日 本 数 学 会

２００９年度　秋季総合分科会

函 数 論 分 科 会

講演アブストラクト

２００９年 ９月

於　大 阪 大 学

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
   函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする．

2. 委員会の任務
   (a) 函数論分科会評議員候補者を選出する．
   (b) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦．
   (c) 科研費基盤研究（審査区分（1））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼．
   (d) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる．
   (e) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する．
   (f) 分科会の行事 (たとえば，シンポジウムの開催等) について決定する．
   (g) 次期委員会委員候補者の推薦．
   (h) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する．

3. 委員会の構成及び委員の選出・任期
   (a) 委員の定数は特に定めないが 10 名程度をもって構成する．必要に応じ追加，削減できる．
   (b) 委員の任期は春季学会から２年間とする．再任は妨げないが，原則として再々任は認めない．
   (c) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う．
      i. 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する．その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する．
      ii. 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する．

4. 委員会の開催及び議決
   (a) 委員会は評議員が召集する．
   (b) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する．
   (c) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する．必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる．
   (d) 案件の議決は投票によってはならない．決定できない時は懸案事項として次回に繰越す．緊急事項については評議員に処置を一任する．

5. 函数論分科会委員会における評議員の任務
   (a) 委員会の司会をする．
   (b) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する．
   (c) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する．
   (d) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する．

付 則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する．
付 則　この規則の改正は，1996 年 8 月 1 日より施行する．

函数論分科会

9月26日(土) 第II会場

9:00 ~ 12:00

1	黒木和雄 (近畿大総合理工)# 尾和重義 (近畿大理工)	Subordination properties for special integral operators	10
2	早味俊夫 (近畿大総合理工)# 尾和重義 (近畿大理工)	Hankel determinant for p-valently starlike and convex functions of order α	10
3	白石　将 (近畿大総合理工)# 尾和重義 (近畿大理工)	Starlikeness of order β for second-order differential inequalities	5
4	小橋　広 (近畿大総合理工)# 尾和重義 (近畿大理工)	Notes on radius problems of certain univalent functions	5
5	下田　穣 (近畿大総合理工)# 尾和重義 (近畿大理工)	Notes on radius properties of certain univalent functions	5
6	釘田和幸 (近畿大総合理工)# 黒木和雄 (近畿大総合理工) 尾和重義 (近畿大理工)	(α,δ)-neighborhoods for certain analytic functions	5
7	濱井健成 (近畿大総合理工)# 早味俊夫 (近畿大総合理工) 尾和重義 (近畿大理工)	Notes on starlike functions of complex order	5
8	西本勝之 (デカルト出版)*	N-fractional calculus of some functions, which have a root sign	10
9	S.-D. Lin (Chung Yuan Christ. Univ.)* S.-T. Tu (Chung Yuan Christ. Univ.) D.-K. Chyan (Hwa Hsia Inst. of Tech.) 西本勝之 (デカルト出版)	N-fractional calculus of functions $\left(\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt[m]{z-b}}-c}-d\right)^2$ $(m,n\in \mathbf{Z}^+)$	10
10	戸田暢茂 *	On the defect relation of holomorphic curves for moving targets	15
11	R. Halburd (UCL)# R. Korhonen (Univ. of Helsinki) 藤解和也 (金沢大理工)	Holomorphic curves with shift-invariant hyperplane preimages	15
12	志賀啓成 (東工大)* 宮地秀樹 (阪大理)	Holonomies and the slope inequalities of Lefschetz fibrations	15
13	宮地秀樹 (阪大理)* D. Šarić (CUNY)	The earthquake measure map is a homeomorphism	15
14	後藤　亨 (防衛大)*	コンパクト Riemann 面上の 2 点に対する Weierstrass ギャップ集合と Wronski 行列	15
15	中井三留 (名工大*)* 瀬川重男 (大同大) 多田俊政 (大同大)	植林面上の特異調和関数	15

14:15 ~ 16:30

16	堀田一敬 (東北大情報)#	Ruscheweyh's univalence criterion and quasiconformal extensions	15
17	稲生啓行 (京大理)#	局所解析的共役の拡張について	15

iii 函 数 論

15:40 ∼ 16:40 特別講演

石 井 豊 (九 大 数 理)* 群作用を用いてジュリア集合を記述する

Subordination properties for special integral operators

Kazuo Kuroki (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{U})$ denote the class of functions $f(z)$ analytic in the open unit disk

$$\mathbf{U} = \{z : z \in \mathbb{C} \ \text{ and } \ |z| < 1\}.$$

For a positive integer n and $a \in \mathbb{C}$, let

$$\mathcal{H}[a,n] = \left\{f(z) \in \mathcal{H} : f(z) = a + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots\right\},$$

with $\mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H}[0,1]$. Also, we define the class $\mathcal{A}_n$ of normalized analytic functions $f(z)$ as

$$\mathcal{A}_n = \left\{f(z) \in \mathcal{H} : f(z) = z + a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \cdots\right\},$$

with $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$.

We also introduce the familiar principle of differential subordinations between analytic functions. Let $f(z)$ and $g(z)$ be members of the class $\mathcal{H}$. Then the function $f(z)$ is said to be subordinate to $g(z)$ in $\mathbf{U}$, written by

$$f(z) \prec g(z) \qquad (z \in \mathbf{U}),$$

if there exists a function $w(z)$ analytic in $\mathbf{U}$, with $w(0) = 0$ and $|w(z)| < 1$, and such that

$$f(z) = g\big(w(z)\big) \qquad (z \in \mathbf{U}).$$

If $g(z)$ is univalent in $\mathbf{U}$, then $f(z) \prec g(z)$ if and only if $f(0) = g(0)$ and $f(\mathbf{U}) \subset g(\mathbf{U})$.

For the function $F(z) \in \mathcal{A}_n$, Miller and Mocanu [1] proved the **Integral Existence Theorem** concerning the existence and analyticity of a general integral operator of the form

$$\mathrm{I}[F](z) = \left\{\frac{\beta+\gamma}{z^{\gamma}\psi(z)} \int_0^z \big(F(t)\big)^{\alpha} \varphi(t) t^{\delta-1}\, dt\right\}^{\frac{1}{\beta}},$$

where α, β, γ and δ are complex constants, and $\varphi(z)$, $\psi(z) \in \mathcal{H}[1,n]$. This operator was introduced by Miller, Mocanu and Reade [2].

In the present talk, by giving some conditions in the Integral Existence Theorem, we derive special Integral Existence Theorem below.

Lemma 1 *Let $\varphi(z) \in \mathcal{H}[1,n]$, with $\varphi(z) \neq 0$ in* $\mathbf{U}$. *Also, let α, β and δ be complex numbers with $\beta = \alpha + \delta$ and* $\mathrm{Re}\,(\alpha+\delta) > 0$. *Moreover, let $F(z) \in \mathcal{A}_n$ and suppose that*

$$P(z) \equiv \alpha \frac{zF'(z)}{F(z)} + \frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)} + \delta \in \mathcal{H}[\beta, n]$$

satisfies $\mathrm{Re}\,P(z) > 0 \quad (z \in \mathbf{U})$. *If $f(z)$ is defined by*

$$f(z) = \left\{ \beta \int_0^z (F(t))^{\alpha} \varphi(t) t^{\delta-1}\, dt \right\}^{\frac{1}{\beta}} = z + b_{n+1} z^{n+1} + \cdots ,$$

then $f(z) \in \mathcal{A}_n$, and satisfies

$$\frac{f(z)}{z} \neq 0 \quad \textit{and} \quad \mathrm{Re}\left\{ \beta \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0$$

for $z \in \mathbf{U}$.

Applying the above lemma, we discuss the analyticity and univalency of the functions defined by the following special integral operator

$$\tilde{\mathbf{I}}[F](z) = \left\{ \beta \int_0^z (F(t))^{\alpha} \varphi(t) t^{\delta-1}\, dt \right\}^{\frac{1}{\beta}}$$

Further, by making use of several lemmas often used in the theory of differential subordinations, we deduce a subordination criterion as follows.

Theorem 2 *Let α, β and δ be complex numbers with $\beta = \alpha + \delta$ and* $\mathrm{Re}(\alpha+\delta) > 0$. *Also, let $F(z) \in \mathcal{A}_n$, $\varphi(z) \in \mathcal{H}[1,n]$ with $\varphi(z) \neq 0$ in* $\mathbf{U}$, *and suppose that*

$$P(z) \equiv \alpha \frac{zF'(z)}{F(z)} + \frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)} + \delta \in \mathcal{H}[\beta, n]$$

satisfies $\mathrm{Re}\,P(z) > 0 \quad (z \in \mathbf{U})$. *If $f(z)$ is analytic in* $\mathbf{U}$ *with $f(0) = 0$ and satisfies the following differential subordination*

$$(f(z))^{\frac{\beta-1}{\beta}} (zf'(z))^{\frac{1}{\beta}} \prec \left\{ (F(z))^{\alpha} \varphi(z) z^{\delta} \right\}^{\frac{1}{\beta}} \qquad (z \in \mathbf{U}),$$

then

$$f(z) \prec \left\{ \beta \int_0^z (F(t))^{\alpha} \varphi(t) t^{\delta-1}\, dt \right\}^{\frac{1}{\beta}} \qquad (z \in \mathbf{U}).$$

In addition, we observe some subordination criteria concerning several integral operators which can be obtained from our main theorem.

References

[1] S. S. Miller, P. T. Mocanu, *Classes of univalent integral operators*, J. Math. Anal. Appl. **157** (1991), 147–165.

[2] S. S. Miller, P. T. Mocanu and M. O. Reade, *Starlike integral operators*, Pacific J. Math. **79** (1978), 157–168.

Hankel determinant for p-valently starlike and convex functions of order α

Toshio Hayami (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}_p$ denote the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n \quad (p \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\})$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbf{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

If $f(z) \in \mathcal{A}_p$ satisfies the following condition

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha \quad (z \in \mathbf{U})$$

for some α $(0 \leqq \alpha < p)$, then $f(z)$ is said to be p-valently starlike of order α in $\mathbf{U}$. We denote by $\mathcal{S}_p^*(\alpha)$ the subclass of $\mathcal{A}_p$ consisting of functions $f(z)$ which are p-valently starlike of order α in $\mathbf{U}$.

Similarly, we say that $f(z)$ belongs to the class $\mathcal{K}_p(\alpha)$ of p-valently convex functions of order α in $\mathbf{U}$ if $f(z) \in \mathcal{A}_p$ satisfies the following inequality

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha \quad (z \in \mathbf{U})$$

for some α $(0 \leqq \alpha < p)$.

