究科
e-mail: tajima@math.tsukuba.ac.jp

平面曲線 C を invariant variety として持つ正則ベクトル場はすべてこの方法で構成できる.

$\mathcal{A}_{X,O}/(f, \frac{\partial f}{\partial y})$ の要素として零とならないような代表元 $a(x,y) \in \mathcal{A}_{X,O}$ に対し微分形式 $\omega = b(x,y)dx - a(x,y)dy$ を考える. この微分形式 ω は

$$\Omega^1_{C,O} = \Omega^1_{X,O}/f\Omega^1_{X,O} + \mathcal{O}_{X,O}df$$

の torsion となる. 逆に全ての torsion differentials はこの方法で構成できる ([5]). 更に, [1] の結果を用いると, 対数的微分形式を決定できる.

3. 平面曲線に台を持つホロノミー D-加群

X 上の正則関数を係数に持つ線形偏微分作用素全体のなす層を $\mathcal{D}_X$ で表す. $\mathcal{D}_X$ に属す高々一階の偏微分作用素であり, 代数的局所コホモロジー類 $[\frac{1}{f}]$ を annihilate するもの全体が生成する左 $\mathcal{D}_X$ イデアルを $\mathcal{A}nn^{(1)}_{\mathcal{D}_X}([\frac{1}{f}])$ とおき, 対応するホロノミー $\mathcal{D}_X$ 加群

$$\mathcal{M}^{(1)} = \mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn^{(1)}_{\mathcal{D}_X}([\frac{1}{f}])$$

を考える. イデアル $\mathcal{A}_{X,O}$ に属す正則関数 $a(x,y)$ に対し次で定義される偏微分作用素

$$P = a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y} - c(c,y)$$

は, $\mathcal{A}nn^{(1)}_{\mathcal{D}_X}([\frac{1}{f}])$ に属す. 逆に, $\mathcal{A}nn^{(1)}_{\mathcal{D}_X}([\frac{1}{f}])$ はこの様に構成される偏微分作用素と零階の偏微分作用素 f により生成される. この事実に注目すると [3] の結果を拡張できる. 特に, 次を得る.

定理 ホロノミー系 $\mathcal{M}^{(1)}$ の原点における重複度(特性多様体の重複度)は, $mult(f) + \mu - \tau - 1$ に等しい. ここで, μ, τ は, 平面曲線 C の原点におけるミルナー数, チュリナ数を表す.

参考文献

[1] A. G. Aleksandrov : On the de Rham complex of non-isolated singularities, Functsional Anal. i ego Prilozhen. **22** (1988), 50–60.

[2] P. Carbonne : Sur les différentielles de torsion, J. Algebra **202** (1998), 367–403.

[3] F. J. Castro-Jiménez, J. M. Ucha : Explicit comparison theorems for D-modules, J. Symbolic Compt. **32** (2001), 677–685.

[4] S. Tajima, Y. Nakamura, K. Nabeshima : Standard bases and algebraic local cohomology for zero-dimensional ideals, Adv. Studies in Math. **56**, (2009), 341–361.

[5] O. Zariski : Characterization of plane algebroid curves whose modules of differentials has maximaum torsion, Proc. Nat. Acad. Sci. **56** (1966), 781–786.

Holomorphic ベクトル場に対する Camacho-Sad-Suwa 指数の計算法

田島　慎一　(筑波大学)*

1. 背景

1982年に, C. Camacho と P. Sad は $\mathcal{C}^2$ 上の holomorphic なベクトル場とその integral submanifold に対し指数を定義し, blow-up による reduction とこの指数の概念を用いることで, separatrix の存在を示した.

いま, 原点 $(0,0)$ で $a(0,0)=b(0,0)=0$ となる正則ベクトル場

$$v=a(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

が曲線 $\{y=0\}$ を積分曲線として持つとする. このとき, ベクトル場 v の $\{y=0\}$ に関する Camacho-Sad 指数は, 留数値

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\{\frac{\partial}{\partial y}(\frac{b(x,y)}{a(x,y)})(x,0)\}dx$$

により定義される.

例 $y=x^\lambda$ の満たす微分方程式 $x\frac{dy}{dx}=\lambda y$ に対応するベクトル場 $v=x\frac{\partial}{\partial x}+\lambda y\frac{\partial}{\partial y}$ を考える. 積分曲線 $\{y=0\}$ に関する Camacho-Sad 指数は

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\lambda y}{x})dx=\lambda$$

で与えられる (一般に, Camacho-Sad 指数はホロノミー([3])を表す解析的な量).

A. L. Neto([4]) は, 積分曲線が特異点を持つ場合に Camacho-Sad 指数を拡張した. 諏訪立雄([5])は 1995年に, Grothendieck residue を用いて Camacho-Sad 指数を表現する式を与え, 自己交点数や特性類との関係を明らかにした. また, M. Brunella([1]) は Camacho-Sad 指数と Baum-Bott 指数との関係等について論じた.

2. 計算法

多項式係数のベクトル場

$$v=a(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

が既約な平面代数曲線 $f(x,y)=0$ を invariant variety として持つとする. この時, 諏訪立雄([5])の公式を用いることで, 一般化された Camacho-Sad 指数をアルゴリズミックに求めることが可能となることを報告する.

キーワード : algebraic local cohomology, Grothendieck local residues

* 〒305-8571 つくば市天王台1-1-1　筑波大学 大学院数理物質科学研究科
e-mail: tajima@math.tsukuba.ac.jp

簡単のため，ここでは以下，ベクトル場の特異点は原点 $(0,0)$ であるとする．

Step 0.

$$a(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}=c(x,y)f(x,y)$$

なる多項式 $c(x,y)$ を求める．

Step 1. ベクトル空間 $W=\{\eta\in H^2_{[(0,0)]}(\Omega^2_X)\mid f(x,y)\eta=a(x,y)\eta=0\}$ の基底を計算．ここで，Ω^2_X は，原点 $(0,0)$ の近傍 X 上の正則 2-forms のなす層，$H^2_{[(0,0)]}(\Omega^2_X)$ は原点に台を持つ代数的局所コホモロジー．

Step 2. 代数的局所コホモロジー類 $[\dfrac{dx\wedge dy}{a(x,y)f(x,y)}]$ の満たす偏微分方程式系（ホロノミー系）を構成する([6])．

Step 3. Step 1 で構成した基底の線形結合であり，Step 2 で構成した偏微分方程式系を満たすものを求める．さらに重複度に関する情報を利用して，代数的局所コホモロジー類

$$[\frac{c(x,y)dx\wedge df}{a(x,y)f(x,y)}]$$

の原点における展開式を決定する．

Step 3 で得た展開式のデルタ関数部分の係数が，求める Camacho-Sad 指数を与える([5])．

補足 正則ベクトル場の特異点が原点でない一般の場合，[7], [8] で与えた計算アルゴリズムを利用する．

参考文献

[1] M. Brunella : Some remarks on indices of holomorphic vector fields, Publ. Mat. **41** (1997), 527–544.

[2] C. Camacho, P. Sad : Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields, Ann. Math. **115** (1982), 579–595.

[3] J. F. Mattei, R. Moussu : Holonomie et intgrales premières, Ann. Sci. l'Ecole Norm. Sup. **13** (1980), 469–523.

[4] A. Lins Neto : Algebraic solutions of polynomial differential equations and foliations in dimension two, Lecture Notes in Math. **1345** (1988), 192–232.

[5] T. Suwa : Indices of holomorphic vector fields relative to invariant curves on surfaces, Proc. AMS. **123** (1995), 2989–2997.

[6] S. Tajima, Y. Nakamura : Annihilating ideals for an algebraic local cohomology class, J. Symbolic Compt. **44** (2009), 435–448.

[7] 田島慎一：零次元代数的局所コホモロジー類に付随するホロノミック系の構成アルゴリズム，京都大学数理解析研究所講究録 **1412** (2005), 189–198.

[8] 田島慎一：Noether 作用素と多変数留数計算アルゴリズム，京都大学数理解析研究所講究録 **1431** (2005), 123–136.

$(C^*)^n$ 内の等質 Reinhardt 領域

木村光一（東北大学大学院）

Reinhardt 領域の正則同値問題の一つとして、次の予想が知られている。

C^n 内の擬凸な等質 Reinhardt 領域 D に対して、正の整数 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ $(n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k)$ と l, m で、$n_1 + n_2 + \cdots + n_k + l + m = n$ を満たすものが存在して、D は

$$B_{n_1} \times B_{n_2} \times \cdots B_{n_k} \times C^l \times (C^*)^m$$

と代数的同値になる。

ここで、$B_{n_i} = \{z \mid \|z\|_{n_i} < 1\}$ であり、代数的同値とは、各成分が原点を中心とする Lauret 単項式からなる双正則写像が存在することである。一般的な場合は当面手に負えないが, 領域 D が座標超平面上の点を含まないという限定的な条件のもとで、予想を示すことができた。

定理 $(C^*)^n$ 内の擬凸で等質な Reinhardt 領域 D は、$(C^*)^n$ と一致する。

証明のプロットは Shimuzu [7] による。その中でも次の二つの補題は重要な役割を演じる。

補題 1 $E \times C^l$ と $E' \times C^{l'}$ を C^n 内の二つの領域とする。ただし、領域 $E \subset C^{n-l}$ と領域 $E' \subset C^{n-l'}$ は共に有界領域と正則同値であるとする。このとき、正則同型写像 $\Phi : E \times C^l \longrightarrow E' \times C^{l'}$ が存在するならば、$l = l'$ である。さらに, $w \in C^n$ を

$$w = \begin{pmatrix} w^{(1)} \\ w^{(2)} \end{pmatrix}, \quad w^{(1)} \in C^{n-l}, \quad w^{(2)} \in C^l$$

と表すと、Φ は

$$w = \begin{pmatrix} w^{(1)} \\ w^{(2)} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \Phi^{(1)}\left(w^{(1)}\right) \\ \Phi^{(2)}\left(w\right) \end{pmatrix}$$

と表せて、$\Phi^{(1)} : E \longrightarrow E'$ は正則同型写像である。

補題 2　Ω, $\Omega' \subset R^n$ は領域で、その凸包は直線を含まないとする。$T_\Omega = \Omega \times \sqrt{-1}R^n \subset C^n$ 等とするとき、双正則写像 $\Phi : T_\Omega \longrightarrow T_{\Omega'}$ にたいして, ある $A, B \in GL(n, R)$ が存在して

$$\Phi(\zeta + \sqrt{-1}Am) = \Phi(\zeta) + \sqrt{-1}Bm \qquad (\zeta \in T_\Omega,\ n \in Z^n)$$

が成り立つならば、Φ はその線型部分が $GL(n, R)$ に属する C^n の Affine 変換である.

