日本数学会

2010年度秋季総合分科会

函数論分科会
講演アブストラクト

2010年9月

於　名古屋大学

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
   函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする．

2. 委員会の任務
   (a) 函数論分科会評議員候補者を選出する．
   (b) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦．
   (c) 科研費基盤研究（審査区分（１））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼．
   (d) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる．
   (e) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する．
   (f) 分科会の行事 (たとえば， シンポジウムの開催等) について決定する．
   (g) 次期委員会委員候補者の推薦．
   (h) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する．

3. 委員会の構成及び委員の選出 · 任期
   (a) 委員の定数は特に定めないが 10 名程度をもって構成する．必要に応じ追加，削減できる．
   (b) 委員の任期は春季学会から２年間とする．再任は妨げないが，原則として再々任は認めない．
   (c) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う．
      i. 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する．その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する．
      ii. 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する．

4. 委員会の開催及び議決
   (a) 委員会は評議員が召集する．
   (b) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する．
   (c) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する．必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる．
   (d) 案件の議決は投票によってはならない．決定できない時は懸案事項として次回に繰越す．緊急事項については評議員に処置を一任する．

5. 函数論分科会委員会における評議員の任務
   (a) 委員会の司会をする．
   (b) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する．
   (c) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する．
   (d) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する．

付 則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する．
付 則　この規則の改正は，1996 年 8 月 1 日より施行する．

函数論分科会

9月22日(水)　第II会場

9:00〜12:00

1	王 利梅 (東北大情報)*	On Robertson functions	15
2	濱井健成 (近畿大総合理工)♯ 早味俊夫 (近畿大総合理工) 黒木和雄 (近畿大総合理工) 尾和重義 (近畿大理工)	Coefficient estimates of functions in the class concerning with spirallike functions	15
3	黒木和雄 (近畿大総合理工)♯ 尾和重義 (近畿大理工)	Notes on the Janowski functions defined by some complex parameters	15
4	早味俊夫 (近畿大総合理工)♯ 尾和重義 (近畿大理工)	Hankel determinant for certain class of analytic functions	15
5	白石 將 (近畿大総合理工)♯ 尾和重義 (近畿大理工)	An application of Miller and Mocanu lemma	15
6	田中清喜 (阪市大)♯	調和ベルグマン関数のアトム分解について	15
7	水田義弘 (広島大総合)* 中井英一 (大阪教育大) 大野貴雄 (大分大教育福祉) 下村 哲 (広島大教育)	Hardy's inequality in Orlicz–Sobolev spaces of variable exponent	15
8	前田文之 (広島大⋆)* 水田義弘 (広島大総合) 大野貴雄 (大分大教育福祉) 下村 哲 (広島大教育)	Capacity for potentials of functions in Musielak–Orlicz spaces	15
9	中川勇人 (大同大非常勤)* 鈴木紀明 (名城大理工)	放物型Hardy空間におけるCarleson不等式	15
10	相川弘明 (北大理)♯	Modulus of continuity of the Dirichlet solutions	15
11	中井三留 (名工大⋆)*	有界なベルクマン核をもつリーマン面	15

14:15〜16:15

12	川上 裕 (九大数理)♯ 中條大介 (九大数理)	非固有アファイン球面のGauss写像の値分布について	15
13	藤解和也 (金沢大理工)♯ J. Heittokangas (Univ. Eastern Finland)	A unit disc analogue of the Bank–Laine conjecture does not hold	15
14	井口雄紀 (東工大理工)♯ 宮地秀樹 (阪大理)	タイヒミュラー測地線の集積点集合	10
15	四之宮佳彦 (東工大理工)♯	Veech groups of flat structures on Riemann surfaces	10
16	糸健太郎 (名大多元数理)♯	Linear slices and the complex Fenchel–Nielsen coordinate of the punctured torus space	15
17	小森洋平 (阪市大理)♯	Cook Hats and Crowns	15

18 松 崎 克 彦 (早 大 教 育)* Polycyclic quasiconformal mapping class subgroups ・・・・・・・・・・・・・・・・・ 15

19 松 井 邦 光　一般の周期条件を満たす柴の挙動空間の存在その他について ・・・・・・・・・・ 15
米 谷 文 男

16:30〜17:30　特別講演

田 辺 正 晴 (東 工 大 理 工)* コンパクト Riemann 面間の正則写像の剛性について

9月23日(木)　第II会場

9:30〜12:00

20 菱 川 洋 介 (岐 阜 高 専)♯ Representing sequences on parabolic Bergman spaces ・・・・・・・・・・・・・・・ 15

21 小 島 彰 太 (立 教 大)* 三角関数のような性質をもった関数 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 10

22 木 坂 正 史 (京大人間環境)♯ Modulus of local connectivity of Julia sets of rational maps ・・・・・・・・・・ 15
宍 倉 光 広 (京 大 理)

23 中 根 静 男 (東 京 工 芸 大)* Postcritical sets and saddle basic sets for Axiom A polynomial skew products ・・・ 15

24 菊 田 伸 (東 北 大 理) Carathéodory 擬体積形式の曲率について ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 20

25 千 葉 優 作 (東 大 数 理)♯ n 次元射影空間の超曲面に対する第2主要定理 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 10

26 濱 野 佐 知 子 (福島大人間発達文化)♯ A remark on C^1 subharmonicity of the harmonic spans for discontinuously moving Riemann surfaces ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 15

27 阿 部 誠 (熊 本 大 生 命)* Stein 空間内の岡・Grauert の原理をみたす領域 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 15

28 大 沢 健 夫 (名大多元数理) A remark on the embedding theorem associated to complex connections of mixed type ・・・ 10
多 羅 間 大 輔 (京 大 情 報)

29 Byun Jisoo (POSTECH) A group-theoreric characterization of the direct product of a ball and punctured planes ・・・ 15
児 玉 秋 雄 (金 沢 大 理 工)
清 水 悟 (東 北 大 理)

13:00〜14:00　特別講演

濱 野 佐 知 子 (福島大人間発達文化)♯ Variation formulas for principal functions

9月24日(金)

12:10〜12:30　2010年度解析学賞授賞式 (第IV会場)

1

ON ROBERTSON FUNCTIONS

Li-Mei Wang (Tohoku University, Gsis)
Ikkei Hotta (Tohoku University, Gsis)

Let $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ be the unit disk. Let $\mathcal{A}$ be the family of functions f analytic in $\mathbb{D}$, and $\mathcal{A}_1$ be the subset of $\mathcal{A}$ consisting of functions f which are normalized by $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. A function $f \in \mathcal{A}$ is said to be subordinate to a function $F \in \mathcal{A}$ in $\mathbb{D}$ (in symbols $f \prec F$ or $f(z) \prec F(z)$) if there exists an analytic function $\omega(z)$ on $\mathbb{D}$ with $|\omega(z)| < 1$ and $\omega(0) = 0$, such that

$$f(z) = F(\omega(z))$$

in $\mathbb{D}$.

A function $f \in \mathcal{A}_1$ is said to be a λ-*spirallike function* (denoted by $f \in \mathcal{SP}_\lambda$) if

$$\operatorname{Re} e^{i\lambda} \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0.$$

Note that $\mathcal{SP}_0$ is the set of starlike functions normally denoted by $\mathcal{S}^*$.

A function $f \in \mathcal{A}_1$ is said to be a λ-*Robertson function* if $zf'(z) \in \mathcal{SP}_\lambda$, i. e.

$$\operatorname{Re} e^{i\lambda} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0.$$

Let $\mathcal{R}_\lambda$ denote the set of those functions. Note that $\mathcal{R}_0$ is precisely the set of convex functions sometimes denoted by $\mathcal{K}$.

Theorem 1. *Let $f \in \mathcal{R}_\lambda$ with $\cos\lambda < 1/\sqrt{2}$, then f is bounded.*

Theorem 2. *Let $f \in \mathcal{R}_\lambda$, then*

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{zf'_\lambda(z)}{f_\lambda(z)}$$

in $|z| < R_1(\lambda)$ where $R_1(\lambda)$ is given by

$$R_1(\lambda) = \sup\{r < 1 : \operatorname{Re} e^{-i\lambda} f_\lambda(z) > 0 \; in \, |z| < r\}$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 30C45, 30C62.
Key words and phrases. Robertson function, subordination.

and

$$f_\lambda(z) = \frac{(1-z)^{1-2e^{-i\lambda}\cos\lambda} - 1}{2e^{-i\lambda}\cos\lambda - 1}.$$

Remark 1. The radius of λ-spirallikeness of λ-Robertson functions is at least $R_1(\lambda)$.

Theorem 3. *Let $f \in \mathcal{R}_\lambda$, then*

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+z}{1-z}$$

in $|z| < R_2(\lambda)$ where $R_2(\lambda)$ is given by

$$R_2(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}|\sin(2\lambda)|}}.$$

Remark 2. The radius of λ-starlikeness of λ-Robertson functions is at least $R_2(\lambda)$.

References

[1] O. P. Ahuja and H. Silverman, *A survey on spiral-like and related function classes*, Math. Chronicle **20** (1991), 39–66.

[2] Y. C. Kim and H. M. Srivastava, *Some subordination properties for spirallike functions,* Appl. Math. Comput. **203** (2008), 838-842.

[3] I. Hotta and L.-M. Wang, *Boundedness, univalence and quasiconformal extension of Robertson functions,* preprint (arXiv:1003.2019).

[4] Ł.-M. Wang, *Subordination problems of Robertson functions,* preprint (arXiv:1006.0547).

E-mail address: `rime@ims.is.tohoku.ac.jp`

E-mail address: `ikkeihotta@gmail.com`

Coefficient estimates of functions in the class concerning with spirallike functions

Kensei Hamai (Kinki University)
Toshio Hayami (Kinki University)
Kazuo Kuroki (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}$ be the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$. If a function $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 1 \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some complex number α ($|\alpha - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$), then we say that $f(z) \in \mathcal{S}_\alpha$. This class $\mathcal{S}_\alpha$ was defined by Hamai, Hayami and Owa [3]. We note that the function $f(z) \in \mathcal{S}_\alpha$ is spirallike in $\mathbb{U}$ which implies that $f(z)$ is univalent in $\mathbb{U}$. But the function of the class $\mathcal{S}_\alpha$ is not always starlike. Then, we defined the new subclass $\mathcal{SS}_\alpha$ of the class $\mathcal{A}$.
If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies the following condition

$$\left|\frac{f(z)}{zf'(z)} - \frac{1}{2\alpha}\right| < \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\alpha}\right) = \frac{\operatorname{Re}(\alpha)}{2|\alpha|^2} \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some complex number α ($|2\alpha - 1| < \frac{\operatorname{Re}(\alpha)}{|\alpha|}$), then we say that $f(z) \in \mathcal{SS}_\alpha$. We note that the function $f(z) \in \mathcal{SS}_\alpha$ is starlike and spirallike in $\mathbb{U}$ which implies that $f(z)$ is univalent in $\mathbb{U}$.

Theorem 1 The extremal function of the class $\mathcal{SS}_\alpha$ is given by

$$f(z) = \frac{z}{\left(1 + \frac{(\operatorname{Im}(\alpha))^2 - 2\bar{\alpha}|\alpha|^2}{2\operatorname{Re}(\alpha)|\alpha|^2} z\right)^{\frac{(\operatorname{Im}(\alpha))^2 - 4\operatorname{Re}(\alpha)|\alpha|^2 + 4|\alpha|^4}{(\operatorname{Im}(\alpha))^2 - 2\bar{\alpha}|\alpha|^2}}}.$$

Theorem 2 If a function $f(z)$ satisfies the following inequality

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(|2\alpha - n| + \frac{\operatorname{Re}(\alpha)}{|\alpha|}n\right)|a_n| \leqq \frac{\operatorname{Re}(\alpha)}{|\alpha|} - |2\alpha - 1|$$

for some complex number α ($|2\alpha - 1| < \frac{\operatorname{Re}(\alpha)}{|\alpha|}$), then $f(z) \in \mathcal{SS}_\alpha$.

Theorem 3 If a function $f(z) \in \mathcal{SS}_\alpha$ with $a_n = |a_n|e^{i((n-1)\theta+\pi)}$, then

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n\mathrm{Re}(\alpha) - t)|a_n| \leqq \mathrm{Re}(\alpha) - t$$

with

$$t = \frac{2|\alpha|^3}{(\mathrm{Im}(\alpha))^2}(|\alpha| - \mathrm{Re}(\alpha))$$

for some complex number $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ ($|2\alpha - 1| < \frac{\mathrm{Re}(\alpha)}{|\alpha|}$), and

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| \leqq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}|2\alpha - 1|$$

for some real number α ($0 < \alpha < 1$).

Theorem 4 If a function $f(z) \in \mathcal{SS}_\alpha$, then

$$|a_2| \leqq |A - B|$$

for $A = \dfrac{\alpha - 2|\alpha|^2}{\mathrm{Re}(\alpha)}$ and $B = \dfrac{(\mathrm{Im}(\alpha))^2 - 2\bar{\alpha}|\alpha|^2}{2\mathrm{Re}(\alpha)|\alpha|^2}$.

References

[1] C. Carathéodory, *Über den Variabilititasbereich der Koeffizienten von Potenzreihem, die gegebene werte nicht annehmen*, Math. Ann. **64**(1907), 95-115.

[2] P. L. Duren, *Univalent Functions*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1983.

[3] K. Hamai, T. Hayami and S. Owa, *On Certain Classes of Univalent Functions*, Int. J. Math. Anal.**4** (2010), 221- 232.

[4] T. Hayami and S. Owa, *New properties for starlike and convex functions of complex order*, Int. J. Math. Anal.**4** (2010), 39- 62.

[5] M. S. Robertson, *On the theory of univalent functions*, Ann. Math. **37**(1936), 374 - 408.

[6] H. Silverman, *Univalent functions with negative coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc. **51** (1975), 109 - 116.

Notes on the Janowski functions defined by some complex parameters

Kazuo Kuroki (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}$ denote the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z : z \in \mathbb{C} \text{ and } |z| < 1\}$.

Also, let $\mathcal{P}$ denote the class of functions $p(z)$ of the form

$$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$$

which are analytic in $\mathbb{U}$ with $\operatorname{Re} p(z) > 0 \quad (z \in \mathbb{U})$.

A function $f(z) \in \mathcal{A}$ is said to be starlike of order α in $\mathbb{U}$ if it satisfies

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some real number α with $0 \leqq \alpha < 1$. We denote by $\mathcal{S}^*(\alpha)$ the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of all functions $f(z)$ which are starlike of order α in $\mathbb{U}$. In particular, we write $\mathcal{S}^*(0) = \mathcal{S}^*$.

For some real numbers A and B with $-1 \leqq B < A \leqq 1$, Janowski [1] has investigated the following function

$$p(z) = \frac{1+Az}{1+Bz} \qquad (z \in \mathbb{U})$$

which is analytic and univalent in $\mathbb{U}$. This function $p(z)$ is said to be the Janowski function. We note that the Janowski function belongs to the class $\mathcal{P}$.

We next introduce the familiar principle of differential subordinations between analytic functions. Let $p(z)$ and $q(z)$ be analytic in $\mathbb{U}$. Then the function $p(z)$ is said to be subordinate to $q(z)$ in $\mathbb{U}$, written by

$$p(z) \prec q(z) \qquad (z \in \mathbb{U}), \tag{1.1}$$

if there exists a function $w(z)$ which is analytic in $\mathbb{U}$ with $w(0) = 0$ and $|w(z)| < 1 \quad (z \in \mathbb{U})$, and such that $p(z) = q\big(w(z)\big) \quad (z \in \mathbb{U})$. From the definition of the subordinations, it is easy to show that the subordination (1.1) implies that

$$p(0) = q(0) \quad \text{and} \quad p(\mathbb{U}) \subset q(\mathbb{U}). \tag{1.2}$$

In particular, if $q(z)$ is univalent in $\mathbb{U}$, then the subordination (1.1) is equivalent to the condition (1.2).

Remark 1 If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies the following subordination

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+Az}{1+Bz} \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some real numbers A and B with $-1 \leqq B < A \leqq 1$, then $f(z) \in \mathcal{S}^*$.

Liu [2] has investigated the Janowski functions, and deduced the following assertion.

Lemma 2 *For some real numbers A, B, C and D with $-1 \leqq D \leqq B < A \leqq C \leqq 1$,*

$$\frac{1+Az}{1+Bz} \prec \frac{1+Cz}{1+Dz} \qquad (z \in \mathbb{U}). \tag{1.3}$$

In the present talk, applying the theory of the subordinations, we will determine some conditions for complex numbers A and B to satisfy

$$p(z) = \frac{1+Az}{1+Bz} \in \mathcal{P}.$$

In order to discuss our problem, we consider the subordination (1.3) for some complex numbers A, B, C and D, and deduce an extension of Lemma 2 as follows.

Theorem 3 *Let A, B, C and D be complex numbers with $A \neq B$ and $C \neq D$. If A, B, C and D satisfy $|B| \leqq 1$, $|D| \leqq 1$ and*

$$|A-B| + |AD - BC| \leqq |C-D|,$$

then the subordination (1.3) *holds.*

Corollary 4 *For some complex numbers A and B with*

$$A \neq B, \; |B| \leqq 1 \quad \textit{and} \quad |A-B| + |A+B| \leqq 2, \tag{1.4}$$

we have

$$\frac{1+Az}{1+Bz} \prec \frac{1+e^{i\theta}z}{1-e^{i\theta}z} \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

where $0 \leqq \theta < 2\pi$. This means that $\dfrac{1+Az}{1+Bz} \in \mathcal{P}$.

In addition, we will observe some complex numbers A and B satisfying the conditions in (1.4) for a fixed B with $|B| \leqq 1$.

References

[1] W. Janowski, *Extremal problem for a family of functions with positive real part and for some related families.* Ann. Polon. Math **23** (1970), 159 - 177.

[2] M.-S. Liu, *A subclass of p-valent close-to-convex functions of type α and order β*, J. Math. Study **30** (1997), 102 - 104 (in Chinese).

Hankel determinant for certain class of analytic functions

Toshio Hayami (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}$ be the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Furthermore, let $\mathcal{QR}_\alpha(\beta)$ denote the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of functions $f(z) \in \mathcal{A}$ which satisfy the following inequality

$$\operatorname{Re}\left[\alpha\left(\frac{f(z)}{z}\right) + (1-\alpha)f'(z)\right] > \beta \quad (z \in \mathbb{U})$$

for some real parameters α $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$ and β $(0 \leqq \beta < 1)$. Then, we write

$$\mathcal{QR}_1(\beta) \equiv \mathcal{Q}(\beta) \quad \text{and} \quad \mathcal{QR}_0 \equiv \mathcal{R}(\beta).$$

Example 1 *For each d $(d = 1, 2, 3, \cdots)$, the function*

$$(1.1) \qquad f_d(z) = \begin{cases} -(1-2\beta)z + 2(1-\beta)z\,{}_2F_1\left(\dfrac{1}{d(1-\alpha)}, 1; 1 + \dfrac{1}{d(1-\alpha)}; z^d\right) & (0 \leqq \alpha < 1) \\[2ex] \dfrac{z + (1-2\beta)z^{d+1}}{1-z^d} & (\alpha = 1) \end{cases}$$

belongs to the class $\mathcal{QR}_\alpha(\beta)$ where ${}_2F_1(a, b; c; z)$ is the Gauss hypergeometric function.

Remark 1 The function $f_d(z)$ has the following Taylor expansion

$$f_d(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1-\beta)}{kd(1-\alpha)+1} z^{kd+1}.$$

Remark 2 It follows that $\mathcal{QR}_\alpha(\beta) \subset \mathcal{Q}(\gamma)$ where $\gamma = \dfrac{2\beta + (1-\alpha)}{2 + (1-\alpha)}$.

In the present talk, we discuss the upper bounds of the functional $\left|a_n a_{n+2} - \mu a_{n+1}^2\right|$ for all n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, some real number μ and functions $f(z) \in \mathcal{QR}_\alpha(\beta)$.

The following theorems are enumerated as the obtained results.

Theorem 1 *If $f(z) \in \mathcal{QR}_\alpha(\beta)$, then*

$$\left|a_3 - \mu a_2^2\right| \leqq \begin{cases} 2(1-\beta)\left\{\dfrac{1}{3-2\alpha} - \dfrac{2(1-\beta)}{(2-\alpha)^2}\mu\right\} & (\mu \leqq 0) \\[2ex] \dfrac{2(1-\beta)}{3-2\alpha} & \left(0 \leqq \mu \leqq \dfrac{(2-\alpha)^2}{(3-2\alpha)(1-\beta)}\right) \\[2ex] 2(1-\beta)\left\{\dfrac{2(1-\beta)}{(2-\alpha)^2}\mu - \dfrac{1}{3-2\alpha}\right\} & \left(\mu \geqq \dfrac{(2-\alpha)^2}{(3-2\alpha)(1-\beta)}\right) \end{cases}$$

with equality for $f_1(z)$ $\left(\mu \leqq 0 \text{ or } \mu \geqq \dfrac{(2-\alpha)^2}{(3-2\alpha)(1-\beta)}\right)$ *and* $f_2(z)$ $\left(0 \leqq \mu \leqq \dfrac{(2-\alpha)^2}{(3-2\alpha)(1-\beta)}\right)$ *given by* (1.1).

Theorem 2 *If $f(z) \in \mathcal{QR}_\alpha(\beta)$, then*

$$\left|a_n a_{n+2} - \mu a_{n+1}^2\right| \leqq$$

$$\begin{cases} 4(1-\beta)^2\left\{\dfrac{1}{(n-(n-1)\alpha)(n+2-(n+1)\alpha)} - \dfrac{1}{(n+1-n\alpha)^2}\mu\right\} & (\mu \leqq 0) \\[2ex] \dfrac{4(1-\beta)^2}{(n-(n-1)\alpha)(n+2-(n+1)\alpha)} & \left(0 \leqq \mu \leqq \dfrac{(n+1-n\alpha)^2}{(n-(n-1)\alpha)(n+2-(n+1)\alpha)}\right) \\[2ex] \dfrac{4(1-\beta)^2}{(n+1-n\alpha)^2}\mu & \left(\mu \geqq \dfrac{(n+1-n\alpha)^2}{(n-(n-1)\alpha)(n+2-(n+1)\alpha)}\right) \end{cases}$$

with equality for $f_1(z)$ $(\mu \leqq 0)$, $f_2(z)$ $\left(0 \leqq \mu \leqq \dfrac{(n+1-n\alpha)^2}{(n-(n-1)\alpha)(n+2-(n+1)\alpha)}\,;\, n = 3, 5, 7, \cdots\right)$

and $f_d(z)$ $\left(\mu \geqq \dfrac{(n+1-n\alpha)^2}{(n-(n-1)\alpha)(n+2-(n+1)\alpha)}\right)$ *given by* (1.1), *where* $n \geqq 2$, $d \geqq 2$ *and* $d|n$.

We also derive the following result.

Theorem 3 *If $f(z) \in \mathcal{QR}_\alpha(\beta)$, then*

$$\left|a_2 a_4 - \mu a_3^2\right| \leqq \begin{cases} A(\alpha,\beta,\mu) & \left(\dfrac{(2-\sqrt{2})(3-2\alpha)^2}{4(2-\alpha)(4-3\alpha)} \leqq \mu \leqq \dfrac{3(3-2\alpha)^2}{4(2-\alpha)(4-3\alpha)}\right) \\[2ex] \dfrac{4(1-\beta)^2}{(3-2\alpha)^2}\mu & \left(\dfrac{3(3-2\alpha)^2}{4(2-\alpha)(4-3\alpha)} \leqq \mu \leqq \dfrac{(3-2\alpha)^2}{(2-\alpha)(4-3\alpha)}\right) \end{cases}$$

where

$$A(\alpha,\beta,\mu) = \frac{\left\{9(3-2\alpha)^4 - 16(2-\alpha)(4-3\alpha)(3-2\alpha)^2\mu + 8(2-\alpha)^2(4-3\alpha)^2\mu^2\right\}(1-\beta)^2}{2(2-\alpha)(4-3\alpha)(3-2\alpha)^2\left\{(3-2\alpha)^2 - (2-\alpha)(4-3\alpha)\mu\right\}}.$$

Equality is attained for $f_2(z)$ $\left(\dfrac{3(3-2\alpha)^2}{4(2-\alpha)(4-3\alpha)} \leqq \mu \leqq \dfrac{(3-2\alpha)^2}{(2-\alpha)(4-3\alpha)}\right)$ *given by* (1.1).

An application of Miller and Mocanu lemma

Hitoshi Shiraishi (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{H}[a,n]$ denote the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = a + \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, where $a \in \mathbb{C}$. Jack (J. London Math. Soc. **3**(1971), 469-474) has shown the result for analytic functions $w(z)$ in $\mathbb{U}$ with $w(0) = 0$, which is called Jack's lemma. In 1978, Miller and Mocanu (J. Math. Anal. Appl. **65**(1978), 289-305) have given the generalization theorem for Jack's lemma, which was called Miller and Mocanu lemma.

Lemma 1 (Miller and Mocanu lemma). *Let $f(z) \in \mathcal{H}[a,n]$ with $f(z) \not\equiv a$. If there exists a point $z_0 \in \mathbb{U}$ such that*

$$\max_{|z| \leqq |z_0|} |f(z)| = |f(z_0)|,$$

then

$$\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} = m$$

and

$$\mathrm{Re}\frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} + 1 \geqq m,$$

where m is real and

$$m \geqq n\frac{|f(z_0) - a|^2}{|f(z_0)|^2 - |a|^2} \geqq n\frac{|f(z_0)| - |a|}{|f(z_0)| + |a|}.$$

If $a = 0$, then the above lemma becomes Jack's lemma due to Jack.

Applying Miller and Mocanu lemma, we derive

Theorem 1. *Let $f(z) \in \mathcal{H}[a,n]$ with $f(z) \not\equiv a$ and $f(z) \neq 0$ for $z \in \mathbb{U}$. If there exists a point $z_0 \in \mathbb{U}$ such that*

$$\min_{|z| \leqq |z_0|} |f(z)| = |f(z_0)|,$$

then

$$\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} = -m$$

and

$$\mathrm{Re}\frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} + 1 \geqq -m,$$

where

$$m \geqq n\frac{|a-f(z_0)|^2}{|a|^2-|f(z_0)|^2} \geqq n\frac{|a|-|f(z_0)|}{|a|+|f(z_0)|}.$$

Example 1. Let us consider the function $f(z)$ given by

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{a+\left(e^{i\arg(a)}-a\right)z^n}{1-z^n} \\ &= a+e^{i\arg(a)}z^n+e^{i\arg(a)}z^{2n}+\dots \qquad (z\in\mathbb{U}) \end{aligned}$$

for some compledx number a with $|a|>\frac{1}{2}$. Then, $f(z)$ maps the disk $\mathbb{U}_r=\{z:|z|<r\leqq 1\}$ onto the domain

$$\left|f(z)-\left(a+\frac{e^{i\arg(a)}r^{2n}}{1-r^{2n}}\right)\right| \leqq \frac{r^n}{1-r^{2n}}.$$

Thus, we know that there exists a point $z_0=re^{i\frac{\pi}{n}}\in\mathbb{U}$ such that

$$\min_{|z|\leqq|z_0|}|f(z)|=|f(z_0)|=|a|-\frac{r^n}{1-r^{2n}}.$$

For such a point z_0, we obtain that

$$\frac{z_0f'(z_0)}{f(z_0)}=-\frac{nr^n}{(1+r^n)(|a|-(1-|a|)r^n)}=-m$$

where

$$m=\frac{nr^n}{(1+r^n)(|a|-(1-|a|)r^n)}>0.$$

Therefore, we get that

$$\mathrm{Re}\frac{z_0f''(z_0)}{f'(z_0)}+1=n\frac{1-r^n}{1+r^n}>0>-m.$$

Furthermore, we obtain that

$$n\frac{|a-f(z_0)|^2}{|a|^2-|f(z_0)|^2}=\frac{nr^n}{2|a|+(2|a|-1)r^n}=\frac{nr^n}{2\left(|a|-(1-|a|)r^n+\frac{1}{2}r^n\right)}<m.$$

References

[1] I. S. Jack, *Functions starlike and convex of order α*, J. London Math. Soc. **3**(1971), 469-474.