Example 1

$$f(z) = \frac{z^p}{(1-z)^{2(p-\alpha)}} \in \mathcal{S}_p^*(\alpha)$$

and

$$f(z) = z^p {}_2F_1(2(p-\alpha), p; p+1; z) \in \mathcal{K}_p(\alpha),$$

where ${}_2F_1(a, b; c; z)$ reprensents the Hypergeometric function.

In the present talk, we discuss the upper bounds of the functionals $|a_{p+2} - \mu a_{p+1}^2|$ and $|a_{p+1}a_{p+3} - \mu a_{p+2}^2|$, where μ is some real number, for functions $f(z) \in \mathcal{S}_p^*(\alpha)$ or $\mathcal{K}_p(\alpha)$, respectively.

The following theorems are enumerated as the results.

Theorem 1 *If $f(z) \in \mathcal{S}_p^*(\alpha)$, then*

$$|a_{p+2} - \mu a_{p+1}^2| \leqq \begin{cases} (p-\alpha)\{(2p+1-2\alpha) - 4(p-\alpha)\mu\} & \left(\mu \leqq \frac{1}{2}\right) \\ p-\alpha & \left(\frac{1}{2} \leqq \mu \leqq \frac{p+1-\alpha}{2(p-\alpha)}\right) \\ (p-\alpha)\{4(p-\alpha)\mu - (2p+1-2\alpha)\} & \left(\mu \geqq \frac{p+1-\alpha}{2(p-\alpha)}\right) \end{cases}$$

$$\textit{with equality for } f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^p}{(1-z^2)^{p-\alpha}} & \left(\frac{1}{2} \leqq \mu \leqq \frac{p+1-\alpha}{2(p-\alpha)}\right) \\ \dfrac{z^p}{(1-z)^{2(p-\alpha)}} & \left(\mu \leqq \frac{1}{2} \text{ or } \mu \geqq \frac{p+1-\alpha}{2(p-\alpha)}\right) \end{cases}$$

Theorem 2 *If $f(z) \in \mathcal{K}_p(\alpha)$, then*

$$|a_{p+2} - \mu a_{p+1}^2| \leqq \begin{cases} \dfrac{p(p-\alpha)\{(2p+1-2\alpha)(p+1)^2 - 4(p-\alpha)p(p+2)\mu\}}{(p+1)^2(p+2)} & \left(\mu \leqq \frac{(p+1)^2}{2p(p+2)}\right) \\ \dfrac{p(p-\alpha)}{p+2} & \left(\frac{(p+1)^2}{2p(p+2)} \leqq \mu \leqq \frac{(p+1)^2(p+1-\alpha)}{2p(p+2)(p-\alpha)}\right) \\ \dfrac{p(p-\alpha)\{4(p-\alpha)p(p+2)\mu - (2p+1-2\alpha)(p+1)^2\}}{(p+1)^2(p+2)} & \left(\mu \geqq \frac{(p+1)^2(p+1-\alpha)}{2p(p+2)(p-\alpha)}\right) \end{cases}$$

$$\textit{with equality for } f(z) = \begin{cases} z^p {}_2F_1\left(\frac{p}{2}, p-\alpha; 1+\frac{p}{2}; z^2\right) & \left(\frac{(p+1)^2}{2p(p+2)} \leqq \mu \leqq \frac{(p+1)^2(p+1-\alpha)}{2p(p+2)(p-\alpha)}\right) \\ z^p {}_2F_1(2(p-\alpha), p; p+1; z) & \left(\mu \leqq \frac{(p+1)^2}{2p(p+2)} \text{ or } \mu \geqq \frac{(p+1)^2(p+1-\alpha)}{2p(p+2)(p-\alpha)}\right) \end{cases}$$

References

[1] U. Grenander and G. Szegö, *Toeplitz Forms and their Applications*, Univ. of California Press, Berkeley and Los Angeles, (1958).

[2] A. Jenteng, S. A. Halim and M. Darus, *Hankel determinant for starlike and convex functions*, Int. Journal of Math. Anal. 1(2007), 619-625.

[3] J. W. Noonan and D. K. Thomas, *On the second Hankel determinant of areally mean p-valent functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **223**(2) (1976), 337-346.

[4] Ch. Pommerenke, *Univalent Functions*, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen, (1975).

Starlikeness of order β for second-order differential inequalities

Hitoshi Shiraishi (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}_n$ denote the class of functions

$$f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} \dots \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

that are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, so that $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ and $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$. We denote by $\mathcal{S}$ the subclass of $\mathcal{A}_n$ consisting of univalent functions $f(z)$ in $\mathbb{U}$. Let $\mathcal{S}^*(\alpha)$ be defined by

$$\mathcal{S}^*(\alpha) = \left\{ f(z) \in \mathcal{A}_n : \mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha,\ 0 \leqq {}^{\exists}\alpha < 1 \right\}.$$

We denote by $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}^*(0)$. Also, let $\mathcal{C}(\alpha)$ be

$$\mathcal{C}(\alpha) = \left\{ f(z) \in \mathcal{A}_n : \mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{g(z)}\right) > \alpha,\ 0 \leqq {}^{\exists}\alpha < 1,\ {}^{\exists}g(z) \in \mathcal{S}^* \right\}$$

We also denote by $\mathcal{C} = \mathcal{C}(0)$.

Lemma 1 *Let the function $w(z)$ defined by*

$$w(z) = a_n z^n + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} \dots \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

be analytic in $\mathbb{U}$ with $w(0) = 0$. If $|w(z)|$ attains its maximum value on the circle $|z| = r$ at a point $z_0 \in \mathbb{U}$, then there exists a real number $k \geqq n$ such that

$$z_0 w'(z_0) = k w(z_0) \text{ and } \mathrm{Re}\left(\frac{z_0 w''(z_0)}{w'(z_0)}\right) + 1 \geqq k.$$

Theorem 2 *If $f(z) \in \mathcal{A}_n$ satisfies*

$$\left| zf''(z) - \alpha\left(f'(z) - \frac{f(z)}{z}\right)\right| < \frac{(1-\beta)n(n+1-\alpha)}{n+1-\beta} \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some complex $\mathrm{Re}(\alpha) < n+1$ and $0 \leqq \beta < 1$, then

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| < 1 - \beta \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

so that $f(z) \in \mathcal{S}^*(\beta)$.

Theorem 3 *If $f(z) \in \mathcal{A}_n$ satisfies*

$$|zf''(z) - \alpha(f'(z)-1)| < (1-\beta)|n-\alpha| \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some complex α with $\mathrm{Re}(\alpha) < n$ and some real $0 \leqq \beta < 1$, then

$$|f'(z) - 1| < 1 - \beta \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

This means that $f(z) \in \mathcal{C}(\beta)$.

Theorem 4 *If $f(z) \in \mathcal{A}_n$ satisfies*

$$|zf''(z) - \alpha(f'(z)-1)| < \beta|n-\alpha| \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some complex α with $\mathrm{Re}(\alpha) < n$ and some real $0 < \beta \leqq \frac{1}{2}$, or

$$|zf''(z) - \alpha(f'(z)-1)| < (1-\beta)|n-\alpha| \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some complex α with $\mathrm{Re}(\alpha) < n$ and some real $\frac{1}{2} \leqq \beta < 1$, then we have

$$\left|\frac{1}{f'(z)} - \frac{1}{2\beta}\right| < \frac{1}{2\beta} \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

which implies that $f(z) \in \mathcal{C}(\beta)$.

Theorem 5 *If $f(z) \in \mathcal{A}_n$ satisfies*

$$\left|\alpha\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right) + \beta\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| < \frac{1}{2}|\alpha + \beta(n+1)| \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some real $0 < \gamma \leqq \frac{1}{2}$ and for some complex α and β such that $\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) > 0$, or

$$\left|\alpha\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right) + \beta\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| < (1-\gamma)|\alpha + \beta(n+1)| \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some real $\frac{1}{2} \leqq \gamma < 1$ and for some complex α and β such that $\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) > 0$, then we have

$$\left|\frac{f(z)}{zf'(z)} - \frac{1}{2\gamma}\right| < \frac{1}{2\gamma} \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

which shows that $f(z) \in \mathcal{S}^*(\gamma)$.

Notes on radius problems of certain univalent functions

Hiro Kobashi (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}$ be the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Let $\mathcal{S}$ denote the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of all univalent functions $f(z)$ in $\mathbb{U}$. M. Obradović and S. Ponnusamy (Analysis **25**(2005)) have considered the subclass $\mathcal{P}_2(\lambda)$ of $\mathcal{S}$ consisting of functions $f(z)$ which satisfy $\dfrac{f(z)}{z} \neq 0$ $(z \in \mathbb{U})$ and

$$\left| \left(\frac{z}{f(z)} \right)'' \right| \leqq \lambda \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some real $\lambda > 0$.

In the present talk, we define the subclass $\mathcal{P}(\beta_1, \beta_2; \lambda)$ of $\mathcal{S}$ consisting of functions $f(z)$ satisfying

$$\left| \beta_1 \left(\frac{z}{f(z)} \right)'' + \beta_2 \left(\frac{z}{f(z)} \right)''' \right| \leqq \lambda \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some complex numbers β_1 and β_2, and for some real $\lambda > 0$.

Let us consider the function $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^{\delta}}$ $(\delta \geqq 0)$. Then we see that

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{1}{(1-z)^{\delta}} \neq 0 \ (z \in \mathbb{U}),$$

$$\left| \left(\frac{z}{f(z)} \right)'' \right| = |\delta(\delta-1)(1-z)^{\delta-2}| < \delta(\delta-1)2^{\delta-2} \quad (\delta \geqq 2),$$

and

$$\left| \left(\frac{z}{f(z)} \right)''' \right| = |\delta(\delta-1)(\delta-2)(1-z)^{\delta-3}| < \delta(\delta-1)(\delta-2)2^{\delta-3} \quad (\delta \geqq 3).$$

Therefore, the Keobe function $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ belongs to the class $\mathcal{P}(1,0;2)$ and $\mathcal{P}(0,1;\lambda)$ for any $\lambda > 0$.

If we consider the function $f(z)$ defined by $f(z) = \dfrac{z}{\sum_{k=0}^{n} z^k}$, then

$$\left| \beta_1 \left(\frac{z}{f(z)} \right)'' + \beta_2 \left(\frac{z}{f(z)} \right)''' \right| < |\beta_1| \sum_{k=2}^{n} k(k-1) + |\beta_2| \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2)$$

$$= \frac{n(n+1)(n-1)(2|\beta_1| + (n-2)|\beta_2|)}{6}.$$

This means that $f(z) \in \mathcal{P}(\beta_1, \beta_2; \lambda)$ with

$$\lambda = \frac{n(n+1)(n-1)(2|\beta_1| + (n-2)|\beta_2|)}{6}.$$

Lemma 1 (A. W. Goodman(1983)) *If $f(z) \in \mathcal{S}$ and*

$$\frac{z}{f(z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n,$$

then

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)|b_n|^2 \leqq 1.$$

Lemma 2 *Let $f(z) \in \mathcal{A}$ and $\frac{z}{f(z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \neq 0$ $(z \in \mathbb{U})$. If $f(z)$ satisfies*

$$2|\beta_1||b_2| + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)\left(|\beta_1| + (n-2)|\beta_2|\right)|b_n| \leqq \lambda$$

for some complex numbers β_1 and β_2, then $f(z) \in \mathcal{P}(\beta_1, \beta_2; \lambda)$.