これらの結果を用いると、仮定 $D \neq (C^*)^n$ から、ある有界領域に高々可算個の自己同型写像の集合が推移的に作用することが示されて矛盾が生じる。

参考文献

[1] D. Barrett, E. Bedford, and J. Dadok, *T^n-actions on holomorphically separable complex manifolds*, Math. Z. 202 (1989), 65-82

[2] E. Cartan, *Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes*, Abh. Math. Sem. Hamburg 11 (1935), 116-162

[3] R. Narasimhan, *Sevral Complex Variables*, Uni. of Chicago Press, 1971

[4] S. Shimizu, *Automorphisms and eqivalence of bounded Reinhardt domains not containing the origin*, Tohoku Math. J. 40 (1988), 119-152

[5] S. Shimizu, *Holomorphic eqivalence problem for a certain class of unbounded Reinhardt domains in C^2*, Osaka J. Math. 28 (1991), 609-621

[6] S. Shimizu, *Holomorphic eqivalence problem for a certain class of unbounded Reinhardt domains in C^2*, II, Kodai Math. J. 15 (1992),430-444

[7] S. Shimizu, *Holomorphic equivalence problem for Reinhardt domains and the conjugacy of torus actions*, preprint

The Loewner differential equation and subordination chains in several complex variables

Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University)*

A mapping $f : B^n \times [0, \infty) \to \mathbb{C}^n$ is called a subordination chain if $f(\cdot, t)$ is holomorphic on B^n, $f(0, t) = 0$ for $t \geq 0$, and there exist Schwarz mappings $v(z, s, t)$ such that $f(z, s) = f(v(z, s, t), t)$ for $0 \leq s \leq t < \infty$.

Let $f(z, t) : B^n \times [0, \infty) \to \mathbb{C}^n$ be a solution to the following Loewner differential equation such that $f(\cdot, t) \in H(B^n)$, $f(0, t) = 0$, $t \geq 0$, and $f(z, \cdot)$ is locally absolutely continuous on $[0, \infty)$ locally uniformly with respect to $z \in B^n$:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z, t) = Df(z, t)h(z, t), \quad \text{a.e. } t \geq 0, \quad \forall z \in B^n, \tag{1}$$

where $h(z, t)$ is a generating vector field. Then we say that $f(z, t)$ is a standard solution to the Loewner differential equation (1).

For each $s \geq 0$ and $z \in B^n$, the initial value problem

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -h(v, t) \text{ a.e. } t \geq s, \quad v(z, s, s) = z, \tag{2}$$

has a unique solution $v = v(z, s, t)$ such that $v(\cdot, s, t)$ is a univalent Schwarz mapping, $v(z, s, \cdot)$ is Lipschitz continuous on $[s, \infty)$ locally uniformly with respect to $z \in B^n$, and $Dv(0, s, t) = \exp(-\int_s^t A(\tau)d\tau)$ for $t \geq s \geq 0$, where $Dh(0, t) = A(t)$. Under some additional conditions on $A(t)$, there exists the limit

$$\lim_{t\to\infty} e^{\int_0^t A(\tau)d\tau} v(z, s, t) = f(z, s) \tag{3}$$

locally uniformly on B^n for each $s \geq 0$, and $f(z, t)$ is a univalent subordination chain such that $f(z, s) = f(v(z, s, t), t)$ for $z \in B^n$ and $0 \leq s \leq t < \infty$. Also, $\{e^{-\int_0^t A(\tau)d\tau} f(\cdot, t)\}_{t\geq 0}$ is a normal family on B^n, $Df(0, t) = e^{\int_0^t A(\tau)d\tau}$, $t \geq 0$, $f(z, \cdot)$ is locally Lipschitz continuous on $[0, \infty)$ locally uniformly with respect to $z \in B^n$, and a solution to (1). This solution is called the canonical solution to (1).

Recently, we are studying about the Loewner differential equations and subordination chains in several complex variables:

1. (new) abstract approach to Loewner chains on complex manifolds [1];
2. solutions for the Loewner differential equation [2], [4], [11];
3. quasiconformal extension [3];
4. extension operators to higher dimensional spaces [5];
5. geometrical characterization of the image [6], [7], [8];

This work is partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) no.22540213 from Japan Society for the Promotion of Science, 2010.

* e-mail: h.hamada@ip.kyusan-u.ac.jp
web: http://www.ip.kyusan-u.ac.jp/J/kougaku/tb/hamada/

6. extreme points and support points [9];
7. convex subordination chains [10], [16];
8. growth theorems and coefficient bounds [12], [13], [14];

In this talk, we will show some of the above results.

References

[1] L. Arosio, F. Bracci, H. Hamada and G. Kohr, An abstract approach to Loewner's chains, submitted.

[2] P. Duren, I. Graham, H. Hamada and G. Kohr, Solutions for the generalized Loewner differential equation in several complex variables, *Math. Ann.*, **347** (2010), 411–435.

[3] I. Graham, H. Hamada and G. Kohr, Radius problems for holomorphic mappings on the unit ball in $\mathbf{C}^n$, *Math. Nachr.*, **279** (2006), 1474–1490.

[4] I. Graham, H. Hamada and G. Kohr, On subordination chains with normalization given by a time-dependent linear operator, *Complex Anal. Oper. Theory* , to appear.

[5] I. Graham, H. Hamada and G. Kohr, Extension operators and subordination chains, preprint.

[6] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr and M. Kohr, Asymptotically spirallike mappings in several complex variables, *J. Anal. Math.*, **105** (2008), 267–302.

[7] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr and M. Kohr, Parametric representation and asymptotic starlikeness in $\mathbf{C}^n$, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **136** (2008), 3963–3973.

[8] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr and M. Kohr, Spirallike mappings and univalent subordination chains in $\mathbb{C}^n$, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.*(5) **7** (2008), 717-740.

[9] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr and M. Kohr, Extreme points, support points and the Loewner variation in several complex variables, submitted.

[10] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr and J. A. Pfaltzgraff, Convex subordination chains in several complex variables, *Canad. J. Math.* **61** (2009), 566–582.

[11] H. Hamada, Polynomially bounded solutions to the Loewner differential equation in several complex variables, submitted.

[12] H. Hamada and T. Honda, Sharp growth theorems and coefficient bounds for starlike mappings in several complex variables, *Chin. Ann. Math. Ser.B*, **29** (2008), 353–368.

[13] H. Hamada, T. Honda and G. Kohr, Growth theorems and coefficient bounds for univalent holomorphic mappings which have parametric representation, *J. Math. Anal. Appl.* **317** (2006), 302–319.

[14] H. Hamada, T. Honda and G. Kohr, Parabolic starlike mappings in several complex variables, *Manuscripta Math.*, **123** (2007), 301–324.

[15] H. Hamada and G. Kohr, On some classes of bounded univalent mappings in several complex variables, *Manuscripta Math.*, **131** (2010), 487–502.

[16] H. Hamada, G. Kohr, P. T. Mocanu and I. Şerb, Convex subordination chains and injective mappings in $\mathbb{C}^n$, *J. Math. Anal. Appl.*, **364** (2010), 32–40.

Distortion theorems for convex mappings on homogeneous balls

Tatsuhiro Honda (Hiroshima Institute of Technology, Japan)*1
Hidetaka Hamada (Kyushu Sangyo University, Japan)*2
Cho Ho Chu (Queen Mary, University of London, England)
Gabriela Kohr (Babeş-Bolyai University, Romania)

We first recall the distortion theorem for a convex function on the open unit disc U in the complex plane $\mathbb{C}$. If $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ is normalized and convex, then

$$\frac{1}{(1+|x|)^2} \le |f'(x)| \le \frac{1}{(1-|x|)^2}, \quad x \in U.$$

Various distortion theorems for univalent functions have been studied.

The object of this talk is to generalize the distortion theorems for convex mappings on finite dimensional Euclidean balls to infinite dimension, as well as improving some infinite dimensional results. From the perspective of the Riemann Mapping Theorem, an appropriate generalization of $U \subset \mathbb{C}$ would be the homogeneous open unit ball B of a complex Banach space. Indeed, every bounded symmetric domain in a complex Banach space is biholomorphically equivalent to such a ball. A complex Banach space is a JB*-triple if, and only if, its open unit ball is homogeneous. Therefore a natural extension of the finite dimensional distortion theorems should be the ones for convex mappings on the open unit ball of a JB*-triple. We achieve such an extension by proving the following distortion results.