[2] S. S. Miller and P. T. Mocanu, *Second-order differential inequalities in the complex plane*, J. Math. Anal. Appl. **65**(1978), 289-305.

調和ベルグマン関数のアトム分解について

田中 清喜 (大阪市大・理)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を滑らかな有界領域とする. この Ω と $1 < p < \infty$ に関しての調和ベルグマン空間

$$b^p(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} : \text{ 調和かつ } f \in L^p(\Omega, dx)\}$$

を考える. ここで、dx は $\mathbb{R}^n$ 上の n 次元 Lebesgue 測度である. このとき、b^2 は再生核 $R(x, y)$ を持つ Hilbert 空間となり、さらに $f \in b^p$ は再生核 $R(x, y)$ を用いて以下のように表現される (Kang, Koo [4]).

$$f(x) = \int_\Omega R(x, y) f(y) dy.$$

本講演では、調和ベルグマン関数がアトム分解と呼ばれるある級数によって表示されるという結果を報告する.

定理 1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を滑らかな有界領域とし、$1 < p < \infty$ とする. そのとき、Ω 上の点列 $\{\lambda_i\}_i$ が存在して、任意の $f \in b^p$ に対して次を満たす点列 $\{a_i\}_i \in l^p$ を選ぶことができる.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i R(x, \lambda_i) r(\lambda_i)^{(1-\frac{1}{p})n}. \tag{1}$$

ここで、$r(x) := \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ である.

関連する先行研究としては、単位球上の調和ベルグマン空間に対して Coifman, Rochberg [3] がありそこでは単位球から明示的に点列 $\{\lambda_i\}_i$ をとるが、本結果の定理では点列 $\{\lambda_i\}_i$ が持つべき性質にのみ着目して点列 $\{\lambda_i\}_i$ を構成した.

さらに、(1) を満たす点列 $\{\lambda_i\}_i$ の十分条件についても考察した.

定理 2. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を滑らかな有界領域とし、$1 < p < \infty$ とする. そのとき、次を満たす $\delta > 0$ が存在する. 点列 $\{\lambda_i\}_i \subset \Omega$ が条件 $\cup_i B(\lambda_i, \delta r(\lambda_i)) = \Omega$ を満たすならば、任意

の $f \in b^p$ は、(1) の表示を持つ．さらに，対応 $f \mapsto \{a_i\}_i$ は有界線形である．ここで、$B(x,r)$ は中心 x で半径 r の球である．

参考文献

[1] S. Axler, P. Bourdon and W. Ramey, Harmonic function theory, Springer-Verlag, New York,1992.

[2] B. R. Choe, Y. J. Lee and K. Na, Toeplitz operators on harmonic Bergman spaces,Nagoya Math.J., 174(2004), 165–186.

[3] R.R. Coifman and R. Rochberg, Representation Theorems for Holomorphic and Harmonic functions in L^p, Astérisque 77 (1980), 11-66.

[4] H. Kang and H. Koo, Estimates of the harmonic Bergman kernel on smooth domain, J.Funct.Anal., 185(2001), 220–239.

[5] D. H. Luecking, Trace ideal criteria for Toeplitz operators, J.Funct. Anal., 73(1987), 345-368.

[6] V. L. Oleinik, Embedding theorems for weighted classes of harmonic and analytic functions, J.Soviet Math., 9(1978), 228-243.

[7] K. Zhu, Operator theory in function spaces, Marcel Dekker. New York and Basel,1989.

Hardy's inequality in Orlicz-Sobolev spaces of variable exponent

水田 義弘　広島大学大学院・理学研究科
中井 英一　大阪教育大学・教育学部
大野 貴雄　大分大学・教育福祉科学部
下村 哲　広島大学大学院・教育学研究科

次の Hardy の不等式はよく知られている．

定理 A ([1, Theorem 1]).$\Omega \neq \mathbf{R}^n$ は開集合とする．次の (1)，(2) のどちらかを満たすとする．

(1)　$1 < p < \infty$ かつ，ある定数 $k > 0$ が存在して，

$$|B(z,r) \cap \Omega^c| \geq k|B(z,r)| \quad ({}^\forall z \in \partial\Omega, r > 0). \tag{1}$$

(2)　$n < p < \infty$.

このとき，ある定数 $C > 0,\ 0 < b_0 < 1$ が存在して，

$$\|\delta^{b-1}u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\delta^b|\nabla u|\|_{L^p(\Omega)}$$

が任意の $u \in W_0^{1,p}(\Omega),\ 0 \leq b < b_0$ に対して成り立つ．ここに，$\delta(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$.

定理 A に対して，次のような変動指数をもつ Sobolev 空間に対しての Hardy の不等式が知られている．変動指数 $p(\cdot)$ は，

(p1)　$1 < p^- = \inf_{x\in\mathbf{R}^n} p(x) \leq \sup_{x\in\mathbf{R}^n} p(x) = p^+ < \infty$;

(p2)　$|p(x) - p(y)| \leq C/\log(e + 1/|x-y|)$

を満たすものとする．

定理 B ([2, Theorems 3.3 and 3.5]). $\Omega \neq \mathbf{R}^n$ は有界開集合とする．次の (1)，(2) のどちらかを満たすとする．

(1)　Ω は条件 (1) を満たす．

(2)　$p^- > n$.

このとき，ある定数 $C > 0,\ 0 < b_0 < 1$ が存在して，

$$\|\delta^{b-1}u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq C\|\delta^b|\nabla u|\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$$

が任意の $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega),\ 0 \leq b < b_0$ に対して成り立つ．

本講演では，定理 B の拡張を行う．このために，変動指数 $p(\cdot)$ は (p1), (p2),

(p3)　$|p(x) - p(y)| \leq \dfrac{C}{\log(e + |x|)} \qquad (|y| \geq |x|/2)$

を満たし，変動指数 $q(\cdot)$ は,

(q1) $-\infty < \inf_{x\in\mathbf{R}^n} q(x) \le \sup_{x\in\mathbf{R}^n} q(x) < \infty$;

(q2) $|q(x)-q(y)| \le C/\log(e+\log(e+1/|x-y|))$

を満たすものを考える．さらに，$t \ge 0,\ x \in \mathbf{R}^n$ に対して,

$$\Phi_{p(\cdot),q(\cdot)}(x,t) = (t(\log(c_0+t))^{q(x)})^{p(x)}$$

とし,

$$\|f\|_{\Phi_{p(\cdot),q(\cdot)}(\Omega)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega \Phi_{p(\cdot),q(\cdot)}(y,|f(y)|/\lambda)dy \le 1\right\}$$

とするとき,

$$\|u\|_{1,\Phi_{p(\cdot),q(\cdot)}(\Omega)} = \|u\|_{\Phi_{p(\cdot),q(\cdot)}(\Omega)} + \||\nabla u|\|_{\Phi_{p(\cdot),q(\cdot)}(\Omega)} < \infty$$

を満たす Ω 上の可測関数 u からなる関数空間を $W^{1,\Phi_{p(\cdot),q(\cdot)}}(\Omega)$ とする．また，$t \ge 0,\ x \in \mathbf{R}^n,\ 0 \le a \le 1$ に対して,

$$1/p_a^\sharp(x) = 1/p(x) - a/n$$

かつ

$$\Phi_{p_a^\sharp(\cdot),q(\cdot)}(x,t) = (t(\log(c_0+t))^{q(x)})^{p_a^\sharp(x)}$$

とする．

主定理. $\Omega \ne \mathbf{R}^n$ は開集合とする．次の (1)，(2) のどちらかを満たすとする．

(1) Ω は条件 (1) を満たし，$0 < A \le 1$ かつ $0 < A < n/p^+$ とする．

(2) $p^- > n$ かつ $0 < A < n/p^+$ とする．

このとき，ある定数 $C > 0,\ 0 < b_0 < 1$ が存在して,

$$\|\delta^{a+b-1}u\|_{\Phi_{p_a^\sharp(\cdot),q(\cdot)}(\Omega)} \le C\|\delta^b|\nabla u|\|_{\Phi_{p(\cdot),q(\cdot)}(\Omega)}$$

が任意の $u \in W_0^{1,\Phi_{p(\cdot),q(\cdot)}}(\Omega),\ 0 \le a \le A,\ 0 \le b < b_0$ に対して成り立つ．

本報告の結果は，[3] による．

参考文献

[1] P. Hajłasz, Pointwise Hardy inequalities, Proc. Amer. Math. Soc. **127**(2) (1999), 417–423.

[2] P. Harjulehto, P. Hästö and M. Koskenoja, Hardy's inequality in variable exponent Sobolev space, Georgian Math. J. **12** (2005), no. 3, 431-442.

[3] Y. Mizuta, E. Nakai, T. Ohno and T. Shimomura, Hardy's inequality in variable exponent Orlicz spaces, to appear in Hokkaido Math. J.

Capacity for potentials of functions in Musielak-Orlicz spaces

前田　文之　(広島大学名誉教授)
水田　義弘　(広島大学大学院理学研究科)
大野　貴雄　(大分大学教育福祉科学部)
下村　哲　　(広島大学大学院教育学研究科)

L^p-関数のポテンシャルによって定義される容量の概念は，非線形ポテンシャル論において主要な役割を果たす（[4], [1]）. この概念の拡張として，２つの方向が考えられて来た：L^p-クラスを Orlicz-クラスに一般化する方向 ([2], 等) と，p を変動指数にする方向 ([3], 等). これら２つの方向を包括すれば，Musielak-Orlicz-クラスを考えることになる. 本講演では，Musielak-Orlicz-クラス（[5]）の関数のポテンシャルによって定義される容量が，どの程度 L^p-容量の性質を保持しているかについて, 得られた結果を報告する.

関数 $\Phi(x,t) : \mathbf{R}^N \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ は次の条件をみたすとする: $\Phi(\cdot,t)$ は $\mathbf{R}^N$ 上可測; $\Phi(x,0) = 0$ で $t > 0$ において $\Phi(x,t) > 0$; $\Phi(x,\cdot)$ は凸関数; $\Phi(x,1)$ 及び $1/\Phi(x,1)$ は有界; $\Phi(x,2t) \leqq A_1\Phi(x,t)$.

関数空間 $L^\Phi(\mathbf{R}^N) = \left\{f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N); \int_{\mathbf{R}^N} \Phi(y,|f(y)|)dy < \infty\right\}$ は ($\Phi(x,t)$ の定める) Musielak-Orlicz 空間と呼ばれる.

ポテンシャル核として, $(0,\infty)$ 上の正値非増加関数 $k(r)$ で $\int_0^1 k(r)r^{N-1}dr < \infty$, $k(r) \leqq A_2k(r+1)$ $(r \geqq 1)$ をみたすものを考え, $k(0) = \lim_{r\to 0+} k(r)$, $k(x) = k(|x|)$ $(x \in \mathbf{R}^N)$ とする.

$E \subset \mathbf{R}^N$ と開集合 $G \subset \mathbf{R}^N$ に対し (k,Φ)-(相対) 容量を

$$C_{k,\Phi}(E;G) = \inf_{f\in S_k(E;G)} \int_G \Phi\left(y, f(y)\right) dy$$

で定義する. ここで $S_k(E;G)$ は G 以外では $f = 0$ で, E 上で $k * f \geqq 1$ であるような非負可測関数 f の全体.

命題 1. $C_{k,\Phi}(\,\cdot\,;G)$ は外容量.

命題 2. $L^\Phi(\mathbf{R}^N)$ が reflexive なら, $E_j \subset E_{j+1}$, $E = \bigcup_{j=1}^\infty E_j$ に対し $\lim_{j\to\infty} C_{k,\Phi}(E_j;G) = C_{k,\Phi}(E;G)$.

任意の有界開集合 G に対し $C_{k,\Phi}(E \cap G;G) = 0$ であるとき $C_{k,\Phi}(E) = 0$ と記す.

命題 3. $C_{k,\Phi}(E) = 0$ であるためには, $k * f \not\equiv \infty$ で E 上 $k * f(x) = \infty$ となる非負の $f \in L^\Phi(\mathbf{R}^N)$ が存在することが, 必要・十分である.

命題 4. $k(r)$ が $(0,\infty)$ で連続のとき, $f \in L^\Phi(\mathbf{R}^N)$, $k * |f| \not\equiv \infty$ なら $k * f$ は (k,Φ)-quasi 連続である.

以下, $\bar{k}(r) = Nr^{-N}\int_0^r k(\rho)\rho^{N-1}d\rho$,

$$h_{k,\Phi}(r;x) = r^N \Phi\bigl(x, r^{-N}\bar{k}(r)^{-1}\bigr)$$

とおく.

命題 5. ある定数 $A \geqq 1$ があって, 任意の $0 < r \leqq 1$, $x \in \mathbf{R}^N$ に対し

$$A^{-1} \inf_{y\in B(x,r)} h_{k,\Phi}(r;y) \leqq C_{k,\Phi}(B(x,r);B(x,r)) \leqq A \sup_{y\in B(x,r)} h_{k,\Phi}(r;y).$$

定理 1. すべての $x \in \mathbf{R}^N$ に対し

$$\limsup_{r\to 0+} \frac{\sup_{y\in B(x,r)} h_{k,\Phi}(r;y)}{\inf_{y\in B(x,r)} h_{k,\Phi}(r;y)} < \infty$$

とする. このとき, 任意の $f \in L^\Phi(\mathbf{R}^N)$ に対し $C_{k,\Phi}(E) = 0$ である集合 $E \subset \mathbf{R}^N$ があって $x \in \mathbf{R}^N \setminus E$ なら

$$\lim_{r\to 0+} \frac{1}{h_{k,\Phi}(r;x)} \int_{B(x,r)} \Phi(y, |f(y)|)dy = 0.$$

$h_{k,\Phi}(r;x)$ に対する一般化された Hausdorff 測度 $H_{h_{k,\Phi}}(E)$ を, 次のように定義する：$\bar{h}(r;x) = \sup_{0<\rho\leqq r}\sup_{y\in B(x,\rho)} h_{k,\Phi}(\rho;y)$ とし,

$$H_{h_{k,\Phi}}(E) = \lim_{\delta\to 0+} \inf\left\{\sum_j \bar{h}(r_j;x_j)\,;\, E \subset \bigcup_j B(x_j,r_j), 0 < r_j < \delta\right\}.$$

定理 2. すべての $x \in \mathbf{R}^N$ に対し $\lim_{r\to 0+}\bar{h}(r;x) = 0$ であるとき,

$$H_{h_{k,\Phi}}(E) = 0 \implies C_{k,\Phi}(E) = 0.$$

参考文献

[1] D. R. Adams and L. I. Hedberg, Function spaces and potential theory, Springer, 1996.

[2] N. Aïssaoui and A. Benkirane, Capacités dans les espaces d'Orlicz, Ann. Sci. Math. Québec **18** (1994), 1-23.

[3] T. Futamura, Y. Mizuta and T. Shimomura, Sobolev embedding for Riesz potential spaces of variable exponent, Math. Nachr. **279** (2006), 1463–1473.

[4] N. G. Meyers, A theory of capacities for potentials in Lebesgue classes, Math. Scand. **8** (1970), 255–292.

[5] J. Musielak, Orlicz spaces and modular spaces, Lecture Notes Math. **1034**, Springer, 1983.

放物型Hardy空間におけるCarleson不等式

中川　勇人　(大同大学)
鈴木　紀明　(名城大学理工学部)

今回は放物型Hardy空間におけるCarleson不等式が成立するための必要十分条件について講演する．ここでは，それを上半空間における測度の特徴づけを行うことで実現する．特に，$1 < p \le q < \infty$ という状況のもとでのCarleson不等式を扱う．

$(n+1)$次元ユークリッド空間$(n \ge 1)$における上半空間

$$\mathbb{R}^{n+1}_+ := \{(x,t) \mid x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$$

において，α-放物型作用素 $L^{(\alpha)}$ は，

$$L^{(\alpha)} := \partial_t + (-\Delta_x)^\alpha \qquad (0 < \alpha \le 1)$$

で定義される（[NSS]）．上半空間においてHardy空間に放物型作用素を導入した空間 $h^p_\alpha = h^p_\alpha(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ $(1 < p \le \infty)$ を，

$$h^p_\alpha := \{u \in C(\mathbb{R}^{n+1}_+) \mid L^{(\alpha)}u = 0, \|u\|_{h^p_\alpha} < \infty\}$$

と定義する．ノルムは

$$\|u\|_{h^p_\alpha} := \begin{cases} \sup\limits_{t>0} \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & (1 < p < \infty) \\ \sup\limits_{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+} |u(x,t)| & (p = \infty) \end{cases}$$

で定めることにする．以下，h^p_α を放物型Hardy空間と呼ぶことにする．$\alpha = 1/2, 1$ のとき，放物型Hardy空間はそれぞれ調和Hardy空間，Hardy空間に属する熱方程式の解全体に一致する．また，$T^{(\alpha)}_\tau$-Carleson測度を導入する．

定義　$0 < \alpha \le 1$, μ を $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上正Borel測度，$\tau > 0$ とする．このとき，ある定数 $C > 0$ が存在して，

$$\mu(T^{(\alpha)}(x,t)) \le Ct^\tau$$

が満たされているとき，μ を（$L^{(\alpha)}$ に関する）$T^{(\alpha)}_\tau$-Carleson測度と呼ぶ．ここで，

$$T^{(\alpha)}(x,t) := \{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \mid |y-x|^{2\alpha} + s \le t\}$$

とする．また，

$$\kappa^{(\alpha)}_\tau[\mu] := \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+} \frac{\mu(T^{(\alpha)}(x,t))}{t^\tau}$$

を $T_\tau^{(\alpha)}$-Carleson 定数と呼ぶ．

このの $T_\tau^{(\alpha)}$-Carleson 測度は，$B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x-y| < r\}$，および開集合 $E(\subset \mathbb{R}^n)$ に対して，

$$\widehat{E}^{(\alpha)} := \{(x,t) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \mid B(x, t^{\frac{1}{2\alpha}}) \subseteq E\}$$

として，

$$\mu(\widehat{B(x,t^{\frac{1}{2\alpha}})}^{(\alpha)}) \leq Ct^\tau$$

が満たされることと同値である．

$T_\tau^{(\alpha)}$-Carleson 測度を使って，放物型 Hardy 空間についての以下の Carleson 不等式に関する定理を得た．

定理 1 $0 < \alpha \leq 1, 1 < p \leq q < \infty$，$\mu$ を $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上の正 Borel 測度とする．このとき，放物型 Hardy 空間において，ある定数 $C > 0$ が存在して $u \in h_\alpha^p$ に対して，次の不等式

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}_+^{n+1}, d\mu)} \leq C\|u\|_{h_\alpha^p}$$

が常に成立するための必要十分条件は，$\tau = \dfrac{n}{2\alpha} \cdot \dfrac{q}{p}$ として μ が $T_\tau^{(\alpha)}$-Carleson 測度になることである．

ノルムのとり方を工夫することにより，必要十分な測度の条件は α によらなくすることが出来る．

定理 2 $0 < \alpha \leq 1, 1 < p \leq q < \infty$，$\mu$ を $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上の正 Borel 測度とする．このとき，放物型 Hardy 空間において，ある定数 $C > 0$ が存在して $u \in h_\alpha^p$ に対して，次の不等式

$$\|u(x, t^{2\alpha})\|_{L^q(\mathbb{R}_+^{n+1}, d\mu)} \leq C\|u\|_{h_\alpha^p}$$

が常に成立するための必要十分条件は，μ が $\tau = \dfrac{nq}{p}$ として $T_\tau^{(\frac{1}{2})}$-Carleson 測度になることである．

参考文献

[L] D. H. Luecking, *Embedding derivertive of Hardy spaces into Lebesgue spaces*, Proc. London Math. Soc. (3) **63** (1991), 595–619.

[NSS] M. Nishio, K. Shimomura, N. Suzuki, *α-parabolic Bergman spaces*, Osaka J. Math. **42** (2005), 153–162.

[NSY] M. Nishio, N. Suzuki, M. Yamada, *Toeplitz operators and Carleson measures on parabolic Bergman spaces*, Hokkaido Math. J. Vol. **36** (2007), 563–583.

Modulus of continuity of the Dirichlet solutions

Hiroaki Aikawa (Hokkaido University)

Let D be a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ with $n \geq 2$. For a function f on ∂D we denote by $\mathcal{H}^D f$ the Dirichlet solution, for the Laplacian, of f over D, i.e., $\mathcal{H}^D f$ is harmonic in D and $\mathcal{H}^D f = f$ on ∂D. It is well known that if D is regular, then $\mathcal{H}^D$ maps the family of continuous boundary functions to the family of harmonic functions in D continuous up to the boundary ∂D. It may be natural to think that improved continuity of a boundary function f ensures improved continuity of $\mathcal{H}^D f$. In the previous paper [1] we characterized the family of domains for which β-Hölder continuity is preserved by $\mathcal{H}^D$. See [3] for further generalizations to p-harmonic functions in metric measure spaces. This talk is based on the continuation [2].

Let us study similar problems in the context of a general modulus of continuity. Let $\mathcal{M}$ be the family of positive nondecreasing concave functions ψ on $(0, \infty)$ with $\psi(0) = \lim_{t\to 0} \psi(t) = 0$. See [5] for concavity. For $\alpha > 0$ let

$$\psi_\alpha(t) = \begin{cases} (-\log t)^{-\alpha} & \text{for } 0 < t < 1/e^{\alpha+1}, \\ (\alpha+1)^{-\alpha} & \text{for } t \geq 1/e^{\alpha+1}. \end{cases}$$

Then $\psi_\alpha \in \mathcal{M}$. We see that ψ_α is a modulus of continuity weaker than Hölder continuity. Let $\psi \in \mathcal{M}$. For an arbitrary bounded set $E \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, we consider the family $\Lambda_\psi(E)$ of all bounded continuous functions f on E with

$$\|f\|_{\psi,E} = \sup_{x\in E} |f(x)| + \sup_{\substack{x,y\in E \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{\psi(|x-y|)} < \infty.$$

Take another $\varphi \in \mathcal{M}$ and define the operator norm

$$\|\mathcal{H}^D\|_{\psi\to\varphi} = \sup_{\substack{f\in\Lambda_\psi(\partial D) \\ \|f\|_{\psi,\partial D}\neq 0}} \frac{\|\mathcal{H}^D f\|_{\varphi,D}}{\|f\|_{\psi,\partial D}}.$$

The finiteness of $\|\mathcal{H}^D\|_{\psi\to\varphi}$ is of interest. Hinkkanen [4] considered the problem mainly for planar domains. However, the most interesting case $\psi = \varphi$ was treated only for Hölder continuity. We [1] and [3] also dealt only with Hölder continuity.

The case $\psi = \varphi = \psi_\alpha$ with the above ψ_α appeared (at least tacitly) in connection with Kleinian groups. Shiga [6] and [7] proved a Hardy-Littlewood type theorem for holomorphic functions with respect to ψ_α. His result [7, Theorem 2.2] yields

Theorem A *The operator norm $\|\mathcal{H}^\Delta\|_{\psi\to\psi} < \infty$ for every $\psi(t) = \psi_\alpha(t)$ with $\alpha > 0$.*

Shiga [7] employed the explicit form of Cauchy's integral formula for the unit disk, which is not available for a general domain. Instead, we shall apply a barrier and harmonic measure method, as in [1]. This method enables us to deal not only with ψ_α but also a general modulus of continuity $\psi \in \mathcal{M}$. It also reveals that the smoothness of the domain has no significance.

Without loss of generality, we may assume that D is a bounded regular domain (see [1, Proposition 1]). For each $a \in \partial D$ we define a test function $\tau_{a,\psi}$ on ∂D by

$$\tau_{a,\psi}(\xi) = \psi(|\xi - a|) \quad \text{for } \xi \in \partial D.$$

Theorem 1 *Let $\psi \in \mathcal{M}$. Then the following are equivalent:*

(i) $\|\mathcal{H}^D\|_{\psi\to\psi} < \infty$.

(ii) *There is a constant $C \geq 1$ such that*

$$\mathcal{H}^D\tau_{a,\psi}(x) \leq C\psi(|x - a|) \quad \text{for } x \in D, \text{ whenever } a \in \partial D.$$

Definition 2 (Global Harmonic Measure Decay property) *Let $\omega(x, E, U)$ be the harmonic measure evaluated at x of E in U and let $B(x, r)$ be the open ball of center at x and radius r. We say that D enjoys the Global Harmonic Measure Decay property with ψ (abbreviated to the GHMD(ψ) property) if*

$$\omega(x, \partial D \setminus B(a, r), D) \leq C\frac{\psi(|x - a|)}{\psi(r)} \quad \text{for } x \in D \cap B(a, r), \tag{1}$$

whenever $a \in \partial D$ and $r > 0$.

Theorem 3 *Let $\psi \in \mathcal{M}$. If $\|\mathcal{H}^D\|_{\psi\to\psi} < \infty$, then D satisfies the GHMD(ψ) property. Conversely, let $\Psi \in \mathcal{M}$ and suppose that there is $R > 0$ such that*

$$\int_r^R \frac{d\psi(t)}{\Psi(t)} \leq C\frac{\psi(r)}{\Psi(r)} \quad \text{for } 0 < r < R. \tag{2}$$

If D satisfies the GHMD(Ψ) property, then $\|\mathcal{H}^D\|_{\psi\to\psi} < \infty$.

Corollary 4 *Let $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, be a Lipschitz domain. Then $\|\mathcal{H}^D\|_{\psi\to\psi} < \infty$ for every $\psi(t) = \psi_\alpha(t)$ with $\alpha > 0$.*

Corollary 5 *Let $D \subset \mathbb{R}^2$ be a finitely connected plane domain with no puncture. Then $\|\mathcal{H}^D\|_{\psi\to\psi} < \infty$ for every $\psi(t) = \psi_\alpha(t)$ with $\alpha > 0$.*

References

[1] H. Aikawa, *Hölder continuity of the Dirichlet solution for a general domain*, Bull. London Math. Soc. **34** (2002), no. 6, 691–702.

[2] ———, *Modulus of continuity of the Dirichlet solutions*, Bull. London Math. Soc. (2010).

[3] H. Aikawa and N. Shanmugalingam, *Hölder estimates of p-harmonic extension operators*, J. Differential Equations **220** (2006), no. 1, 18–45.

[4] A. Hinkkanen, *Modulus of continuity of harmonic functions*, J. Analyse Math. **51** (1988), 1–29.

[5] S. T. Kuroda, *Diagonalization modulo norm ideals; spectral method and modulus of continuity*, Spectral and Scattering Theory and Related Topics, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, vol. B16, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2010, pp. 101–126.

[6] H. Shiga, *Riemann mappings of invariant components of Kleinian groups*, J. London Math. Soc. (2) **80** (2009), 716–728.

[7] ———, *Modulus of continuity, a Hardy-Littlewood theorem and its application*, Infinite dimensional Teichmüller space and moduli space, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, vol. B17, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2010, pp. 127–133.