Theorem 1 *Let $f(z) \in \mathcal{S}$ and $\alpha \in \mathbb{C}$ with $|\alpha| < 1$. Then the function $\frac{1}{\alpha} f(\alpha z)$ belongs to the class $\mathcal{P}(\beta_1, \beta_2; \lambda)$ for $0 < |\alpha| < |\alpha_0|$, where $|\alpha_0|$ is the smallest positive root of the equation*

$$|\beta_1| \frac{|\alpha|^2 \sqrt{2(2 + |\alpha|^2)}}{(1 - |\alpha|^2)^2} + |\beta_2| \frac{|\alpha|^3 \sqrt{6(3 + 14|\alpha|^2 + 3|\alpha|^4)}}{(1 - |\alpha|^2)^3} (1 - |b_2|^2)^{\frac{1}{2}} = \lambda.$$

References

[1] A.W.Goodman, Univalent Functions, Vol.I and II, Mariner, Tampa, Florida, 1983.

[2] M. Obradovć and S. Ponnusamy, Radius properties for subclasses of univalent functions, Analysis 25(2005), 183-188.

Notes on radius properties of certain univalent functions

Yutaka Shimoda (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}$ denote the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Let $\mathcal{S}$ be the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of all univalent functions $f(z)$ in $\mathbb{U}$. M. Obradović and S. Ponnusamy (Analysis **25**(2005)) have defined the subclass $\mathcal{U}_1(\lambda)$ of $\mathcal{S}$ consisting of functions $f(z)$ which satisfy $\dfrac{f(z)}{z} \neq 0$ $(z \in \mathbb{U})$ and

$$\left| f'(z)\left(\frac{z}{f(z)}\right)^2 - 1 \right| \leqq \lambda \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some real $\lambda > 0$. This condition is equivalent to

$$\left| z^2\left(\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{z}\right)' \right| \leqq \lambda \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some real $\lambda > 0$. In the present talk, we define the subclass $\mathcal{U}(\beta_1, \beta_2; \lambda)$ of $\mathcal{S}$ consisting of functions $f(z)$ satisfying

$$\left| \beta_1 z^2 \left(\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{z}\right)' + \beta_2 z^3 \left(\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{z}\right)'' \right| \leqq \lambda \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some complex numbers β_1 and β_2, and for some real $\lambda > 0$.

Let us consider the function $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^{\delta}}$ $(\delta \geqq 0)$. Then we have that

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{1}{(1-z)^{\delta}} \neq 0 \ (z \in \mathbb{U}).$$

If we write $f(z)$ by

$$f(z) = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n}$$

with

$$a_n = (-1)^n \binom{\delta}{n},$$

then we see that

$$\left| z^2 \left(\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{z} \right)' \right| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_n z^n \right| < \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)|a_n|$$

and

$$\left| z^3 \left(\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{z} \right)'' \right| = \left| \sum_{n=3}^{\infty} (n-1)(n-2) a_n z^n \right| < \sum_{n=3}^{\infty} (n-1)(n-2)|a_n|.$$

Therefore, the Keobe function $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ belongs to the class $\mathcal{U}(1,0;1)$ and $\mathcal{U}(0,1;\lambda)$ for any $\lambda > 0$.
Furthermore, if $\delta = 2$, then we have that

$$\left| \beta_1 z^2 \left(\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{z} \right)' + \beta_2 z^3 \left(\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{z} \right)'' \right| < |\beta_1|.$$

This shows that $f(z) \in \mathcal{U}(\beta_1, \beta_2; \lambda)$ for $\lambda \geqq |\beta_1|$. If $\delta = 3$, then we have that

$$\left| \beta_1 z^2 \left(\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{z} \right)' + \beta_2 z^3 \left(\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{z} \right)'' \right| < 5|\beta_1| + 2|\beta_2|,$$

which shows that $f(z) \in \mathcal{U}(\beta_1, \beta_2; \lambda)$ for $\lambda \geqq 5|\beta_1| + 2|\beta_2|$. Further, if $\delta = 4$, then we see that

$$\left| \beta_1 z^2 \left(\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{z} \right)' + \beta_2 z^3 \left(\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{z} \right)'' \right| < 17|\beta_1| + 14|\beta_2|,$$

which shows that $f(z) \in \mathcal{U}(\beta_1, \beta_2; \lambda)$ for $\lambda \geqq 17|\beta_1| + 14|\beta_2|$.

Lemma 1 (A. W. Goodman(1983)) *If $f(z) \in \mathcal{S}$ and*

$$\frac{z}{f(z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n,$$

then

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)|b_n|^2 \leqq 1.$$

Lemma 2 *Let $f(z) \in \mathcal{A}$ and $\dfrac{z}{f(z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \neq 0$ $(z \in \mathbb{U})$. If $f(z)$ satisfies*

$$|\beta_1||b_2| + \sum_{n=3}^{\infty} (n-1)\left(|\beta_1| + (n-2)|\beta_2|\right)|b_n| \leqq \lambda$$

for some complex numbers β_1 and β_2, then $f(z) \in \mathcal{U}(\beta_1, \beta_2; \lambda)$.

Theorem 1 *Let $f(z) \in \mathcal{S}$ and $\alpha \in \mathbb{C}$ with $|\alpha| < 1$. Then the function $\dfrac{1}{\alpha} f(\alpha z)$ belongs to the class $\mathcal{U}(\beta_1, \beta_2; \lambda)$ for $0 < |\alpha| < |\alpha_0|$, where $|\alpha_0|$ is the smallest positive root of the equation*

$$|\beta_1| \frac{|\alpha|^2}{1 - |\alpha|^2} + |\beta_2| \frac{|\alpha|^3 \sqrt{2(1 + 2|\alpha|^2)}}{(1 - |\alpha|^2)^2} \left(1 - |b_2|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \lambda.$$

(α, δ)-neighborhoods for certain analytic functions

Kazuyuki Kugita (Kinki University)
Kazuo Kuroki (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}$ be the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$. For $f(z) \in \mathcal{A}$, G. S. Salagean (Lect. Notes in Math. **1013**(1083)) has introduced

$$D^0 f(z) = f(z), \quad D^1 f(z) = Df(z) = zf'(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^n$$

and

$$D^j f(z) = D(D^{j-1} f(z)) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n^j a_n z^n.$$

On the other hand, J. W. Alexander (Ann. of Math. **17**(1915)) has introduced

$$D^{-1} f(z) = \int_0^z \frac{f(t)}{t} dt = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} a_n z^n.$$

In view of $D^{-1} f(z)$, we intdoduce

$$D^{-j} f(z) = D^{-1}(D^{-j+1} f(z)) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^j} a_n z^n.$$

Therefore, we can define the operator $D^j f(z)$ by

$$D^j f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n^j a_n z^n$$

for some integer j and $f(z) \in \mathcal{A}$. For $f(z) \in \mathcal{A}$ and

$$g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n \in \mathcal{A},$$

we say that $f(z)$ is (α, δ)-neighborhood for $g(z)$ if $f(z)$ satisfies

$$\left| \frac{D^{j+1} f(z)}{z} - e^{i\alpha} \frac{D^{m+1} g(z)}{z} \right| < \delta \quad (z \in \mathbb{U})$$

for some real α $(-\pi \leqq \alpha \leqq \pi)$ and $\delta > \sqrt{2(1-\cos\alpha)}$. We denote this (α,δ)-neighborhood by $(\alpha,\delta)-\mathcal{N}_{m+1}^{j+1}(g)$.

Theorem 1 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\left|n^j a_n - e^{i\alpha} n^m b_n\right| \leqq \delta - \sqrt{2(1-\cos\alpha)}$$

for some real α $(-\pi \leqq \alpha \leqq \pi), \delta > \sqrt{2(1-\cos\alpha)}$ and $g(z) \in \mathcal{A}$, then $f(z) \in (\alpha,\delta) - \mathcal{N}_{m+1}^{j+1}(g)$.

Example 1 Let us consider $f(z) \in \mathcal{A}$ and $g(z) \in \mathcal{A}$ such that

$$a_n = \frac{\delta - \sqrt{2(1-\cos\alpha)}}{n^{j+2}(n-1)} e^{i\gamma} + e^{i\alpha} n^m b_n \quad (n = 2, 3, 4, \cdots).$$

Then we have that

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\left|n^j a_n - e^{i\alpha} n^m b_n\right| = \sum_{n=2}^{\infty} n\left|n^j \frac{\delta - \sqrt{2(1-\cos\alpha)}}{n^{j+2}(n-1)} e^{i\gamma}\right|$$
$$= \delta - \sqrt{2(1-\cos\alpha)},$$

which shows that $f(z) \in (\alpha,\delta) - \mathcal{N}_{m+1}^{j+1}(g)$.

Theorem 2 *If $f(z) \in (\alpha,\delta) - \mathcal{N}_{m+1}^{j+1}(g)$ and*

$$\arg\left(n^j a_n - e^{i\alpha} n^m b_n\right) = (n-1)\varphi \quad (\varphi \in \mathbb{R})$$

for $n = 2, 3, 4, \cdots$, then

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\left|n^j a_n - n^m b_n\right| \leqq \delta + \cos\alpha - 1.$$

Theorem 3 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$\left|\frac{D^{j+1}f(z)}{z} - e^{i\alpha}\frac{D^{m+1}g(z)}{z}\right| < 2\delta - \sqrt{2(1-\cos\alpha)} \quad (z \in \mathbb{U})$$

for some real α $(-\pi \leqq \alpha \leqq \pi), \delta > \sqrt{2(1-\cos\alpha)}$, and $g(z) \in \mathcal{A}$, then

$$\left|\frac{D^{j}f(z)}{z} - e^{i\alpha}\frac{D^{m}g(z)}{z}\right| < \delta + \sqrt{2(1-\cos\alpha)} \quad (z \in \mathbb{U}).$$

Theorem 4 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$\operatorname{Re}\left(\frac{D^{j+1}f(z)}{z} - e^{i\alpha}\frac{D^{m+1}g(z)}{z}\right) > 1 - \cos\alpha - \frac{3}{4}\delta \quad (z \in \mathbb{U})$$

for some real α $(-\pi \leqq \alpha \leqq \pi), \delta > 0$, and $g(z) \in \mathcal{A}$, then

$$\operatorname{Re}\left(\frac{D^{j}f(z)}{z} - e^{i\alpha}\frac{D^{m}g(z)}{z}\right) > 1 - \cos\alpha - \frac{\delta}{2} \quad (z \in \mathbb{U}).$$

Notes on starlike functions of complex order

Kensei Hamai (Kinki University)
Toshio Hayami (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}$ be the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. If a function $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies

$$\mathrm{Re}\left\{1 + \frac{1}{b}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right)\right\} > 0 \quad (z \in \mathbb{U})$$

for some complex number b $(b \neq 0)$, then $f(z)$ is said to be starlike of complex order b in $\mathbb{U}$. We denote the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of all starlike functions $f(z)$ of complex order b by $\mathcal{S}_b^*$. This class $\mathcal{S}_b^*$ was introduced by M. A. Nasr and M. K. Aouf (J. Nat. Sci. Math. **25**(1985)).