Main Theorem([1])

Let B be the open unit ball of a JB*-triple X. Given a normalized convex mapping $f : B \to X$ with derivative Df, we have, for $a, b, x \in B$ and $y \in X$,

(i) $\dfrac{1}{(1+\|x\|)^2} \le \|Df(x)\| \le \dfrac{1}{(1-\|x\|)^2}$;

(ii) $\dfrac{(1-\|x\|)\|y\|}{(1+\|x\|)\|B(x,x)^{1/2}\|} \le \|Df(x)y\| \le \dfrac{\|y\|}{(1-\|x\|)^2}$;

(iii) $\|f(a)-f(b)\| \ge \dfrac{\sinh C_B(a,b)}{\exp C_B(a,b)} \max\left\{\dfrac{1-\|a\|^2}{\|[Df(a)]^{-1}\|}, \dfrac{1-\|b\|^2}{\|[Df(b)]^{-1}\|}\right\}$;

(iv) $\|f(a)-f(b)\| \le \sinh C_B(a,b) \exp C_B(a,b)$
$\times \min\left\{\|B(a,a)^{1/2}\|\|Df(a)\|, \|B(b,b)^{1/2}\|\|Df(b)\|\right\}$,

where C_B is the Carathéodory distance on B and $B(x,x) : X \to X$ is the Bergmann operator (Note that $\|B(x,x)^{1/2}\| \le 1$).

---

*1 e-mail: thonda@cc.it-hiroshima.ac.jp
*2 e-mail: h.hamada@ip.kyusan-u.ac.jp

For convenience, we refer to the open unit ball of a JB*-triple as a *homogeneous ball.* Homogeneous balls include the classical Cartan domains as well as the two exceptional domains, the open unit balls of complex Hilbert spaces and the open unit balls of C*-algebras.

The distortion theorem in Main Theorem (i) on the Euclidean balls in $\mathbb{C}^n$ was proved in [3], [8]. It has been further generalized to the open unit balls of complex Hilbert spaces in [4, 5]. In [4], it is proved that the upper bound in Main Theorem (i) is sharp for the open unit balls of complex Hilbert spaces although the lower bound is not sharp for the Euclidean balls of dimension at least 2. The following distortion theorem for convex mappings f on the open unit balls of complex Banach spaces has been proved in [9]:

$$\frac{1}{(1+\|x\|)^2} \leq \|Df(x)\| \leq \frac{1+\|x\|}{(1-\|x\|)^2}.$$

They [9, Conjecture 2.2] conjectured that Main Theorem (i) holds for convex mappings on the open unit balls of complex Banach spaces. Our theorem is an affirmative answer to this conjecture for convex mappings on homogeneous balls.

The distortion theorem in Main Theorem (ii) on the open unit balls of complex Hilbert spaces H is proved in [9]:

$$\frac{\|y\|\sqrt{1-\|x\|^2}}{(1+\|x\|)^2} \leq \|Df(x)y\| \leq \frac{\|y\|}{(1-\|x\|)^2}. \tag{1}$$

In fact, we show that $\|B(x,x)^{1/2}\| = \sqrt{1-\|x\|^2}$ for H with $\dim H \geq 2$.

The two-point distortion in Main Theorem (iii) for $U \subset \mathbb{C}$ has been proved in [6]. On finite dimensional Euclidean balls, it has been proved in [7] (cf. [2]).

References

[1] C-H. Chu, H. Hamada, T. Honda, G. Kohr, Distortion theorems for convex mappings on homogeneous balls, J. Math. Anal. Appl., 369 (2010), pp. 437 442.

[2] P. Duren, H. Hamada, G. Kohr, Two-point distortion theorems for harmonic and pluriharmonic mappings, submitted.

[3] S. Gong, T. Liu, Distortion theorems for biholomorphic convex mappings on bounded convex circular domains, Chinese Ann. Math. Ser. B 20 (1999) 297 304.

[4] H. Hamada, G. Kohr, Growth and distortion results for convex mappings in infinite dimensional spaces, Complex Var. Theory Appl. 47 (2002) 291–301.

[5] H. Hamada, G. Kohr, Φ-like and convex mappings in infinite dimensional spaces, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 47 (2002) 315–328.

[6] S.A. Kim, D. Minda, Two-point distortion theorems for univalent functions, Pacific J. Math. 163 (1994) 137 157.

[7] G. Kohr, On some distortion results for convex mappings in $\mathbb{C}^n$, Complex Var. Theory Appl. 39 (1999) 161 175.

[8] J.A. Pfaltzgraff, T.J. Suffridge, Norm order and geometric properties of holomorphic mappings in $\mathbf{C}^n$, J. Analyse Math. 82 (2000) 285 313.

[9] Y. Zhu, M. Liu, Distortion theorems for biholomorphic convex mappings in Banach spaces, Complex Var. Theory Appl. 50 (2005) 57 68.

一般化された楕円体の境界上の CR 自己同型群に関する一考察

林本厚志: 長野工業高等専門学校

$$(1)\qquad M_0 = \{(z_1, \ldots, z_s, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n_1} \times \quad \times \mathbb{C}^{n_s} \times \mathbb{C} :$$
$$\mathrm{Im} z_{n+1} = |z_1|^{2m_1} + \quad + |z_{s-1}|^{2m_{s-1}} + |z_s|^2\}$$

とおく．ただし $z_j = (z_j^1, \ldots, z_j^{n_j}) \in \mathbb{C}^{n_j}$ に対して $|z_j|^2 = \sum_{k=1}^{n_j} |z_j^k|^2$, $j = 1, \ldots, s-1$ に対して $m_j, n_j \geq 2$, $n_s \geq 0$ とし，M_0 の強擬凸部分を M とする．M を一般化された擬楕円体の境界という．以下 σ は $1, \ldots, s-1$ の置換を表す．この講演では次の定理 (Robert Monti and Daniele Morbidelli;Pseudohermitian invariants and classi ccation of CR mappings in generalized ellipsoids, arXiv:1004.1922) の別証明を与える．

Theorem 0.1. $f : N \to N'$ を M の連結開集合の間の CR 同型写像とする．このときうまく ψ, δ_r, ϕ_a を下のように選んで $f = \psi \circ \delta_r \circ J \circ \phi_a$ と分解できる．ここで各写像は次のように定義される．

$$(2)\qquad I(z, z_{n+1}) = \left(\frac{z_1}{(z_{n+1})^{1/m_1}}, \ldots, \frac{z_{s-1}}{(z_{n+1})^{1/m_{s-1}}}, \frac{z_s}{z_{n+1}}, -\frac{1}{z_{n+1}}\right)$$

$$(3)\qquad \delta_r(z, z_{n+1}) = (r^{1/m_1} z_1, \ldots, r^{1/m_{s-1}} z_{s-1}, r z_s, r^2 z_{n+1})$$

$$(4)\qquad \psi(z, z_{n+1}) = (B_1 z_{\sigma(1)}, \ldots, B_{s-1} z_{\sigma(s-1)}, B_s z_s + b_s,$$
$$b_{n+1} + z_{n+1} + 2i(B_s z_s \quad \bar{b}_s)$$

$$(5)\qquad \phi_a(z, z_{n+1}) = (z_1, \ldots, z_{s-1}, z_s + a_s, z_{n+1} + a_{n+1} + 2i z_s \quad \bar{a}_s)$$

$r > 0$, B_j はユニタリー行列, $b_s \in \mathbb{C}^{n_s}, b_{n+1} = t_0 + i|b_s|^2 \in \mathbb{C}$, $a = (a_s, t_0 + i|a_s|^2) \in \mathbb{C}^{n_s} \times \mathbb{C}$, $a_{n+1} = t_0 + i|a_s|^2$ とする．f の分解中, J は上記の I 又は恒等写像を表す．

原論文では次のようなステップで証明がされている．

(1) CR ベクトル場 $T^{0,1}M$ の部分束 $\mathcal{W}_1, \ldots, \mathcal{W}_s, \mathcal{E}$ で $T^{0,1}M = \mathcal{W}_1 \oplus \quad \oplus \mathcal{W}_s \oplus \mathcal{E}$ かつ CR 同型写像で

$$(6)\qquad f\ (\mathcal{W}_j) = \mathcal{W}_{\sigma(j)}, j = 1, \ldots, s-1,$$

$$(7)\qquad f\ (\mathcal{W}_s \oplus \mathcal{E}) = \mathcal{W}_s \oplus \mathcal{E}$$

を満たす物を構成する．

(2) 上の分解を利用して M のリッチ曲率やチャーンテンソルなどの f による変換則を求める．

(3) CR 同型写像が擬エルミート構造に関してレビ等長 (よって CR ファクターが 1) であれば, それは定理の ψ であることを示す．この証明に擬楕円体の定義方程式の特殊性と (2) の変換則を使う．

(4) $G = \delta_r \circ J \circ \phi_a$ と置いて $f = \Psi \circ G$ とすると, CR ファクターの CR 同型写像による変換則から Ψ の CR ファクターが 1 であることが分かり (3) により証明が完成する．

しかしこの証明には次のような不満な点がある.

(1) m_j, n_i が定理の条件を満たさないときには, すべての局所的な CR 写像が大域的な双正則写像に拡張できるとは限らない. そのときには別の議論をする必要がある.

(2) 定理の証明は, 考えられる写像をすべて合成してそれ以外の写像の合成が必要だとしたら, それは定理の ψ しかないという議論であるが, なぜそのような写像が出てくるか, なぜそのような写像で尽きているのか, の理由は分からない.

(3) 曲率の変換則と CR ファクターから写像の条件を出しているが, それは擬楕円体の定義関数が特殊な形をしていることを利用しているので, この議論が使える超曲面は限られている.