有界なベルクマン核をもつリーマン面

中井 三留（名工大・名誉教授）

双曲型 Riemann 面 R の連結末端部 W (即ち $R\setminus\overline{W}$ が正則領域) を任意にとり固定して, R 上の Dirichlet 有限調和関数族 $HD(R)$ の相対族

$$HD(W;\partial W) := \{u \in HD(W)\cap C(R) : u|R\setminus W = 0\}$$

を考えると $HD(R)\cong HD(W;\partial W)$ (線形同型) であるが, 更に ($HD(R)$ は違うけれど) $HD(W;\partial W)$ は相互 Dirichlet 積分 $D(u,v;W) := \int_W du\wedge *dv$ を内積とする可分 Hilbert 空間となり, 再生核 $B(z,\zeta)$ を持つ. これを R 上の **Bergman** 核 (詳しくは HD Bergman 核) と呼ぶ. この有界性, 即ち

$$\sup_{(z,\zeta)\in W\times W} B(z,\zeta) = \sup_{z\in W} B(z,z) < +\infty \tag{1}$$

と言う性質に着眼する. R 上の有界調和関数族を $HB(R)$ と記し,

$$HBD(R) := HD(R)\cap HB(R)$$

も合せ考える. 何時 (1) が成立するかについて次の特徴付が得られる:

定理 **1.** 性質 **(1)** が成立する為の必要十分条件は

$$\boldsymbol{HD(R)\subset HB(R) \quad (i.e.\ \ HD(R) = HBD(R)).} \tag{2}$$

Riemann 面 R が或る性質 P を持つとき, R と擬等角同値な全ての面が性質 P を持つならば, P は擬等角不変であると言う. すると

定理 **2.** 性質 **(1)** は擬等角不変である**.**

従って性質 (2) も擬等角不変である. (2) と対称的な性質 $HB(R) = HBD(R)$ は, R 上の全ての調和測度関数の Dirichlet 積分達が有限な上界を持つことで特徴付けられている ([3]) が, この性質は擬等角不変でない (cf. [1]).

性質 (1) は他の分類理論での諸例と同じく種数無限の影響下で起こる病理現象の一つと考えられる (cf. e.g. [5]). 事実 R が planar 又は有限種数のとき (1) は絶対に起こらない. 例え無限種数でも, 把手が調和境界に集積しない程度のものなら (1) は起こらない. 具体的には, 例えば, 次の状況を考える. R 内に R のどの点にも集積しない閉被をとっても互いに交わらぬ円環列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で, $R\setminus\cup_{n\in\mathbb{N}}\overline{A}_n$ が planar かつ

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} 1/\mathrm{mod}\ A_n < +\infty$$

となるものがとれるとき, R は, R 自体は無限種数でも, 殆有限種数 (of almost finite genus ([5])) であると言う. すると

定理 3. ***R*** **が殆有限種数 (従って特に** ***R*** **が planar 或いは更に広く種数有限) ならば, (1) は成立しない.**

以上の 3 定理の証明には, 次の事実を使う：δR を R の Royden 調和境界とし, $\mathrm{cap}(K)$ を δR の完閉部分集合 K の容量とする (cf. [2], [4]). 性質 (2) は, 従って性質 (1) も, 次の条件と同値である ([2]):

$$\inf_{\zeta\in\delta R}\mathrm{cap}(\{\zeta\})>0. \tag{3}$$

例えば, 定理 1 の証明は (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) の順に示すのが効率的と思う. (1) $\Rightarrow$ (2) は $B(z,\zeta)$ の再生性の一断面である. (2) $\Rightarrow$ (3) は Banach の開写像原理にその本質がある. (3) $\Rightarrow$ (1) は, 完閉部分集合 $K\subset\delta R$ の容量極値関数 c_K に対する Bergman 積分表示

$$c_K=\int_{\delta R}B(\cdot,\zeta)*dc_K$$

を使って得られる等式

$$\mathrm{cap}(\{\zeta\})=1/B(\zeta,\zeta)$$

から分かる. 定理 2 は (3) の擬等角不変性に帰着して示す. 同じく定理 3 は殆有限種数の R の場合任意の $\zeta\in\delta R$ が $\mathrm{cap}(\{\zeta\})=0$ であることにより, (3) $\Leftrightarrow$ (1) に基づいて, 示す.

参　照　文　献

[1] T. Lyons: *Instability of the Liouville property for quasi-isometric Riemannian manifolds and reversible Markov chains*, J. Diff. Geom., **26**(1987), 33-66.

[2] M. Nakai: *Extremal functions for capacities*, Proceedings of the Workshop on Potential Theory in Hiroshima 2007, 83-102.

[3] M. Nakai: *Spectral resolutions of bounded harmonic functions*, Proceedings of the Workshop on Potential Theory in Akita 2008, 81-104.

[4] M. Nakai: *Extremal functions for capacities*, J. Math. Soc. Japan, **61**(2009), 418-446.

[5] L. Sario and M. Nakai: *Classification Theory of Riemann Surfaces*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzerdarstellungen, Band **164**, Springer-Verlag, 1970.

非固有アファイン球面のGauss写像の値分布について

九州大学大学院数理学研究院　川上 裕* (Kawakami Yu)・中條大介† (Nakajo Daisuke)

値分布論の研究でこれまで得られてきた手法および結果は他分野の研究にも大きな影響を与えている．例えば，3 次元 Euclid 空間の完備極小曲面の Gauss 写像に値分布論的手法を用いることで，その曲面の興味深い大域的性質を示すことができる．本講演では，Gauss 写像の値分布を調べる曲面のクラスとして，これまで主にアファイン幾何学で調べられてきた対象である，3 次元アファイン空間 $\mathbf{R}^3$ の非固有アファイン球面をある種の特異点を許容するクラスまで拡張した「非固有アファイン波面」というクラスを考える．

【 定義 】　2 次元可微分多様体 Σ から $\mathbf{R}^3$ への滑らかな写像 $\psi = (x, \varphi)\colon \Sigma \to \mathbf{R}^3 = \mathbf{C} \times \mathbf{R}$ が非固有アファイン波面（improper affine front）であるとは，

$$\psi = \left(x, -\int \langle n, dx\rangle\right)$$

と表せる special Lagrangian はめ込み $L_\psi = x + \sqrt{-1}n\colon \Sigma \to \mathbf{C}^2$ が存在するときをいう．

このクラスと複素解析との接点の 1 つとして，次のような Martínez のよる複素解析的データによる表現公式がある．

【事実 1】 Σ を Riemann 面とし，(F, G) を次の 2 つの条件を満たす Σ 上の正則関数の組とする:

(1) $\mathrm{Re}(FdG)$ が完全形式である．

(2) $\mathbf{C}^2$ 内の複素曲線 $\alpha := (F, G)\colon \Sigma \to \mathbf{C}^2$ が regular となる．

このとき，$\psi\colon \Sigma \to \mathbf{R}^3 = \mathbf{C} \times \mathbf{R}$ を

$$\psi := \left(G + \bar{F}, \frac{|G|^2 - |F|^2}{2} + \Re\left(GF - \int FdG\right)\right)$$

で定めると，これは非固有アファイン波面となる．また，ψ の特異点は $|dF| = |dG|$ となる点に対応している．

そこで，$\nu := dF/dG$ として Σ 上の有理型関数を定め，これを ψ の Lagrangian Gauss 写像という．この写像は，special Lagrangian はめ込みの Gauss 写像の nontrivial part に対応している．また，この写像の像の様相がこのクラスの幾何的性質を表している．例えば【事実 1】から，ψ の特異点は $|\nu| = 1$ を満たすことがわかる．本講演では，次の性質を満たすクラスの大域的性質を調べる．

*kawakami@math.kyushu-u.ac.jp, 〒 819-0395 福岡市西区元岡 744

†nakajo@math.kyushu-u.ac.jp, 〒 819-0395 福岡市西区元岡 744

【 定義 】 ([UY]) 非固有アファイン波面 $\psi\colon \Sigma \to \mathbf{R}^3$ が弱完備（weakly complete）であるとは，$\mathbf{C}^2$ の通常の計量の L_ψ のよる引き戻しにあたる $d\tau^2 := 2(|dF|^2 + |dG|^2)$ が Riemann 計量として完備であるときをいう．

我々は完備極小曲面の Gauss 写像の除外値数の最良性を調べる上で使われた藤本坦孝氏の議論 [Fu] を変形し，このクラスに適用することで，ν の除外値数について次のような結果を得ることができた．

【 主結果 】 ([KN]) $\psi\colon \Sigma \to \mathbf{R}^3$ を弱完備非固有アファイン波面とし，$\nu\colon \Sigma \to \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ をその Lagrangian Gauss 写像，D_ν を ν の除外値数とする．今，ν を定数写像でないとしたとき，次のことが成り立つ：

$$D_\nu \leq 3.$$

これは最良の評価である．

また，このクラスにおいて ν が定数写像であることと，ψ が楕円型放物面であることとは同値であることを示すことができる．この結果と，アファイン計量と $d\tau^2$ との計量の大きさの比較を組み合わせることで，Calabi [Ca] によって示された次の結果を値分布論的視点から示すことができる．

【 系 】 アファイン完備な $\mathbf{R}^3$ 内の非固有アファイン球面は楕円型放物面である．

参考文献

[Ca] E. Calabi, *Examples of Bernstein problems for some non-linear equations*, Proc. Sympos. Pure Math. **15** (1970), 223–230.

[Fu] H. Fujimoto, *On the number of exceptional values of the Gauss map of minimal surfaces*, J. Math. Soc. Japan **40** (1988), 235–247.

[KN] Y. Kawakami and D. Nakajo, *The value distribution of the Gauss map of improper affine spheres*, preprint, arXiv:1004.1484 and MI Preprint Series 2010-16.

[Ma] A. Martínez, *Improper affine maps*, Math. Z., **249** (2005), 755–766.

[Na] D. Nakajo, *A representation formula for indefinite improper affine spheres*, Result. Math., **55** (2009), 139–159.

[NS] K. Nomizu and T. Sasaki, Affine differential geometry, Cambridge University Press (1994).

[UY] M. Umehara and K. Yamada, *Applications of a complete lemma in minimal surface theory to various classes of surfaces*, preprint, arXiv:0909.1128.

A unit disc analogue of the Bank-Laine conjecture does not hold

藤解　和也　　　金沢大理工
J. Heittokangas　Univ. Eastern Finland

The celebrated 1982 paper [1] by Bank and Laine opened up a new chapter in the oscillation theory of solutions of

$$f'' + A(z)f = 0, \tag{1}$$

where $A(z)$ is entire. Finding a condition on $\rho(A)$ such that each fundamental system $\{f_1, f_2\}$ of (1) satisfies

$$\max\{\lambda(f_1), \lambda(f_2)\} = \infty \tag{2}$$

has aroused wide interest during the last three decades. Here,

$$\lambda(g) = \inf\Big\{\alpha > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-\alpha} < \infty\Big\} \quad \text{and} \quad \rho(g) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r}$$

stand for the *exponent of convergence* of the zeros $\{z_n\}$ and the *order* of growth of an entire function g, respectively. If $A(z) \in \mathbb{C}[z]$, then it is well-known [1] that all solutions f of (1) are entire and satisfy $\lambda(f) \le \rho(f) < \infty$. Hence, in all attempts to obtain (2), we need to assume that $A(z)$ is transcendental. Bank and Laine [1] introduced a method for constructing equations of the form (1) with *zero-free* solution bases. This construction depends on a certain entire parameter function φ. If $\varphi(z) \in \mathbb{C}[z]$, then $\rho(A) \in \mathbb{N}$, while if φ is transcendental, then $\rho(A) = \infty$. Hence it seems plausible that (2) holds whenever $A(z)$ is transcendental and satisfies $\rho(A) \in [0,\infty) \setminus \mathbb{N}$. This is widely known as the *Bank-Laine conjecture.* This conjecture was verified in [1] when $\rho(A) < 1/2$, the method being based on Wiman-Valiron theory and the $\cos\pi\rho$-theorem. The case $\rho(A) = 1/2$ was proved in 1985-86 independently by J. Rossi and L.-C. Shen, based on the Beurling-Tsuji estimate for harmonic measure and the Carleman integral inequality, respectively. Despite of the seeming obviousness, this conjecture remains generally unsolved.

Proceeding to the case of the unit disc $\mathbb{D}$, a couple of definitions are in order. Let g be an analytic function in $\mathbb{D}$. The *exponent of convergence* of its zeros $\{z_n\}$ and the *order* of growth of g are respectively given by

$$\mu(g) = \inf\Big\{\beta > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} (1-|z_n|)^{\beta+1} < \infty\Big\} \quad \text{and} \quad \sigma(g) = \limsup_{r\to 1^-} \frac{\log^+ T(r,g)}{-\log(1-r)}.$$

Let $A(z)$ be analytic in $\mathbb{D}$, and let $\{f_1, f_2\}$ be a fundamental solution base of (1). Then a unit disc analogue of the Bank-Laine conjecture would be a condition on $\sigma(A)$ implying

$$\max\{\mu(f_1), \mu(f_2)\} = \infty. \tag{3}$$

If $A(z)$ is an $\mathcal{H}$-function, that is, if there exists a constant $q \in [0,\infty)$ such that $\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^q|A(z)| < \infty$, then it is known that all solutions f of (1) satisfy $\mu(f) \le \sigma(f) < \infty$. Hence, for (3) to hold, $A(z)$ cannot be an $\mathcal{H}$-function.

Following the reasoning in [1, p. 356], let φ be an analytic function in $\mathbb{D}$, and let h denote a primitive function of e^φ, that is, $h' = e^\varphi$. Set $g = -(\varphi + h)/2$. Then a simple computation shows that the functions $f_1 = e^g$ and $f_2 = e^{g+h}$ are linearly independent solutions of (1), where $A = -\frac{1}{4}\big(e^{2\varphi} + (\varphi')^2 - 2\varphi''\big)$ is analytic in $\mathbb{D}$. We can give examples which illustrate that *no* growth condition on a finite-order $A(z)$ alone implies (3). Our main result below shows that it is possible to construct a function $A(z)$ analytic in $\mathbb{D}$ and *of arbitrarily rapid growth* such that equation (1) possesses two linearly independent solutions each having *no zeros.* This is a unit disc analogue of the corresponding reasoning in [1, p. 356].

Theorem 1 *Let $\Lambda(r)$ be an increasing and continuous function defined on the interval $[0, 1)$ such that $\Lambda''(r) > 0$ and*

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{\Lambda(r)}{-\log(1-r)} = \infty. \tag{4}$$

Then we can construct a function $A(z)$ analytic in $\mathbb{D}$ with $\displaystyle\lim_{r\to 1^-} \frac{T(r, A)}{\Lambda(r)} = \infty$ such that (1) possesses linearly independent solutions f_1, f_2 each having no zeros. Moreover, the product $E = f_1 f_2$ satisfies $\displaystyle\lim_{r\to 1^-} \frac{T(r, E)}{\Lambda(r)} = \infty$. □

The assumption (4) does not seem too restrictive, when we observe examples. When proving Theorem 1, we rely on a Linden-Shea construction on an analytic function of prescribed asymptotic growth, which depends on (4).

Our tool is a unit disc analogue of a well known plane result due to J. Clunie:

Lemma 2 *Suppose that φ is analytic in $\mathbb{D}$ and of unbounded characteristic. Then e^φ is of unbounded characteristic, and $\displaystyle\lim_{r\to 1^-} \frac{T(r, e^\varphi)}{T(r, \varphi)} = \infty$. In particular, $\displaystyle\lim_{r\to 1^-} \frac{T(r, \varphi)}{-\log(1-r)} = \infty$ implies $\displaystyle\lim_{r\to 1^-} \frac{T(r, e^\varphi)}{-\log(1-r)} = \infty$.* □

For this proof, we require the statement due to R. Nevanlinna [2, p. 276]: *If f is meromorphic in $\mathbb{D}$ and of unbounded characteristic, then for all $a \in \mathbb{C}$ outside a set of zero capacity, depending on f, we have $N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \sim T(r, f)$ as $r \to 1^-$.*

Also, our discussion yields a solution to some open problem recently stated by T.-B. Cao and H.-X. Yi about conditions on $A(z)$ to guarantee that (3) holds when $A(z)$ is an analytic coefficient of (1) which satisfies $\displaystyle\lim_{r\to 1^-} \frac{T(r, A)}{-\log(1-r)} = \infty$.

参考文献

[1] S. Bank and I. Laine, *On the oscillation theory of $f'' + Af = 0$ where A is entire*, Trans. Amer. Math. Soc. **273** (1982), no. 1, 351–363.

[2] R. Nevanlinna, *Analytic Functions.* Translated from the second German edition by Phillip Emig. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 162, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1970.

タイヒミュラー測地線の集積点集合

井口　雄紀　(東京工業大学理工学研究科)
宮地　秀樹　(大阪大学理学研究科)

解析的有限なリーマン面Xのタイヒミュラー空間$T(X)$は標識付きリーマン面(Y, f)のタイヒミュラー同値類全体の集合である．ただし、fはXから別のリーマン面Yへの擬等角写像とする．タイヒミュラー距離により$T(X)$を距離空間とみなすことにする．またリーマン面の一意化定理により、$T(X)$はX上の双曲計量の同値類全体の空間と同一視ができる．

タイヒミュラー空間はコンパクトではないが、理想境界（コンパクト化）の構成方法はいくつか知られている．ここでは以下の二つの境界を中心に考える．X上のすべての単純閉曲線がなす双曲的長さ関数はXの双曲計量を一つ固定するごとに定まる．実は、この対応は$T(X)$の無限次元実数空間への埋め込みを与えることが知られており、その像を射影化してもなお埋め込みになる．射影化した像は相対コンパクトであって、その境界は**Thurston**境界と呼ばれる．双曲的長さ関数の代わりに標識付きリーマン面に関する極値的長さ関数を考えることによって、同様に$T(X)$のコンパクト化を得ることができる ([1])．その境界は**Gardiner-Masur**境界と呼ばれる．

Thurston 境界は曲面上の測度付葉層構造の射影的同値類全体の集合$\mathcal{PMF}$と同一視ができることが知られている．Gardiner-Masur 境界に関してこのような特徴付けはまだなされていないが、Thurston 境界を集合として真に包含することが知られている．

$T(X)$上の測地線はタイヒミュラー測地線と呼ばれ、正則二次微分により特徴付けがなされ、タイヒミュラー写像と呼ばれる局所的にアフィンな擬等角写像の1径数の族で構成される．その境界挙動に関していくつかの事実が知られている．まず、正則二次微分が定める垂直測度付葉層が有理的、つまり曲面を有限個の円柱領域に分割する場合、この二次微分が定めるタイヒミュラー測地線はThurston境界で収束する ([4])．同様の結果がGardiner-Masur 境界においても成り立つが([2])、収束する点はThurston 境界の場合とは異なる．次に、正則二次微分が定める垂直測度付葉層が一意エルゴート的な場合、この二次微分が定めるタイヒミュラー測地線はThurston 境界で収束する ([4])．同様の結果がGardiner-Masur 境界においても成り立ち ([5])、収束する点はThurston 境界の場合と一致する．垂直測度付葉層が有理的でも一意エルゴート的でもない正則二次微分が定めるタイヒミュラー測地線に関する境界挙動はほとんど知られていないが、A.Lenzhen は次の結果を示した．

Theorem 1 ([3]) Xが2以上の種数のリーマン面のとき、Thurston 境界において収束しない$T(X)$上のタイヒミュラー測地線が存在する．

以下のことがわかった.

Theorem 2 X が 2 以上の種数のリーマン面のとき、有理的でも一意エルゴート的でもない垂直測度付葉層をもつ正則二次微分から定まる $T(X)$ 上のタイヒミュラー測地線で、Thurston 境界と Gardiner-Masur 境界におけるそれぞれの集積点集合が集合として異なるものが存在する.

Lenzhen は Thurston 境界で収束しないタイヒミュラー測地線を次のように具体的に構成した.

まず、単位正方形（一辺の長さが 1 の正方形）を z_1-平面に用意して、そのコピーを z_2-平面に用意する．ただし、正方形の左下の頂点が原点、右上の頂点が $(1,1)$ に対応するものとする．そして、それぞれに異なる傾きで同じ長さの線分により切れ目を入れ、切れ目が垂直になるように正方形をそれぞれ回転させる．さらに、それら正方形の対辺を同一視する．すると二つの一つ穴あきトーラス X_1,X_2 ができるが、それらを切れ目に沿って交差的に張り合わせると種数が 2 のリーマン面 X ができる．X の複素構造は切れ目を入れる長さや傾きに依存しない．z_1-平面と z_2-平面の垂直な線分たちから定まる X_1,X_2 上の垂直測度付葉層をそれぞれ F_1,F_2 とする．　これらは切れ目の長さや傾きに依存して定まる。ここで二つの正方形に切れ目を入れる際の傾きを両方とも無理数で z_1-平面の方を連分数として有界に、z_2-平面の方を非有界であるとする．このとき、X 上の垂直測度付葉層 $F = F_1 + F_2$ が定めるタイヒミュラー測地線 R は Thurston 境界において収束しない ([3])．さらに彼女は次を示した.

Theorem 3 ([3]) 上記の構成法の記号の下で、F_1 はタイヒミュラー測地線 R の Thurston 境界における集積点である.

彼女が構成したタイヒミュラー測地線を Gardiner-Masur 境界において考察してみると次が分かった.

Theorem 4 Lenzhen の構成法の記号の下で、F_1 と F_2 はともにタイヒミュラー測地線 R の Gardiner-Masur 境界における集積点ではない.

以上の二つの定理から Theorem 2 を得る.

参考文献

[1] F. Gardiner and H. Masur, Extremal length geometry of Teichmüller space. Complex Variables Theory Appl. **16** (1991), no. 2-3, 209–237.

[2] S. Kerckhoff, The asymptotic geometry of Teichmüller space. Topology **19** (1980), 23–41.

[3] A. Lenzhen, Teichmüller geodesics that do not have a limit in $\mathcal{PMF}$. Geom. and Top. **12** (2008), 177–197.

[4] H. Masur, Two boundaries of Teichmüller space. Duke Math. **49** (1982), 183–190.

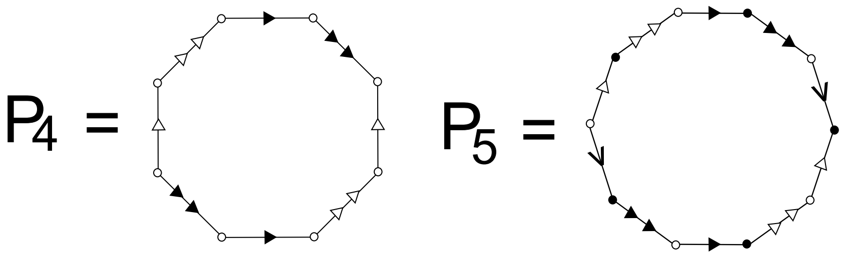
[5] H. Miyachi, Gardiner-Masur boundary of Teichmüller space : Vanishing subsurfaces and Uniquely ergodic boundary points. submitted.

Veech groups of flat structures on Riemann surfaces

四之宮 佳彦　(東京工業大学大学院理工研究科)

1. Introduction

Veech 群とは, 写像類群のタイヒミュラー空間への作用のタイヒミュラー円板に対する制限の $PSL(2,\mathbb{R})$ での表現である. Veech 群はフックス群であり, その商空間はモジュライ空間に自然に埋め込まれる. Schmithüsen[1] は, 正方形の貼り合わせから構成されるリーマン面の Veech 群の計算法を与えた. 今回の講演ではその計算法の, 正 $2n$ 角形の貼り合わせから構成されるリーマン面の場合への拡張について述べる. 拡張に必要な事は正 $2n$ 角形 1 枚から構成されるリーマン面 P_n の普遍被覆面 $\widetilde{X}_n$ の Veech 群を具体的に求めることである.



Example. $n \geq 4$ とする. P_n の Veech 群 $\Gamma(P_n)$ は Veech[2] によって以下のようになることが示されている.

$$\Gamma(P_n) = \langle [R_n], [T_n] \rangle .$$

$$\text{但し, } R_n = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{n} & -\sin\frac{\pi}{n} \\ \sin\frac{\pi}{n} & \cos\frac{\pi}{n} \end{pmatrix}, \; T_n = \begin{pmatrix} 1 & 2\cot\frac{\pi}{2n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Result

Theorem1. P_n と P_n の普遍被覆面 $\widetilde{X}_n$ の Veech 群は一致する. 即ち,

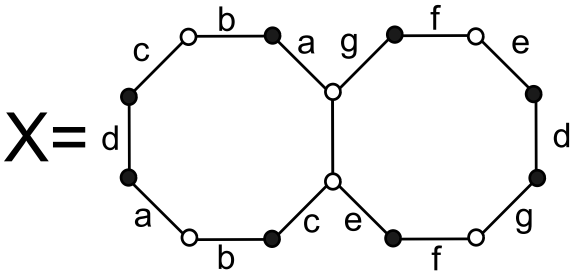
$$\Gamma(\widetilde{X}_n) = \Gamma(P_n) = \langle [R_n], [T_n] \rangle$$

が成り立つ.

この結果と Schmithüsen の方法 (Covering theory, Reidemeister-Schreier method) を合わせて, 正 $2n$ 角形の貼り合わせから構成されるリーマン面の Veech 群を計算する. この計算の停止に関しては以下のような結果を得た.

Theorem2. P_n の有限次アーベル被覆の Veech 群の計算は停止する.

この計算によって得られた Veech 群には例えば以下のようなものがある.



X を上の図のものとし, $R = R_4$, $T = T_4$ とすると $\Gamma(X)$ は以下のようになり, $\mathbb{H}/\Gamma(X)$ は 11 点穴開き球面となる.

$$\Gamma(X) = \left\langle \begin{array}{c} [T],\ [RT^2R^{-1}],\ [RTRT^2(RTR)^{-1}], \\ [RTRTRT(RTRTR)^{-1}], [RTRTR^2T(RTR^2)^{-1}], \\ [RTRTR^3T(RTRTR^3)^{-1}],\ [RTR^2T(RTRTR^2)^{-1}], \\ [RTR^3T^2(RTR^3)^{-1}],\ [RTR^3TR], \\ [R^2TR^{-2}],\ [R^3(RTR^3T)^{-1}] \end{array} \right\rangle .$$

参考文献

[1] G. Schmithüsen. *An algorithm for finding the Veech group of an Origami.* Experimental Mathematics 13 (2004), 459-472.

[2] W.Veech. *Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards.* Inventiones Mathematicae 97 (1989), 553-583. *Erratum* : Inventiones Mathematicae 103 (1991) 447.