From the definition for the class $\mathcal{S}_b^*$, we see that $f(z) \in \mathcal{S}_b^*$ is equivalent to

$$\mathrm{Re}\left\{1 + \frac{1}{b}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right)\right\} = 1 + \frac{\cos\varphi}{\rho}(u-1) + \frac{\sin\varphi}{\rho}v > 0,$$

where $\dfrac{zf'(z)}{f(z)} = u + iv$ and $b = \rho e^{i\varphi}$. This implies that

$$u > \tan(-\varphi)v + 1 - \frac{\rho}{\cos\varphi} \quad (\cos\varphi > 0)$$

or

$$u < \tan(-\varphi)v + 1 - \frac{\rho}{\cos\varphi} \quad (\cos\varphi < 0).$$

Therefore, we see that there exists some function $f(z) \in \mathcal{S}_b^*$ which is not starlike (not univalent) in $\mathbb{U}$.

From the above, we consider $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfying

$$\left|\frac{f(z)}{zf'(z)} - \frac{1}{2\alpha}\right| < \frac{1}{2|\alpha|} \quad (z \in \mathbb{U})$$

for some complex number α such that $\left|\alpha - \dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{2}$. This condition is equivalent to

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 1 \quad (z \in \mathbb{U}).$$

Let $f(z) \in \mathcal{A}$ be in the class $\mathcal{S}_\alpha$ if it satisfies

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 1 \quad (z \in \mathbb{U})$$

for some complex number α such that $\left|\alpha - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$.

Theorem 1 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$\sum_{n=2}^{\infty} (|2\alpha - n| + n)\,|a_n| \leqq 1 - |1 - 2\alpha|$$

for some complex number α such that $\left|\alpha - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$, then $f(z) \in \mathcal{S}_\alpha$.

Theorem 2 *If $f(z) \in \mathcal{S}_\alpha$ with $a_n = |a_n|e^{i((n-1)\theta+\pi)}$, then*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(n\mathrm{Re}(\alpha) - |\alpha|^2\right)|a_n| \leqq \mathrm{Re}(\alpha) - |\alpha|^2.$$

Theorem 3 *If $f(z) \in \mathcal{S}_\alpha$, then*

$$r - \delta_j - \frac{\mathrm{Re}(\alpha) - |\alpha|^2 - \lambda_j}{(j+1)\mathrm{Re}(\alpha) - |\alpha|^2} r^{j+1} \leqq |f(z)| \leqq r + \delta_j + \frac{\mathrm{Re}(\alpha) - |\alpha|^2 - \lambda_j}{(j+1)\mathrm{Re}(\alpha) - |\alpha|^2} r^{j+1}$$

for $|z| = r < 1$, where

$$\delta_j = \begin{cases} 0 & (j = 1) \\ \sum\limits_{n=2}^{j} |a_n| r^n & (j = 2, 3, 4, \cdots) \end{cases}$$

and

$$\lambda_j = \begin{cases} 0 & (j = 1) \\ \sum\limits_{n=2}^{j} (n\mathrm{Re}(\alpha) - |\alpha|^2)\,|a_n| & (j = 2, 3, 4, \cdots). \end{cases}$$

Theorem 4 *If $f(z) \in \mathcal{S}_\alpha$, then*

$$1 - \delta_j^* - \frac{(j+1)\left(\mathrm{Re}(\alpha) - |\alpha|^2 - \lambda_j\right)}{(j+1)\mathrm{Re}(\alpha) - |\alpha|^2} r^j \leqq |f'(z)| \leqq 1 + \delta_j^* + \frac{(j+1)\left(\mathrm{Re}(\alpha) - |\alpha|^2 - \lambda_j\right)}{(j+1)\mathrm{Re}(\alpha) - |\alpha|^2} r^j$$

for $|z| = r < 1$, where

$$\delta_j^* = \begin{cases} 0 & (j = 1) \\ \sum\limits_{n=2}^{j} n|a_n| r^{n-1} & (j = 2, 3, 4, \cdots) \end{cases}$$

and

$$\lambda_j = \begin{cases} 0 & (j = 1) \\ \sum\limits_{n=2}^{j} (n\mathrm{Re}(\alpha) - |\alpha|^2)\,|a_n| & (j = 2, 3, 4, \cdots). \end{cases}$$

N- Fractional Calculus of Some Functions, Which Have A Root Sign

Katsuyuki Nishimoto

Abstract

In this article N- fractional calculus of functions

$$\sqrt[m]{z-c} \quad , \quad 1/\sqrt[m]{z-c} \qquad (m \in Z^+)$$

and

$$(az+b)\ /\ \sqrt[m]{z-c}$$

are reported.

We have the following for example.

1) $$\left(\frac{az+b}{\sqrt[m]{z-c}}\right)_\gamma = e^{-i\pi\gamma}\frac{\Gamma(\gamma-1+(1/m))}{\Gamma(1/m)}(z-c)^{-(1/m)-\gamma}$$

$$\times\left\{\left(\gamma-1+\tfrac{1}{m}\right)(az+b)-a\gamma(z-c)\right\}$$

$$(\ z-c\neq 0,\quad |\Gamma(\gamma-1+(1/m))|<\infty\ ),$$

2) $$\left(\frac{az+b}{\sqrt[m]{z-c}}\right)_n = (-1)^n\frac{\Gamma(n-1+(1/m))}{\Gamma(1/m)}(z-c)^{-(1/m)-n}$$

$$\times\left\{\left(n-1+\tfrac{1}{m}\right)(az+b)-an(z-c)\right\}$$

$$(\ z-c\neq 0,\quad n\in Z_0^+\ ),$$

and

3) $$\left(\frac{az+b}{\sqrt[m]{z-c}}\right)_{-1/m} = -e^{i\pi/m}\frac{1}{\Gamma(1/m)}$$

$$\times\left\{(az+b)\log(z-c)-\tfrac{a}{m}(z-c)(\log(z-c)-1)\right\} \qquad (z-c\neq 0,1)$$

where $\qquad m\in Z^+$.

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[5] K. Nishimoto ; Ring and Field Produced from The Set of N- Fractional Calculus Operator, J. Frac Calc. Vol. 24, Nov. (2003),29 - 36.

[6] K. Nishimoto ; On the fractional calculus $(a-z)^{\beta}$ and $\log(a-z)$, J. Frac. Calc.Vol. 3, May (1993), 19 - 27.

[7] K. Nishimoto and S.- T. Tu ; Fractional calculus of Psi functions (Generalized Polygamma functions), J. Frac. Calc. Vol.5 May (1994), 27 - 34.

[8] S.- T. Tu and K. Nishimoto ; On the fractional calculus of functions $(cz-a)^{\beta}$ and $\log(cz-a)$, J. Frac.Calc.Vol.5, May (1994), 35 - 43.

[9] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of the Power and Logarithmic Functions and Some Identities, J. Frac. Calc. Vol.21, May (2002), 1 - 6.

[10] K. Nishimoto ; Some Theorems for N- Fractional Calculus of Logerithmic Functions I , J. Frac Calc.Vol.21, May (2002), 7 - 12.

[11] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of Products of Some Power Functions, J. Frac.Calc.Vol.27, May (2005), 83 - 88.

[12] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of Some Composite Functions, J. Frac. Calc. Vol. 29 May (2006), 35 - 44.

[13] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of Some Elementary Functions and Their Semi Differintegrations, J. Frac. Calc. Vol. 31. May (2007), 1 - 10.

[14] K. Nishimoto and T. Miyakoda ; N- Fractional Calculus and n-th Derivatives of Some Algebraic Functions, J. Frac. Calc. Vol. 31, May (2007), 53 - 62.

[15] T. Miyakoda ; N- Fractional Calculus of Certain Algebraic Functions, J. Frac. Calc.Vol. 31, May (2007), 63 - 76.

[16] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus and n-th Derivatives of Some Functions, J. Frac. Calc. Vol. 31. May (2007), 77 - 90.

[17] David Dunmmit and Richard M. Foote ; Abstract Algebra, Prentice Hall (1991).

[18] K. B. Oldham and J. Spanier ; The Fractional Calculus, Academic Press (1974).

[19] A.C. McBride ; Fractional Calculus and Integral Transforms of Generalized Functions, Research Notes, Vol. 31, (1979), Pitman.

[20] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev ; Fractional Integrals and Derivatives, and Some Their Applications (1987), Naoka, USSR.

[21] K.S. Miller and B. Ross ; An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons, (1993).

N- Fractional Calculus of Functions

$$\left(\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt[m]{z-b}}-c}-d\right)^2 \quad (m,n\in Z^+)$$

Shy-Der Lin, Shih-Tong Tu (Chung-Yuan Christian Univ. , Taiwan)
Ding-Kuo Chyan (Hwa-Hsia Institute of Tech. Taiwan)
and
Katsuyuki Nishimoto (Descartes Press Co.)

Abstract

In this article, N-fractional calculus $(f^2(z))_\gamma$ where

$$f(z)=\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt[m]{z-b}}-c}-d \quad (m,n\in Z^+, z-b\neq 0) \tag{1}$$

are reported. We have the below for example, letting (1).

$$(f^2(z))_\gamma = e^{-i\pi\gamma}(z-b)^{-(2/mn)-\gamma}$$
$$\times\sum_{s,k=0}^{\infty}\frac{[-2]_s[-\frac{1}{n}(2-s)]_k\Gamma(-\frac{k}{m}+\frac{1}{mn}(2-s)+\gamma)}{s!\cdot k!\Gamma(-\frac{k}{m}+\frac{1}{mn}(2-s))}R^kT^s$$
$$\left(\left|\frac{\Gamma(-\frac{k}{m}+\frac{1}{mn}(2-s)+\gamma)}{\Gamma(-\frac{k}{m}+\frac{1}{mn}(2-s))}\right|<\infty\right)$$

(Fractional calculus of order γ)

where $R=c(z-b)^{1/m}$, $T=d(z-b)^{1/mn}$, $|R|<1$, $|T|<1$.
$[\lambda]_k=\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+k-1)=\Gamma(\lambda+k)/\Gamma(\lambda)$ with $[\lambda]_0=1$
(Notation of Pochhammer)

Acknowledgements

The present investigation was supported, in part, by the National Science Council of the Republic of China under Grant NSC-97-2115-M-033-005.