このような難点を (多少なりとも) 解決するのがここで紹介する別証明である. 証明で使うのは (6), (7) の性質だけである. f は CR 写像なので $T^{0,1}(M)$ を不変にすることは分かっているが, 一般にその部分束が不変に保たれるかは分からない. うまく部分束 $\mathcal{W}_1, \ldots, \mathcal{W}_s, \mathcal{E}$ を構成して (6) と (7) の式を満たすようにする. 一方, 元々は $\mathcal{W}_j$ の元 W_j に対して $f_*(W_j)$ は各 $\mathcal{W}_1, \ldots, \mathcal{W}_s, \mathcal{E}$ の元の和で書けるはずであるが (6), (7) の条件からその和のいくつかの係数はゼロである. 同じことを $\mathcal{W}_s \oplus \mathcal{E}$ に対しても行う. これを f や $\mathcal{W}_j$ の具体的な表示を代入して行うと, 「係数=0」という式には f のテーラー展開の係数についての条件が入っている. その条件を書き下し, そこにうまくパラメーターを入れると, 定理のような写像の合成として f が書けることが分かる.

この証明では m_j, n_i について $m_j \geq 2$ の条件しか使わない ($n_j \geq 2, j = 1, \ldots, s-1$ は必要ない) が, すべての j で $m_j = 1$ なら球面になるので, この仮定は妥当である. また, この別証明でも, なぜ定理のような写像の合成で尽きているか, は分からないが少なくともここで与えた別証明によりそれらの写像は自然に出てくる. 次に擬楕円体の定義関数の特殊性については, この別証明では変数が「分離」していることが本質であった. つまり $z_j = (z_j^1, \ldots, z_j^{n_j})$ と $z_j = (z_i^1, \ldots, z_i^{n_i})$ が分離していることでうまく部分束 $\mathcal{W}_j$ や $\mathcal{E}$ が構成できた. これは擬楕円体に限った性質ではなく, 例えば 2 つの超曲面の直積でも成り立つ性質である. (6) と (7) は $1, \ldots, s-1$ の入れ換えの後に $\mathcal{W}_j$ や $\mathcal{W}_s \oplus E$ の積分多様体が f で移りあうことを示しているが, M をそれらの積分多様体で埋め尽くすことで f は積分多様体同士を移しあう「積分多様体保存の写像」であると言える. このことは「$M \times N$ と $\widetilde{M} \times \widetilde{N}$ が CR 同値で, 各成分の CR 多様体が有限型かつ有限的非退化であれば, 必要なら直積の順番を入れ替えて M と $\widetilde{M}$, N と $\widetilde{N}$ が CR 同値である」という S.Y.Kim, D.Zaitsev, A.Hayashimoto の論文につながっていく.

E-mail address: atsushi@ge.nagano-nct.ac.jp

制限型Carathéodory擬体積形式について

菊田　伸（東北大学大学院理学研究科）

(sa6m15@math.tohoku.ac.jp)

私は[5]において, n次元複素多様体Xの標準束の体積とCarathéodory測度に関する全測度の間の関係に関して次の結果を得た:

定理 1. Xを正規なcompact複素解析空間とし, $p:\tilde{X}\to X$をその普遍被覆, K_Xをその標準束とする. そのとき, $\tilde{X}$のCarathéodory測度$\mu^C_{\tilde{X}}$とK_Xの体積$\mathrm{vol}(K_X)$に対して

$$\mathrm{vol}(K_X):=\overline{\lim_{m\to\infty}}\, n!\frac{h^0(X,\mathcal{O}(mK_X))}{m^n}\geq\frac{(n+1)^n n!}{(4\pi)^n}\mu^C_{\tilde{X}}(X)$$

が成り立つ.

これはCarahéodory測度の非自明性（このとき$\tilde{X}$はCarathéodory測度双曲的といい）が, 標準束の巨大という正値性を導くことを明確な不等式で表している.

この定理の証明は, Carathéodory擬体積形式の曲率を調べ, それをBoucksom-Popoviciによる体積のcurrent積分表示公式に適用することで得られる

今回の講演の主題は, この定理をXのd次元解析的部分集合Zへの制限型に一般化することである.

まず正則直線束に対する体積の制限型の定義を述べる. compact複素多様体X上の正則直線束Lとそのd次元閉解析的部分集合$\iota:Z\hookrightarrow X$に対して

$$H^0(X|Z,\mathcal{O}(mL)):=\mathrm{Im}[\iota^*:H^0(X,\mathcal{O}(mL))\to H^0(Z,\mathcal{O}(mL))]$$

を任意の$m\in\mathbb{N}$について考える. その時LのZへの制限型体積$\mathrm{vol}_{X|Z}(L)$は

$$\mathrm{vol_{X|Z}}(L):=\limsup_{m\to\infty}\frac{\dim H^0(X|Z,\mathcal{O}(mL))}{m^d/d!}$$

で定義される. 制限型体積はZ上のLの正則大域切断でXに拡張できるものの数を漸近的に測ったものである. また正則大域切断の拡張をするためにとても有用な道具であり, 様々な応用がある([2]).

そこでXの標準束K_Xの制限型体積と比較するのに自然なCarathéodory擬体積形式または測度の制限型を次のように定義する.

定義 1. Zが滑らかである時には, Zへの制限型Carathéodory擬体積形式$v^C_{X|Z}$は次で定義する：

$$v^C_{X|Z}:=\sup\left\{(f|_Z)^*\left(\frac{2^d}{d!(n+1)^d}(\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log v_1)^d\right)\ ;\ f:X\to\mathbb{B}^n:\text{正則}\right\}.$$

ここで$v_1 = 2^n(1-|t|^2)^{-(n+1)} \bigwedge_{\alpha=1}^n dt^\alpha \wedge d\bar{t}^\alpha$ はn次元複素単位球体$\mathbb{B}^n$上のPoincaré体積形式である.

一般のZに対してはこの類似の形で測度$\mu_{X|Z}^C$として定義し, 制限型Carathéodory測度と呼ぶ.

実はこの概念は本質的にはEisenman([3])によって考えられていたものである.

またCarathéodory測度が持つ重要な性質である測度減少原理をこの制限型に対して考えると, 次のようになる：

命題 1. • Yをn次元複素多様体, Wをそのd次元解析的部分集合とする. このとき任意の$f(W) \subset Z$を満たす正則写像$f : Y \to X$に対して$f^*\mu_{X|Z}^C \leq \mu_{Y|W}^C$となる.

• $v_{X|Z}^C$の曲率関数$K_{v_{X|Z}^C}$(c.f. [5])は-1以下である.

この性質からZを保つXの正則自己同型に関して制限型Carathéodory測度は不変であり, 特に$\tilde{Z} := p^{-1}(Z)$としたら$\mu_{\tilde{X}|\tilde{Z}}^C$は$Z$上の測度と見なせる.

以上の準備の下で定理1の制限型である主定理は次のように述べられる:

主定理 1. 非特異射影代数多様体Xと$v_{\tilde{X}}^C$の零点集合に含まれない閉解析的部分集合Zに対して

$$\mathrm{vol}_{X|Z}(K_X) \geq \frac{(n+1)^d d!}{(4\pi)^d} \mu_{\tilde{X}|\tilde{Z}}^C(Z)$$

が成り立つ.

証明方法は定理1とほぼ同じで, まず曲率の代わりに制限型Carathéodory擬体積形式とCarathéodory擬体積形式の曲率currentのZへの制限のnon-pluripolar Monge-Ampère積([1])の間の不等式を調べる. そしてそれをMatsumura-HisamotoによるBoucksom-Popoviciの公式の制限型版([4], [6])に適用する.

参考文献

[1] S. Boucksom, P. Eyssidieux, V. Guedj, and A. Zeriahi, *Monge-Ampere equations in big cohomology classes*, arXiv/math:0812.3674.

[2] L. Ein, R. Lazarsfeld, M. Mustaţă, M. Nakamaye, and M. Popa, *Restricted volumes and base loci of linear series*, Amer. J. Math. **131** (2009), no. 3, 607–651.

[3] D. A. Eisenman, *Intrinsic measures on complex manifolds and holomorphic mappings*, Memoirs of the American Mathematical Society, No. 96, 1970.

[4] T. Hisamoto, *Restricted Bergman kernel asymptotics*, master thesis (Tokyo University).

[5] S. Kikuta, *Carathéodory measure hyperbolicity and positivity of canonical bundles*, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[6] S. Matsumura, *Restricted volumes and divisorial Zariski decompositions*, arXiv:math/1005.1503.

半豊富な直線束のq-正値性とファイバー次元

松村 慎一（東京大学大学院数理科学研究科）

X を n 次元の非特異射影多様体, L を X 上の正則直線束とする. 直線束 L が正 (positive) である (即ち, L の曲率が正となる計量が存在する) ことは, 以下のように様々な立場から特徴付けられている.

(A) [幾何学的特徴付け, Kodaira.] L が豊富 (ample) である. 即ち, 適当な回数捻った直線束 $L^{\otimes m}$ の完備一次系が (複素) 射影空間への埋め込みを誘導する.

(B) [コホモロジー, Serre.] X 上の任意の連接層 $\mathcal{F}$ に対して, L を十分に捻れば, 1次以上のコホモロジー $H^i(X, \mathcal{F} \otimes L^{\otimes m})$ $(i > 0)$ は消滅する.

(C) [数値的特徴づけ, Nakai-Moishezon-Kleiman.] X の任意の部分多様体 V 上での L の自己交点数 $(L^{\dim V} \cdot V)$ が常に正である.

本講演では, 直線束の q-正値性について考察する.