Linear slices and the complex Fenchel-Nielsen coordinate of the punctured torus space

糸 健太郎　（名古屋大学多元数理科学研究科）

アブストラクト 1点穴あきトーラスの基本群と同型なクライン群の変形空間に関して，トレースを用いた座標と complex Fenchel-Nielsen 座標について考える．特に，1つのトレースを固定したときの変形空間の切り口 - linear slice - の挙動を complex Fenchel-Nielsen 座標を用いて解説する．

基本群 $\pi_1(S)$ の生成元の組 a, b を固定する．表現 $\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ が型を保つとは $\mathrm{tr}[\rho(a), \rho(b)] = -2$ が成り立つときをいう．型を保つ表現 ρ の $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 共役類 $[\rho]$ 全体を $\mathcal{R}(S)$ と表す．$[\rho]$ は $\mathrm{tr}(\rho(a))$ と $\mathrm{tr}(\rho(b))$ の値で本質的に定まるので，この対応で $\mathcal{R}(S) \cong \mathbb{C}^2$ と見なし $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ に対応する表現を $[\rho_{\alpha,\beta}]$ と書く．いま

$$\mathcal{D}(S) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 : [\rho_{\alpha,\beta}] \text{ is descrete, faithful}\}$$

とおく．$\alpha \in \mathbb{C}$ を固定したときの $\mathcal{D}(S)$ の切り口

$$\mathcal{L}(\alpha) = \{\beta \in \mathbb{C} : (\alpha, \beta) \in \mathcal{D}(S)\}$$

を linear slice という．特に $\alpha = 2$ のとき $\mathcal{L}(2)$ は Maskit slice とよばれる．$\alpha \to 2$ のときの $\mathcal{L}(\alpha)$ の挙動について，前回の学会では次の定理を紹介した．ただし $\rho_{\alpha,\beta}(a)$ の complex translation length を λ とおくとき，$\alpha = 2\cosh(\lambda/2)$ が成り立ち，$\alpha \to 2 \Leftrightarrow \lambda \to 0$ であることに注意する．

Theorem 1. 収束列 $\lambda_n \to 0$ に対して $\alpha_n := 2\cosh(\lambda_n/2)$ とおく．このとき $\lambda_n \to 0$ が *horocyclic* であれば $\mathcal{L}(\alpha_n)$ は $\mathcal{L}(2)$ に *Hausdorff* 収束し，$\lambda_n \to 0$ が *tangential* であれば $\mathcal{L}(\alpha_n)$（の任意の収束部分列）は $\mathcal{L}(2)$ の真部分集合に *Hausdorff* 収束する.（また，それぞれの収束において内点集合の *Caratheodory* 収束もいえる.）

いま S の写像類群は $\mathcal{D}(S)$ に作用し，特に $a \in \pi_1(S)$ に関する Dehn twist D_a は各 linear slice $\mathcal{L}(\alpha)$ を保つ．この D_a の作用は，つぎに述べる complex Fencel-Nielsen 座標を用いると平行移動として表せるので都合がよい．

いま $\mathcal{R}(S)$ の complex Fencel-Nielsen 座標 (λ, τ) を次の写像で定める：

$$\Phi_{FN} : (\mathbb{C} \setminus 2\pi i\mathbb{Z}) \times \mathbb{C} \to \mathcal{R}(S) \cong \mathbb{C}^2,$$
$$(\lambda, \tau) \mapsto (2\cosh(\lambda/2),\ 2\cosh(\tau/2)/\tanh(\lambda/2)).$$

ここで $\lambda, \tau \in \mathbb{R}$ の場合は，Φ_{FN} は Fuchs 表現への全単射となり通常の Fencel-Nielsen 座標を与える．$\lambda, \tau \in \mathbb{C}$ のとき Φ_{FN} は単射ではなく，$(e^{\pm\lambda}, e^{\pm\tau})$ と $(\pm\alpha, \pm\beta)$ が 1：1 に対応する（ただし複号同順ではない）．従って，$(\lambda, \tau) \mapsto (\pm\lambda + 2m\pi i, \pm\lambda + 2n\pi i)$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ の作用を modulo にして (λ, τ) を $\mathcal{R}(S)$ の座標と見なす．このとき Dehn twist D_a の作用は $(\lambda, \tau) \mapsto (\lambda, \tau + \lambda)$ と書ける．

いま $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 2\pi i\mathbb{Z}$ を固定するとき，$\alpha = 2\cosh(\lambda/2)$ も固定されることに注意すると，τ 空間の集合

$$\tilde{\mathcal{L}}(\lambda) := \{\tau \in \mathbb{C} : \Phi_{FN}(\lambda, \tau) \in \mathcal{D}(S)\}$$

は $\mathcal{L}(\alpha)$ の Φ_{FN} に関する引き戻しである．ここで $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ は $\langle z+\lambda, z+2\pi i\rangle$ 不変となる．$\lambda \to 0 \Leftrightarrow \alpha \to 2$ のときの $\mathcal{L}(\alpha)$ の挙動を $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ を用いて言い換えたのが次の系である．

Corollary 2. $\lambda_n \to 0$ が *horocyclic* ならば $\frac{2i}{\lambda_n}(\tilde{\mathcal{L}}(\lambda_n) - \pi i)$ は $\mathcal{L}(2)$ に *Hausdorff* 収束し，$\lambda_n \to 0$ が *tangential* であれば $\frac{2i}{\lambda_n}(\tilde{\mathcal{L}}(\lambda_n) - \pi i)$（の任意の収束部分列）は $\mathcal{L}(2)$ の真部分集合に *Hausdorff* 収束する．

次に τ を complex probability（の 1 つ）ω に対応させる．この ω は β と（ある意味で）1:1 対応するものである．いま

$$\omega = \omega(\lambda, \tau) := \frac{\mathrm{tr}(\rho_{\lambda,\tau}(ab))}{\mathrm{tr}(\rho_{\lambda,\tau}(a))\mathrm{tr}(\rho_{\lambda,\tau}(b))}$$

と定める．このとき $\omega = \frac{1+e^{\lambda}e^{\tau}}{(1+e^{\lambda})(1+e^{\tau})}$ が成り立ち，λ を固定したとき $\tau \mapsto \omega$ の対応は $\omega(\tau) = f_\lambda \circ \exp(\tau)$ の形に書ける．ここで $f_\lambda(z) = \frac{e^{\lambda}z+1}{(1+e^{\lambda})(z+1)}$ は 1 次分数変換である．従って

$$\check{\mathcal{L}}(\lambda) := \{\omega(\lambda, \tau) \in \mathbb{C} : \Phi_{FN}(\lambda, \tau) \in \mathcal{D}(S)\}$$

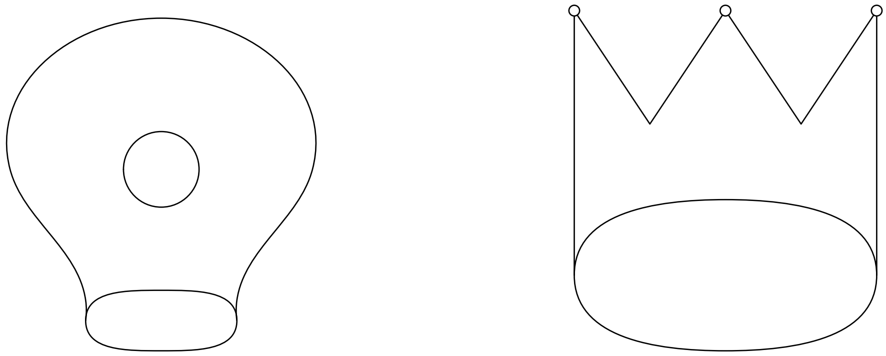
とおくとき，写像 $\omega : \tilde{\mathcal{L}}(\lambda) \to \check{\mathcal{L}}(\lambda)$ は被覆写像となり，$z + 2\pi i$ の作用が被覆変換群となり，$z+\lambda$ の作用は $g_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1/\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の作用に落ちる．ただし $\alpha = 2\cosh(\lambda/2)$ である．すなわち $\check{\mathcal{L}}(\lambda)$ は $\langle g_\alpha \rangle$ 不変となる．集合 $\check{\mathcal{L}}(\lambda)$ と $\mathcal{L}(\alpha)$ は（ある意味で）1：1 に対応するのであるが，D_a が 1 次分数変換として作用する分，$\check{\mathcal{L}}(\lambda)$ を観察する方が $\mathcal{L}(\alpha)$ よりも見通しがよくなるといえる．また $\mathcal{L}(\alpha)$ は非有界であるが $\check{\mathcal{L}}(\lambda)$ は有界集合である．定理の $\check{\mathcal{L}}(\lambda)$ への言い換えは次のようになる：

Corollary 3. $\lambda_n \to 0$ が *horocyclic* ならば $\check{\mathcal{L}}(\lambda_n)$ は $\frac{1}{2} + \frac{i}{\mathcal{L}(2)} = \{\frac{1}{2} + \frac{i}{\beta} : \beta \in \mathcal{L}(2)\}$ に *Hausdorff* 収束し，$\lambda_n \to 0$ が *tangential* であれば $\check{\mathcal{L}}(\lambda_n)$（の任意の収束部分列）は $\frac{1}{2} + \frac{i}{\mathcal{L}(2)}$ の真部分集合に *Hausdorff* 収束する．

下の図は左から $\mathcal{L}(\alpha)$, $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, $\check{\mathcal{L}}(\lambda)$ のコンピュータグラフィックスである．ただしこれらの α や λ の間には特に関係はない．これらの図は佐久川啓太氏（明治大学理工学研究科 D3）に作成して頂いたプログラムを用いて描かせた．

Cook Hats and Crowns

小森　洋平　(阪市大理)*



1. １つ穴空きトーラス (cook hats)

Definition 1. 1 つ穴空きトーラス上の 3 本の閉曲線 (α, β, γ) が 標準的 3 つ組であるとは、それぞれの幾何的交点数がすべて 1 であることとする。

Proposition 1. 双曲的な 1 つ穴空きトーラス上の任意の標準的 3 つ組 (α, β, γ) と境界曲線 δ の双曲計量に関する長さは次の等式を満たす。

$$\cosh^2 \frac{l((\delta)}{4} = (\cosh \frac{l(\beta)+l(\gamma)}{2} - \cosh \frac{l(\alpha)}{2})(\cosh \frac{l(\alpha)}{2} - \cosh \frac{l(\beta)-l(\gamma)}{2}).$$

この等式から次の不等式が導かれる。

Corollary 1.

$$l(\alpha)+l(\beta)+l(\gamma) > l(\delta).$$

Theorem 1. 双曲的な 1 つ穴空きトーラス上の任意の標準的 3 つ組 (α, β, γ) と境界 δ の双曲計量に関する長さは、任意の実数 $t > 1$ に対し次の不等式を満たす。

$$\cosh^2 \frac{l(\delta)}{4} t < (\cosh \frac{l(\beta)+l(\gamma)}{2} t - \cosh \frac{l(\alpha)}{2} t)(\cosh \frac{l(\alpha)}{2} t - \cosh \frac{l(\beta)-l(\gamma)}{2} t).$$

特に長さ関数の 4 つ組 $L := (l(\alpha) : l(\beta) : l(\gamma) : l(\delta))$ は双曲的な 1 つ穴空きトーラスのタイヒミュラー空間の同次座標を与える。

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "L"] \arrow[dr, dashed, "\pi \circ L"'] & R^4 \arrow[d, "\pi"] \\ & P(R^4) \end{tikzcd}$$

* e-mail: komori@sci.osaka-cu.ac.jp

2. ３つのカスプと１つ穴空き球面 (crowns)

Definition 2. ３つのカスプと１つ穴空き球面上の３本の閉曲線 (α, β, γ) が標準的３つ組であるとは、それぞれの幾何的交点数がすべて２であることとする。

１つ穴空きトーラスと、３つのカスプと１つ穴空き球面のそれぞれの単閉曲線の自由ホモトピー全体の間と、それぞれのタイヒミュラー空間の間に自然な同型が存在し、次が成り立つ（[2] 参照）。

Theorem 2. 双曲的１つ穴空きトーラスに対し、同じ長さの境界測地線を持つ双曲的３つのカスプと１つ穴空き球面がただ１つ存在して、対応する曲面内の単純閉測地線の長さがすべて２倍になる。

Corollary 2. 双曲的な３つのカスプと１つ穴空き球面上の標準的３つ組 (α, β, γ) と境界曲線 δ の双曲的長さは次の不等式を満たす。

$$l(\alpha) + l(\beta) + l(\gamma) > 2l(\delta).$$

Corollary 3. 双曲的な３つのカスプと１つ穴空き球面上の任意の標準的３つ組 (α, β, γ) と境界曲線 δ の双曲的長さの４つ組 $L := (l(\alpha) : l(\beta) : l(\gamma) : l(\delta))$ は双曲的な３つのカスプと１つ穴空き球面のタイヒミュラー空間の同次座標を与える。

3. Thurston コンパクト化の有限次元での実現問題

任意の (g, n) 型の双曲的なリーマン面 R 上の単純閉測地線の長さすべてを同次座標に用いれば、R のタイヒミュラー空間 $T(R)$ を無限次元射影空間に埋め込むことができ、像はコンパクトになる。また幾何的交点数すべてを同次座標に用いれば、R 上の単純閉測地線全体を同じ無限次元射影空間に埋め込むことができ、像はちょうどタイヒミュラー空間 $T(R)$ の像の境界に稠密に分布していることが知られている（Thurston コンパクト化と Thurston 境界：[1] 参照）。このプロセスを有限次元射影空間で実現できないかという問題があり、タイヒミュラー空間と同じ次元の有限次元射影空間で Thurston コンパクト化が実現できるという予想がある（[2]）。今回の結果から次が分かる。

Theorem 3. *Fricke-Klein* の曲線族を用いて、$9g - 9 + 3n - 1$ 次元の射影空間内で、*Thurston* コンパクト化は実現できる。

参考文献

[1] A. Fathi, F. Laudenbach and V. Poénaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces, Séminaire Orsay*, Astérisque 66-67, (1991/1979).

[2] U. Hamenstädt, *Parametrizations of Teichmüller space and its Thurston boundary*, in "Geometric analysis and nonlinear partial differential equations" (S. Hildebrandt, H. Karcher, eds.), Springer, Berlin 2003, 81-88.

[3] F. Luo, *Geodesic length functions and Teichmüller spaces*, J. Differential Geometry 48 (1998), 275-317.

[4] P. Schmutz, *Teichmüller space and fundamental domains on Fuchsian groups*, L' Enseignement Mathématique 45 (1999), 169-187.

POLYCYCLIC QUASICONFORMAL MAPPING CLASS SUBGROUPS

KATSUHIKO MATSUZAKI
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SCHOOL OF EDUCATION
WASEDA UNIVERSITY

We consider a Riemann surface R in general, not necessarily analytically finite, and a subgroup G consisting of quasiconformal mapping classes of R. Such a group usually appears as acting on the infinite dimensional Teichmüller space of R and in particular discreteness of its orbit is often discussed. In this case, the discreteness of G is understood through the action on the Teichmüller space. In this paper however, we first start from a more basic viewpoint on G as surface homeomorphisms and then look into its action on the Teichmüller space.

The quasiconformal mapping class group $\mathrm{MCG}(R)$ of a Riemann surface R is the group of all quasiconformal automorphisms g of R modulo homotopy equivalence. We introduce a topology for this group induced by the compact-open topology of homeomorphisms of R. Throughout this introduction, we assume that R has no boundary at infinity for the same of simplicity. Then a subgroup G of $\mathrm{MCG}(R)$ is defined to be *discrete* if it is discrete in this topology. Our main theorem refers to a certain algebraic condition under which G is always discrete. Here we say that a group G is *polycyclic* if G is solvable and if every subgroup of G is finitely generated.

Theorem 1. *If a subgroup G of* $\mathrm{MCG}(R)$ *is polycyclic, then G is discrete.*

This result is sharp in a sense that there is a counter-example for either a finitely generated solvable group or an infinitely generated abelian group.

In the first part of the application of this theorem, we deal with stationary mapping class subgroups and consider their action on the Teichmüller space. The quasiconformal mapping class group $\mathrm{MCG}(R)$ acts on the Teichmüller space $T(R)$ of R biholomorphically and isometrically. We call a subgroup G of $\mathrm{MCG}(R)$ *stationary* if there exists a compact subsurface V of R such that every representative g of every mapping class $[g] \in G$ satisfies $g(V) \cap V \neq \emptyset$.

A basic nature of stationary subgroups in connection with their discreteness in the compact open topology and discontinuity of the action on the Teichmüller space is that, if $G \subset \mathrm{MCG}(R)$ is stationary and discrete, then G acts discontinuously on $T(R)$. Then we have the following consequence from the main theorem.

Corollary 2. *If a polycyclic subgroup $G \subset \mathrm{MCG}(R)$ is stationary, then G acts discontinuously on $T(R)$.*

We expect that this result should be valid for every finitely generated stationary group.

In the second part, we apply our main theorem to asymptotically conformal mapping class subgroups. We say that a quasiconformal homeomorphism of a Riemann surface R is asymptotically conformal if its complex dilatation vanishes at infinity of R. We say that a subgroup G of $\mathrm{MCG}(R)$ is *asymptotically conformal* if there exists some $p \in T(R)$ such that every element of G can be realized as an asymptotically conformal automorphism of the Riemann surface R_p corresponding to p. We denote by $\mathrm{MCG}_p(R)$ the subgroup of $\mathrm{MCG}(R)$ having this property for $p \in T(R)$.

Theorem 3. *If a subgroup G of $\mathrm{MCG}_p(R)$ for $p \in T(R)$ is polycyclic, then the orbit $G(p)$ is a discrete set in $T(R)$.*

One may ask a question about how the algebraic assumption on G can be loosen for this statement.

一般の周期条件を満たす柴の挙動空間の存在について

松井邦光
米谷文男

R；種数 $g \leqq \infty$ の開リーマン面.

Λ_h (resp. Γ_h)；R上ノルム有限な複素(resp.実)微分がなす平面の実軸R上に張る実ヒルベルト空間で内積は実ディリクレ内積.

$\Lambda_x^{\perp}$ (resp. $\Gamma_x^{\perp}$) は $\Lambda_x \subset \Lambda_h$ (resp. $\Gamma_x \subset \Gamma_h$) の Λ_h (resp. Γ_x) 内の直交補空間.

$\Lambda_{hse}, \Lambda_{he}, \Lambda_{ho}, \Lambda_{a} \cdots$ (resp. $\Gamma_{hse}, \Gamma_{he}, \Gamma_{ho} \cdots$) は夫々に対応する Λ_h (resp. Γ_h) の部分空間.

$J = \bigcup_{k=1}^{K} J_k$; $J = \{1, 2, \cdots, g\}$, $K \leqq \infty$ の互に素な分割.

$\{L_k\}_{k=1}^{K} = \{L_k\}$; 各一平面上原点を通り原点以外の共有点をもたない K個の直線.

$\{A_j, B_j\}_{j=1}^{g}$; Rの標準近似 $\{R_n\}$ に対応するアールホルス型 canonical homology basis mod dividing curve.

$\Lambda_x = i\Lambda_x^{*\perp} \subset \Lambda_{hse}$ を挙動空間とよぶ

$\Lambda_Y = i\Lambda_Y^{*\perp} \subset \Lambda_{hse}$ 且 $\int_{A_j} \lambda \in L_k$, $\int_{B_j} \lambda \in L_k$, $j \in J_k$, $\lambda \in \Lambda_Y$

なる $\Lambda_Y = \Lambda\{\bigcup_{k=1}^{K} J_k, (L_k)\}$ を柴の挙動空間とよぶ

$\Lambda_s = \{\lambda;\ \exists\lambda_n \in \Lambda_n = i\Lambda_n^{*\perp};\ \|\lambda_n - \lambda\| \to 0,\ n\to\infty\}$,

$\overline{S} = \mathrm{closure}\{S;\ S$ は Λ_h 内の線型空間$\}$,

Lem. 1. $\{\Lambda_n = i\Lambda_n^{*\perp}\}_n$ に対し $U_n, V_n \subset \Lambda_n$ で $U_{n+1} \supset U_n$, $V_{n+1} \subset V_n$, $\Lambda_n = U_n + V_n$ なる $\exists\{U_n\}, \{V_n\}$ のとき $\Lambda_{\overline{S}} = i\Lambda_{\overline{S}}^{*\perp}$.

Th. 1. $A_j, B_j \subset R - R_m$, $S_m = \sum_{j > g_n}\{b_j\sigma(A_j) + a_j\sigma(B_j)\}$

$A_j, B_j \subset R_m$, $S_m = \sum_{k=1}^{K}\left[\sum_{j\in J_k} z_k\{b_j\sigma(A_j) + a_j\sigma(B_j)\}\right]$, $z_k \in L_k$

但し $\sigma(\gamma)$: 閉曲線 $\gamma \subset R$ の周期再生微分, $a_j, b_j \in R$

$g_n = R_n$ の種数 とすると $\Lambda_m = \Gamma_{he} + S_m + i(\Gamma_{he} \cap \Gamma_{h0} + S^m)$

は $\Lambda_m = i\Lambda_m^{*\perp}$ で Λ_m に対する Λ_S = 一つの挙動空間である

Lem 2. $\{\Gamma_k\}_{k=1}^{K}$, $K < \infty$ にて $\Gamma_p \neq \Gamma_q^{*}$, $p \neq q$ が $\Gamma_1^{*\perp} = \sum_{k=2}^{K}\Gamma_k$

且 $\Lambda_K = \sum_{k=1}^{K} z_k\Gamma_k$ が共に閉空間なら Λ_K は挙動空間である.

Th. 2: Lem. 2 の仮定の下で $S(J_k) = \{\sigma(A_j), \sigma(B_j),\ j \in J_k\}$ とし

$\Gamma_{hm} + S(J_k) \subset \Gamma_k \subset \Gamma_{hse} \cap [\bigcap_{p\neq k}\{S(J_p)^{*\perp}\}]$ とおくと

Λ_K は一つの挙動空間である.

例1. $\Gamma_{hm} + S(J_1) \subset \Gamma_1 < \Gamma_{hse} \cap \{\bigcap_{p\neq 1} S(J_p)^{*\perp}\}$, ${}_1\Gamma = \Gamma_1^{*\perp}$,

${}_k\Gamma = \Gamma_k^{*\perp}$ とおく. 今 $\Lambda_K = \sum z_k\Gamma_k$ が閉空間で且

$\Gamma_K^{*\perp} = \sum_{j=1}^{K-1}\Gamma_j$ であれば Λ_K は一つの挙動空間である.

Th 3. (表現定理) $\Lambda_\gamma = \Lambda\{\bigcup_{k=1}^{K} J_k, \{L_k\}\}$ が一つの挙動空間,

但し $K < \infty$ 今 ${}_k\Gamma = \mathrm{Im}(z_k\Lambda_\gamma)$, $\Gamma_k^{*\perp} = {}_k\Gamma^{*\perp}$. とおく.

$\widetilde{\Lambda}_\gamma = \sum_{k=1}^{K} z_k\Gamma_k$ は Lem 2 の仮定の下で $\widetilde{\Lambda}_\gamma = \Lambda_\gamma$.

コンパクトRiemann面間の
正則写像の剛性について

田辺正晴（東京工業大学大学院理工学研究科）

1 序

コンパクトRiemann面間の正則写像には、様々な剛性定理がある。それらは、コンパクトRiemann面間の正則写像が、Jacobi多様体間の準同型写像の制限と考えると、より自然に理解されたり、より深い結果が得られることがある。この講演では、そうした観点から得られる、コンパクトRiemann面間の正則写像に関するいくつか剛性定理について、紹介する。

2 de Franchis の定理

2.1 上界

この節では、以下Riemann面と言えば、すべてコンパクトで種数2以上であるとする。

まず、Riemann面の等角自己同形写像については、次の結果がある。Riemann面 X の等角自己同型写像全体のなす群を $\mathrm{Aut}(X)$ で表そう。まず、Schwarzが、等角自己同形写像は、Weierstrass点をWeierstrass点にうつし、しかもそのWeierstrass点間の対応が、恒等的ならば等角自己同形は恒等写像かhyperelliptic involutionであるということを使って、次を示した。

定理 1 (Schwarz)**.** $\mathrm{Aut}(X)$ は有限群である。

さらに、Hurwitzが次を示した。

定理 2 (Hurwitz)**.** X の種数を g で表すと、$\mathrm{Aut}(X)$ の位数は $84(g-1)$ 以下である。

さて、等角自己同形写像から Riemann 面間の正則写像に目を転じると、やはり次の有限性定理がある。

定理 3 (de Franchis)**.** *([9]) (a)* 二つの *Riemann* 面間の非定値正則写像の数は、有限である。
(b) Riemann 面を一つ固定したとき、その *Riemann* 面からの非定値正則写像があるような *Riemann* 面の数は、有限である。

主張 (b) は、しばしば Severi の定理と呼ばれる。

de Franchis の定理を見たときに、Hurwitz の定理のような、種数にのみ依存する上界が有るのかという疑問を持つことは、きわめて自然なことであろう。実際、そのような上界は存在するのだが、与えられたのは、上記古典的な結果達と比べれば比較的新しい。定理 3(a) に関しては、つまり 2 つ Riemann 面 X, Y が固定されたときには、Martens [7] が X から Y への非定値正則写像の数は、X の種数を g で表すと、$(cg)^{2g^2}$（c は g に依存しない定数。以下 c はこのような定数で、各上界ごとに異なり得るものとする。）以下であることを示したのが最初であると思われる。これについては、[13] において、

$$(cg)^{2g}$$

以下であることを示した。

終集合となる Riemann 面 Y が固定されない場合について、以下の様に記号を定める。$f_i : X \to Y_i \quad (i = 1, 2)$ を 2 つの正則写像であるとする。等角写像 $h : Y_1 \to Y_2$ で $h \circ f_1 = f_2$ を満たすものが存在するとき、f_1 と f_2 は同値であると言い、$f_1 \sim f_2$ と書こう。$\mathcal{I}_\gamma(X)$ を、X から種数 γ の Riemann 面への正則写像全体を上記同値関係で割った同値類全体の集合であるとする。さらに、$\mathcal{I}(X) = \bigcup_{g>\gamma>1} \mathcal{I}_\gamma(X)$ と置くと、de Franchis の定理から、$\#\mathcal{I}(X) < \infty$ である。Howard と Sommese [10] は、$\#\mathcal{I}(X)$ ついて、初めて g にのみ依存する上界を与えることに成功した。さらに Kani [11] が、より小さい上界

$$\sharp\mathcal{I}(X) < (g-1)2^{2g^2-2}(2^{2g^2-1}-1),$$

を与え、それから、Alzati と Pirola [1] がさらに小さい上界

$$\sharp\mathcal{I}(X) < \exp\{(4/3)(g^2-1)\log 3 + [\log_2 g]\ \log(84g) + \ \log(12\sqrt{2})\}$$

を与えた。また、Kani は以下の様な興味深い結果も残している。

$$M(g) = \max_X \{\sharp \mathcal{I}(X)\},$$

とおく。ただし、X は種数 g の Riemann 面全てを走るものとする。Kani は $M(g) > \exp\ (c(\log g)^2)$ であるような g が無限個あることを示した。このことから、$M(g)$ は g に関する多項式で上からおさえることは出来ない。一方で、Kani の結果にしろ Alzati と Pirola の結果にしろ、オーダーで見れば、

$$M(g) \leq c^{g^2}$$

である。著者はまず、[14] において、$M(g) \leq (cg)^{5g}$ であることを示し、次に [15] において、

$$M(g) \leq (cg)^{2g} \tag{1}$$

であることを示した。

2.2 証明の概要

上で述べた上界を与える論文の全てが、手法としては、正則写像達の X の Hodge 構造の lattice への作用を見る、あるいはそれと同等の手法を用いている。 他の手法として、双曲幾何を使って、上界を求めたという点で Imayoshi [5] と Ito と Yamamoto [6] は特徴的である。

正則写像 $f_i : X \to Y_i$ が与えられたとしよう。このとき、f_i によって、1-st. de Rham コホモロジーへの作用 $f_i^* : H^1(Y_i) \to H^1(X)$（pull back）と $f_{i*} : H^1(X) \to H^1(Y_i)$（push forward）が得られる。これらを合成して、$f_i^* f_{i*} : H^1(X) \to H^1(X)$ が得られる。これにより、終集合として異なる Riemann 面を持つ正則写像達が、同じ足場を得る。$F_i = f_i^* f_{i*}$ と記号を置こう。F_i の $H^1(X, \mathbb{Z})$ への制限を考えると、これは、$H^1(X, \mathbb{Z})$ 上の自己準同型になっていることが分かる。$\mathcal{H}$ によって、X 上の正則微分形式全体がなす空間を表そう。 また、$\Omega :=$Hom$(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ と記号を置く。Jacobi 多様体 $\mathrm{J}(X) = \Omega/H_1(X, \mathbb{Z})$ は次元 g の複素トーラス であり、$\overline{\mathcal{H}}$ を Ω 上の $\mathbb{C}$-antilinear forms とみると、双対 Jacobi 多様体 が、$\widehat{\mathrm{J}(X)} = \overline{\mathcal{H}}/H^1(X, \mathbb{Z})$ で定義される。f_i は正則だから、F_i は $\overline{\mathcal{H}}$ 上の自己準同型であり、$H^1(X, \mathbb{Z})$ 上の自己準同型になっていることと併せて、双対 Jacobi 多様体 $\widehat{\mathrm{J}(X)} = \overline{\mathcal{H}}/H^1(X, \mathbb{Z})$ の自己準同型と見ることも出来る。$\widehat{\mathrm{J}(X)}$ の自己準同型全体 End$(\widehat{\mathrm{J}(X)})$ はアーベル群をなし、ある $m \leq 2g^2$