References

[1] K. Nishimoto; Fractional Calculus, Vol. 1(1984), Vol.2(1987), Vol. 3(1989), Vol. 4(1991), Vol. 5(1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Korivama, Japan.

[3] K. Nishimoto; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group), J. Frac. Calc. Vol.4, Nov. (1993), 1-11.

[4] K. Nishimoto; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1-14.

[5] K. Nishimoto; Ring and Field produced from The Set of N-Fractional Calculus Operator, J. Frac. Calc. Vol.24, Nov. (2003), 29-36.

[6] K. Nishimoto; N-Fractional Calculus of Products of Some Power Functions, J. Frac. Calc. Vol.27, May (2005), 83-88.

[7] K. Nishimoto; N-Fractional Calculus of Some Composite Functions, J. Frac. Calc. Vol. 29, May (2006), 35-44.

[8] K. Nishimoto; N-Fractional Calculus of Some Elementary Functions and Their Semi-Differintegrations, J. Frac. Calc. Vol 31, May (2007), 1-10.

[9] K. Nishimoto; N-Fractional Calculus of Some Composite Algebraic Functions, J. Frac. Calc. Vol. 31, May (2007), 11-23.

[10] K. Nishimoto; N-Fractional Calculus of Some Functions, and their n-th Derivatives and Semi Differintegrations, J. Frac. Calc. Vol. 32, Nov. (2007), 1-16.

[11] Shy-Der Lin, Katsuyuki Nishimoto, Tsuyako Miyakoda and H.M. Srivastava; Some Differintegral Formulas for Power, Composite and Rational Functions, J. Frac. Calc. Vol. 32, Nov. (2007), 87-98.

On the defect relation of holomorphic curves for moving targets

戸田 暢茂

Let $f = [f_1, \cdots, f_{n+1}]$ be a transcendental holomorphic curve from C into $P^n(C)$ with a reduced representation

$$(f_1, \cdots, f_{n+1}) \; : \; C \; \to \; C^{n+1} - \{0\},$$

where n is a positive integer and let $T(r, f)$ be its characteristic function.

Let $\mathcal{M}$ be a subfield of the set

$$\{\varphi \mid \text{meromorphic in } |z| < \infty, \; T(r, \varphi) = o(T(r, f)) \; (r \to \infty)\}$$

satisfying $\mathcal{M} \supsetneqq C$ and let $\mathcal{M}_h$ be a set of holomorphic curves $a = [\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1}]$ from C into $P^n(C)$ such that there esists a j_o for which $\alpha_j/\alpha_{j_o} \in \mathcal{M}$ $(j = 1, \cdots, n+1)$.

We suppose that f is linearly non-degenerate over $\mathcal{M}$.

We put

$$(a, f) = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j f_j; \;\; (a(z), f(z)) = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j(z) f_j(z);$$

$$m(r, a, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{||a(re^{i\theta})|| \, ||f(re^{i\theta})||}{|(a(re^{i\theta}), f(re^{i\theta}))|} d\theta$$

and

$$\delta(a, f) = \liminf_{r \to \infty} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)}.$$

We have that $0 \leq \delta(a, f) \leq 1$.

Let N be an integer satisfying $N > n$, X a subset of $\mathcal{M}_h$ in N-subgeneral position such that $\#X \geq 2N - n + 2$.

Theorem A(Ru and Stoll [1]). For any $a_1, \cdots, a_q \in X$ $(2N-n+1 < q < \infty)$, we have the inequality

$$\sum_{j=1}^{q} \delta(a_j, f) \leq 2N - n + 1.$$

Let $X^+ = \{a \in X \mid \delta(a, f) > 0\}$. Then, X^+ is at most countable and

$$\sum_{a \in X^+} \delta(a, f) \leq 2N - n + 1.$$

We are interested in the upperbound of

$$\sum_{a \in X^+} \delta(a, f)$$

and in a holomorphic curve f satisfying

$$\sum_{a \in X^+} \delta(a, f) = 2N - n + 1. \tag{1}$$

Let

$$X^1 = \{a \in X^+ \mid \delta(a, f) = 1\}.$$

The purpose of this talk is to give estimates of

$$\sum_{a \in X^+} \delta(a, f)$$

in several cases and a result on the number $\#X^1$ when (1) holds, which generalize the results in [2] to moving targets.

References

[1] M. Ru and W. Stoll: The Cartan conjecture for moving targets. Proc. of Symp. in Pure Math., 52-2(1991), 477-508.

[2] N. Toda: On the truncated defect relation for holomorphic curves. Kodai Math. J., 32-2(2009), 352-389.

Holomorphic curves with shift-invariant hyperplane preimages

Rod Halburd University College London
Risto Korhonen University of Helsinki
Kazuya Tohge Kanazawa University

If $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n$ is a holomorphic curve of *hyper-order* less than one for which $2n+1$ hyperplanes in general position have forward invariant preimages with respect to the translation $\tau(z) = z+c$, then f is periodic with period $c \in \mathbb{C}$. This result, which can be described as a difference analogue of M. Green's Picard-type theorem for holomorphic curves, follows from a more general result presented in this talk. The proof relies on a new version of Cartan's second main theorem for the Casorati determinant and an extended version of the difference analogue of the lemma on the logarithmic derivatives mentioned below. If time permits, an application to the uniqueness theory of meromorphic functions is given, and the sharpness of the obtained results is demonstrated by examples. [1]

We say that the preimage of the hyperplane $H \subset \mathbb{P}^n$ under f is *forward invariant* with respect to the translation $\tau(z) = z+c$ if $\tau(f^{-1}(\{H\})) \subset f^{-1}(\{H\})$ where $f^{-1}(\{H\})$ and $\tau(f^{-1}(\{H\}))$ are multisets in which each point is repeated according to its multiplicity. The *hyper-order* of a holomorphic curve $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n$ with reduced representation $f = [f_0 : \cdots : f_n]$ is defined by

$$\varsigma(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ \log^+ T_f(r)}{\log r},$$

where $\log^+ x = \max\{0, \log x\}$ for all $x \geq 0$, and

$$T_f(r) := \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi} - u(0), \quad u(z) = \sup_{k\in\{0,\ldots,n\}} \log|f_k(z)|,$$

is the *Cartan characteristic function* of f. A difference analogue of the lemma on the logarithmic derivative for finite-order meromorphic functions was proved independently by Halburd-Korhonen, and Chiang-Feng. Another main purpose of this talk is to see that if f is a meromorphic function such that $\varsigma(f) = \varsigma < 1$ and $\varepsilon > 0$, then

$$m\left(r, \frac{f(z+c)}{f(z)}\right) = o\left(\frac{T(r,f)}{r^{1-\varsigma-\varepsilon}}\right)$$

for all r outside of a set of finite logarithmic measure, $\int_{E\cap[1,\infty)} dt/t < \infty$. Note that this cannot be extended to meromorphic functions of hyper-order one, since $g(z) = \exp(2^z)$ satisfies $g(z+1)/g(z) = g(z)$, and so $m(r, g(z+1)/g(z)) = T(r,g)$.

A natural generalization of Picard's theorem was given by Fujimoto and Green, who showed that if $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n$ omits $n+p$ hyperplanes in general position where

[1] arXiv:0903.3236v1 [math.CV] http://arxiv.org/abs/0903.3236

$p \in \{1, \ldots, n+1\}$, then the image of f is contained in a linear subspace at most of dimension $[n/p]$. In particular, if the image of the holomorphic function f lies in the complement of $2n+1$ hyperplanes in general position, then f must be a constant. Let $c \in \mathbb{C}$, and let $\mathcal{P}_c^1$ be the field of period c meromorphic functions defined in $\mathbb{C}$ of hyper-order strictly less than one. The following theorem is a difference analogue of Picard's theorem for holomorphic curves.

Theorem 1. *Let $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n$ be a holomorphic curve such that $\varsigma(f) < 1$, let $c \in \mathbb{C}$ and let $p \in \{1, \ldots, n+1\}$. If $n+p$ hyperplanes in general position have forward invariant preimages under f with respect to the translation $\tau(z) = z + c$, then the image of f is contained in a projective linear subspace over $\mathcal{P}_c^1$ of dimension $\leq [n/p]$.* □

Hence, if $2n+1$ hyperplanes in general position have forward invariant preimages under f with respect to the translation $\tau(z) = z + c$, then f is periodic with period c. In particular, if f omits $2n+1$ hyperplanes in general position, then f is a constant function, which is Green's Picard-type theorem for holomorphic curves in the special case $\varsigma(f) < 1$. Examples show that the sharpness of the upper bound $[n/p]$ for each p. Also, consider the function $f(z) = [\exp(\exp(z)) : 1] : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1$ and the ν^{th} roots of unity $[1 : -\exp(2m\pi i/\nu)]$, $m \in \{1, \ldots, \nu\}$ for any given $\nu \in \mathbb{N}$. Note $f(z) \not\equiv f(z + \log(\nu+1))$. Then we observe that this f has all these ν values (thus arbitrarily many target values) with forward invariant preimages with respect to $\tau(z) = z + \log(\nu + 1)$, even though it just barely fails to satisfy the condition $\varsigma(f) < 1$.

Let $g(z)$ be a meromorphic function, and let $c \in \mathbb{C}$. We will use the short notation $g(z + kc) \equiv \overline{g}^{[k]}$ to suppress the z-dependence of $g(z)$. The *Casorati determinant* of $g_0, \ldots, g_n$ is then defined by $C(g_0, \ldots, g_n) = \det(\overline{g}_{j-1}^{[k]})$. The following theorem is a difference analogue of Cartan's result where the ramification term has been replaced by a quantity expressed in terms of the Casorati determinant of functions which are linearly independent over a field of periodic functions.