定義. $q = 0, 1, \ldots, n$ とする. 直線束 L の (滑らかな) エルミート計量で以下を満たすものが存在する時, L は q-正 (*q-positive*) であるという.
エルミート計量のチャーン曲率が X の至る所で $(n - q)$ 個以上の正固有値を持つ.

定義から明らかなように, q-正値性の概念は通常の正の概念の拡張である. ここで, 0-正が通常の正の概念に当たることに注意する. この時, 以下の問題が自然に発生する

問題. 直線束の q-正値性の (A) 幾何学的, (B) コホモロジー的, (C) 数値的な特徴付けを与えよ.

直線束 L が半豊富 (semi-ample) の場合, この問題は定理 1 により解決される (系 2 を参照). ここで, 直線束 L が半豊富とは, 適当な回数捻った直線束 $L^{\otimes m}$ $(m > 0)$ が基底点自由 (base point free) になることを意味する. つまり, $L^{\otimes m}$ $(m > 0)$ の完備一次系が射影空間への正則写像 $\Phi_{|L^{\otimes m}|} : X \longrightarrow \mathbb{P}^N$ を誘導する.

一般に, q-正な直線束に対しては, 以下のコホモロジーが消滅することが知られている (Andreotti-Grauert).

(*) X 上の任意の連接層 $\mathcal{F}$ に対して, L を十分に捻れば, $(q + 1)$ 次以上のコホモロジー $H^i(X, \mathcal{F} \otimes L^{\otimes m})$ $(i > q)$ は消滅する.

この条件 (*) をコホモロジー的 q-豊富性と呼ぶことにする. 逆に, コホモロジー的 q-豊富性から q-正値性が導かれるかどうかは未解決である. これが肯定的に解決されれば, q-正値性のコホモロジーによる特徴付けが得られたこととなる. 簡単なスペクトル系列の議論により, 半豊富な直線束のコホモロジー的 q-豊富性は, 正則写像 $\Phi_{|L^{\otimes m}|}$ のファイバーの次元で特徴付けられる [Som] ことに注意する.

主結果.

定理 1. (この定理に X の射影性は必要ない．) $\Phi : X \longrightarrow Y$ を複素多様体 Y への(必ずしも全射とは限らない) 正則写像とする．ここで，Y 上のエルミート形式 (即ち，至るところ正である (1,1)-形式) ω を固定する．この時，以下は同値である．

(1) ある滑らかな実数値関数 φ で以下を満たすものが存在する．
　　(1,1)-形式 $\Phi^*\omega + dd^c\varphi$ は，至る所で $n-q$ 個以上の正固有値を持つ．

(2) 正則写像 Φ のファイバーの次元は高々q-次元である．

この定理 1 は，エルミート形式の Φ による正値性の退化を関数 φ によってどの程度補正できるかをファイバーの次元によって特徴付けている．今，写像 Φ が半豊富な直線束 L の完備一次系から定まる正則写像の時 (即ち，$\Phi = \Phi_{|L^{\otimes m}|} : X \longrightarrow \mathbb{P}^N$) を考える．また，$\omega$ を $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ の Fubini-study 計量とする．この時，定理 1 によって得られる (1,1)-形式 $\Phi^*\omega + dd^c\varphi$ は，直線束 L のある計量の曲率となっている．定理 1 と [Som] の結果から以下の系が導かれる．この系は L が半豊富な場合の問題 1 の解を与えている．

系 2. 直線束 L が半豊富であると仮定するこの時，以下は同値である．

(A) L の半豊富ファイブレーションのファイバーの次元が高々q 次元である．

(B) L はコホモロジー的 q-豊富である．

(C) X 上の $(q+1)$ 次元以上の部分多様体内に，L の次数を正とするような曲線が存在する．

(D) L が q-正である．

定理 1 の $q=0$ の場合を考えると，以下の系を導くことが出来る．この系は既に結果としては知られている．

系 3. **[Var]** Z を複素多様体とする．写像 $\Phi : Z \longrightarrow Y$ をコンパクトケーラー多様体 Y への有限射 (finite map) とする (即ち，固有 (proper) で，ファイバーが有限個の点)．この時，Y の有限被覆である Z もまた，コンパクトケーラー多様体である．

系 4. **[Bar]** 写像 $\Phi : Z \longrightarrow S$ をシュタイン (Stein) 多様体 S への有限射とする．この時，S の有限被覆である Z もまた，シュタイン多様体である．

References

[Bar] Le Barz P. *A propos des revetements ramifies d'espaces de Stein.* Math. Ann. **222** (1976), no. 1, 63 69.

[Mat] Matsumura S. *On q-positivity and fibre dimension of a semi-ample fibration.* preprint.

[Som] Sommese A J. *Submanifolds of Abelian varieties.* Math. Ann. **233** (1978), no. 3, 229 256.

[Var] Varouchas J. *Kahler spaces and proper open morphisms.* Math. Ann. **283** (1989), no. 1, 13 52.

Author: Shin-ichi Matsumura
e-mail : shinichi@ms.u-tokyo.ac.jp

Fock-Bargmann-Hartogs 領域の Bergman核の零点とインターレース性

山盛　厚伺　(名古屋大学・多元数理)*

1. 序

論文[1, 3]においてFock-Bargmann-Hartogs領域

$$D_{n,m}=\{(z,\zeta)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m;||\zeta||^2<e^{-\mu||z||^2}\}\quad(\mu>0)$$

のBergman核が多重対数関数を用いて表されることが示された．この講演では多重対数関数$Li_{-n}(t)$のm階微分から自然に定義される多項式$A_{n,m}(t)$に対しインターレース性を証明し，$D_{n,m}$に対するLu Qi-Keng問題にそれを応用する．ここでLu Qi-Keng問題とは「複素領域$\Omega\subset\mathbb{C}^n$のBergman核が$\Omega\times\Omega$上で零点を持つか判定せよ」という問題でBergmanが導入した代表座標の定義可能性を問うものである．Bergman核が零点を持たない領域のことをLu Qi-Keng領域と呼ぶ．

2. 準備

まず，インターレース性の定義を行う．多項式f,gは全て実根を持つとし，それぞれの根を$\{r_i\},\{s_j\}$とおく．このとき，gがfに対し交代的(g alternates f)であるとは，f,gの次数が同じであって，

$$s_n\leq r_n\leq s_{n-1}\leq\cdots\leq s_2\leq r_2\leq s_1\leq r_1,\tag{1}$$

を満たすことをいう．また，gがfに対し交錯的(g interlaces f)であるとは$\deg f=\deg g+1=n$であって，

$$r_n\leq s_{n-1}\leq\cdots\leq s_2\leq r_2\leq s_1\leq r_1,\tag{2}$$

を満たすことをいう．gがfに対し交代的または交錯的のとき$g\preccurlyeq f$と表す．交代性および交錯性の定義において現れる$\leq$をすべて$<$に置き換えたものが成立するとき狭義交代的(g strictly alternates f)または狭義交錯的(g strictly interlaces f)といい，$g\prec f$と表す．

次に多重対数関数を定義する．多重対数関数$Li_s(z)$は

$$Li_s(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^s},\tag{3}$$

と定義され$|z|<1, s\in\mathbb{C}$で収束する．特にsが負整数なら有理関数になる．多項式$A_{n,m}(t)$を次の式で定義する

$$\frac{d^m}{dt^m}Li_{-n}(t)=\frac{A_{n,m}(t)}{(1-t)^{n+m+1}}.\tag{4}$$

*e-mail: d08006u@math.nagoya-u.ac.jp

$A_{n,m}(t)$ は具体的に次のように表される

$$A_{n,m}(t) = m! \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n+j}(m+1)_j S(1+n, 1+j)(1-t)^{n-j},$$

ここで, $(a)_k$ は Pochhammer の記号, $S(\cdot,\cdot)$ は第二種スターリング数を表す.

3. 主結果

論文 [1] において $D_{n,m}$ の Bergman 核 $K_{D_{n,m}}$ は

$$K_{D_{n,m}}((z,\zeta),(z',\zeta')) = \frac{\mu^n}{\pi^{n+m}} e^{m\mu\langle z,z'\rangle} \frac{d^m}{dt^m} Li_{-n}(t)|_{t=e^{\mu\langle z,z'\rangle}\langle\zeta,\zeta'\rangle} \tag{5}$$

と表されることが示された. また, $D_{n,m}$ の Lu Qi-Keng 問題について次の命題が知られている.

命題 1. 領域 $D_{n,m}$ が *Lu Qi-Keng* 領域になるための必要十分条件は $\frac{d^m}{dt^m}Li_{-n}(t)$ が $|t|<1$ で零点を持たないことである.

次の定理が我々の主結果である.

定理 1. *(i)* 任意の $n,m \in \mathbb{N}$ に対し, $A_{n,m}(t) \succ A_{n,m+1}(t)$
(ii) 任意の $n,m \in \mathbb{N}$ に対し, $A_{n,m}(t) \prec A_{n+1,m}(t)$
(iii) 自然数 n を任意に固定する. このとき, 以下を満たす自然数 $m_0(n)$ が唯一つ存在する: $m \geq m_0(n)$ なる任意の m に対し $D_{n,m}$ は *Lu Qi-Keng* 領域となり, *Lu Qi-Keng* 領域となるのはこのときに限る.

主張 (iii) は主張 (i) より証明される. 主張 (ii) を用いると数列 $\{m_0(n)\}_{n=1}^{\infty}$ に関する次の性質が導かれる:

系 1. 数列 $\{m_0(n)\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加数列である.

数列 $\{m_0(n)\}_{n=1}^{\infty}$ に関して次の予想がある.