に対して、$\mathbb{Z}^m$ と同形になる。また、内積が入る。この内積は、以下の様に定義される。

行列表現を見よう。$H^1(X,\mathbb{Z})$ の基底 $a_1,\cdots,a_{2g}$ として、wedge 積をとっての積分 $\int_X a_j \wedge a_k$ が $(j,k)-$ 成分である行列が、行列 $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ で与えられる様なものを取る。以下、J と書いたら、すべてこの形の行列をあらわす。このとき、$F_1,\, F_2 \in \mathrm{End}(\widehat{\mathrm{J}(X)})$ に対して、この基底に関する行列表現を $M_1,\, M_2$ でそれぞれ表すと、

$$< F_1,\, F_2 >:= \mathrm{trace}\, {}^t M_1 J^{-1} M_2 J$$

は、内積である。定義から、$\mathbb{Z}$-値である。また、$F_i \in \mathrm{End}(\widehat{\mathrm{J}(X)})$ が、Riemann 面間の正則写像 $f_i : X \to Y_i$ から、上の様に $F_i = f_i^* f_{i*}$ によって定義されたものであるとき、$\deg f = d$ と置くと、

$$||F_i||^2 =< F_i,\, F_i >= 2d^2\gamma$$

（γ は値域である Y_i の種数）である。このことから、$\deg f = d$ でかつ値域の種数 γ の、X からの正則写像達は、次元 $m \le 2g^2$ の空間の半径 $2d^2\gamma$ の球面上に、互いに整数値だけ離れた点達として現れることになる。Riemann-Hurwitz の関係式より、$d \le g-1$ だから $\gamma < g$ と併せて、結局 $\deg f = d$ の X 上の正則写像達は

$$(cg^3)^{2g^2}$$

で上から評価出来ることが、すぐに分かる。

ここで評価を良くするために、Kani は、正則写像から来る２つの点の距離が、実際はある程度離れていることを示した。これにより彼は、半径 $2d^2\gamma$ から来ていた (cg^3) の部分を g に依存しない数に置き換えることに成功、その結果としてオーダーとして見れば、c^{g^2} という上界を得た。

さて、評価を良くする別の道として、正則写像達を次元 $m \le 2g^2$ の空間内の点として見たのだが、こんなに高い次元のところで見なくとも良いのでは、という考えが浮かぶ。内積を定義するとき、trace を取ったので、次元 $m \le 2g^2$ というところで議論することになった。

Hodge star の行列表現を $\mathcal{G}$ で表す。$\mathcal{G}^2 = -E$ である。Hodge star は任意の $F_i \in \mathrm{End}(\widehat{\mathrm{J}(X)})$ と可換だから $\mathcal{G}$ は F_i の行列表現 M_i と可換である。また、$\Gamma := J\mathcal{G}$ は正値実対称行列である。$H^1(X,\mathbb{Z})$ の基底 $a_1,\cdots,a_{2g}$ に

対して、積分 $\int_X a_j \wedge {}^* a_k$ が (j,k)-成分になっている。$J = \Gamma\,\mathcal{G}^{-1}$ と書き換えて、${}^tM_iJ^{-1}M_iJ = {}^tM_iJM_iJ^{-1}$ に代入すれば、

$$
{}^tM_iJM_iJ^{-1} = {}^tM_i\Gamma\,\mathcal{G}^{-1}M_i\mathcal{G}\Gamma^{-1} = {}^tM_i\Gamma M_i\Gamma^{-1}
$$

となって、trace をとれば、0 以上になることがこの形から分かる。

では、${}^tM_i\Gamma M_i$ にのみ着目したらどうか。この場合、Γ は $H^1(X,\mathbb{Z})$ に内積を定義するから、それを記号 (,) で置く。$e \in H^1(X,\mathbb{Z})$ を、ノルム最小な元とする。$F_i \in \mathrm{End}(\widehat{\mathrm{J}(X)})$ が、Riemann 面間の正則写像 $f_i : X \to Y_i$ から、$F_i = f_i^* f_{i*}$ によって定義されたものであるとき、$D = F_2 - F_1$ と置いて、$De \equiv 0 \mod. l\,(> 2g-2)$ であるとする。任意の $x \in H^1(X,\mathbb{Z})$ に対して $||F_ix|| \leq d_i||x||$ であることと（$d_i = \mathrm{deg} f_i$ とする）、三角不等式から、

$$
||De|| \leq (d_1 + d_2)||e||.
$$

しかし、$De \equiv 0 \mod. l\,(> 2g-2)$ との仮定から、$De = 0$ である。つまり、e の Riemann 面間の正則写像から来た F_i たちによる像は、$(2g-1)^{2g}$ 通りしかあり得ない。e の像が一致すれば、Riemann 面間の正則写像としては、あとは g に関する多項式オーダーの曖昧さしかなくて、結局、(1) の上界を得る。

de Franchis の定理の (a)、値域となる Riemann 面が固定されている場合においては、２つの正則写像 $f_i : X \to Y\ (i = 1,2)$ が与えられたとき、f_i^* は $\mathrm{Hom}(\widehat{\mathrm{J}(Y)}, \widehat{\mathrm{J}(X)})$ の元とみなせて、$f_1^* f_{2*}$ の *trace* をとれば、やはり、それが内積を定義している。上と類似の議論により、やはり上界 $(cg)^{2g}$ を得られる。

また、このように、Hodge 構造の全体への作用を見るのをやめて、１つの lattice の像に着目しそれの像の可能性を評価、lattice の像が一致していれば、あとは低いオーダーの曖昧さが残るから、さらにそれを評価するという手法は、Naranjo と Pirola[12] により、一般の複素多様体の場合へ適用された。

3 Lefschetz trace formula

この節では、Riemann 面と言えば、すべてコンパクトであるのは同じだが、種数は 1 以上であるとする。

さて、de Rham コホモロジーの trace を取ると言う操作で思い浮かべるのは、Lefschetz trace formula である。Riemann 面 X に対して、等角

自己同型 $T \in \mathrm{Aut}(X)$ の場合を思い起こしてみよう。T のグラフ $\Gamma_T = \{(p, T(p))\} \subset X \times X$ に対して、T の固定点は Γ_T と対角成分 $\Delta \subset X \times X$ の交点と見なせる。T の Lefschetz 数 $L(T)$ が、

$$L(T) = \sharp(\Delta \cdot \Gamma_T)$$

により、定義されるが、

$$L(T) = \sum_{k=0}^{k=2} (-1)^k \mathrm{trace}\,(T^*|_{H^k(X)})$$

が成立していて、この関係式がいわゆる Lefschetz trace formula（の実２次元版）である。

さて、$f_i : X \to Y$ を種数 g と γ の Riemann 面間の正則写像であり 、$\deg f_i = d_i\,(i = 1, 2)$ であるとする。相異なる正則写像 $f_i\,(i = 1, 2)$ に対して、 Lefschetz 数を以下の様に定義する。

$$\Gamma_{f_1, f_2} = \{(f_1(p), f_2(p))\} \subset Y \times Y,$$

と置く。

$$L(f_1, f_2) = \sharp(\Delta \cdot \Gamma_{f_1, f_2})$$

を f_1 と f_2 の Lefschetz 数と呼ぶ。これは、$p \in X$ で $f_1(p) = f_2(p)$ を満たす点（f_1, f_2 の一致点と呼ぶ）の数に適当な多重度を込めたものである。$L(f_1, f_2)$ については、 Fuertes と González-Diez により、調べられている ([3], [4])。特に興味深いのは以下の定理であろう。

定理 4 (Fuertes and González-Diez)**.** *$f_i : X \to Y$ を種数 g と γ の Riemann 面間の正則写像であり、$deg f_i = d_i\,(i = 1, 2)$ であるとする。*
i) $L(f_1, f_2) \leq d_1 + 2\gamma\sqrt{d_1 d_2} + d_2$.
ii) $\gamma \geq 2$ の場合、等号成立は、Y が hyperelliptic で $f_2 = J \circ f_1$（ J は hyperelliptic involution）のとき、またそのときのみ。

これは、等角自己同型の場合の拡張になっていることが分かる。

さて、

$$L(f_1, f_2) = \sum_{q=0}^{q=2} (-1)^q \mathrm{trace}\,(f_{2*} f_1^*|_{H^q(Y)}) = \sum_{k=0}^{k=2} (-1)^k \mathrm{trace}\,(f_1^* f_{2*}|_{H^k(X)}),$$

のように、計算出来る。前節の最後の方で述べた様に、$\mathrm{trace}\,(f_1^* f_{2*}|_{H^1(X)})$ は、$\mathrm{Hom}(\widehat{\mathrm{J}(Y)}, \widehat{\mathrm{J}(X)})$ 上の内積を定義している。この内積を言葉として、以下の結果が得られる [16]。

定理 5. $f_i : X \to Y$ を種数 g と γ の *Riemann* 面間の正則写像であり、$degf_i = d_i\,(i = 1,2)$ であるとする。

$$L(f_1, f_2) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} d_1 = d_2 \\ \cos(f_1, f_2) = \gamma^{-1} \end{cases} .$$

Y がトーラスのとき、以下が成り立つ。

Corollary 6. $f_i : X \to Y$ を種数 g と $\gamma = 1$ の *Riemann* 面間の正則写像であるとする。以下の 2 条件は同値である。
1) $L(f_1, f_2) = 0.$
2) f_1 と f_2 の違いは、Y 上の平行移動のみである。

以上、Riemann 面間の正則写像の数の有限性と、一致点の数と言う、一見、かけ離れた研究対象がコホモロジーへの作用の trace を考える、つまり、双対 Jacobi 多様体間の準同型全体のなすアーベル群上の内積を使うという、同じ手法により、調べられるということを見た。

いずれの研究対象も、手法の精密化、高次元への適用等、まだ出来ることはあると思われる。

参考文献

[1] Alzati, A. and Pirola, G. P., Some remarks on the de Franchis theorem, *Ann.Univ. Ferrara Sez. VII* (N.S.)**36**, (1990), 45–52

[2] Bott, R. and Tu, L. W., *Differential Forms in Algebraic Topology,* GTM 82, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, and Berlin, 1982.

[3] Fuertes, Y. and González-Diez, G., On the number of coincidences of morphisms between closed Riemann surfaces, *Publ. Mat.* **37**, (1993), 339-353.

[4] Fuertes, Y., Some bounds for the number of coincidences of morphisms between closed Riemann surfaces, *Israel J. Math.* **109**, (1999), 1–12.

[5] Imayoshi, Y., An estimate of the number of non-constant holomorphic maps between Riemann surfaces, *Topology and Teichmüller spaces* (Katinkulta, 1995),World Sci. Publ., River Edge, NJ, (1996), 57–78.

[6] Ito, M. and Ymamoto, H., Holomorphic mappings between compact Riemann surfaces, *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)***52** (2009), 109–126

[7] Martens, H. H., Observations on morphisms of closed Riemann surfaces, *Bull. London Math. Soc.* **10** (1978), 209–212.

[8] Martens, H. H., Mappings of closed Riemann surfaces, *Proc. Sympos. Pure Math.* **49** (1989), Part 1, 531–539.

[9] de Franchis, M., Un teorema sulle involuzioni irrazionali, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **36**, (1913), 368.

[10] Howard, A. and Sommese, A. J., On the theorem of de Franchis, *Ann. Scoula. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **10**, (1983), 429-436.

[11] Kani, E., Bounds on the number of non-rational subfields of a function field, *Invent. Math.* **85**, (1986), 185–198.

[12] Naranjo, J. C. and Pirola, G. P., Bounds of the number of rational maps between varieties of general type, *Amer. J. Math.* **129**, (2007), 1689–1709

[13] Tanabe, M., A bound for the theorem of de Franchis, *Proc. Amer. Math. Soc.* **127**, (1999), 2289-2295.

[14] Tanabe, M. , Bounds on the number of holomorphic maps of compact Riemann surfaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **133**, (2005), 3057-3064.

[15] Tanabe, M.,On a theorem of de Franchis, Analysis and Topology of Discrete Groups and Hyperbolic Spaces, (Kyoto, 2007). 数理解析研講究録 No. 1660 (2009), 139–143.

[16] Tanabe, M., Morphisms of closed Riemann surfaces and Lefschetz trace formula, *Proc. Amer. Math. Soc.* **138**, (2010),1295–1303.

Representing sequences on parabolic Bergman spaces

菱川　洋介（岐阜工業高等専門学校）

H を $n+1$ 次元実ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geq 1)$ の上半空間とする．すなわち，

$$H = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}; x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}.$$

$0 < \alpha \leq 1$ に対し，$L^{(\alpha)} = \partial_t + (-\Delta_x)^\alpha$ とする．ここで，$\partial_t = \partial/\partial t$，$\Delta_x$ は x に関する Laplacian である．H 上の連続関数 u が $L^{(\alpha)}$ 調和であるとは，超関数の意味で $L^{(\alpha)}u = 0$ となるときをいう．$W^{(\alpha)}$ は $L^{(\alpha)}$ の基本解を表す．

$1 \leq p < \infty$，$\lambda > -1$ に対して，放物型 Bergman 空間 $\boldsymbol{b}^p_\alpha(\lambda)$ を次のように定義する．

$$\boldsymbol{b}^p_\alpha(\lambda) := \{u \in C(H); L^{(\alpha)}\text{調和}, \|u\|_{L^p(\lambda)} := \left(\int_H |u(x,t)|^p t^\lambda dV(x,t)\right)^{1/p} < \infty\}.$$

ここで dV は Lebesgue 体積測度を表す．注意として，$\boldsymbol{b}^p_\alpha(\lambda)$ はノルム $\|\cdot\|_{L^p(\lambda)}$ に関して Banach 空間となる．特に $\alpha = 1/2$ のとき，$\boldsymbol{b}^p_{1/2}(\lambda)$ は調和 Bergman 空間となる．

ν を実数とする．t に関する次数 ν の分数冪微分作用素を $\mathcal{D}^\nu_t = (-\partial_t)^\nu$ と表す．

2009 年秋季総合分科会において，我々は放物型 Bergman 関数の離散的な再生公式を与える点列に関する研究について述べた．この公式は $L^{(\alpha)}$ の基本解の分数冪微分によって与えられる．本講演では，2009 年秋季総合分科会において紹介した結果の概要と，その後の研究について紹介する．

はじめに，離散的な再生公式を与える作用素を定義する．κ を実数，$\mathbb{X} = \{(x_j, t_j)\}$ を H 内の点列，$\{\eta_j\}$ を実数列とする．このとき作用素 $U^\kappa_{p,\mathbb{X}}$ を

$$U^\kappa_{p,\mathbb{X}}(\{\eta_j\})(x,t) = \sum_j \eta_j t_j^{\frac{n}{2\alpha}+\kappa-\left(\frac{n}{2\alpha}+\lambda+1\right)\frac{1}{p}} \mathcal{D}^\kappa_t W^{(\alpha)}(x - x_j, t + t_j), \quad (x,t) \in H$$

と定義する．

定義 1． $0 < \alpha \leq 1$, $1 \leq p < \infty$, $\lambda > -1$, κ を実数とする．H 内の点列 $\mathbb{X}$ が $\boldsymbol{b}^p_\alpha(\lambda)$–representing sequence of order κ であるとは，$U^\kappa_{p,\mathbb{X}} : \ell^p \to \boldsymbol{b}^p_\alpha(\lambda)$ が有界な上への作用素であるときをいう．すなわち，

(1) $\{\eta_j\} \in \ell^p$ に対して, $U^\kappa_{p,\mathbb{X}}(\{\eta_j\}) \in \boldsymbol{b}^p_\alpha(\lambda)$．さらに，ある定数 $C > 0$ が存在して，$\|U^\kappa_{p,\mathbb{X}}(\{\eta_j\})\|_{L^p(\lambda)} \leq C\|\{\eta_j\}\|_{\ell^p}$ $\quad ({}^\forall\{\eta_j\} \in \ell^p)$ となる．

(2) $u \in \boldsymbol{b}^p_\alpha(\lambda)$ に対して, ある $\{\eta_j\} \in \ell^p$ が存在して，H 上で $u = U^\kappa_{p,\mathbb{X}}(\{\eta_j\})$ となる．

定義 1 を満たす点列を調べるために，α–parabolic cylinder を導入する．これは放物型 Bergman 空間上の補間列 ([3]) に関する研究で用いられており，我々の研究においても重要な役割を担う．$0 < \delta < 1$，$(x,t) \in H$ とする．

$$S^{(\alpha)}_\delta(x,t) := \left\{(y,s) \in H; |y - x| < \left(\frac{2\delta}{1-\delta^2}t\right)^{1/2\alpha}, \frac{1-\delta}{1+\delta}t < s < \frac{1+\delta}{1-\delta}t\right\}.$$

α–parabolic cylinder を用いて，次の点列を定義する．$0 < \delta < 1$，$\mathbb{X} = \{(x_j, t_j)\}$ を H 内の点列とする．$\mathbb{X}$ が α–放物型の意味で δ–separated であるとは，$S_\delta^{(\alpha)}(x_j, t_j) \cap S_\delta^{(\alpha)}(x_i, t_i) = \emptyset$ $(j \neq i)$ を満たすときをいう．また，次の 2 条件を満たすとき，点列 $\mathbb{X}$ は α–放物型の意味で δ–lattice であるとよぶ;

(i) $\cup_j S_\delta^{(\alpha)}(x_j, t_j) = H$.

(ii) ある $0 < \varepsilon < \delta$ に対して, $\{(x_j, t_j)\}$ が α–放物型の意味で ε–separated となる.

次の定理が主結果である．

定理 1． $0 < \alpha \leq 1$, $1 \leq p < \infty$, $\lambda > -1$, $\kappa > \frac{\lambda+1}{p}$ とする．そのとき, 次を満たす $0 < \delta_0 < 1$ が存在する; H 内の点列 $\mathbb{X}$ が，任意の $0 < \delta \leq \delta_0$ に対して α–放物型の意味で δ–lattice ならば，$\mathbb{X}$ は $\boldsymbol{b}_\alpha^p(\lambda)$–representing sequence となる.

定理 1 は，H 内の点列 $\mathbb{X}$ が $\boldsymbol{b}_\alpha^p(\lambda)$–representing sequence であるための十分条件を与えている．我々はさらなる研究として，$\boldsymbol{b}_\alpha^p(\lambda)$–representing sequence となるための必要十分条件に着目した．次を定義する．

定義 2． $0 < \alpha \leq 1$, $1 \leq p < \infty$, $\lambda > -1$, ν を実数とする．H 内の点列 $\mathbb{X} = \{(x_j, t_j)\}$ が $\boldsymbol{b}_\alpha^p(\lambda)$–sampling sequence of order ν であるとは，ある定数 $C > 0$ が存在して

$$C^{-1}\|u\|_{L^p(\lambda)}^p \leq \sum_j t_j^{\frac{n}{2\alpha}+\lambda+1+\nu p} |\mathcal{D}_t^\nu u(x_j, t_j)|^p \leq C\|u\|_{L^p(\lambda)}^p \qquad \left({}^\forall u \in \boldsymbol{b}_\alpha^p(\lambda)\right)$$

を満たすときをいう.

定理 2. $0 < \alpha \leq 1$, $1 < p < \infty$, $\lambda > -1$, q を p の共役指数, $\kappa > \frac{\lambda+1}{p}$ とする．さらに，$\mathbb{X}$ を H 内の点列とする．このとき, 次の条件が同値である ;

(1) $\mathbb{X}$: $\boldsymbol{b}_\alpha^p(\lambda)$–representing sequence of order κ.

(2) $\mathbb{X}$: $\boldsymbol{b}_\alpha^q(\lambda)$–sampling sequence of order $\kappa - (\lambda + 1)$.

References

[1] B. R. Choe and H. Yi, *Representations and Interpolations of Harmonic Bergman functions on half-spaces*, Nagoya Math. J., **151** (1998), 51-89.

[2] Y. Hishikawa, *Fractional calculus on parabolic Bergman spaces*, Hiroshima Math. J., **38** (2008), 471–488.

[3] M. Nishio, N. Suzuki, and M. Yamada, *Interpolating sequences of parabolic Bergman spaces*, Potential Anal., **36** (2008), 357–378.

[4] K. Zhu, *Evaluation operators on the Bergman space*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **117** (1995), 513–523.

三角関数のような性質を持つ関数

小島　彰太　(立教大)*

1. Introduction

目的は, 三角関数のような良い性質を持つ関数を $\mathbb{C}$ あるいは $\mathbb{C}_p$ 上で探すことである. まず次の関係式に注目する.

$$\sin x = \mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{4}{3^{2n}} x^3 \right).$$

ここで記号 $\mathcal{R}$ は

$$\mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{N} f_n(x) = f_1(f_2(\cdots f_N(x)\cdots)$$

のような関数の合成をあらわす記号とする。三角関数 $\sin z$ の類似物を得ようとしたとき, 上の表示から, より一般の多項式の無限合成で構成される関数について研究することはとても自然である. そして実際ある多項式の無限合成で構成される関数について次の性質を持つものが三角関数 $\sin x$ 以外で存在する.($\cos x$ でもなく.)

1. $\mathbb{C}$ 上で正則
2. $\mathbb{R}$ 上で有界
3. 全ての零点が実数
4. 極値が全て有理数となる.

これらの性質は全て三角関数 $\sin x$ が持つ性質である.

また, $\mathbb{C}_p$ 上で三角関数 $\sin x$ に対応する関数についても調べたい. $\mathbb{C}_p$ 上で三角関数 $\sin x$ を $\mathbb{C}$ 上定義されるベキ級数と同じもので定義すると, その収束域は小さくなり, p 進的に整関数とはならない. しかし $\mathbb{C}_p$ の三角関数 ($\sin x$) というからには少なくとも $\mathbb{C}_p$ で整関数になっていてほしい. さらにいうと上で述べた 1 から 4 の p 進版の性質をもっていてほしいと望む. そこで出発点を多項式の無限合成で構成される関数とし, その関数が実際どの程度よい性質を持つかを見ていきたい.

* e-mail: 09rc001d@rikkyo.ac.jp

Modulus of Local Connectivity of Julia Sets of Rational Maps

Masashi KISAKA (Kyoto University)[*1]
Mitsuhiro SHISHIKURA (Kyoto University)[*2]

Abstract

We discuss modulus of local connectivity of the Julia set J_f of a rational map f. We show that J_f is Hölder locally connected, if f is subhyperbolic and J_f is connected. Furthermore we show that J_f is linearly locally connected, if f is hyperbolic and J_f is connected. This gives a little more detailed information on local connectivity of Julia sets. The similar method gives a different proof of the following well-known fact: the Julia set J_f of a geometrically finite rational map f is locally connected, if it is connected.

Let f be a rational map on the Riemann sphere $\widehat{\mathbb{C}}$ and J_f, F_f be its Julia set and Fatou set, respectively. In this talk, we discuss local path connectivity of J_f. Here we summarize several notions of "connectivity".

Definition 0.1. A topological space X is called *path connected*, if for any given points $x,\ y \in X$ there exists a continuous map $\gamma : [0,1] \to X$ with $\gamma(0) = x$ and $\gamma(1) = y$. We call this γ a *path* which connects x and y. X is called *locally path connected* if every point $x \in X$ has arbitrary small path connected neighborhoods.

Remark 0.1. In general, if X is a compact metric space, then it is known that X is locally connected if and only if it is locally path connected. See [**Mi**, p.185, Lemma 17.17]. So discussing local path connectivity of J_f is equivalent to discussing local connectivity of J_f. Moreover, let X be a subset of $\widehat{\mathbb{C}}$. If X is locally path connected, then we can show the following:

Fact : *There exists a function $\eta(t)$ $(t > 0)$ with $\eta(t) > 0$ and $\eta(t) \to 0$ $(t \to 0)$ such that for any $x,\ y \in X$ there exists a path $\gamma \subset X$ from x to y with*

$$\mathrm{diam}_{\widehat{\mathbb{C}}}(\gamma) \leq \eta(d_{\widehat{\mathbb{C}}}(x,y)).$$

Here $\mathrm{diam}_{\widehat{\mathbb{C}}}(\cdot)$ and $d_{\widehat{\mathbb{C}}}(\cdot,\cdot)$ denote the spherical diameter and the spherical distance, respectively.

Definition 0.2. (1) We call the above $\eta(t)$ a *modulus of local connectivity of X* (See [**DH**]).
(2) If we can take $\eta(t) = Ct^{\alpha}$ for some constants $C > 0$ and $0 < \alpha < 1$, X is called *Hölder locally connected.*
(3) If we can take $\eta(t) = Ct$ for some constant $C > 0$, X is called *linearly locally connected.*

Remark 0.2. To be more precise, we should call $\eta(t)$ a modulus of local "path" connectivity of X in the above definition (1). But we call it just a modulus of

[*1] e-mail: `kisaka@math.h.kyoto-u.ac.jp`
[*2] e-mail: `mitsu@math.kyoto-u.ac.jp`

local connectivity, taking Remark 0.1 into consideration. We also omitted the word "path" in the definitions (2) and (3) above by the same reason. Douady and Hubbard already considered this $\eta(t)$ in [**DH**] and investigated a relationship between $\eta(t)$ and the Carathéodory theorem on boundary behavior of a Riemann map of the complement of a filled Julia set of a polynomial. They also called it a modulus of local connectivity.

When J_f is connected, it is well-known that local connectivity of J_f often follows from good dynamical properties of f. For example, J_f is locally connected if

(i) f is a hyperbolic polynomial (Douady and Hubbard, [**DH**]).

(ii) f is a subhyperbolic polynomial (Douady and Hubbard, [**DH**]).

(iii) f is a geometrically finite rational map (Tan and Yin, [**TY**]).

(iv) f is a semihyperbolic rational map (Yin, [**Y**]).

Here we say f is *hyperbolic* if all the critical points are attracted to attracting cycles under the iterate of f. f is called *subhyperbolic* if every critical point is either attracted to an attracting cycle or preperiodic.

In this paper we prove the following:

Theorem A. *Let f be a subhyperbolic rational map with connected Julia set J_f. Then for every α with*

$$0 < \alpha < \frac{\log\left(\inf_{z\in J_f}\|f'(z)\|_\rho\right)}{\log\left(\sup_{z\in J_f}\|f'(z)\|_{\widehat{\mathbb{C}}}\right)}$$

there exists a $C > 0$ such that $\eta(t) = Ct^\alpha$, where $\rho(z)|dz|$ is the orbifold metric on a neighborhood of J_f, i.e.,

$$\|f'(z)\|_\rho = \frac{\rho(f(z))|f'(z)|}{\rho(z)}.$$

That is, J_f is Hölder locally connected.

Theorem B. *Let f be a hyperbolic rational map with connected Julia set J_f. Then J_f is linearly locally connected.*

References

[**DH**] A. Douady and J. H. Hubbard, *Etude dynamique des polynômes complexes I & II*, Publ. Math. d'Orsay 84-02, 85-05, (1984-85).

[**Mi**] J. Milnor, "Dynamics in one complex variable" Third edition, Annals of Mathematics Studies, **160**, Princeton University Press, Princeton, NJ, (2006).

[**TY**] L. Tan and Y. Yin, *Local connectivity of the Julia set for geometrically finite rational maps*, Sci. China Ser. A **39**, (1996), no. 1, 39–47.

[**Y**] Y. Yin, *Julia sets of semi-hyperbolic rational maps*, (Chinese) Chinese Ann. Math. Ser. A **20**(1999), no. 5, 559–566; translation in Chinese J. Contemp. Math. **20**(1999), no. 4, 469–476.