Theorem 2. *Let $n \geq 1$, and let $g_0, \ldots, g_n$ be entire functions, linearly independent over $\mathcal{P}_c^1$, such that $\max\{|g_0(z)|, \ldots, |g_n(z)|\} > 0$ for each $z \in \mathbb{C}$, and $\varsigma := \varsigma(g) < 1$, $g = [g_0 : \cdots : g_n]$. Let $\varepsilon > 0$. If $f_0, \ldots, f_q$ are $q+1$ linear combinations of the $n+1$ functions $g_0, \ldots, g_n$, where $q > n$, such that any $n+1$ of the $q+1$ functions $f_0, \ldots, f_q$ are linearly independent, and $L = \frac{f_0 \overline{f}_1 \overline{\overline{f}}_2 \cdots \overline{f}_n^{[n]} f_{n+1} \cdots f_q}{C(g_0, g_1, \ldots, g_n)}$, then*

$$(q-n)T_g(r) \leq N\left(r, \frac{1}{L}\right) - N(r, L) + o\left(\frac{T_g(r)}{r^{1-\varsigma-\varepsilon}}\right) + O(1),$$

as $r \to \infty$ outside of an exceptional set E of finite logarithmic measure. □

As an application, we prove a difference analogue of the Nevanlinna 4-value theorem where 4 *CM* has been replaced by 4 *ignoring c-separated pairs.*

Also a q-difference analogue of Theorem 2 is possible, when one observes q-Casorati determinant instead of the Casoratian and assumes the curve f is of order zero and those hyperplanes in general position have forward invariant preimages under f with respect to the rescaling $\tau(z) = qz$.

Holonomies and the slope inequalities of Lefschetz fibrations

志賀　啓成（東工大理工学研究科）
宮地　秀樹（阪大理学研究科）

1 Introduction

Lefschetz fibration（以下LF）はもともとは代数曲面の観点から考察されたようであるが，Donaldsonらによりsymplectic幾何からの重要性も指摘され，近年では微分幾何，トポロジーなどからの重要な研究対象になっている．本講演では，LFの複素構造に関していくつかの結果を報告する．

定義 1.1 *M，Bをそれぞれ向きづけられたコンパクトな実4，2次元多様体とする．以下の条件を満たすC^∞写像$f: M \to B$を種数gのLefschetz fibration（LF）という．*

1. *fは全射で，B内の有限点$b_1, \ldots, b_n$ $(n \geq 1)$（critical pointsと呼ぶ）を除きfはC^∞-fibre bundleでfibreは種数gの閉曲面である．*

2. *各b_iでは$f^{-1}(b_i)$はただ一つのnodeを持つ退化曲面である．*

二つのLF $f_i : M_i \to B_i$ $(i = 1, 2)$が**同型である**とは，向きを保つ微分同相$\Phi : M_1 \to M_2, \phi : B_1 \to B_2$が存在して，$f_2 \circ \Phi = \phi \circ f_1$が成立するときをいう．

LF $f : M \to B$は自然に準同型写像$\rho : \pi_1(B) \to Mod(g)$を導く．ここに$Mod(g)$は種数$g$の閉曲面の写像類群である．この準同型写像$\rho$をLFのholonomyと呼ぶ．LFのholonomyはcritical pointの正の方向にはright Dehn twistを導き，更にこの条件を満たす準同型写像$\rho : \pi_1(B) \to Mod(g)$に対して，それをholonomyにもつLFが同型を除き一意的に存在する（[3]）．

本講演では複素構造を持つLF，すなわちRiemann面の正則族を考察する．一般にLFが複素構造を持つLFと同型であるとき，次のslope不等式が成立する（[5]）（記号は講演中に述べる）．

命題 1.1 *LF $f : M \to B$が複素構造を持つLFと同型であるとき，slope不等式*

$$\lambda \geq 4\left(1 - \frac{1}{g}\right)$$

が成り立つ．

一般の Riemann 面の正則族 $f: M \to B$ に関しても holonomy $\rho: \pi_1(B) \to Mod(g)$ が定義されるが，これに関しては以下のことが知られている（[4]）.

命題 1.2 *$f: M \to B$ を局所非自明な Riemann 面の正則族とすると，$\rho(\pi_1(B))$ は非可換かつ irreducible な $Mod(g)$ の部分群である.*

2 Results

前節で述べた二つの命題が示すように，LF が複素構造を許すための必要条件として「slope 不等式」と「holonomy 群の irreducibility」がある．これらの関係については以下の主張が成立することを報告する.

定理 2.1 *LF で holonomy 群が irreducible だが，slope 不等式を満たさないものが存在する．また，逆に slope 不等式を満たすが holonomy 群が reducible になるものが存在する．したがって，特に slope 不等式を満たす，または holonomy 群が irreducible であっても複素構造を持たない LF が存在する.*

じっさい，slope λ の値に関しては，次の結果が成り立つ.

定理 2.2 *任意の負の有理数 x に対して，LF $f: M \to B$ で，その slope が x となるものが存在する．特に LF 全体の slope の下限は $-\infty$ である.*

References

[1] H. Endo, M. Korkmaz, D. Kotschick, B. Ozbagci and A. Stipsicz, Commutators, Lefschetz fibrations and the signatures of surface bundles, Topology **41** (2002), 961–977.

[2] H. Endo and S. Nagami, Signature of relations in mapping class groups and non-holomorphic Lefschetz fibrations, Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2004), 3179–3199.

[3] Y. Matsumoto, Lefschetz fibrations of genus two—a topological approach, in "Topology and Teichmüller spaces ", World Sci. Publ. 239–264, 1995.

[4] H. Shiga, On the monodromies of holomorphic families of Riemann surfaces and modular transformations, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **122** (1997), 541–549.

[5] G. Xiao, Fibered algebraic surfaces with low slope, Math. Ann. **276** (1987), 449–466.

The earthequake measure map is a homeomorphism

Hideki Miyachi (Osaka University)*
Dragomir Šarić (CUNY)

Measured laminations A *geodesic lamination* $\mathcal{L}$ is a closed subset in $\mathbb{D}$ which consists of disjoint complete geodesics. Each complete geodesic in $\mathcal{L}$ is called a *leaf* of $\mathcal{L}$. A *stratum* of $\mathcal{L}$ is either a geodesic of λ or a component of the complement of $\mathcal{L}$ in $\mathbb{D}$. Notice that each geodesic lamination is canonically embedded into the space $\mathcal{G}$ of geodesics on $\mathbb{D}$.

Let $\mathcal{L}$ be a geodesic lamination. A *transverse measure* μ with support $\mathcal{L}$ is an assignment of a positive, Radon measure to each closed finite hyperbolic arc I in $\mathbb{D}$ whose support is $I \cap \mathcal{L}$ and which is invariant under homotopies which preserve the foliation of $\mathcal{L}$. A *measured lamination* λ is given by a transversal measure with support $|\lambda|$. A measured lamination λ is *bounded* if the Thurston's earthquake norm

$$\|\lambda\|_{Th} = \sup_{I} \lambda(I)$$

is bounded where I runs over all geodesic arcs in $\mathbb{D}$ with unit length. Let $\mathcal{ML}_b(\mathbb{D})$ be the set of bounded measured laminations on $\mathbb{D}$.

Earthquakes An *earthquake* E with the support a geodesic lamination $\mathcal{L}$ is a surjective map $E : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ such that E is a hyperbolic isometry when restricted to any stratum of $\mathcal{L}$ and, for any two strata A and B, the *comparison isometry*

$$(E\,|_A)^{-1} \circ E\,|_B$$

is a hyperbolic translation whose axis weakly separate A and B, and which translates B to the left as seen from A. An earthquake E of $\mathbb{D}$ continuously extends to a homeomorphism of the boundary S^1. We denote by $E\,|_{S^1}$ the extension. The faults of an earthquake map consists of a geodesic lamination and the displacement gives a transversal measure for the geodesic lamination. Such measured lamination is called the *earthquake measure* for given earthquake map. Notice that for an earthquake E and a Möbius transformation A, the earthquake measure of $A \circ E$ coincides with that of E.

*Partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 21540177

In [5], W.Thurston showed that any orientation preserving homeomorphism h can be represented as the boundary value of a unique earthquake up to the postcomposition of a Möbius transformation.

Hölder distributions Let $\mathcal{H}^{\nu}$ be the space of ν-Hölder functions on $\mathcal{G}$ and set $\mathcal{H} = \cup_{0<\nu\leq 1}\mathcal{H}^{\nu}$. A bounded measured lamination canonically corresponds to a positive Radon measure on $\mathcal{G}$, and hence it determines a linear functional on the space of Hölder function $\mathcal{H}$ on $\mathcal{G}$, which we call a *Hölder distribution.* It is known that there is a canonical topology on $\mathcal{ML}_b(\mathbb{D})$ induced from the space of Hölder distributions.

The earthquake measure map By F.Gardiner, J.Hu, and N.Lakic in [1] and Šarić [3], the earthquake measure for any quasisymmetic mapping on S^1 is bounded, and vise versa. Hence, we get a bijective mapping, so-called, the *earthquake measure map*

$$\mathcal{EM} : T(\mathbb{D}) \to \mathcal{ML}_b(\mathbb{D}),$$

where $T(\mathbb{D})$ is the universal Teichmüller space.

Our main result in this talk is as follows.

Theorem 1. *The earthquake map is a homeomorphism.*

References

[1] F.Gardiner, J.Hu, and N.Lakic, Earthquake curves, *Complex manifolds and hyperbolic geometry*, Contemp. Math., **311** (2002), 141–195,

[2] J.Hu, Earthquake measure and cross-ratio distortion, *In the tradition of Ahlfors and Bers, III*, Contemp. Math., **355** (2004), 285–308.

[3] D. Šarić, Bounded Earthquakes, Proc. Amer. Math. Soc **138** (2008), 889–897.

[4] D. Šarić, Some remarks on bounded Earthquakes, preprint.

[5] W. Thurston, Earthquakes in two-dimensional hyperbolic geometry, *Low-dimensional topology and Kleinian groups*, LMS. Lecture Note Ser., 112, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1986), 91–112.