予想 1. 数列 $\{m_0(n)\}_{n=1}^{\infty}$ は狭義単調増加数列である.

予想 2. $f(n) = (n+1)\log(n+1)$ とおき, $[x]$ で x に最も近い整数を表す. このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $m_0(n) \leq [f(n)]$ が成立する.

参考文献

[1] A.Yamamori. The Bergman kernel of a certain Hartogs domain and the polylogarithm function. Preprint available at arXiv:1008.5339.

[2] A.Yamamori. Zeros of the Bergman kernel of the Fock-Bargmann Hartogs domain and the interlacing property, in preparation.

[3] A.Yamamori. The Bergman kernel of a certain Hartogs domain (in Japanese), RIMS Kokyuroku, 1694:151–159, 2010.

On the cone of Kählerian infinitesimal deformations for complex tori

大沢健夫

名古屋大学多元数理科学研究科

複素多様体の解析族　$\pi: X \longrightarrow S$　(Sは解析空間でπは正則適正）があるとし、S の一点 o 上のファイバー X はKähler計量を持つとする。

このとき X 上のKähler計量 g を固定するごとに、解析族の芽 (X, X) $\longrightarrow$ (S,o) の部分芽 (X', X) $\longrightarrow$ (S',o)で g が X' 上のKähler計量へと拡張可能なもののうち、最大のものが存在することが知られている(cf. [Sch], [F], [F-Sch])。それを X(g) $\longrightarrow$ S(g)で表す。

X $\longrightarrow$ S をXの倉西族にとり、計量 g に X(g) $\longrightarrow$ S(g) の小平・スペンサー写像の $H^1(X,\Theta)$ (ΘはXの接層）における像 L(g) を対応づけることによって、X上のKähler類の集合はGrassmann多様体上の点でパラメトライズされることになる。X上のKähler計量全てにわたる L(g) の和集合を KID(X) (Kählerian infinitesimal deformations of X)で表す。$H^1(X,\Theta)$ 内で、KID(X) は原点を含む錐体であり、X上のKähler類を同一の de Rham コホモロジー類の中でKähler形式として動かせるような複素構造の変形方向を、全てのKähler類にわたって集めたものである。

Kähler性の条件が及ぼす複素構造の変形方向への制約が KID(X) のような集合にまで及ぶことは、K3曲面の非Kähler変形の理論(ツイスター方向)などにより、implicitには知られていたらしい。しかし筆者の注意を KID(X) に向けたのは、Berndtsson氏により示された次の結果である。

定理 1. (cf. [B])　解析族 $\pi: X \longrightarrow S$ において、Sが非特異であり、かつXがKähler計量を持てば、相対標準直線束 $K_{X/S}$ の順像のL^2ファイバー計量に関する曲率は中野の意味で半正値である。

この観点からn次元複素トーラスの倉西族を見てL^2ファイバー計量の曲率を計算すると、いたるところ n(n−1)/2 個の負の固有値を持つことがわかる。したがって X が2次元以上の複素トーラスならば、定理 1 より KID(X) $\neq H^1(X,\Theta)$ となる。そこでより詳しく「曲率の半正値性は『Kähler方向』を特徴づけるか」ということが知りたくなったので、これを複素トーラスの場合に調べ、以下

の結果を得た。

定理２． (cf. [O]) X が２次元以上の複素トーラスならば、$H^1(X,\Theta)$の開凸錐 V が存在して　$KID(X) = V \cup (-V) \cup \{0\}$ となる。

これと上記の曲率に関する計算結果、および定理１をあわせると次が得られる。

系． X が2次元以上の複素トーラスならば、Xの倉西族のL^2計量の曲率の値が非負になるような$H^1(X,\Theta)$の元全体の開核は、$KID(X) - \{0\}$ を真に含む。

References

[B] Berndtsson, B. Curvature of vector bundles associated to holomorphic fibrations, Ann. of Math. (2) 169 (2009), 531–560.

[F] Fujiki, A., Coarse moduli space for polarized compact Kähler manifolds, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 20 (1984), 977–1005.

[F-Sch] Fujiki, A. and Schumacher, G., The moduli space of extremal compact Kähler manifolds and generalized Weil-Petersson metrics, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 26 (1990), 101–183.

[O] Ohsawa, T., On the cone of Kählerian infinitesimal deformations for complex tori, preprint.

[Sch] Schumacher, G., Moduli of polarized Kähler manifolds, Math. Ann. 269 (1984), 137–144.

有理型関数の第二主要定理について

山ノ井 克俊

1 はじめに

第二主要定理とは，複素平面上の定数でない有理型関数は高々二つの値を除いてすべての値をとる，という有名な Picard の小定理を精密化，定量化したものです．これは 1920 年代に Rolf Nevanlinna によって確立されたもので，今日 Nevanlinna 理論とよばれるものの主要な主張になっています．Nevanlinna 理論に関する研究は今日まで多岐にわたりますが，その中には Nevanlinna 自身によって出された問題が出発点になっている研究も少なくありません．この講演では，Nevanlinna 理論に関する一般的な事柄から始めて，以下に挙げるトピックスを中心にお話します：

- 第二主要定理の動標的 (Moving target) への拡張
- 関数体上の Diophantus 問題との関係
- 高階導関数の零点に関する Gol'dberg 予想

2 Nevanlinna 理論

有理型関数は，無限遠が真性特異点でない特別な状況として有理関数を含みます．そして有理型関数の性質は，有理関数の性質の一般化として捉えると理解しやすいことが多くあります．Nevanlinna 理論もその一つです．そこで有理関数の場合と対比させながら，Nevanlinna 理論の紹介をします．(詳しくは，[1], [2], [5], [11], [12], [13] などを参照してください．)

まず一般的な記号の定義を二つします．

1. リーマン球面の面積要素:

$$\omega = \frac{1}{(1+|z|^2)^2}\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}dz\wedge d\bar{z}.$$

これはリーマン球面の面積が 1 になるよう，正規化されています．

2. 原点を中心とする半径 r の円盤:

$$\mathbb{C}(r) = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < r\}.$$

さて，これから Nevanlinna 理論において最も重要な役割をはたす，半径 r に関する三つの関数を定義します．

(清水-Ahlfors の) 位数関数:

$$\boxed{T(r,f)=\int_1^r S(t)\frac{dt}{t}.}$$

ここで

$$S(t)=\int_{\mathbb{C}(t)} f^*\omega$$

とおきました．これは，有理型関数の定義する被覆面 $f:\mathbb{C}(t)\to\widehat{\mathbb{C}}$ の被覆の平均枚数をあらわします．

(例) もし f が有理関数ならば

$$\lim_{t\to\infty} S(t)=\deg f.$$

したがって，$r\to\infty$ のとき

$$T(r,f)=(\deg f)\times\log r+O(1)$$

となります．

個数関数：点 $a\in\widehat{\mathbb{C}}$ に対して，

$$\boxed{N(r,a,f)=\int_1^r n(t,a)\frac{dt}{t}.}$$

ここで，

$$n(t,a)=\sum_{z\in\mathbb{C}(t)}\mathrm{ord}_z f^*(a)$$

とおきました．これは $\mathbb{C}(t)$ のなかにある方程式 $f(z)=a$ の解の重複度をこめた数です．

（例） もし f が有理関数ならば

$$\lim_{t\to\infty} n(t,a)=\sum_{z\in\mathbb{C}}\mathrm{ord}_z f^*(a).$$

したがって，$r\to\infty$ のとき

$$N(r,a,f)=\left(\sum_{z\in\mathbb{C}}\mathrm{ord}_z f^*(a)\right)\times\log r+O(1)$$

となります．

接近関数：点 $a\in\widehat{\mathbb{C}}$ に対して，

$$\boxed{m(r,a,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{[f(re^{i\theta}),a]}d\theta.}$$

ここで,

$$[x,y]=\frac{|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}}$$

はリーマン球面の弦距離です．接近関数は，f による半径 r の円周 $\partial\mathbb{C}(r)$ の像が点 a に平均的にどれくらい近づいているかを測っています．

(例)：もし f が有理関数ならば，　$r\to\infty$ で

$$m(r,a,f)=(\mathrm{ord}_\infty f^*(a))\times\log r+O(1)$$

となります．

さて f が有理関数ならば，すべての点 $a\in\widehat{\mathbb{C}}$ に対して，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}}f^*\omega&=\deg f\\&=\sum_{z\in\mathbb{C}}\mathrm{ord}_z f^*(a)+\mathrm{ord}_\infty f^*(a).\end{aligned}$$

となります．よって，すべての辺に $\log r$ をかければ，有理関数に対して次の関係が得られます：

$$T(r,f)=N(r,a,f)+m(r,a,f)+O(1).$$

この関係が一般に正しい，というのが Nevanlinna 理論の最初の主張です．

定理 1 (第一主要定理, Nevanlinna, Shimizu, Ahlfors) f を定数でない有理型関数とすると，すべての $a\in\widehat{\mathbb{C}}$ について

$$T(r,f)=N(r,a,f)+m(r,a,f)+O(1).$$

次に節をあらためて，この講演の主題である第二主要定理の紹介をします．ちなみに Nevanlinna 理論の主定理は二つで，第三主要定理というのはありません．

3　第二主要定理

まず，個数関数を変形したものを導入します．

打ち切り個数関数：点 $a\in\widehat{\mathbb{C}}$ に対して，

$$\boxed{\overline{N}(r,a,f)=\int_1^r\overline{n}(t,a)\frac{dt}{t}.}$$

ここで

$$\overline{n}(t,a)=\sum_{z\in\mathbb{C}(t)}\min\{1,\mathrm{ord}_z f^*(a)\}$$

とおきました．これは$\mathbb{C}(t)$の中にある方程式$f(z)=a$の解の数を重複度を考慮せずに数えたものです．

さらに

$$\boxed{N_1(r,a,f)=N(r,a,f)-\overline{N}(r,a,f)}$$

とおきます．これは点aの上にあるfの分岐点を数えています．

さて，もしfが有理関数ならば，リーマン・フルビッツの公式から

$$\underbrace{m(r,f(\infty),f)+\sum_{a\in\widehat{\mathbb{C}}}N_1(r,a,f)}_{([f:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}\text{ の分岐点の個数}]+1)\times\log r}=\left(2-\frac{1}{\deg f}\right)T(r,f)+O(1)$$