Postcritical sets and saddle basic sets for Axiom A polynomial skew products

中根　静男　(東京工芸大学)*

$\mathbb{C}^2$ の polynomial skew product $f(z,w)=(p(z),q(z,w))$ に対し、J_p を p の Julia 集合、$q_z(w)=q(z,w)$, $C_z=\{w\in\mathbb{C};q_z'(w)=0\}$ とおき、J_p 上の危点集合を $C_{J_p}=\cup_{z\in J_p}\{z\}\times C_z$ とおく。DeMarco-Hruska [DH1] は C_{J_p} の集積点集合として、通常の集積点集合である

$$A(C_{J_p})=\cap_{N\geq 0}\overline{\cup_{n\geq N}f^n(C_{J_p})}$$

に加えて、point-wise accumulation set $A_{pt}(C_{J_p})$ と component-wise accumulation set $A_{cc}(C_{J_p})$ を

$$A_{pt}(C_{J_p})=\overline{\cup_{x\in C_{J_p}}A(x)},\quad A_{cc}(C_{J_p})=\overline{\cup_{C\in\mathcal{C}(C_{J_p})}A(C)}$$

と定義した。ここで $\mathcal{C}(C_{J_p})$ は C_{J_p} の連結成分の全体である。定義から

$$A_{pt}(C_{J_p})\subset A_{cc}(C_{J_p})\subset A(C_{J_p})$$

が従う。次の記号を用いる。

$$\begin{aligned}
K &= K(f)=\{(z,w)\in\mathbb{C}^2;\{f^k(z,w)\}_{k\geq 0}\text{ が有界}\},\\
K_z &= \{w\in\mathbb{C};(z,w)\in K\},\\
J_z &= \partial K_z,\\
\Lambda &: \quad J_p\times\mathbb{C}\text{ 内のサドル周期点全体の集合の閉包},\\
\Lambda_z &= \{w\in\mathbb{C};(z,w)\in\Lambda\},\\
W^s(\Lambda) &= \{y\in\mathbb{C}^2;f^k(y)\to\Lambda\},\\
W^u(\Lambda) &= \{y\in\mathbb{C}^2;\exists\text{ backward orbit }\hat{y}=(y_{-k})\to\Lambda\}.
\end{aligned}$$

以下では f は常に Axiom A と仮定する。このとき Λ は $\Lambda=\sqcup_{i=1}^m\Lambda_i$ と、saddle basic sets の disjoint union で表される。

Theorem A ([DH1])

$$A_{pt}(C_{J_p})=\Lambda,\quad A(C_{J_p})=W^u(\Lambda)\cap(J_p\times\mathbb{C}).$$

本研究は科研費(課題番号:21540203)の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 37F45, 37F30
キーワード：axiom A, saddle basic set

* 〒243-0297 神奈川県厚木市飯山 1583　東京工芸大学
e-mail: nakane@gen.t-kougei.ac.jp
web: http://www.gen.t-kougei.ac.jp/math/nakane/index.html

Theorem B ([DH1, DH2])

$$A_{cc}(C_{J_p}) = A_{pt}(C_{J_p}) \quad \Longrightarrow \quad \forall C \in \mathcal{C}(C_{J_p}),\ C \cap K = \emptyset \text{ または } C \subset K. \tag{1}$$

$$A_{pt}(C_{J_p}) = A(C_{J_p}) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{写像 } z \mapsto \Lambda_z \text{ は } J_p \text{ で連続 }. \tag{2}$$

$W^u(\Lambda) \cap W^s(\Lambda) = \Lambda$ の仮定の下で、

$$A_{pt}(C_{J_p}) = A(C_{J_p}) \Longleftrightarrow \text{写像 } z \mapsto K_z \text{ は } J_p \text{ で連続}. \tag{3}$$

ここで、

$$W^u(\Lambda) \cap W^s(\Lambda) = \Lambda \Longleftrightarrow 1 \leq \forall i \neq j \leq m,\ W^u(\Lambda_i) \cap W^s(\Lambda_j) = \emptyset.$$

であることに注意する。$C_0 = C_{J_p} \setminus K$, $C_i = C_{J_p} \cap W^s(\Lambda_i)$, $(1 \leq i \leq m)$ とおくと $C_{J_p} = \sqcup_{i=0}^m C_i$ が成り立つ。

Theorem 1

$$A_{cc}(C_{J_p}) = A_{pt}(C_{J_p}) \Longleftrightarrow \forall C \in \mathcal{C}(C_{J_p}),\ 0 \leq \exists i \leq m \ \text{ s.t. } \ C \subset C_i. \tag{4}$$

C_i の言葉では、(1) の右辺の条件は

$$\forall C \in \mathcal{C}(C_{J_p}), \quad C \subset C_0 \text{ または } C \subset \cup_{i=1}^m C_i.$$

と書けるので、$m = 1$ つまり Λ 自身が basic set ならば (4) の右辺の条件は (1) の右辺の条件と一致する. 一般には, (4) の条件は (1) の条件より強い。

次に、$A_{pt}(C_{J_p}) = A(C_{J_p})$ の C_i による特徴づけを与える。

Theorem 2 $\Lambda_0 = \emptyset$ とおくと、各 $i \geq 0$ に対し次が成り立つ。

$$A(C_i) = \Lambda_i \Longleftrightarrow C_i \text{ は閉集合 }.$$

したがって、

$$A_{pt}(C_{J_p}) = A(C_{J_p}) \Longleftrightarrow \forall i \geq 0,\ C_i \text{ は閉集合 }.$$

条件 (3) については、次が成り立つ。

Theorem 3 次の3条件は互いに同値。
(a) C_0 は閉集合,
(b) $A(C_{J_p}) = W^u(\Lambda) \cap W^s(\Lambda)$,
(c) 写像 $z \mapsto K_z$ は J_p で連続.

参考文献

[DH1] L. DeMarco & S. Hruska: Axiom A polynomial skew products of $\mathbb{C}^2$ and their postcritical sets. Ergod. Th. & Dynam. Sys. 28 (2008), pp. 1749–1779.

[DH2] L. DeMarco & S. Hruska: Corrections to "Axiom A polynomial skew products of $\mathbb{C}^2$ and their postcritical sets". Preprint 2009.

Carathéodory 擬体積形式の曲率について

菊田伸 (東北大学大学院理学研究科)

(sa6m15@math.tohoku.ac.jp)

n 次元複素単位球体 $\mathbb{B}^n$ 上の Poincaré 体積形式 v_1 は正則写像を体積減少写像にする. 一般の n 次元複素多様体 X 上にもそのような体積形式を構成しようと考えると, Carathéodory 擬体積形式

$$v_X^C := \sup\{f^*v_1\,;\,f\text{ は }X\text{ から }\mathbb{B}^n\text{ への正則写像}\}$$

が自然に現れる. この擬体積形式が定める測度に関して, 空でない開集合が正の測度を持つときに, X を Carathéodory 測度双曲多様体という. またこの擬体積形式自体が到る所正ならば, Carathéodory 強測度双曲多様体と呼ぶ.

一方で X 上に擬体積形式 v があると, 次の 2 つの曲率の概念が v に対して定義できる. まず 1 つは, v の逆 v^{-1} を X の標準束 K_X 上の特異 Hermite 計量と見なしたときのその曲率 current $\Theta_{v^{-1}} := \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log v$ である. もう 1 つは小林昭七氏の教科書 ([3]) にある v の曲率関数

$$K_v := -\frac{2^n}{(n+1)^n n!}\frac{(\Theta_{v^{-1}})^n}{v}$$

である. ただしこれは通常 v が微分可能なところでのみ考えている.

このとき, まずはじめに自然に挙がる問題の 1 つは Carathéodory 擬体積形式 v_X^C の曲率 $\Theta_{(v_X^C)^{-1}}$, $K_{v_X^C}$ についてである. ただし, $K_{v_X^C}$ についてはそのままでは定義できないので, $\Theta_{(v_X^C)^{-1}}$ は半正値 current, 特に Radon 測度係数であることに注目して, 次のように定義した:

定義 1. ([2]) Carathéodory 擬体積形式の曲率関数 $K_{v_X^C}$ を次で定義する：

$$K_{v_X^C} := -\frac{2^n}{(n+1)^n n!}\frac{(\Theta_{v^{-1}})^n_{\mathrm{ac}}}{v}$$

ただし, ac は Lebesgue 測度に関しての Lebesgue 分解の絶対連続部分である.

この定義の下で Carathéodory 擬体積形式の曲率に関して次を得た：

主定理 1. ([2])

1. $K_{v_X^C} \leq -1$, i.e. $\left(\dfrac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log v_X^C\right)^n_{\mathrm{ac}} \geq \dfrac{(n+1)^n n!}{(4\pi)^n}v_X^C.$
2. $\Theta_{(v_X^C)^{-1}} = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log v_X^C$ は $X \setminus \mathrm{Zero}(v_X^C)$ 上で狭義正である.

距離に関する双曲性を定める擬計量に対する同様の曲率の不等式が知られている ([5]). この定理はその Carathéodory 測度双曲性版である. しかし小林測度双曲性に対応する曲率の不等式はまだ得られていない. その核心は小林擬体積形式の曲率 current の半正値性が不明であることにある. これに関しては, 上智大学の辻元氏によって, 標準束が豊富なときには成り立つことが予想されている.

次に X が compact である場合を考える. このとき正則関数は定数のみであり, Carathéodory 擬体積形式は 0 となる. そこでその被覆空間 $\tilde{X}$ が Carathéodory 測度双曲的であるときに, 主定理 1 の X の標準束 K_X の正値性に関する応用を述べる. この状況で $\tilde{X}$ 上の Carathéodory 擬体積形式 $v^C_{\tilde{X}}$ は双正則不変なので, X 上で考えられることに注意する.

系 1. ([2]) X が $\tilde{X}$ の compact 商であるとき,

1. $\mathrm{vol}(K_X) := \overline{\lim_{m\to\infty}} n! \dfrac{h^0(X, \mathcal{O}(mK_X))}{m^n} \geq \dfrac{(n+1)^n n!}{(4\pi)^n} \mathrm{vol}_{v^C_{\tilde{X}}}(X)$
   となり, 特に $\tilde{X}$ が Carathéodory 測度双曲多様体ならば X は一般型である.
2. $\tilde{X}$ が Carathéodory 強測度双曲多様体ならば, X は K_X が豊富な射影代数多様体である.

証明は Boucksom-Popovici([4]) による $\mathrm{vol}(K_X)$ の current での積分表示から従う.

そして Carathéodory 測度双曲性と Bergman 核形式・計量の存在の関係について次を得た:

主定理 2. ([2]) compact 商を持つ Carathéodory 測度双曲多様体 $\tilde{X}$ に対して, $\tilde{X} \setminus \mathrm{Zero}(v^C_{\tilde{X}})$ において Bergman 核形式・計量が存在する.

証明は Chen([1]) による有界な強多重劣調和関数を持つ完備 Kähler 多様体上の Bergman 核・計量の存在定理から従う. よって, 次に考えるべき問題の 1 つは, Carathéodory 擬体積形式と Bergman 核形式の間の明確な不等式を見つけることである. 実際, 計量の場合にはこのような結果がある ([3]).

参考文献

[1] B.-Y. Chen, *Bergman completeness of hyperconvex manifolds*, Nagoya Math. J. **175** (2004), 165–170.

[2] S. Kikuta, *Carathéodory measure hyperbolicity and positivity of canonical bundles*, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[3] S. Kobayashi, *Hyperbolic complex spaces*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 318, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[4] D. Popovici, *Regularization of currents with mass control and singular Morse inequalities*, J. Differential Geom. **80** (2008), no. 2, 281–326.

[5] B. Wong, *On the holomorphic curvature of some intrinsic metrics*, Proc. Amer. Math. Soc. **65** (1977), no. 1, 57–61.

n次元射影空間の超曲面に対する第2主要定理

千葉　優作　(東京大学数理科学研究科)*

n次元の射影空間における正則曲線の性質を調べることは古くから考察されてきた問題である. そのような研究の手段としてNevanlinna理論があり, Nevanlinnaの第2主要定理を示すことにより正則曲線のさまざまな情報を得ることができる. 一般の位置にある超平面に対する第2主要定理は H. Cartan により示されており, さらに m-準一般の位置にある超平面に対する第2主要定理は E. I. Nochka [2] により証明された. Nochka による証明は非常に代数的なものであった. ここでは次の二つの結果を紹介する. 一つは n 次元射影空間における, 単純正規交叉な超曲面を対象とした第2主要定理について. もう一つは2次元射影空間における, m-準一般の位置にある超曲面に対する第2主要定理についてである.

第2主要定理の証明の鍵となるのは J. -P. Demailly [1] により導入された以下の概念である.

定義 1. X をn次元射影代数多様体, $\{U_i\}_{1\leq i\leq N}$ を X のアファイン開被覆とする. このとき各 U_i 上の接続 ∇_i を, 次を満たすものとする. すべての $1\leq i,j\leq N$ において, ある有理型1形式 $\alpha_{i,j}$, $\beta_{i,j}$ で, $U_i\cap U_j$ 上,

$$\nabla_i-\nabla_j=\alpha_{i,j}\otimes \mathrm{Id}_{TX}+\mathrm{Id}_{TX}\otimes\beta_{i,j}$$

が成り立つものが存在する. このとき接続の族 $\nabla=\{\nabla_i\}_{1\leq i\leq N}$ をX 上の *meromorphic partial projective connection* と呼ぶ.

正則写像 $f:\mathbb{C}\to X$ において, meromorphic partial projective connection $\nabla=\{\nabla_i\}_{1\leq i\leq N}$ によるロンスキアン

$$W_\nabla(f)=f'\wedge\nabla_{f'}f'\wedge\cdots\wedge\nabla_{f'}^{(n-1)}f'$$

を大域的に定義できる. そして対象とする X の因子に対して各接続 ∇_i が全測地的なとき, このロンスキアンによってある種の対数微分の補題を証明することが可能で, 第2主要定理が示されるのである.

定理 1. $s_0,\dots,s_n\in\mathbb{C}[X_0,\dots,X_n]$ を d次の斉次多項式で $\det(\partial s_i/\partial X_j)\neq 0$ とする. さらにある非負整数 $l_0,\dots,l_n$ があって, $X_0^{d-l_0}|s_0,\dots,X_n^{d-l_n}|s_n$ が成り立つとする. ここで滑らかな因子$\sigma_1,\dots,\sigma_q\in|\{s_0,\dots,s_n\}|$ で $\sigma_1+\cdots+\sigma_q$ が単純正規交叉なものとして, H を$\mathbb{P}^n$ の超平面束とすると, 正則写像 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{P}^n$ に対して

$$\left(q-\frac{n+1}{d}-\frac{n(n-1)}{2}(n+1+l_0+\cdots+l_n)\right)T_f(r,dH)\leq\sum_{1\leq i\leq q}N_n(r,f^*\sigma_i)+S_f(r)$$

* 〒153-8914　東京都目黒区駒場3-8-1
e-mail: yt11701@gmail.com

が成り立つ．ここで $S_f(r) \leq O(\log^+ T_f(r) + \log^+ r)\|$ であって，$\|$ は $\mathbb{R}$ 内の有限測度を除いて不等式が成り立つという意味である．

さて，$\pi : \widetilde{X} \to X$ を X の blowing-up とすると meromorphic partial projective connection は $\widetilde{X}$ 上に引き戻すことができる．m-準一般の位置にある超曲面を blowing-up により，超曲面が一般の位置にある場合に帰着できて次の定理を得る．

定理 2. $n = 2$ として定理1のような $s_0, s_1, s_2, l_0, l_1, l_2, \sigma_1, \ldots, \sigma_q$ をとる．どの二つの因子 σ_i, σ_j, $1 \leq i \neq j \leq q$ も，$\mathbb{P}^2$ の中で横断的に交わっているとする．$\mathbb{P}^2 \setminus \{x_1, \ldots, x_p\}$ で $\sigma_1, \ldots, \sigma_q$ が単純正規交叉となるような点 $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{P}^2$ をとる．E_j を点 x_j を中心とする *blowing-up* の例外因子とする．今，$H_0, H_1, H_2 \in \mathbb{P}^2$ を $x_0, \ldots, x_p$ を通らない，一般の位置にある任意の超平面とする．このとき正則写像 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^2$ として，また $\{x_1, \ldots, x_p\}$ で $\mathbb{P}^2$ を *blowing-up* したものへの f のリフトを $\widetilde{f}$ とすると，

$$\begin{aligned}\left(q - \frac{6 + l_0 + l_1 + l_2}{d}\right) T_f(r, H) \quad &\leq \quad \sum_{i=1}^{p} N_2(r, \widetilde{f}^* \widetilde{\sigma}_i) + m \sum_{i=1}^{p} N(r, \widetilde{f}^* E_i) \\ &\quad + \frac{m-1}{2} \sum_{i=1}^{3} N_2(r, f^* H_i) + S_f(r).\end{aligned}$$

が成り立つ．また $d = 1$ のときはよりよい評価が得られて，

$$\begin{aligned}(q - 3) T_f(r, H) \quad &\leq \quad \sum_{i=1}^{q} N_2(r, \widetilde{f}^* \widetilde{\sigma}_i) + m \sum_{i=1}^{p} N(r, \widetilde{f}^* E_i) \\ &\quad + \frac{m-1}{2} \sum_{i=1}^{3} N_2(r, f^* H_i) + S_f(r).\end{aligned}$$

が成り立つ．

これは Nochka による結果とは異なるものだが，m-準一般の位置にある超曲面に対する第2主要定理の幾何学的な証明を与えている．

参考文献

[1] J. -P. Demailly, Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials, Algebraic geometry Santa Cruz 1995, 285-360, Proc. Sympos. Pure Math., 62, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, MR 1492539, Zbl 0919.32014.

[2] E. I. Nochka, On the theory of meromorphic curves. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR 269 (1983), no. 3, 547–552.

A remark on C^1 subharmonicity of the harmonic spans for discontinuously moving Riemann surfaces

Sachiko Hamano (Fukushima University)

Smooth variations. In [1] and [2], we showed the variation formulas for L_1- (L_0-) constants $\alpha(t)$ ($\beta(t)$) of L_1- (L_0-) principal functions $p(t,z)$ ($q(t,z)$) on the **smoothly** moving planar Riemann surfaces $R(t)$ in a larger Riemann surface $\tilde{R}$ with $t \in B = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < \rho\}$ as follows:

$$(1)\quad \frac{\partial^2 \alpha(t)}{\partial t \partial \bar{t}} = \frac{1}{\pi} \int_{\partial R(t)} k_2(t,z) \left| \frac{\partial p(t,z)}{\partial z} \right|^2 ds_z + \frac{4}{\pi} \iint_{R(t)} \left| \frac{\partial^2 p(t,z)}{\partial \bar{t} \partial z} \right|^2 dxdy;$$

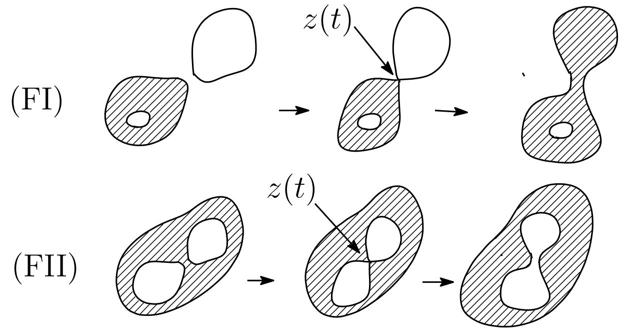
$$(2)\quad \frac{\partial^2 \beta(t)}{\partial t \partial \bar{t}} = -\frac{1}{\pi} \int_{\partial R(t)} k_2(t,z) \left| \frac{\partial q(t,z)}{\partial z} \right|^2 ds_z - \frac{4}{\pi} \iint_{R(t)} \left| \frac{\partial^2 q(t,z)}{\partial \bar{t} \partial z} \right|^2 dxdy.$$

Here $k_2(t,z)$ is the Levi curvature for $\partial\mathcal{R} = \bigcup_{t\in B}(t, \partial R(t))$ (cf: in [1]). These formulas imply that, *if the total space* $\mathcal{R} = \bigcup_{t\in B}(t, R(t))$ *is pseudoconvex in* $B \times \tilde{R}$*, then* $\alpha(t)$ *is subharmonic on* B*, while* $\beta(t)$ *is superharmonic on* B*.*

On the other hand, M. Nakai in [3] introduced the **harmonic span** $s(t) := \alpha(t) - \beta(t)$. Thus, if $\mathcal{R}$ is pseudoconvex, then $s(t)$ is subharmonic on B. This implies some results for the variation of Poincaré distances on $R(t)$ (see [2]).

To generalize these results, we shall consider the variation of arbitrary Riemann surfaces. Then we need the following consideration.

Non-smooth variations. We assume that $\partial\mathcal{R}$ is C^ω strictly pseudoconvex in $B \times \tilde{R}$. We study about discontinuous moving Riemann surfaces $\mathcal{R} : t \in B \to R(t)$ like below:



Lemma. *The harmonic span* $s(t)$ *is* C^1 *subharmonic on* B *for the variation* $\mathcal{R}$ *of type* (FI)*, but not for* $\mathcal{R}$ *of type* (FII)*, in general.*

Theorem. *Let* $\mathcal{R} = \bigcup_{t\in B}(t, R(t))$ *be a (finitely or infinitely sheeted) unramified domain over* $B \times \mathbb{C}_z$*. If* $\mathcal{R}$ *is pseudoconvex and each* $R(t)$*,* $t \in B$ *is simply connected, then* $s(t)$ *is subharmonic on* B*.*

Example. We give an example of type (FI). For each $t \in B = \{t \in \mathbb{C} \mid |t-1| < 1/4\}$, we consider the moving domains $R(t) = \{z \in \mathbb{P}_z \mid |z-1||z+1| < |t|\}$ in $\mathbb{P}_z$. Let denote by $R'(t)$ the connected component of $R(t)$ containing two points $\{1, \sqrt{\frac{3}{2}}\}$, $B' = B \cap \{|t| < 1\}$, $l = B \cap \{|t| = 1\}$, $B'' = B \cap \{|t| > 1\}$, and $\mathcal{R} = \bigcup_{t \in B}(t, R'(t))$. Then the harmonic span $s(t)$ for $(R'(t), 1, \sqrt{\frac{3}{2}})$ is written by

$$s(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}\sqrt{2|t|^2+1}-2|t|+1}{\sqrt{|t|(|t|+1)}}, & t \in B'' \\ \frac{1}{|t|}, & t \in B' \cup l. \end{cases}$$

The span $s(t)$ is, in fact, C^1 subharmonic on B (but is not C^2).

Counterexample. We give an example of type (FII). Let $B = \{t \in \mathbb{C} \mid |t-1| < 1/4\}$ and let $R(t) = \{z \in \mathbb{P}_z \mid |z-1||z+1| > |t|\}$ in $\mathbb{P}_z$. B', l, and B'' are the same as above. Then $R(t)$, $t \in B'$ is a domain in $\mathbb{P}_z$ bounded by two smooth closed curves $C_1(t)(\subset \{\Re z < 0\})$ and $C_2(t)(\subset \{\Re z > 0\})$, and $R(t)$, $t \in B''$ is a simply connected domain in $\mathbb{P}_z$ bounded by a smooth closed curve. $R(t)$ for $t \in l$ is a simply connected domain in $\mathbb{P}_z$ bounded by the lemniscate $\{|z-1||z+1| = 1\}$ passing through 0. Then for $a, b \in R(t)$, the L_1-constant $\alpha(t)$ for $(R(t), a, b)$ is

$$\alpha(t) = \begin{cases} 2g_a(t,b) - (\lambda_a(t) + \lambda_b(t)), \quad t \in B'' \cup l \\ 2g_a(t,b) - (\lambda_a(t) + \lambda_b(t)) - \dfrac{2\pi}{\|d\omega_1(t,z)\|^2_{R(t)}}(\omega_1(t,a) - \omega_1(t,b))^2, \quad t \in B'. \end{cases}$$

Here $g_a(t,z)(\lambda(t))$ is the Green function (Robin constant) for $(R(t), a)$; $\omega_1(t,z)$ is the harmonic measure for $(R(t), C_1(t))$, and $\|d\omega_1(t,z)\|^2_{R(t)}$ is the Dirichlet integral of $\omega_1(t,z)$ on $R(t)$. From this expression of $\alpha(t)$ we have:

(1) $\alpha(t)$ is continuous on B;

(2) $\alpha(t)$ is not of class C^1 on B. Precisely, $\alpha(t)$ is of class C^1 on $B'' \cup l$, and

$$\alpha(t) \leq 2g_a(t,b) - (\lambda_a(t) + \lambda_b(t)) - \frac{K^2}{3\pi}\sqrt[4]{1-|t|} \quad \text{on } B',$$

where $|\omega_1(t,a) - \omega_1(t,b)| \geq \exists K > 0$ on B';

(3) $\alpha(t)$ is subharmonic on $B \setminus l$ but is not on B.

These results for $\alpha(t)$ induce the same ones for $s(t)$ for $(R(t), a, b)$.

We note in [4] that the Robin constant $\lambda(t)$ holds the C^1 subharmonicity on B for the variations $\mathcal{R}$ of each type (FI), (FII).

References

[1] S. Hamano, *Variation formulas for L_1-principal functions and the application to simultaneous uniformization problem*, Michigan Math. J. **59** (2010). (to appear)

[2] S. Hamano, F. Maitani, H. Yamaguchi, *Variation formulas for principal functions (II) Applications to variation for harmonic spans.* (submitted)

[3] L. Sario and M. Nakai, *Classification theory of Riemann surfaces*, Springer-Verlag, 1970.

[4] H. Yamaguchi, *Variations of pseudoconvex domains over $\mathbb{C}^n$*, Michigan Math. J. **36** (1989), 415–457.

Stein 空間内の岡・Grauert の原理をみたす領域

阿部 誠*

D を被約複素空間，G を複素 Lie 群とする．G に値をもつ正則写像，$\mathscr{C}^\infty$ 級写像，連続写像の芽のなす D 上の群の層をそれぞれ $\mathscr{O}^G$，$(\mathscr{E}^\infty)^G$，$\mathscr{C}^G$ と書く．標準的な写像 $H^1(D,\mathscr{O}^G) \to H^1(D,\mathscr{C}^G)$ が単射のとき，D は G に関して岡・Grauert の原理をみたすという．

岡 [6] により，$\mathbb{C}^n$ の Stein 領域 D 上の正則 Cousin-II 分布は，もし連続な解をもてば，正則な解をもつ．さらに，Grauert [2] により，D が被約 Stein 空間のとき，任意の複素 Lie 群 G について，標準的な写像 $H^1(D,\mathscr{O}^G) \to H^1(D,\mathscr{C}^G)$ は全単射である．

付加的な条件の下で，被約複素空間 D の Stein 性が岡・Grauert の原理によって特徴付けられるかという問題に関して，いくつかの研究がなされている．特に，梶原・西原 [4] は，D が 2 次元 Stein 多様体 X の領域のとき，正の次元の複素 Lie 群 G が存在して，D が G に関して岡・Grauert の原理をみたせば，D は Stein であることを証明した．

定理 1 X を n 次元正規 Stein 空間，D を X の開集合とし，次の 2 条件を仮定する．

- $H^k(D,\mathscr{O}) = 0$ （$2 \leqq k \leqq n-1$）．[1]
- 正の次元の複素 Lie 群 G が存在して，$H^1(D,\mathscr{O}^G) \to H^1(D,(\mathscr{E}^\infty)^G)$ は準単射である．[2]

このとき，次のことが成り立つ．

- 任意の点 $x \in \partial D \setminus \mathrm{Sing}(X)$ において，D は局所 Stein である．
- D は $\mathrm{Sing}(X)$ に沿って除去可能な境界点をもたない．

系 2 X を n 次元 Stein 軌道体[3] とし，さらに $\mathrm{Sing}(X)$ は孤立集合であるとする．このとき，条件 $H^k(D,\mathscr{O}) = 0$（$2 \leqq k \leqq n-1$）をみたす X の開集合 D について，次の 4 条件は同値である．

(1) D は Stein である．
(2) 任意の複素 Lie 群 G に対して，$H^1(D,\mathscr{O}^G) \to H^1(D,\mathscr{C}^G)$ は全単射である．

---

* 〒 862-0976 熊本市九品寺 4-24-1 熊本大学大学院生命科学研究部（保健学系）

[1] さらに X が Cohen-Macaulay のとき，この条件は「$\dim H^k(D,\mathscr{O}) \leqq \aleph_0$（$2 \leqq k \leqq n-1$）」でもよい．

[2] 中立元の逆像が中立元に限るとき，準単射という．

[3] 任意の $x \in \mathrm{Sing}(X)$ が商特異点であるような複素空間 X を軌道体（orbifold）とよぶ．

(3) 正の次元の複素 Lie 群 G が存在して，$H^1(D,\mathscr{O}^G) \to H^1(D,\mathscr{C}^G)$ は単射である．
(4) 正の次元の複素 Lie 群 G が存在して，$H^1(D,\mathscr{O}^G) \to H^1(D,(\mathscr{E}^\infty)^G)$ は準単射である．

以下の系は，それぞれ，毛織 [5, Theorem]，梶原・西原 [4, Satz]，梶原・風間 [3, Theorem]，梶原・風間 [3, Corollary 2] の Stein 軌道体への一般化である．

系 **3** X を n 次元 Stein 軌道体とする．D を X の開集合とし，次の 2 条件を仮定する．

- $H^k(D,\mathscr{O}) = 0$ （$2 \leqq k \leqq n-1$）．
- 正の次元の複素 Lie 群 G が存在して，$H^1(D,\mathscr{O}^G) = 0$.