コンパクトRiemann面上の2点に対するWeierstrassギャップ集合とWronski行列

後藤　亨（防衛大学校）

コンパクトRiemann面 X 上の異なる2点 P,Q に対し,

$$H(P,Q) := \{(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid \mathrm{div}_\infty(f) = mP + nQ \text{ なる有理型関数が存在}\}$$

とおくとき，その $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ における補集合 $G(P,Q) := \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \setminus H(P,Q)$ を(Weierstrass)ギャップ集合という．ギャップ集合は有限で，その元の個数については次が知られている．

定理 (Kim)　X の種数を g とすると，次が成り立つ．

(1) $g(g+3)/2 \leqq \sharp G(P,Q) \leqq g(3g+1)/2$
(2) $\sharp G(P,Q) = g(g+3)/2$ は generic な P,Q で成立する．
(3) $\sharp G(P,Q) = g(3g+1)/2$ は P,Q がともに超楕円的Weierstrass点の場合に限り成立する．特に，X は超楕円型Riemann面である．　◇

古典的なWeierstrass点理論においては，Weierstrass点は次のようにWronski行列式により特徴付けられた．すなわち，正則1-形式の空間 $\Omega(X)$ の基底 $\omega_1,\dots,\omega_g$ から標準束のテンソル積 $K_X^{\otimes g(g+1)/2}$ の正則切断 $W(\omega_1,\dots,\omega_g)$ がWronski行列式として定義され，点 P がWeierstrass点であることと，$W(\omega_1,\dots,\omega_g)(P)=0$ であることとは同値である．

本講演では，2点に対するギャップ集合に関係する正則直線束とその正則切断をWronski行列を用いて構成する．ここで，Wronski行列とは次のように正則1-形式 $\omega_1,\dots,\omega_\ell$ と正因子 $D=\nu_1P_1+\cdots+\nu_nP_n$ に対して定義される ℓ 行 $\deg D$ 列の行列である．

$$W_D[\omega_1,\dots,\omega_\ell] = \left(W_{\nu_1P_1}[\omega_1,\dots,\omega_\ell],\dots,W_{\nu_nP_n}[\omega_1,\dots,\omega_\ell]\right),$$

$$W_{\nu P}[\omega_1,\dots,\omega_\ell] = \begin{pmatrix} \omega_1(P) & \omega_1'(P) & \cdots & \omega_1^{(\nu-1)}(P) \\ \omega_2(P) & \omega_2'(P) & \cdots & \omega_2^{(\nu-1)}(P) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_\ell(P) & \omega_\ell'(P) & \cdots & \omega_\ell^{(\nu-1)}(P) \end{pmatrix}$$

Kimの方法では，$\mu(\alpha) := \min\{\beta \geqq 1 \mid (\alpha,\beta) \in H(P,Q)\}$ により定義される全単射 $\mu : G(P) \to G(Q)$ が大切な役割をする．$H(P,Q)$ とWronski行列を関係付けるためには，正則1-形式との関係を見つけなければならない．次の定理は μ を正則1-形式の位数の言葉で表現するものである．

定理1　P,Q を X 上の異なる2点とし，α を P におけるギャップ数とすると，次が成立する：$\mu(\alpha) := \max\{\beta \geqq 1 \mid \mathrm{ord}_P(\omega) = \alpha - 1, \mathrm{ord}_Q(\omega) = \beta - 1 \text{ なる } \omega \text{ が存在}\}$　◇

この定理により，2点 P, Q に関して $\Omega(X)$ のよい基底が存在し，$G(P,Q)$ を調べるのに Wronski 行列が有効になるのである．

さて，本間氏は Kim のものとは異なる $\sharp G(P,Q)$ の表示を見出し，それを用いて標数ゼロの体上の代数曲線についても (2) が成立することを示した．本間氏の方法と定理1により，次の同値を得る．

命題 2 次の (1), (2) は同値である．

(1) $\sharp G(P,Q) = g(g+3)/2$

(2) 正因子 $gP+gQ$ の Wronski 行列は，$\Omega(X)$ の適当な基底 $\omega_1,\ldots,\omega_g$ に関して次の形になる:

$$W_{gP+gQ}[\omega_1,\ldots,\omega_g] = \left(\begin{array}{cccc|cccc} A_1 & * & * & * & 0 & \cdots & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & * & * & \vdots & \iddots & B_2 & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * & 0 & \iddots & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & A_g & B_g & * & * & * \end{array}\right) \qquad (\clubsuit)$$

ここで，$A_1,\ldots,A_g,B_1,\ldots,B_g$ はゼロでない定数である． $\diamondsuit$

一般に正則行列 M によって $\Omega(X)$ の基底 $\omega_1,\ldots,\omega_g$ を $(\omega_1,\ldots,\omega_g)M$ に変えると Wronski 行列は $W_D[(\omega_1,\ldots,\omega_g)M] = {}^tM \cdot W_D[\omega_1,\ldots,\omega_g]$ なる変換を受ける．そこで，与えられた基底 $\omega_1,\ldots,\omega_g$ に関する Wronski 行列 $W_{gP+gQ}[\omega_1,\ldots,\omega_g]$ がどのようなときに行操作により ($\clubsuit$) の形に変形できるかを考える．1点における Weierstrass 点理論においては $W_{gP}[\omega_1,\ldots,\omega_g]$ を行操作により (正則な) 上三角行列に変形することであり，それには $W_{gP}[\omega_1,\ldots,\omega_g]$ が正則であればよいので Wronski 行列式が出てくるのであった．2点の場合はより複雑で，Wronski 行列の小行列式をすべて考えることにより，次の定理を示すことができる．

定理 3 $\Omega(X)$ の基底 $\omega_1,\ldots,\omega_g$ から $X \times X$ 上の直線束

$$p_1^* K_X^{\otimes g(g+1)(g^3+g+4)/12} \otimes p_2^* K_X^{\otimes g(g+1)(g+2)/6} \to X \times X$$

の正則切断 $\Psi[\omega_1,\ldots,\omega_g]$ が構成できる．ここで，$p_i : X \times X \to X$ $(i=1,2)$ は第 i 成分への射影である．そして，X 上の異なる2点 P, Q に対して次は同値となる．

(1) $\sharp G(P,Q) = g(g+3)/2$

(2) $\Omega(X)$ のある基底 $\omega_1,\ldots,\omega_g$ に対して，$\Psi[\omega_1,\ldots,\omega_g](P,Q) \neq 0$. $\diamondsuit$

植林面上の特異調和関数

中井三留 (名工大・名誉教授)
瀬川重男 (大同大学)
多田俊政 (大同大学)

リーマン面の理想境界の全ての正則点で零境界値を持つことで特徴付けられる本質的正値調和関数をその面上の特異調和関数と言う. 零以外には特異調和関数を持たぬ様な双曲型リーマン面の族を $\mathcal{O}_s$ と記す. $\mathcal{O}_s$ のリーマン面 R の調和次元 $\dim R$ の分布集合 $\dim \mathcal{O}_s := \{\dim R : R \in \mathcal{O}_s\}$ に関して

$$(1) \qquad \dim \mathcal{O}_s = [1, \aleph_0] := \mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}$$

を示す為の道具として, 我々の言う所の, 植林面 $W = \langle P, (T_n)_{n\in I}, (\sigma_n)_{n\in I}\rangle$ (但し, $I = \mathbb{N}$ 又は $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ $(m \in \mathbb{N})$) を考え, 植林地 P 及び樹木列 $(T_n)_{n\in I}$ の各樹木 T_n が共に $\mathcal{O}_s$ のリーマン面であるとき, 植林面 W 自体又 $\mathcal{O}_s$ のリーマン面であるか否かを, 各樹木 T_n の根 σ_n (又は植林地 P に植林する各樹木 T_n の為にあけた根の穴 σ_n) の列 $(\sigma_n)_{n\in I}$ のあり方に基づいて論ずる問題が生じた ([1], [2]). σ_n は互いに素で P 内に集積しない中心 ζ_n の局所座標円板 V_n の $z(\zeta_n) = 0$ となる局所座標 z により $\sigma_n = [-s_n, s_n]$ $(0 < s_n < 1/2)$ として与えられており, 又 P の ζ_n を極とするグリーン関数を $g(z, \zeta_n; P)$ とし, 更に参照点 $o \in P \setminus \bigcup_{n\in I} \overline{V}_n$ をとり, $P \setminus \bigcup_{n\in I}(1/2)\overline{V}_n$ に関する $\{o\} \cup \partial V_n$ のハルナック定数を M_n とする. もし根列 $(\sigma_n)_{n\in I}$ が次の条件

$$(2) \qquad \sum_{n\in I}(4M_n + 1) \cdot \frac{\sup_{\partial V_n} g(\cdot, \zeta_n; P)}{\inf_{\sigma_n} g(\cdot, \zeta_n; P)} < 1$$

を満たす位十分小さければ $W \in \mathcal{O}_s$ を示した ([2]). 実は (2) のごとき制限を一切置かずとも, 恒に無条件に $W \in \mathcal{O}_s$ ではないかと言う疑問が生じたが, 今回の主たる報告事項として,

定理 1 ([3]): P, T_n 共に $\mathcal{O}_s$ であっても, $W \notin \mathcal{O}_s$ となる植林面 $W = \langle P, (T_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}\rangle$ が存在する.

を述べる. 同時に (2) については, もともと I が有限集合なら $W \in \mathcal{O}_s$ であるのに, I が有限集合でも (2) が成立せぬことがあるなどの不備が多く, (2) 自身そのも

のも技術的過ぎるきらいがあり, それが又 $W \in \mathcal{O}_s$ の無条件成立の疑いの一因ともなっていた. 今回 (2) を

$$\sum_{n\in I} M_n \cdot \frac{\sup_{\partial V_n} g(\cdot\,,\zeta_n;P)}{\inf_{\sigma_n} g(\cdot\,,\zeta_n;P)} < +\infty \tag{3}$$

と改善した上で, 次の結果も合せ報告する.

定理2 ([4]): $P, T_n \in \mathcal{O}_s$ で, (3) があれば, 植林面 $W = \langle P, (T_n)_{n\in I}, (\sigma_n)_{n\in I}\rangle$ も又 $\mathcal{O}_s$ のリーマン面である.

この定理は次の主張の系として導かれる ([4]):

主張: $P, T_n \in \mathcal{O}_s$ である植林面 $W = \langle P, (T_n)_{n\in I}, (\sigma_n)_{n\in I}\rangle$ が $\mathcal{O}_s$ であるか否かは, 樹木列 $(T_n)_{n\in I}$ から任意有限個の樹木を取り除いても, $\mathcal{O}_s$ である任意有限個の樹木を付け加えても, 不変である.

参 照 文 献

[1] H. Masaoka and S. Segawa: *On several classes of harmonic functions on a hyperbolic Riemann surfaces*, Proc. of the 15$^{\text{th}}$ ICFIDCAA, Osaka 2007, OCAMI Studies, **2**(2008), 289–294.

[2] M. Nakai and S. Segawa: *Types of afforested surafaces*, Kodai Math. J., **32**(2008), 109–116.

[3] M. Nakai and S. Segawa: *Existence of singular functions*, Preprint.

[4] M. Nakai, S. Segawa, and T. Tada: *Surfaces carrying no singular functions*, Preprint.