という等式が得られます．一般には次のような不等式が成立します：

定理 2 (Nevanlinna の第二主要定理) fを$\mathbb{C}$上定義された定数でない有理型関数とする．$a_1,\ldots,a_q\in\widehat{\mathbb{C}}$を相異なる点とすると，$r\to\infty$のときに不等式

$$\sum_{i=1}^{q}m(r,a_i,f)+\sum_{a\in\widehat{\mathbb{C}}}N_1(r,a,f)\le 2T(r,f)+o(T(r,f)) \tag{3.1}$$

が測度有限の除外集合の外で成り立つ．

リーマン・フルビッツの公式が等式であるのと比較すると，第二主要定理は不等式になっています．これは仕方のないことですが，以下のような工夫をすることで第二主要定理を等式にすることもできます．すなわち，第二主要定理の左辺の$\displaystyle\sum_{i=1}^{q}m(r,a_i,f)$を次の関数で置き換えます：

$$\bar{m}_q(r,f)=\sup_{(a_1,\cdots,a_q)\in(\hat{\mathbb{C}})^q}\int_0^{2\pi}\max_{1\le i\le q}\log\frac{1}{[f(re^{i\theta}),a_i]}\frac{d\theta}{2\pi}.$$

このとき次が成り立ちます（[20]）．

定理 3 fを$\mathbb{C}$上で定義された超越的な有理型関数とする．関数$q:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{N}$は次をみたすとする：

$$q(r)\sim\left\{\log^+\left(\frac{T(r,f)}{\log r}\right)\right\}^{20}.$$

このとき，$r\to\infty$において漸近的な等式

$$\bar{m}_{q(r)}(r,f)+\sum_{a\in\widehat{\mathbb{C}}}N_1(r,a,f)=2T(r,f)+o(T(r,f))$$

が対数密度0の除外集合の外で成り立つ．

さて，第二主要定理の評価式(3.1)に第一主要定理を用いると

$$(q-2)T(r,f)\le\sum_{i=1}^{q}\overline{N}(r,a_i,f)+o(T(r,f)) \tag{3.2}$$

が導かれます．このように書き換えると評価としては少し弱くなりますが，これもしばしば第二主要定理とよばれます．さらにリーマン球上に因子 $D = (a_1) + \cdots + (a_q)$ を導入して，$(q-2)T(r, f)$ が直線束 $K_{\hat{\mathbb{C}}}^*(D)$（ここで $K_{\hat{\mathbb{C}}}$ はリーマン球の標準束）に対応する位数関数であることに注意すると (3.2) 式は

$$T_{f, K_{\hat{\mathbb{C}}}(D)}(r) \leq \overline{N}_{f,D}(r) + o(T(r, f))$$

と書くこともできます．この形の評価式をこれから拡張します．

4　第二主要定理の曲線族への拡張

第二主要定理の一つの一般化を与えるために次のような可換図式の状況を考えます：

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B & \xrightarrow[g]{} & M \end{array} \tag{4.1}$$

ここで，X, M は滑らかな複素射影多様体で，射 $p : X \to M$ は全射であって，一般の点 $a \in M$ に対してファイバー $p^{-1}(x)$ はコンパクトリーマン面であるとします．$\pi_Y : Y \to \mathbb{C}$, $\pi_B : B \to \mathbb{C}$ は複素平面の有限被覆空間で，$\pi_B \circ \pi = \pi_Y$ とします．f と g は正則写像です．

いま X の被約な因子 $D \subset X$ が与えられたとき，M 上の真代数的部分集合 $Z = Z(X, M, p, D) \subsetneq M$ を次の性質をみたす最小の代数的集合として定義します．すなわち

1. $M \backslash Z$ 上では p は滑らかな射になり，
2. 各点 $x \in M \backslash Z$ に対して，ファイバー $p^{-1}(x)$ 上に D を引き戻すと被約である．

もちろん，この Z は X, M, p, D のみに依存して決まります．また可換図式 (4.1) の正則写像 f が以下の条件をみたすとき，図式 (4.1) は非退化と呼ぶことにします：

$$f(Y) \not\subset D \cup p^{-1}(Z).$$

このとき第二主要定理の一般化として次が成り立ちます（[19]）．

定理 4 L と E をそれぞれ X と M 上の豊富な直線束として，$\varepsilon > 0$ を任意の正数とする．このとき定数 $C = C(X, M, p, D, L, E, \varepsilon)$ が存在して，非退化な図式 (4.1) に対して不等式

$$T_{f, K_X(D)}(r) \leq \overline{N}_{f,D}(r) + N_{\mathrm{ram}\,\pi_Y}(r) + \varepsilon T_{f,L}(r) + C\left\{T_{g,E}(r) + N_{\mathrm{ram}\,\pi_B}(r)\right\}$$

が測度有限の除外集合の外で成り立つ．ただし K_X は X の標準束をあらわす．

以下にみるようにこの結果から幾つかの結果を統一的に導くことができます．その前に定理に出てきた記号の説明をします．

まず有限被覆空間 $\pi_Y : Y \to \mathbb{C}$ に対して,

$$N_{\mathrm{ram}\pi_Y}(r) = \frac{1}{\deg \pi_Y} \int_1^r \left\{ \sum_{y \in \pi_Y^{-1}(\mathbb{C}(t))} \mathrm{ord}_y \mathrm{ram}\pi_Y \right\} \frac{dt}{t}.$$

ここで $\mathrm{ram}\pi_Y$ は被覆写像 π_Y の分岐因子です. 次に複素射影多様体 X と正則写像 $f : Y \to X$ を考えます. X 上の直線束 L に対して,

$$T_{f,L}(r) = \frac{1}{\deg \pi_Y} \int_1^r \int_{\pi_Y^{-1}(\mathbb{C}(t))} f^* c_1(L) \frac{dt}{t} + O(1)$$

とします. ここで $c_1(L)$ は L に滑らかな計量を入れた上での曲率形式ですが, 計量の入れ方には有界な関数を除いて, 依存しません. 最後に X の被約な因子 D に対して

$$\overline{N}_{f,D}(r) = \frac{1}{\deg \pi_Y} \int_1^r \# \left\{ \pi_Y^{-1}(\mathbb{C}(t)) \cap f^{-1} D \right\} \frac{dt}{t}$$

とおきます.

(例 1) $X = \hat{\mathbb{C}}$, $M =$ 一点, $B = \mathbb{C}$, $g =$ 定数という状況では, 図式 (4.1) は正則写像 (すなわち代数型関数) $f : Y \to \hat{\mathbb{C}}$ を考えることに他なりません. このとき定理 4 から

$$T_{f,K_{\hat{\mathbb{C}}}(D)}(r) \leq \overline{N}_{f,D}(r) + N_{\mathrm{ram}\pi_Y}(r) + \varepsilon T_{f,L}(r)$$

が測度有限の除外集合の外で成り立つがわかります. これは Selberg による第二主要定理の代数型関数への一般化です. X を一般のコンパクトリーマン面にすることもでき, その場合は野口潤次郎先生の高次元第二主要定理の一次元の場合になります.

(例 2) Nevanlinna は著書 ([10]) の中で, 第二主要定理で考えていた定数 a_i を $\mathbb{C}$ 上の有理型関数 $a_i(z)$ におきかえるとどうなるか, という問題を出しました. この問題は Osgood [14] と Steinmetz [15] によって独立に解決しました. それは分岐項 $N_1(r, a_i, f)$ を含まないものだったのですが, 定理 4 によってその点を解決できます.

定理 5 $f(z), a_1(z), \ldots, a_q(z)$ を相異なる $\mathbb{C}$ 上の有理型関数とする. ただし $f(z)$ は定数でないとする. このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して定数 $C(q, \varepsilon) > 0$ が存在して, $r \to \infty$ のときに不等式

$$\sum_{i=1}^q m(r, a_i, f) + \sum_{i=1}^q N_1(r, a_i, f) \leq (2 + \varepsilon) T(r, f) + C(q, \varepsilon) \left(\sum_{i=1}^q T(r, a_i) \right)$$

が測度有限の除外集合の外で成り立つ.