このとき，D は局所 Stein である．

系 **4** X を 2 次元 Stein 軌道体，D を X の開集合とする．このとき，系 2 の 4 条件は同値である．

系 **5** X を 2 次元 Stein 軌道体，D を X の開集合とする．このとき，正の次元の複素 Lie 群 G が存在して，$H^1(D,\mathscr{O}^G) = 0$ ならば，D は Stein である．

系 **6**（Abe [1]） X を 2 次元 Stein 軌道体，D を X の開集合，G を正の次元の可換複素 Lie 群 G とする．このとき，次の 2 条件は同値である．

(1) D は Stein かつ $H^2(D,\pi_1(G)) = 0$.
(2) $H^1(D,\mathscr{O}^G) = 0$.

参考文献

[1] M. Abe, *Domains in a two dimensional Stein space with quotient singularities,* 大島商船高等専門学校紀要 **21** (1988), 103–110.

[2] H. Grauert, *Analytische Faserungen über holomorph-volständigen Räumen,* Math. Ann. **135** (1958), 263–273.

[3] J. Kajiwara and H. Kazama, *Two dimensional complex manifold with vanishing cohomology set,* Math. Ann. **204** (1973), 1–12.

[4] J. Kajiwara and M. Nishihara, *Charakterisierung der Steinschen Teilgebieten durch Okasches Prinzip in zwei-dimensionaler Steinscher Mannigfaltigkeit,* Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A. Math. **33** (1979), 71–76.

[5] Y. Mori, *A complex manifold with vanishing cohomology sets,* Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A. Math. **26** (1972), 179–191.

[6] K. Oka, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. III – Deuxième problème de Cousin,* J. Sci. Hirosima Univ. **9** (1939), 7–19.

A Remark on the Embedding Theorem Associated to Complex Connections of Mixed Type

大沢健夫（名大多元数理）　多羅間大輔（京大情報）

故松島与三氏の最後の論文[M]に示唆されて、大沢は[O-1]において複素多様体間の写像で方向によって正則だったり反正則だったりするものを調べてみた。この問題は局所的には正則写像の問題と等価であるが、大域的に解けるかどうかは通常の $\bar{\partial}$ 方程式論を状況に応じて改変できるかどうかにかかっている。[O-1]では小平・中野式の調和積分論を改変することにより、然るべき曲率条件をみたす正則直線束の十分高いテンソルべきに標準直線束をかけたものの断面の連比として、射影空間への埋め込みを与える「正則・反正則」写像を構成した。然るに、この方法だと通常の埋め込み定理に比べて直線束の形が制限される。その点を多羅間が指摘し、検討の結果、今回の一般化となった。

M はコンパクトな複素多様体、(L,h) は M 上の正則なエルミート直線束とし、その曲率形式はいたるところ非退化で、かつ二つの半正形式 Θ_1 および Θ_2 で $\mathrm{rank}\,\Theta_1 + \mathrm{rank}\,\Theta_2 = \dim M$ をみたすものの差であり、さらに Θ_1 と Θ_2 はそれぞれ M 上の複素解析的葉層 F_1 および F_2 の接束を零化すると仮定する。このとき以下が成立する。

定理 (cf. [O-T])　上の仮定の下で、自然数 m_0 があり、$m \geq m_0$ をみたすすべての自然数 m に対し、直線束 L^m の C^∞ 級の断面 $s_0, s_1, \ldots, s_N$ で、 $\mathbf{CP}^N$ への写像 $(s_0 : s_1 : \cdots : s_N)$ が M 上いたるところ定義され、かつ F_2 に沿って正則、 F_1 に沿って反正則であるものが存在する。

より詳しくは、証明の概略につながるが、L^m の C^∞ 級の断面で、$\bar{\partial}$ 方程式の部分的な（ h に関する）複素共役として定まるある方程式の解になっているものが「十分多く」存在する。この方程式を便宜上 $\hat{\partial}$ 方程式と呼ぶ。然るべき境界条件をつけて $\hat{\partial}$ 方程式を解くことが問題になる。

局所的には $\hat{\partial}$方程式は $\bar{\partial}$方程式と等価であり、従ってL^2評価式が成立する。これを用いて大域的な解を逐次近似で極限として構成する所が今回の新しい所である。

この方法は $\bar{\partial}_b$ 方程式の C^k 級の大域解や、ラミネーション上の写像の構成にも応用が利く。特にレヴィ平坦な多様体の射影埋め込みに関する議論は以前のもの（たとえば[O-S])よりずっと簡明になり、現在大沢がそれを書いたもの[O-2]を投稿中である。

References

[M] Matsushima, Y., On the intermediate cohomology group of a holomorphic line bundle over a complex torus. *Osaka J. Math.* **16** (1979), no. 3, 617-631.

[O-1] Ohsawa, T., A generalization of Matsushima's embedding theorem. *J. Math. Kyoto Univ.* 48 (2008), no. 2, 383-388.

[O-2] _______, On the projectively embeddable complex-foliated structure. preprint.

[O-S] Ohsawa, T. and Sibony, N., Kähler identity on Levi flat manifolds and application to the embedding. *Nagoya Math. J.* 158 (2000), 87-93.

[O-T] Ohsawa, T. and Tarama, D., *to appear in OJM.*

A group-theoretic characterization of the direct product of a ball and punctured planes

Jisoo Byun (POSTECH)
Akio Kodama (Kanazawa Univ.)
Satoru Shimizu (Tohoku Univ.)

Let M be a complex manifold and $\mathrm{Aut}(M)$ the group of all holomorphic automorphisms of M equipped with the compact-open topology. Then one of the fundamental problems in complex geometric analysis is to determine the complex analytic structure of M by the topological group structure of $\mathrm{Aut}(M)$.

In the previous paper [2], by looking at some topological subgroups with Lie group structures of $\mathrm{Aut}(B^k \times \mathbf{C}^\ell)$, we succeeded in characterizing the space $B^k \times \mathbf{C}^\ell$ from the viewpoint of the holomorphic automorphism group, where B^k denotes the open unit ball in $\mathbf{C}^k$. In view of this, it would be naturally expected that the same conclusion is also valid for the space $B^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell$, where $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ the punctured plane. Recall that, in the proof of our characterization theorem of $B^k \times \mathbf{C}^\ell$ in [2], the crucial fact is that $B^k \times \mathbf{C}^\ell$ admits an effective continuous action of the direct product $U(k) \times U(\ell)$ of unitary groups by holomorphic automorphisms and this fact simplified many arguments especially in the case where $k + \ell \geq 3$. But, $B^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell$ no longer admits such an action of $U(k) \times U(\ell)$, except when $\ell = 1$. This causes many new difficulties to characterize the space $B^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell$.

The main purpose of this talk is to announce that we can overcome these difficulties and obtain the following results (cf. [3]):

Theorem. *Let M be a connected Stein manifold of dimension n. Assume that $\mathrm{Aut}(M)$ is isomorphic to $\mathrm{Aut}(B^k \times (\mathbf{C}^*)^{n-k})$ as topological groups for some integer k with $0 \leq k \leq n$. Then M is biholomorphically equivalent to $B^k \times (\mathbf{C}^*)^{n-k}$.*

Combining Riemann's extension theorem with the proof of [2, Corollary], we obtain the following fundamental fact:

Corollary. *For any two pairs* (k,ℓ) *and* (k',ℓ') *of non-negative integers, the groups* $\mathrm{Aut}(B^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell)$ *and* $\mathrm{Aut}(B^{k'} \times (\mathbf{C}^*)^{\ell'})$ *are isomorphic as topological groups if and only if* $(k,\ell) = (k',\ell')$.

The main idea of the proof of Theorem is as follows. Firstly, we realize M as a Reinhardt domain D in $\mathbf{C}^n$ by using the assumption of Theorem. Since M is a Stein manifold, the Reinhardt domain D is pseudoconvex. Secondly, using the pseudoconvexity of D, we list up all the possible cases where $\mathrm{Aut}(D)$ is isomorphic to $\mathrm{Aut}(B^k \times (\mathbf{C}^*)^{n-k})$ as topological groups. We essentially use here the assumption that M is Stein, because, if D is not pseudoconvex, then it is impossible to classify D explicitly in contrast with the argument in [1], where M is only holomorphically separable and admitting a smooth envelope of holomorphy. Finally, by comparing carefully the structure of suitable subgroups of $\mathrm{Aut}(B^k \times (\mathbf{C}^*)^{n-k})$ and $\mathrm{Aut}(D)$ that are isomorphic to each other under the given isomorphism Φ: $\mathrm{Aut}(B^k \times (\mathbf{C}^*)^{n-k}) \to \mathrm{Aut}(D)$, we eliminate all the possibilities except for the case where D is biholomorphically equivalent to the model domain $B^k \times (\mathbf{C}^*)^{n-k}$. As a typical example of this, we illustrate the following: Let Γ be a topological subgroup of $\mathrm{Aut}(B^k \times (\mathbf{C}^*)^{n-k})$ and put $\Lambda = \Phi(\Gamma)$. Let $C(\Gamma)$ be the centralizer of Γ and $Z(\Gamma)$ its commutator group in $\mathrm{Aut}(B^k \times (\mathbf{C}^*)^{n-k})$. Similarly, we denote by $C(\Lambda)$ and $Z(\Lambda)$ the subgroups of $\mathrm{Aut}(D)$ relative to Λ. Hence, $Z(\Gamma)$ and $Z(\Lambda)$ are isomorphic under the isomorphism Φ. With these notations, if one of the cases where D is not biholomorphically equivalent to $B^k \times (\mathbf{C}^*)^{n-k}$ occurs, then one can find a topological subgroup Γ of $\mathrm{Aut}(B^k \times (\mathbf{C}^*)^{n-k})$ such that $Z(\Gamma)$ is non-abelian, while $Z(\Lambda)$ is abelian, a contradiction. Making use of these kind of arguments, we obtain the conclusion of Theorem.

References: [1] A. Kodama and S. Shimizu, *A group-theoretic characterization of the space obtained by omitting the coordinate hyperplanes from the complex Euclidean space, II*, J. Math. Soc. Japan **58** (2006), 643–663.
[2] J. Byun, A. Kodama and S. Shimizu, *A group-theoretic characterization of the direct product of a ball and a Euclidean space*, Forum Math. **18** (2006), 983–1009. [3] J. Byun, A. Kodama and S. Shimizu, *A group-theoretic characterization of the direct product of a ball and punctured planes*, to appear in Tohoku Math. J.

VARIATION FORMULAS FOR PRINCIPAL FUNCTIONS

SACHIKO HAMANO (FUKUSHIMA UNIVERSITY)

1. Variation formulas of L_1 and L_0-constants with two logarithmic poles

A conformal mapping is a function which preserves angles. One of important results of complex analysis, the Riemann mapping theorem states that any non-empty simply connected domain in $\mathbb{C}$ (except for $\mathbb{C}$ itself) is conformally equivalent to the unit disk in $\mathbb{C}$. Then, P. Koebe [8] showed that a multiply connected domain D can be mapped onto a circular slit domain or a radial slit domain in $\mathbb{P}_w$. Precisely, let D be a domain in $\mathbb{C}_z$ such that the boundary $\partial D = \sum_{j=1}^{\nu} C_j$ consists of C^ω smooth closed curves and $D \ni 0, \xi$.

【Circular slit mapping】Consider the following conformal mapping $w = P(z)$ on D into $\mathbb{P}_w$ such that $P(0) = \infty$; $P(\xi) = 0$; $P(z) - \frac{1}{z}$ is holomorphic near $z = 0$, and $P(C_j)$, $j = 1, \dots, \nu$ are circular arcs centered at $w = 0$. Such mapping is uniquely determined. If we set $p(z) := \log |P(z)|$, then $p(z)$ is a unique real-valued function on $D \setminus \{0, \xi\}$ satisfying the following three conditions: (i) $p(z)$ has a pole $\log \frac{1}{|z|}$ at $z = 0$ normalized $\lim_{z\to 0}(p(z) - \log \frac{1}{|z|}) = 0$; (ii) $p(z)$ has a pole $\log |z - \xi|$ at $z = \xi$; (iii) $p(z)$ has the following boundary condition: on each C_j, $p(z) = c_j =$ constant and $\int_{C_j} \frac{\partial p(z)}{\partial n_z} ds_z = 0$.

【Radial slit mapping】Consider the following conformal mapping $w = Q(z)$ on D into $\mathbb{P}_w$ such that $Q(0) = \infty$; $Q(\xi) = 0$; $Q(z) - \frac{1}{z}$ is holomorphic near $z = 0$, and $Q(C_j)$, $j = 1, \dots, \nu$ are radial slits from center $w = 0$. Such mapping is uniquely determined. If we set $q(z) := \log |Q(z)|$, then $q(z)$ is a unique real-valued function on $D \setminus \{0, \xi\}$ satisfying the following three conditions: $q(z)$ satisfies the same conditions (i) and (ii) as $p(z)$, and $q(z)$ has the following boundary condition: on each C_j, $\frac{\partial q(z)}{\partial n_z} = 0$.

We call p and q the L_1- and the L_0-*principal function* with two logarithmic poles for $(D, 0, \xi)$, respectively. The constant terms $\alpha := \lim_{z\to\xi}(p(z) - \log |z - \xi|)$ and $\beta := \lim_{z\to\xi}(q(z) - \log |z - \xi|)$ are called the L_1- and the L_0-*constant* for $(D, 0, \xi)$ (see [1] and [11]).

Now let $B = \{t \in \mathbb{C} : |t| < \rho\}$ and let $\widetilde{\mathcal{R}} = \bigcup_{t\in B}(t, \widetilde{R}(t))$ be an unramified domain sheeted over $B \times \mathbb{C}_z$. For each $t \in B$, we correspond to smoothly moving Riemann surfaces $R(t)$ over $\mathbb{C}_z$. We denote the variation by $\mathcal{R} : t \in B \to R(t) \Subset \widetilde{R}(t)$. We say that $\mathcal{R}$ is *smooth variation* if the boundary $\partial R(t) = C_1(t) + \cdots + C_\nu(t)$ is C^ω smooth contours in $\widetilde{R}(t)$, $\partial \mathcal{R} = \bigcup_{t\in B}(t, \partial R(t))$

Key words and phrases. Riemann surface; Principal function; Span ; Pseudoconvexity.
This research is partially supported by JSPS Grant-in-Aid for Young Scientists (B) .

of $\mathcal{R}$ in $\widetilde{\mathcal{R}}$ is C^ω smooth, and each $R(t)$, $t \in B$ contains the origin 0. Let $\xi(t) \in R(t)$, $t \in B$ varies holomorphically in $\widetilde{R}(t)$ with $t \in B$. Then each $R(t)$, $t \in B$ admits the L_1-(resp. L_0-)principal function $p(t,z)$ (resp. $q(t,z)$) with two logarithmic poles for $(R(t), 0, \xi(t))$. Namely, both real-valued functions $p(t,z)$ and $q(t,z)$ are continuous on $\overline{R(t)}$ and harmonic on $R(t) \setminus \{0, \xi(t)\}$ with poles $\log \frac{1}{|z|}$ at $z=0$ and $\log|z-\xi(t)|$ at $z=\xi(t)$ normalized $\lim_{z\to 0}(p(t,z) - \log \frac{1}{|z|}) = \lim_{z\to 0}(q(t,z) - \log \frac{1}{|z|}) = 0$ at $z=0$, and $p(t,z)$ and $q(t,z)$ satisfy the following boundary conditions (L_1) and (L_0), respectively: for $j = 1, \ldots, \nu$,

$$(L_1) \quad p(t,z) = c_j(t) = \text{constant} \;\; \text{on } C_j(t) \quad \text{and} \quad \int_{C_j(t)} \frac{\partial p(t,z)}{\partial n_z} ds_z = 0\,;$$

$$(L_0) \quad \frac{\partial q(t,z)}{\partial n_z} = 0 \;\; \text{on } C_j(t).$$

Since $\partial R(t)$ in $\widetilde{R}(t)$ is of class C^ω, $p(t,z)$ and $q(t,z)$ can be harmonically extended to a neighborhood $V(t)$ of $\partial R(t)$ in $\widetilde{R}(t)$. We find a neighborhood $U_0(t)$ of $z=0$ such that

$$p(t,z) = \log \tfrac{1}{|z|} + h_0(t,z) \quad \text{on } U_0(t);$$
$$q(t,z) = \log \tfrac{1}{|z|} + \mathfrak{h}_0(t,z) \quad \text{on } U_0(t),$$

where $h_0(t,z)$ and $\mathfrak{h}_0(t,z)$ are harmonic for z on $U_0(t)$ such that

$$h_0(t,0) \equiv 0, \quad \mathfrak{h}_0(t,0) \equiv 0 \quad \text{on } B.$$

We also find a neighborhood $U_\xi(t)$ of $z=\xi(t)$ such that

$$p(t,z) = \log|z-\xi(t)| + \alpha(t) + h_\xi(t,z) \quad \text{on } U_\xi(t);$$
$$q(t,z) = \log|z-\xi(t)| + \beta(t) + \mathfrak{h}_\xi(t,z) \quad \text{on } U_\xi(t),$$

where $\alpha(t)$ and $\beta(t)$ are the constant terms, and $h_\xi(t,z)$ and $\mathfrak{h}_\xi(t,z)$ are harmonic for z on $U_\xi(t)$ such that

$$h_\xi(t,\xi(t)) \equiv 0, \quad \mathfrak{h}_\xi(t,\xi(t)) \equiv 0 \quad \text{on } B.$$

We call $\alpha(t)$ and $\beta(t)$ the L_1- and the L_0-*constant* for $(R(t), 0, \xi(t))$.

We showed the following variation formulas of the second order for them:

Lemma 1.1. *It holds for* $t \in B$ *that*

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \alpha(t)}{\partial t \partial \bar{t}} = \frac{1}{\pi} \int_{\partial R(t)} k_2(t,z) \left| \frac{\partial p(t,z)}{\partial z} \right|^2 ds_z + \frac{4}{\pi} \iint_{R(t)} \left| \frac{\partial^2 p(t,z)}{\partial \bar{t} \partial z} \right|^2 dxdy$$

and that, if each $R(t)$, $t \in B$ *is a* **planar** *Riemann surface, then*

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \beta(t)}{\partial t \partial \bar{t}} = -\frac{1}{\pi} \int_{\partial R(t)} k_2(t,z) \left| \frac{\partial q(t,z)}{\partial z} \right|^2 ds_z - \frac{4}{\pi} \iint_{R(t)} \left| \frac{\partial^2 q(t,z)}{\partial \bar{t} \partial z} \right|^2 dxdy.$$

Here

$$k_2(t,z) = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial \bar{t}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|^2 - 2\mathrm{Re}\left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{t} \partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \right\} + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \bar{z}} \right) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|^{-3}$$

on $\partial \mathcal{R}$, *where* φ *is a defining function of* $\partial \mathcal{R}$, *and* ds_z *is the arc length element of* $\partial R(t)$ *at* z.

We note that $k_2(t,z)$ does not depend on the choice of defining functions $\varphi(t,z)$ of $\partial\mathcal{R}$. The formulas (1) and (2) are showed in [4] and Hamano, Maitani and Yamaguchi [7], respectively. In order to prove the formula for $\beta(t)$, we have to add a new idea to the proof for $\alpha(t)$. In fact, the formula for $\alpha(t)$ does not concern to the genus of $R(t)$ but that for $\beta(t)$ concerns to the genus of $R(t)$ (see [7] for details). These variation formulas imply the following:

Theorem 1.2 ([4], [7]). *Under the same conditions in Lemma 1.1, if $\mathcal{R}$ is pseudoconvex in $\tilde{\mathcal{R}}$, then $\alpha(t)$ is a C^ω subharmonic function on B, while $\beta(t)$ is a C^ω superharmonic function on B.*

The superharmonicity of $\beta(t)$ in the above theorem does not hold without the assumption that each $R(t)$, $t \in B$ is planar, in general. The contrast between the subharmonicity of $\alpha(t)$ and the superharmonicity of $\beta(t)$ are unified with the notion of the harmonic span $s(t)$ for $(R(t), 0, \xi(t))$ in the next section.

Remark 1. For Lemma 1.1, we assumed that $\mathcal{R}$ is unramified over $B \times \mathbb{C}_z$. However, even if each $R(t)$, $t \in B$ has a finite number of branch points $\zeta_k(t)$, $k = 1, \ldots, m$ for $t \in B$ such that $\zeta_k(t)$ is a holomorphic function on B with $\zeta_k(t) \neq \zeta_l(t)$ $(k \neq l)$, $t \in B$, then Lemma 1.1 and hence Theorem 1.2 hold by the standard use of Nishimura [10].

Here, we shall introduce the earlier results: Under the same conditions for $\mathcal{R} = \bigcup_{t\in B}(t, R(t))$ in $\widetilde{\mathcal{R}}$ and $\mathcal{R} \supset B \times \{0\}$. Then each $R(t)$ for $t \in B$ carries the Green function $g(t,z)$ with a pole $\log\frac{1}{|z|}$ at $z = 0$ and the Robin constant $\lambda(t)$ for $(R(t), 0)$. Hadamard gave the the variation formula of the first order for $\lambda(t)$, and Maitani and Yamaguchi showed that the second order for $\lambda(t)$ as follows:

Fact ([9]). *It holds for $t \in B$ that*

$$\frac{\partial^2\lambda(t)}{\partial t\partial\bar{t}} = -\frac{1}{\pi}\int_{\partial R(t)} k_2(t,z)\left|\frac{\partial g(t,z)}{\partial z}\right|^2 ds_z - \frac{4}{\pi}\iint_{R(t)}\left|\frac{\partial^2 g(t,z)}{\partial\bar{t}\partial z}\right|^2 dxdy.$$

The variation formula in Lemma 1.1 is formally the same as that for the Robin constant $\lambda(t)$ in [9]. The essential difference of the proofs for $\alpha(t)$ and $\lambda(t)$ comes from the fact that principal functions are not defining functions of $\partial\mathcal{R}$ contrary to the case of the Green function $g(t,z)$.

It is known that a multiply connected domain D can be mapped onto a circle domain with concentric circular slits or one with radial slits in $\mathbb{C}_w$. This conformal mapping transforming D into these domains distinguish one of the boundary components of D, namely, the boundary component which is carried into the outer circumference. Let D be a domain in $\mathbb{C}_z$ such that the boundary $\partial D = \sum_{j=1}^{\nu} C_j$ consists of C^ω smooth closed curves and $D \ni 0$.

【Circular slit mapping】 Consider the following conformal mapping $w = P(z)$ on D into $\mathbb{C}_w$ such that $P(0) = \infty$, $P(z) - \log\frac{1}{|z|}$ is holomorphic near $z = 0$; the arbitrarily chosen boundary component C_1 of D map to a circle, and the others $P(C_j)$, $j = 2, \ldots, \nu$ are circular slits. Such mapping is uniquely determined. If we set $p(z) := \log|P(z)|$, then $p(z)$ is a unique real-valued function on $D \setminus \{0\}$ satisfying the following three conditions: (i) $p(z)$ has a pole $\log\frac{1}{|z|}$ at $z = 0$ normalized $\lim_{z\to 0}(p(z) - \log\frac{1}{z}\}) = 0$; (ii) $p(z) = 0$ on C_1; (iii) $p(z)$ has the

following boundary condition: on $C_j,\ j=2,\dots,\nu,\ p(z)=c_j=$ constant and $\int_{C_j}\frac{\partial p(z)}{\partial n_z}ds_z=0$.
【Radial slit mapping】 Consider the following conformal mapping $w=Q(z)$ on D into $\mathbb{C}_w$ such that $Q(0)=\infty$; $Q(z)-\log\frac{1}{|z|}$ is holomorphic near $z=0$; an arbitrary chosen boundary component C_1 map to a circle, and the others $Q(C_j)$, $j=2,\dots,\nu$ are radial slits. Such mapping is uniquely determined. If we set $q(z):=\log|Q(z)|$, then $q(z)$ is a unique real-valued function on $D\setminus\{0\}$ satisfying the following three conditions: $q(z)$ satisfies the same conditions (i) and (ii) as $p(z)$, and $q(z)$ has the following boundary condition: on $C_j,\ j=2,\dots,\nu,\ \frac{\partial q(z)}{\partial n_z}=0$.

We call p and q the L_1- and the L_0-principal function with a logarithmic pole for $(D,0,C_1)$. The constant terms $\alpha:=\lim_{z\to0}(p(z)-\log\frac{1}{|z|})$ and $\beta:=\lim_{z\to0}(q(z)-\log\frac{1}{|z|})$ are called L_1- and the L_0-constant for $(D,0,C_1)$, respectively.

Now we shall consider smoothly moving Riemann surfaces $R(t)$ with one complex parameter $t\in B$. Under the same conditions for the unramified domain $\mathcal{R}=\bigcup_{t\in B}(t,R(t))$ in $\widetilde{\mathcal{R}}$ over $B\times\mathbb{C}_z$ and $\partial R(t)=\sum_{j=1}^{\nu}C_j(t)$, we assume that $\mathcal{R}$ contains $B\times\{0\}$. Then each $R(t)$, $t\in B$ carries the L_1-(resp. L_0-)principal function $p(t,z)$ (resp. $q(t,z)$) with a pole $\log\frac{1}{|z|}$ for $(R(t),0,C_1(t))$, and L_1-(resp. L_0-)constant $\alpha(t)$ (resp. $\beta(t)$ for $(R(t),0,C_1(t))$, respectively.

Remark 2. We show in [4] the same variation formula of $\alpha(t)$ for $(R(t),0,C_1(t))$ as one of the Robin constant $\lambda(t)$ for $(R(t),0)$ in the above fact. Thus, *if $\mathcal{R}$ is pseudoconvex over $B\times\mathbb{C}_z$, then $\alpha(t)$ is C^ω superharmonic on B.* Hence the radius of the outer circle depending on the circular slit mapping with $t\in B$ is logarithmic superharmonic on B. In the theory of one complex variable, the circular slit and radial slit mapping have good correspondence. But the difference are appeared to the variation of radii of them, i.e., for L_0-constant $\beta(t)$ for $(R(t),0,C_1(t))$, the variation formula of the similar type does not hold. Moreover, there is a difference between L_0-constant with two logarithmic poles and one with a logarithmic pole and a distinguished boundary component. In fact, we give examples s.t. the radii of radial slit mappings are not logarithmic superharmonic nor logarithmic subharmonic on B nevertheless total space $\mathcal{R}$ is pseudoconvex in $B\times\mathbb{C}_z$:
(i) The radius of radial slit mapping is not logarithmic superharmonic on B: For $t\in B=\{|t|<\frac{1}{2}\}$, $R(t)=\{|z|<1\}\setminus\{|z-\frac{1}{2}|\le|t|\}$.
(ii) The radius of radial slit mapping is not logarithmic subharmonic on B: Let $\mathcal{R}=\bigcup_{t\in B}\{1<|z|<r(t)\}\setminus B\times(C_1\cup C_2)$, where $C_1=[\frac{1}{2},\frac{2}{3}]$, $C_2=[\frac{i}{2},\frac{2i}{3}]$ in $\mathbb{C}_z$, and $\log r(t)$ is superharmonic on B.