ここで, $m(r, a, f)$ と $N_1(r, a, f)$ は a が有理型関数のときには次のように定義を拡張します. まず接近関数にかんしては

$$m(r, a, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{[f(re^{i\theta}), a(re^{i\theta})]} d\theta.$$

次に $N_1(r,a,f)$ に関しては，$f=g/h$ と $a=b/c$ を共通零点をもたない整関数による分数表示として，$n(r,a,f)$ を $\mathbb{C}(r)$ 内の整関数 $cg-bh$ の重複度を込めた零点の数とします．あとは a が定数の場合と同じように定義します．ちなみに第一主要定理は

$$m(r,a,f)+N(r,a,f)=T(r,f)+T(r,a)+O(1)$$

という形に拡張されます．

定理4から定理5を導くには，図式 (4.1) として以下を考えればよいのです：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{(f,a_1,\dots,a_q)} & (\mathbb{P}^1)^{q+1} \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_{\mathbb{C}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\text{2nd proj},\dots,(q+1)\text{th proj})} \\ \mathbb{C} & \xrightarrow[(a_1,\dots,a_q)]{} & (\mathbb{P}^1)^q \end{array}$$

ここで，$D=\{(x_1,\dots,x_{q+1})\in(\mathbb{P}^1)^{q+1};x_1=x_i \text{ for some } i=2,\dots,q+1\}$ とします．

（例3）定理4は Y,B がコンパクトリーマン面で f,g が代数的な場合でも面白い帰結を与えます．すなわち，図式 (4.1) として次の状況を考えることで Vojta によって提起された関数体上の Diophantus 問題の解答が得られます．

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B & \xrightarrow[\mathrm{id}_B]{} & B \end{array}$$

ただし Y,B はコンパクトリーマン面，X は代数曲面，f は代数的，$D=\emptyset$.

このとき

$$\lim_{r\to\infty} T_{f,K_X(D)}(r)/\log r=\deg f^*K_X/\deg\pi_Y,$$

$$\overline{N}_{f,D}(r)=0,$$

$$\lim_{r\to\infty} N_{\mathrm{ram}\,\pi_Y}(r)/\log r=2(\mathrm{genus}(Y)-1)/\deg\pi_Y+2,\quad \text{etc.}$$

従って，定理4を適用すると，任意の正数 $\varepsilon>0$ に対して，$\varepsilon,L,p:X\to M$ だけで決まり，$\pi:Y\to B,f$ には依存しない定数 $C>0$ が存在して次が成り立つことが分かります：

$$\deg f^*K_X\le 2\mathrm{genus}(Y)+\varepsilon\deg f^*L+C\deg\pi.$$

ここで，L は X 上の豊富な直線束です．Vojta はこれより少し弱い形の不等式を証明したうえで，この不等式を予想として提起していました（[16]）．

5 Gol'dberg 予想 [20]

第二主要定理の右辺の主要項は $2T(r,f)$ ですが，残余項を評価するのは重要な問題です．Gol'dberg 予想に定理5のような第二主要定理の動標的への拡張を適用するためにも，残余項を評価することが大切になります．そのために $a_1,\dots,a_q$ として一般の有理型関数を考えるのをやめて，有理関数だけを考えることにします．そこで $\mathcal{R}_d$ を d 次以下の有理関数全体の集合とします．これは，∞ という定数関数を含むと理解します．

定理 6 f を複素平面上の超越的な有理型関数, d を自然数とする. このとき f と d だけに依存して決まる測度有限な集合 $E_{f,d} \subset \mathbb{R}_{>0}$ が存在して次が成り立つ: q 個の異なる有理関数 $a_1, \dots, a_q \in \mathcal{R}_d$ と正数 $\varepsilon > 0$ に対して, 評価式

$$\int_0^{2\pi} \max_{1\le i\le q} \log \frac{1}{[f(re^{i\theta}), a_i(re^{i\theta})]} \frac{d\theta}{2\pi} + \sum_{1\le i\le q} N_1(r, a_i, f) \le (2+\varepsilon)T(r,f) + \frac{q^{17}}{\varepsilon^4} T(r)^{\frac{4}{5}} (\log r)^{\frac{1}{5}}$$

が $r \in \mathbb{R}_{>0} \backslash E_{f,d}$ に対して成り立つ.

定理 5 と比較すると, 誤差項の係数の中で q^{17} が q の多項式オーダーで評価されていることがまず重要です. ((5.1) を参照). 定理 5 では $C(q, \varepsilon)$ という漠然とした定数でした. また除外集合 $E_{f,d}$ が $a_1, \dots, a_q$ に依存しないことも重要です. このような $a_1, \dots, a_q$ に依存しない一様な評価が得られることが, 左辺初項の接近関数を和 $\sum$ から最大 max に変更した利点です.

次に定理 3 を有理関数を標的とする状況に適合させます. そのために次のような $\bar{m}_q(r, f)$ の一般化を考えます：

$$\bar{m}_{d,q}(r,f) = \sup_{(a_1,\cdots,a_q)\in(\mathcal{R}_d)^q} \int_0^{2\pi} \max_{1\le i\le q} \log \frac{1}{[f(re^{i\theta}), a_i(re^{i\theta})]} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

これを下から評価する, というのが次の主張です.

定理 7 ($\bar{m}$ の下からの評価) f を $\mathbb{C}$ 上で定義された超越的な有理型関数, k を自然数とする. 関数 $q : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{N}$ は次をみたすとする：

$$q(r) \sim \left[\log^+ \left(\frac{T(r,f)}{\log r}\right)\right]^{20}.$$

このとき, $r \to \infty$ において不等式

$$2T(r,f) + (k-1)\overline{N}(r,\infty,f) \le \bar{m}_{k-1,q(r)}(r,f) + N(r,0,f^{(k)}) + N_1(r,\infty,f) + o(T(r,f))$$

が対数密度 0 の除外集合の外で成り立つ.

さて, 定理 6 と定理 7 から次の結果を証明することができます ($k = 2$ がもともとの Gol'dberg 予想).

定理 8 (Gol'dberg 予想) f を複素平面上で定義された超越的な有理型関数とする. このとき, $r \to \infty$ において不等式

$$(k-1)\overline{N}(r,\infty,f) \le N(r,0,f^{(k)}) + o(T(r,f))$$

が対数密度 0 の除外集合の外で成り立つ.

これは大雑把にいうと, f の高階微分は極よりたくさんの零点をもつことを主張します. Frank-Weissenborn は f の極がすべて単純なときにこれを示しています ([3]). もともと Gol'dberg 予想は Mues 予想 ([9]) という別の予想を証明するために考えられたもので, 定理 8 から Mues 予想も証明されます.

定理6と定理7から定理8を証明するには次のようにします．まず定理6より，$E_{f,k-1}$ の外で左辺の上限をとることより

$$\bar{m}_{k-1,q}(r,f)+N_1(r,\infty,f)\leq(2+\varepsilon)T(r,f)+\frac{q^{17}}{\varepsilon^4}T(r)^{\frac{4}{5}}(\log r)^{\frac{1}{5}}$$

となります．あとは定理3にあらわれた $q(r)$ に対して

$$q(r)^{17}T(r)^{\frac{4}{5}}(\log r)^{\frac{1}{5}}=o(T(r)) \tag{5.1}$$

に注意すると

$$\bar{m}_{k-1,q(r)}(r,f)+N_1(r,\infty,f)\leq 2T(r,f)+o(T(r,f))$$

が測度有限な除外集合の外で成り立つことが分かります．この評価を定理7の右辺に適用すれば，定理8が得られます．

参考文献

[1] W. Cherry and Z. Ye, *Nevanlinna's theory of value distribution. The second main theorem and its error terms*, Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[2] A. Gol'dberg and I. Ostrovskii, *Value distribution of meromorphic functions*, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[3] G. Frank and G. Weissenborn, *Rational deficient functions of meromorphic functions*, Bull. London Math. Soc. **18** (1986), no. 1, 29-33.

[4] W. K. Hayman, *Picard values of meromorphic functions and their derivatives*, Ann. of Math. (2) **70** 1959 9 42.

[5] W. K. Hayman, *Meromorphic Functions*. Oxford University Press, 1964.

[6] W. K. Hayman and J. Miles, *On the growth of a meromorphic function and its derivatives*. Complex Variables Theory Appl. **12** (1989), no. 1-4, 245 260.

[7] K. Ishizaki. *Some remarks on results of Mues about deficiency sums of derivatives*, Arch. Math. (Basel) **55** (1990), no. 4, 374-379.

[8] J. Langley, *The second derivative of a meromorphic function of finite order*, Bull. London Math. Soc. **35** (2003), no. 1, 97 108.

[9] E. Mues, *Uber eine Defekt- und Verzweigungsrelation fur die Ableitung meromorpher Funktionen*, Manuscripta Math. **5** (1971), 275-297.

[10] R. Nevanlinna, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, Gauthier-Villars, Paris, 1929.

[11] R. Nevanlinna, *Analytic Functions*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **162**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[12] 野口潤次郎, 多変数ネヴァンリンナ理論とディオファントス近似, 共立出版.

[13] J. Noguchi and T. Ochiai, *Geometric function theory in several complex variables*, Transl. Math. Mon. **80**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1990.

[14] Ch. Osgood, *Sometimes effective Thue-Siegel-Roth-Nevanlinna bounds, or better*, J. Number Theory **21** (1985), 347-399.

[15] N. Steinmetz, *Eine Varallgemeinerung des zweiten Nevanlinnaschen Hauptsatzes*, J. Rein Angew. Math. **368** (1986), 131-141.

[16] P. Vojta, *On algebraic points on curves*, Compositio Math. **78** (1991), 29-36.

[17] K. Yamanoi, *The second main theorem for small functions and related problems*, Acta Math. **192** no.2 (2004), 225-294.

[18] K. Yamanoi, *Defect relation for rational functions as targets*, Forum Math. **17** (2005), no. 2, 169 189.

[19] K. Yamanoi, *On the truncated small function theorem in Nevanlinna theory*, Internat. J. Math. **17** no. 4 (2006) 417-440.

[20] K. Yamanoi, *Zeros of higher derivatives of meromorphic functions*, preprint.

[21] L. Yang, *Precise estimate of total deficiency of meromorphic derivatives*, J. Analyse Math. **55** (1990), 287-296.

[22] L. Yang, *Value distribution theory*, Springer-Verlag, Berlin; Science Press, Beijing, 1993.