Application of Theorem 1.2. Let B be a simply connected domain in $\mathbb{C}_t$. Let $\pi:\mathcal{S}\to B$ be a holomorphic family of compact Riemann surfaces $S(t)=\pi^{-1}(t)$ over B such that each fiber $S(t)$ is of genus ≥2 and non-singular in $\mathcal{S}$. For a fixed $t\in B$, we consider the Schottky covering $\widetilde{S}(t)$ of each $S(t)$ (cf: p.266 in Ford [2], and p.241 in Ahlfors-Sario [1]). We denote by $\widetilde{\mathcal{S}}$ the total space of the variation: $t\in B\to\widetilde{S}(t)$, namely, $\widetilde{\mathcal{S}}=\bigcup_{t\in B}(t,\widetilde{S}(t))$. Then we have:

Theorem 1.3 ([4]). *The total space $\widetilde{\mathcal{S}}$ consisting of the Schottky covering $\widetilde{S}(t)$ of compact Riemann surfaces $S(t)$ with one complex parameter $t\in B$ is holomorphically uniformized to a univalent domain on $B\times\mathbb{P}^1$.*

Maitani and Yamaguchi [9] proved that, if $\mathcal{R} = \cup_{t\in B}(t, R(t))$ is an unramified pseudoconvex domain over $B \times \mathbb{C}_z$ such that each $R(t)$, $t \in B$ is planar and parabolic, then $\mathcal{R}$ is holomorphically uniformizable to a domain in $B \times \mathbb{P}^1$. Since the Schottky covering $\widetilde{S}(t)$ of a compact Riemann surface $S(t)$ of genus $g \geq 2$ is planar but not parabolic, their theorem and method cannot be applicable to our case. In [13], Yamaguchi wrote a resumé about Theorem 1.3 with a rough sketch of the proof. However his sketch had a "gap". Then I bridge the gap by establishing the variation formula for L_1-principal function (in Lemma 1.1), and obtain Theorem 1.3.

2. Variation formula for harmonic spans.

We shall recall some notions studied in the theory of one complex variable. Let R be a domain in $\mathbb{C}_z$ bounded by a finite number of closed curves C_j, $j = 1, \ldots, \nu$. For simplicity we assume $0 \in R$. For a point $\xi \neq 0$, we consider the L_1- and L_0-principal functions $p(z)$ and $q(z)$ with two logarithmic poles for $(R, 0, \xi)$ and the L_1- and L_0-constant α and β for $(R, 0, \xi)$. In the function theory of one complex variable, Nakai and Sario introduced in [11]

$$s(R) = \alpha - \beta$$

as the harmonic span $s(R)$ for $(R, 0, \xi)$. The harmonic span has the following geometric meaning: Let $\mathcal{S}(R)$ be the set of all univalent functions f on R s.t.

$$f(z) - 1/z \text{ is holomorphic near } z = 0,$$
$$f(z) = c_1(z - \xi) + c_2(z - \xi)^2 + \ldots \qquad \text{near} \quad z = \xi.$$

Then the circular slit mapping $P(z)$ and the radial slit mapping $Q(z)$ induced by $p(z)$ and $q(z)$, respectively, are the elements of $\mathcal{S}(R)$. We draw a Jordan curve l in R from ξ to 0. For $f \in \mathcal{S}(R)$, the image $f(l)$ in $\mathbb{P}_w$ is a simple curve from 0 to ∞, so that each branch $W = \log f(z)$ on $R \setminus l$ is single-valued. We consider the Euclidean area $E_{\log}(f)$ of the complement of $\log f(R \setminus l)$, which is independent of the choice of branches. For example, if f is extended to be of class C^1 on ∂R, then $E_{\log}(f) = -\sum_{j=1}^{\nu} \int_{C_j} \log|f(z)|\, d\arg f(z)$. Let us set

$$E_{\log}(R) = \sup\{E_{\log}(f) : f \in \mathcal{S}(R)\}.$$

We proved in [7] that $H(z) := \sqrt{P(z)Q(z)} \in S(\mathcal{R})$ and

$$E_{\log}(H) = E_{\log}(R) = \frac{\pi}{2} s(R).$$

We shall return to the variation of Riemann surfaces. Let $\mathcal{R} : t \in B \to R(t)$ be smooth variation in the beginning of Section 1. For a fixed $t \in B$, we denote by $p(t, z)$ (resp. $q(t, z)$) the L_1-(resp. L_0-) principal function, by $\alpha(t)$ (resp. $\beta(t)$) the L_1-(resp. L_0-) constant for $(R(t), 0, \xi(t))$, respectively, and by $s(t)$ the harmonic span for $(R(t), 0, \xi(t))$. Then combining the formulas (1) and (2) in Lemma 1.1, we immediately have the following:

Lemma 2.1. *Assume that $R(t)$, $t \in B$ is planar. Then it holds that*

$$\frac{\partial^2 s(t)}{\partial t \partial \bar{t}} = \frac{1}{\pi} \int_{\partial R(t)} k_2(t, z) \left(\left| \frac{\partial p(t, z)}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial q(t, z)}{\partial z} \right|^2 \right) ds_z + \frac{4}{\pi} \iint_{R(t)} \left(\left| \frac{\partial^2 p(t, z)}{\partial \bar{t} \partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 q(t, z)}{\partial \bar{t} \partial z} \right|^2 \right) dxdy.$$

This implies a kind of subharmonicity of the length $d(t)$ of Poincaré geodesic curve $\ell(t)$ connecting two points 0 and $\xi(t)$ on $R(t)$ which moves continuously with $t \in B$.

Corollary 2.2. *Under the same condition in Lemma 2.1, we assume that $\mathcal{R}$ is pseudoconvex over $B \times \mathbb{C}_z$ and each $R(t)$, $t \in B$ is planar. Then*

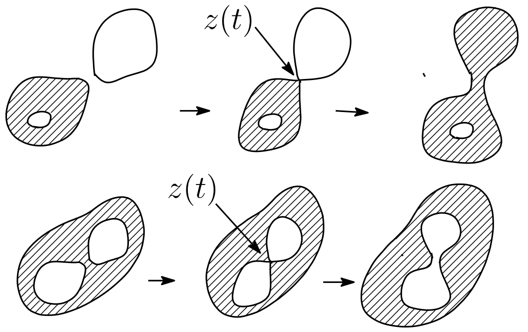
1. *The harmonic span $s(t)$ for $(R(t), 0, \xi(t))$ is subharmonic on B.*
2. *Assume that each $R(t)$, $t \in B$ is simply connected. Let $\xi_k : t \in B \to \xi_k(t) \in R(t)$, $k = 1, 2$ be two holomorphic sections of $\mathcal{R}$ over B and denote by $d(t)$ the Poincaré distance between $\xi_1(t)$ and $\xi_2(t)$ on $R(t)$. Then*
$$\log\cosh d(t)$$
is subharmonic on B.

To generalize the above results, we shall consider the variation of arbitrary Riemann surfaces. Then we need the following consideration in [6].

Non-smooth variations. We assume that $\partial\mathcal{R}$ is C^ω strictly pseudoconvex in $B \times \tilde{R}$. Then we study about discontinuous moving Riemann surfaces like below:

(FI)

(FII)



Lemma 2.3. *The harmonic span $s(t)$ is C^1 subharmonic on B for the variation $\mathcal{R}$ of type (FI), but not for $\mathcal{R}$ of type (FII), in general.*

We note that if the variation $\mathcal{R}$ is exhausted by a sequence of pseudoconvex domains $\{\mathcal{R}_n\}$ whose boundary $\partial\mathcal{R}_n$ is of type (FI), then the subharmonicity of harmonic span $s(t)$ holds on B.

Theorem 2.4 ([7]). *Let $\mathcal{R} = \bigcup_{t \in B}(t, R(t))$ be a (finitely or infinitely sheeted) unramified pseudoconvex domain over $B \times \mathbb{C}_z$ such that each $R(t)$, $t \in B$ is simply connected. Let ξ_k, $k = 1, 2$ be two holomorphic sections of $\mathcal{R}$ over B and denote by $d(t)$ the Poincaré distance between $\xi_1(t)$ and $\xi_2(t)$ on $R(t)$. Then* $\log\cosh d(t)$ *is subharmonic on B.*

Examples. We shall give simple examples of Theorem 1.2, and Corollary 2.2. Let $B = \{|t| < \rho\}$ be a disk in $\mathbb{C}_t$. For each $t \in B$, let $R(t)$ be a disk $\{|z| < r(t)\}$ in $\mathbb{C}_z$, where $\log r(t)$ is a superharmonic function on B. If we set the Hartogs domain of disks $\mathcal{R} = \bigcup_{t \in B}(t, R(t))$, then $\mathcal{R}$ is a pseudoconvex domain in $B \times \mathbb{C}_z$. Assume that there exists a holomorphic section $\xi : t \in B \mapsto \xi(t) (\neq 0) \in R(t)$.

[**Example of Theorem 1.2**.] We consider the following function:
$$P(t, z) = -\frac{1}{\xi(t)} \cdot \frac{r(t)^2 (z - \xi(t))}{z\,(r(t)^2 - \bar{\xi}(t) z)} \qquad \text{on } R(t).$$

Then P is a circular slit mapping on $R(t)$ with zero at $z = \xi(t)$ and pole at $z = 0$. The L_1-constant $\alpha(t)$ for $(R(t), 0, \xi(t))$ is written into

$$\alpha(t) = \log\left|\frac{\partial P}{\partial z}(t, \xi(t))\right| \quad = \quad \log\left|-\frac{1}{\xi(t)^2}\cdot\frac{r(t)^2}{r(t)^2 - |\xi(t)|^2}\right|.$$

Since $\xi(t)$ is holomorphic on B and since $\log r(t)$ is superharmonic on B, $\log\frac{|\xi(t)|}{r(t)}$ is subharmonic on B, so is the second term in the right-hand side. Hence, $\alpha(t)$ is subharmonic on B.

We set $\theta(t) = \arg \xi(t)$. Then

$$Q(t, z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{r(t)e^{i\theta(t)}} + \frac{r(t)e^{i\theta(t)}}{z}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{|\xi(t)|}{r(t)} + \frac{r(t)}{|\xi(t)|}\right)$$

is the radial slit mapping on $R(t)$ with zero at $z = \xi(t)$ and pole at $z = 0$. The L_0-constant $\beta(t)$ for $(R(t), 0, \xi(t))$ is written into

$$\beta(t) = \log\left|\frac{\partial Q}{\partial z}(t, \xi(t))\right| = -2\log|\xi(t)| + \log\left[1 - \left(\frac{|\xi(t)|}{r(t)}\right)^2\right],$$

which is certainly superharmonic on B.

[**Example of 1. in Corollary 2.2.**] We also see that the harmonic span $s(t) = \alpha(t) - \beta(t)$ for $(R(t), 0, \xi(t))$ is

$$s(t) = \log\frac{1}{1 - \left(\frac{|\xi(t)|}{r(t)}\right)^2}, \tag{2.1}$$

which is subharmonic on B.

[**Example of 2. in Corollary 2.2.**] Let $\xi_1(t)$ be the zero section of $\mathcal{R}$ and $\xi_2(t) = \xi(t)$ in the above examples. Then we have

$$d(t) = \log\frac{1 + \frac{|\xi(t)|}{r(t)}}{1 - \frac{|\xi(t)|}{r(t)}}.$$

By (2.1) we have the following relation:

$$s(t) = 4\log\cosh d(t),$$

so that $\log\cosh d(t)$ is subharmonic on B.

3. Variation formulas of L_1 and L_0 principal functions with a pole of $\Re\{\frac{1}{z}\}$

It is known that a multiply connected domain D can be mapped onto a vertical slit domain or a horizontal slit domain in $\mathbb{P}_w$. Let D be a domain in $\mathbb{C}_z$ such that the boundary $\partial D = \sum_{j=1}^{\nu} C_j$ consists of C^ω smooth closed curves and $D \ni 0$.

【Vertical slit mapping】Consider the following conformal mapping $w = P(z)$ on D into $\mathbb{P}_w$ such that $P(0) = \infty$; $P(z) - \frac{1}{z}$ is holomorphic near $z = 0$, and $P(C_j)$, $j = 1, \ldots, \nu$ are slits parallel to the v-axis. Such mapping is uniquely determined. If we set $p(z) := \Re\{P(z)\}$, then $p(z)$ is a unique real-valued function on $D \setminus \{0\}$ satisfying the following two conditions: (i) $p(z)$ has a pole $\Re\{\frac{1}{z}\}$ at

$z = 0$ normalized $\lim_{z\to 0}(p(z) - \Re\{\frac{1}{z}\}) = 0$; (ii) $p(z)$ has the following boundary condition: on each C_j, $p(z) = c_j =$ constant and $\int_{C_j} \frac{\partial p(z)}{\partial n_z} ds_z = 0$.

【Horizontal slit mapping】 Consider the following conformal mapping $w = Q(z)$ on D into $\mathbb{P}_w$ such that $Q(0) = \infty$; $Q(z) - \frac{1}{z}$ is holomorphic near $z = 0$, and $Q(C_j)$, $j = 1, \ldots, \nu$ are slits parallel to the u-axis. Such mapping is uniquely determined. If we set $q(z) := \Re\{Q(z)\}$, then $q(z)$ is a unique real-valued function on $D \setminus \{0\}$ satisfying the following two conditions: $q(z)$ satisfies the same condition (i) as $p(z)$, and $q(z)$ has the following boundary condition: on each C_j, $\frac{\partial q(z)}{\partial n_z} = 0$.

We call p and q the L_1- and the L_0-*principal function* with a pole of $\Re\{\frac{1}{z}\}$ for $(D, 0)$, respectively.

Now we shall consider smoothly moving Riemann surfaces $R(t)$ with one complex parameter $t \in B$. Under the same conditions for the unramified domain $\mathcal{R} = \bigcup_{t\in B}(t, R(t))$ in $\widetilde{\mathcal{R}}$ over $B \times \mathbb{C}_z$ and $\partial R(t) = \sum_{j=1}^{\nu} C_j(t)$, we assume that $\mathcal{R}$ contains $B \times \{0\}$. Then each $R(t)$, $t \in B$ carries the L_1-(resp. L_0-)principal function $p(t, z)$ (resp. $q(t, z)$) with a pole $\Re\{\frac{1}{z}\}$ for $(R(t), 0)$. Namely, both real-valued functions $p(t, z)$ and $q(t, z)$ are continuous on $\overline{R(t)}$ and harmonic on $R(t) \setminus 0$ with a pole $\Re\{\frac{1}{z}\}$ at $z = 0$ and normalized $\lim_{z\to 0}(p(t, z) - \Re\{\frac{1}{z}\}) = \lim_{z\to 0}(q(t, z) - \Re\{\frac{1}{z}\}) = 0$ at $z = 0$, and $p(t, z)$ and $q(t, z)$ satisfy the following boundary condition (L_1) and (L_0), respectively: on each $C_j(t)$, $j = 1, \ldots, \nu$,

$$(L_1) \quad p(t, z) = \text{const.} c_j(t) \text{ and } \int_{C_j(t)} \frac{\partial p(t, z)}{\partial n_z} ds_z = 0; \quad (L_0) \quad \frac{\partial q(t, z)}{\partial n_z} = 0.$$

Since $\partial R(t)$ in $\widetilde{R}(t)$ is of class C^ω, $p(t, z)$ and $q(t, z)$ can be harmonically extended to a neighborhood $V(t)$ of $\partial R(t)$ in $\widetilde{R}(t)$. We find a neighborhood $U_0(t)$ of $z = 0$ such that

$$p(t, z) = \Re\{\frac{1}{z}\} + 0 + \Re\{\sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) z^n\}, \quad q(t, z) = \Re\{\frac{1}{z}\} + 0 + \Re\{\sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) z^n\} \quad \text{on } U_0(t).$$

We call $\Re\{A_1(t)\}$ (resp. $\Re\{B_1(t)\}$) L_1-(resp. L_0-)constant for $(R(t), 0)$. Then we prove the following variation formulas in [5]:

Lemma 3.1. *For each $t \in B$,*

$$\frac{\partial^2 \Re\{A_1(t)\}}{\partial t \partial \bar{t}} = -\frac{1}{\pi} \int_{\partial D(t)} k_2(t, z) \left| \frac{\partial p(t, z)}{\partial z} \right|^2 ds_z - \frac{4}{\pi} \iint_{D(t)} \left| \frac{\partial^2 p(t, z)}{\partial \bar{t} \partial z} \right|^2 dx\, dy$$

and that, if each $R(t), t \in B$ is planar Riemann surface, then

$$\frac{\partial^2 \Re\{B_1(t)\}}{\partial t \partial \bar{t}} = \frac{1}{\pi} \int_{\partial D(t)} k_2(t, z) \left| \frac{\partial q(t, z)}{\partial z} \right|^2 ds_z + \frac{4}{\pi} \iint_{D(t)} \left| \frac{\partial^2 q(t, z)}{\partial \bar{t} \partial z} \right|^2 dx\, dy.$$

Theorem 3.2. *Under the same conditions in Lemma 3.1, if $\mathcal{R}$ is pseudoconvex in $\tilde{\mathcal{R}}$, then L_1-constant for $(R(t), 0)$ is C^ω superharmonic on B, while L_0-constant for $(R(t), 0)$ is C^ω subharmonic on B.*

The subharmonicity of $\Re\{B_1(t)\}$ in the above theorem does not hold without the assumption that each $R(t)$, $t \in B$ is planar. The contrast between the subharmonicity of $\Re\{B_1(t)\}$ and the superharmonicity of $\Re\{A_1(t)\}$ are unified with the notion of the analytic span $S(t)$ for $(R(t), 0)$ in the next section.

4. Variation formula for analytic spans

For an arbitrary fixed $t \in B$, each $R(t)$ carries the analytic span $S(t)$ with respect to $(R(t), 0)$ introduced by M. Schiffer [12] which is defined by

$$S(t) := B_1(t) - A_1(t).$$

It is known that $B_1(t) - A_1(t)$ is real positive. The analytic span $S(t)$ has the following geometric meaning: $\mathcal{U}(R(t))$ is the set of all univalent fns f on $R(t)$ s.t.

$$f(t, z) = \frac{1}{z} + 0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) z^n \qquad \text{near } z = 0.$$

M. Schiffer showed that $\frac{\pi}{2} S(t)$ represents the maximum of the Euclidean area $E(f)$ of the complement of $f(R(t))$ in $\mathbb{P}_w$ of all $f \in \mathcal{U}(R(t))$. Precisely, we put $P(t,z) = p(t,z) + ip^*(t,z)$ and $Q(t,z) = q(t,z) + iq^*(t,z)$, so that $P(t,z)$ (resp. $Q(t,z)$) is a vertical slit (resp. horizontal) mapping on $R(t)$. Then

$$H(t,z) = \frac{P(t,z) + Q(t,z)}{2}$$

belongs to $\mathcal{U}(R(t))$; $H(t,\cdot)$ maximizes $E(f)$ among $f \in \mathcal{U}(R(t))$, and $E(H(t,\cdot)) = \frac{\pi}{2} S(t)$. Then we have the following variation formula:

Lemma 4.1. *Let $\mathcal{R}$ be a smooth variation such that each $R(t)$, $t \in B$ is planar Riemann surface. Then it holds for $t \in B$ that*

$$\frac{\partial^2 s(t)}{\partial t \partial \bar{t}} = \frac{1}{\pi} \int_{\partial R(t)} k_2(t,z) \left(\left| \frac{\partial p(t,z)}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial q(t,z)}{\partial z} \right|^2 \right) ds_z + \frac{4}{\pi} \iint_{R(t)} \left(\left| \frac{\partial^2 p(t,z)}{\partial \bar{t} \partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 q(t,z)}{\partial \bar{t} \partial z} \right|^2 \right) dx dy.$$

This formula is same as the formula in Lemma 2.1. However the contents are different in several complex variables as follows:

Theorem 4.2 ([5])**.** *Under the same condition in Lemma 4.1, if $\mathcal{R}$ is a pseudoconvex domain in $\widetilde{\mathcal{R}}$, then $\log S(t)$ is subharmonic on B.*

Applications of Theorem 4.2.

Corollary 4.3 (Uniformity)**.** *Let $\mathcal{R} = \bigcup_{t \in B}(t, R(t))$ be a (finitely or infinitely sheeted) unramified pseudoconvex domain over $B \times \mathbb{C}_z$. Assume that $\mathcal{R}$ is exhausted by a sequence of pseudoconvex domains $\{\mathcal{R}_n\}$ whose boundary $\partial \mathcal{R}_n$ is of type (FI). We set $e := \{t \in B : D(t) \text{ is of class } O_{AD}\}$. If e is of positive logarithmic capacity in $\mathbb{C}_t$, then each fiber $R(t)$, $t \in B$ is of class O_{AD}.*

Corollary 4.4. *Let R be a polynomially convex domain in $\mathbb{C}^2$ with smooth boundary. Fix $z \in D$ and consider the set $\mathcal{L}(z)$ of all complex lines ℓ passing through the point z in $\mathbb{C}^2$. We denote by $S_\ell(t)$ the maximum of the Euclidean area of the complement of $f(R(t))$ in $\mathbb{C}_w$ of all $f \in \mathcal{U}(D \cap \ell)$, and define*

$$\mathcal{S}(z) := \max\{S_\ell(z) : \ \ell \in \mathcal{L}(z)\}.$$

Then $\mathcal{S}(z)$ is a logarithmic plurisubharmonic exhaustion function on D.

Examples. We shall give the simple examples of Theorems 3.2 and 4.2. Let $\mathcal{R} : t \in B \to R(t)$ be a variation of disks $R(t) = \{|z| < r(t)\}$, $t \in B$ such that $\log r(t)$ is superharmonic on B, so that $\mathcal{R}$ is pseudoconvex on $B \times \mathbb{C}_z$.

[Example of Theorem 3.2] We shall note that the mapping $z \mapsto w = \frac{1}{2}(\frac{1}{z} - z)$ is a vertical slit mapping on $\{|z| < 1\}$ whose image is $\mathbb{P}^1 \setminus [-i, i]$. It follows that

$$w = P(t,z) = \frac{2}{r(t)}\,\frac{1}{2}\left(\frac{r(t)}{z} - \frac{z}{r(t)}\right) = \frac{1}{z} - \frac{z}{r(t)^2}$$

is a vertical slit mapping on $R(t)$ whose image is $\mathbb{P}^1 \setminus [-\frac{2i}{r(t)}, \frac{2i}{r(t)}]$. Thus we see that $\Re\{A_1(t)\} = -\frac{1}{r(t)^2} < 0$ and is superharmonic on B. Let us set $w_1 = \frac{z}{R(t)}$, $w_2 = J(w_1) = \frac{1}{2}(w_1 + \frac{1}{w_1})$, $w_3 = \frac{2}{R(t)} w_2$. Then the three composite function

$$w = Q(t,z) := \frac{1}{z} + \frac{z}{r(t)^2} \quad \text{on} \quad R(t)$$

is a horizontal slit mapping on $R(t)$ whose image is $\mathbb{P}^1 \setminus [\frac{-2}{r(t)}, \frac{2}{r(t)}]$. Thus we see that $\Re\{B_1(t)\} = \frac{1}{r(t)^2} > 0$ and surely is subharmonic on B.

[Example of Theorem 4.2] Consequently, we have $\frac{\pi S(t)}{2} = \frac{\pi(B_1(t) - A_1(t))}{2} = \frac{\pi}{r(t)^2} > 0$ on B. Hence $\log S(t) = \log \pi - 2 \log r(t)$, which surely is subharmonic on B. Further, we consider the maximizing function

$$H(t,z) := \frac{1}{2}(P(t,z) + Q(t,z)) = \frac{1}{2}\left\{(\frac{1}{z} - \frac{z}{R(t)^2}) + (\frac{1}{z} + \frac{z}{R(t)^2})\right\} = \frac{1}{z}.$$

Thus, we see that the complement of $F(t, R(t))$ in $\mathbb{P}_w$ is equal to $\{|w| \leq \frac{1}{r(t)}\}$, so that it is convex and its area is $\frac{\pi}{r(t)^2}$ which is certainly equal to $S(t)$.

References

[1] L. Ahlfors and L. Sario, *Riemann surfaces*, Princeton Mathematical Series, no. 26 Princeton Univ. Press, Princeton, 1960.

[2] L. R. Ford, *Automorphic functions*, Chelsea Pub. Co., New York, 1972.

[3] S. Hamano, *Rigidity of Bergman length on Riemann surfaces under pseudoconvexity*, Complex Analysis and its Applications, OCAMI Stud., no. 2 (2007), 191–194.

[4] S. Hamano, *Variation formulas for L_1-principal functions and application to the simultaneous uniformization problem*, Michigan Math. J. **59** (2010). (to appear)

[5] S. Hamano, *Variation formulas for principal functions (III) Applications to variation for analytic spans.* (submitted)

[6] S. Hamano, *A remark on C^1 subharmonicity of the harmonic spans $s(t)$ for discontinuously moving Riemann surfaces.* (submitted)

[7] S. Hamano, F. Maitani and H. Yamaguchi, *Variation formulas for principal functions (II) -Applications to variation for harmonic spans.* (submitted)

[8] P. Koebe, *Abhandlungen zur Theorie de konformen Abbildung.IV*, Math. Z. **2** (1918), no. 1-2, 198–236.

[9] F. Maitani and H. Yamaguchi, *Variation of Bergman metrics on Riemann surfaces*, Math. Ann. **330** (2004), 477–489.

[10] Y. Nishimura, *Immersion analytique d'une famille de surfaces de Riemann ouvertes*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **14** (1978), no. 3, 643–654.

[11] L. Sario and M. Nakai, *Classification theory of Riemann surfaces,* Die Grundlehren der mathemacischen Wissenschaften, no. 164, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1970.

[12] M. Schiffer, *The kernel function of an orthonormal system*, Duke M. J. **13** (1946), 529-540.

[13] H. Yamaguchi, *Variations de surfaces de Riemann*, C. R. Acad. Sci. Paris. A-B **286** (1978), no. 23, A1121–A1124.

Department of Mathematics, Faculty of Human Development and Culture, Fukushima University

E-mail address: hamano@fukushima-u.ac.jp

函数論分科会委員会委員
投票用紙

以下の委員候補者（２０１１年４月から２０１３年３月まで任期２年）のうち適任と思われる者に ○，不適任と思われる者に × を付して下さい．一括信任（不信任）の場合は該当欄に御記入下さい．

	一　括　信　任
	奥山　裕介
	本田　竜広
	山田　雅博

任期中の委員は，相川弘明，石崎克也，小森洋平，宍倉光広，下村哲，高山茂晴，辻元，増本誠，米田力生， 山ノ井克俊，中西敏浩 です．他に適任と思われる方がいましたら，２名以内ご推薦下さい．ただし，規則により， 上田哲生，小櫃邦夫，鈴木紀明，濱田英隆は被推薦者になれません．

なお，投票は学会開催中に函数論分科会会場，それ以降は１０月１日必着で

〒６９０−８５０４　松江市西川津町１０６０
島根大学総合理工学部数理・情報システム学科
中西　敏浩
(函数論分科会連絡責任評議員)

宛に郵送してください．