Ruscheweyh's univalence criterion and quasiconformal extensions

堀田　一敬（東北大・情報）

$\mathbb{D}$ を複素平面上における単位円板，$\mathcal{A}$ を $\mathbb{D}$ 上解析的で正規化条件 $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ を満たす関数 f 全体とする．

Ahlfors は，Becker[2] によって得られた単葉性条件を拡張して次のような擬等角拡張条件を示した（$c = 0$ の場合が Becker の結果に対応する）；

Theorem A (Ahlfors[1], Becker[3]). $f \in \mathcal{A}$ とする．もしある $k \in [0,1)$ が存在し，$|c| \leq k$ を満たすようなある定数 $c \in \mathbb{C}$ と全ての $z \in \mathbb{D}$ に対し

$$\left| c|z|^2 + (1 - |z|^2)\frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| \leq k$$

が成り立つならば，f は $\mathbb{C}$ の k-擬等角自己同型へと拡張される．

特に $k \to 1$ の場合は単葉性判定条件となる．Ruscheweyh はこの単葉性条件を次のように拡張した；

Theorem B ([4]). $f \in \mathcal{A}$ とし．$s = a + ib, a > 0, b \in \mathbb{R}$ とする．$|c + s| \leq |s|$ を満たすようなある定数 $c \in \mathbb{C}$ と全ての $z \in \mathbb{D}$ に対し

$$\left| c|z|^2 + s - a(1 - |z|^2)\left\{ s\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) + (1 - s)\frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} \right| \leq M,$$

ここで M は

$$M = \begin{cases} a|s| + (a-1)|s + c|, & 0 < a < 1, \\ |s|, & 1 \leq a, \end{cases}$$

が成り立つとする．このとき f は $\mathbb{D}$ 上単葉である．

Theorem B において $s = 1$ とし c を $-c - 1$ へと置き換える事によって Theorem A の単葉性条件のケースが得られる．この Ruscheweyh 氏の単葉性条件を擬等角拡張条件まで精密化することにより次のような結果が得られた；

Theorem 1. $s = a + ib, a > 0, b \in \mathbb{R}$ とし，また $k \in [0,1)$ とする．$f \in \mathcal{A}$ に対し，$|c + s| \leq k|s|$ を満たすようなある定数 $c \in \mathbb{C}$ が存在するとする．もし

$$\left| c|z|^2 + s - a(1 - |z|^2)\left\{ s\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) + (1 - s)\frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} \right| \leq M,$$

ここで M は

$$M = \begin{cases} ak|s| + (a-1)|s+c|, & 0 < a < 1, \\ k|s|, & 1 \le a, \end{cases}$$

が全ての $z \in \mathbb{D}$ で成り立つとする．そのとき f は $\mathbb{C}$ の l-擬等角自己同型写像へと拡張される．ここで l は

$$l = \frac{2ka + (1-k^2)|b|}{(1+k^2)a + (1-k^2)|s|} < 1. \tag{1}$$

（注意：上記の定理において，拡張された写像の歪曲度 (1) は $k \le l$ であり，$b = 0$ のとき $l = k$ となる）

証明は適切な Löwner chain を構築し，Becker[2] による Löwner chain を用いた擬等角拡張条件の定理を用いる．Threorem 1 の応用として，Bazilevič 関数に関する擬等角拡張条件が得られる．

Theorem 1 の証明と同様のアイデアを用いる事によって $\mathbb{D}^* = \widehat{\mathbb{C}} - \overline{\mathbb{D}}$ 上の解析関数 $g(z) = z + d/z + \cdots$ に関する擬等角拡張条件を導く事ができ，その系として Ruscheweyh[4] によって提示された擬等角拡張性に関する未解決問題に以下のような肯定的な解答を与えることができた;

Corollary 2. $g(z) = z + \dfrac{d}{z} + \cdots$ を $\mathbb{D}^*$ 上解析的な関数とする．もしある $k \in [0, 1)$ が存在し，全ての $z \in \mathbb{D}^*$ に対し

$$(|z|^2 - 1)\left| 1 + \frac{zg''(z)}{g'(z)} - \frac{zg'(z)}{g(z)} \right| \le k$$

が成り立つならば，g は $\widehat{\mathbb{C}} - \{0\}$ の k-擬等角自己同型写像へと拡張される．

References

[1] L. V. Ahlfors, *Sufficient conditions for quasiconformal extension*, Discontinuous groups and Riemann surfaces, vol. 79, Princeton Univ. Press, 1974, pp. 23–29.

[2] J. Becker, *Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen*, J. Reine Angew. Math. **255** (1972), 23–43.

[3] ———, *Über die Lösungsstruktur einer Differentialgleichung in der konformen Abbildung*, J. Reine Angew. Math. **285** (1976), 66–74.

[4] S. Ruscheweyh, *An extension of Becker's univalence condition*, Math. Ann. **220** (1976), no. 3, 285–290.

局所解析的共役の拡張について

稲生 啓行 (京都大学大学院理学研究科)

定義. 写像 $f : U \to U'$ が **polynomial-like** であるとは, U, U' が $\mathbb{C}$ 内の位相的円板で $U' \Subset U$ を満たし, かつ f が proper な正則写像であることである.

Douady-Hubbard による, 以下の定理が知られている [DH].

定理 1 (Straightening theorem). 任意の d (≥ 2) 次の polynomial-like map はある d 次多項式とハイブリッド同値になる. さらに, もし充填 Julia 集合 (軌道が定義域に永遠に留まる点の集合) が連結なら, このような多項式は affine 共役を除いて一意的.

つまり, 任意のハイブリッド同値類にはその次数の多項式が必ず含まれており, この意味では polynomial-like な写像は多項式と同じだ, と考えてよい.

複素力学系の研究において, しばしば与えられた写像の反復合成を一部分に制限すると, 低い次数の polynomial-like になる, という現象 (くりこみ) が現れることがある (正確にはさらに連結な充填 Julia 集合を持つことを要請する). この場合, 長時間におけるふるまいを, また1つの次数の低い多項式のものとして理解できるのである.

その一方で, 解析的同値類を考えると, 同値類はずっと小さくなることがわかった.

定理 2 ([I1]). f_1, f_2 を有理関数 (resp. 整関数) とする. 2 次以上の polynomial-like な制限 $f_1 : U_1' \to U_1$, $f_2 : U_2' \to U_2$ が存在し, これらが $\phi : U_1 \to U_2$ によって解析的に共役であると仮定する. この時, ある有理関数 (resp. 整関数) g, ϕ_1, ϕ_2 が存在し以下を満たす.

- ϕ_i は f_i から g への半共役である. つまり, $\phi_i \circ g = f_i \circ \phi_i$ が成立する ($i = 1, 2$).
- ϕ は $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ の分枝となっている.

特に, f_1, f_2 が有理関数なら, $\deg f_1 = \deg f_2$ である.

つまり, 解析的同値類には, 同じ次数であって, かつ半共役によって関係づけられた有理関数しか含まれない. ハイブリッド同値類には, くりこみ可能な多項式 (の反復合成) がたくさん含まれているが, 解析的同値の意味では, これらはほぼ全て区別することが可能なのである.

定理 2 の結論のような半共役は, あまり存在しないように思える.

例. (1) 多項式 $h(z)$ に対し, $f(z)=z^k(h(z))^d$, $g(z)=z^kh(z^d)$ とすると, $f(z^d)=(g(z))^d$, つまり, $\phi(z)=z^d$ は g から f への半共役.

(2) Chebyshev 多項式 T_d (即ち, $\cos(d\theta)=T_d(\cos(\theta))$ を満たすもの) に対し, T_b は T_a からそれ自身への半共役 $(T_a\circ T_b=T_b\circ T_a)$.

(3) h_1,h_2 に対し, $f=h_1\circ h_2$, $g=h_2\circ h_1$ とすると, $f\circ h_1=h_1\circ g$.

多項式の場合には, Ritt [R] の結果などを用いることで, 本質的には上の3つに帰着できることがわかる [I1] が, 有理関数の半共役の分類についてはよくわかっていない.

一方, 整関数の場合については, 次数の制限もなく ($\infty=\infty$ になってしまう), ほとんどわかっていない. 超越整関数から多項式への半共役は存在しないことはわかる (特に, 定理 2 において, f_1,f_2 が整関数で, 一方が多項式なら g も多項式) が, 逆は未解決である:

問題. 2次以上の多項式 g と, 超越整関数 f,ϕ で $\phi\circ g=f\circ\phi$ を満たすようなものが存在するか?

例. g が1次の場合は例が存在する. 反発的不動点を持つような超越整関数 f に対し, ϕ として線形化座標の逆写像をとれば, これは整関数に拡張される.

また, 定理 2 は, くりこみ可能な多項式の straightening map (定理 1 を用いて定義されたパラメータ空間の上の写像) が, 3次以上の場合に不連続になる [I2], ということを証明する上の重要なステップとなった.

References

[DH] A. Douady, J. H. Hubbard. *On the dynamics of polynomial-like mappings.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **18** (1985), 287–343.

[I1] H. Inou. *Extending local analytic conjugacies.* to appear in Trans. AMS.

[I2] H. Inou. *Combinatorics and topology of straightening maps II: Discontinuity.* arXiv:0903.4289.

[R] J. F. Ritt. *Prime and composite polynomials.* Trans. Amer. Math. Soc. **23** (1922), 51–66.

Examples of transcendental entire functions with wandering domains

片方 江（一関工業高等専門学校）

1 Preliminaries

Let $\mathcal{S}$ be the complex plane $\mathbb{C}$ or the Riemann sphere $\hat{\mathbb{C}}$ and let $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ be a holomorphic map. The *Fatou set* $F(f)$ of f is defined as

$$F(f) = \{ z \in \mathcal{S} : \text{the family } \{f^n\}_{n=1}^{\infty} \text{ is normal in some open neighborhood of } z \}.$$

The *Julia set* $J(f)$ of f is the complement $J(f) = \mathcal{S} \setminus F(f)$ of the Fatou set.

Polynomial-like maps

Let U and V be simply connected domains with $U \Subset V$. A map $f : U \to V$ is a *polynomial-like map* of degree d if f is a holomorphic proper map of degree d. The *filled-in Julia set* $K(f)$ of the polynomial-like map $f : U \to V$ is defined as

$$K(f) = \{ z \in U : f^n(z) \in U \text{ for all } n \geq 0 \}$$

and the *Julia set* $J(f)$ of the polynomial-like map $f : U \to V$ is the boundary $J(f) = \partial K(F)$ of the filled-in Julia set. The dynamics and the structure of the Julia set of a polynomial-like map correspond to those of some genuine polynomial at the level of quasiconformality (The Straightening Theorem).

2 Results

Let $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ be a Bryuno number and let $m \geq 2$ be a positive integer. First, we consider the polynomial $P(z) = (\lambda - m)z^{m+1} + (1 + m - \lambda)z^m$, where $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$. The origin is a superattracting fixed point of P and $z = 1$ is a fixed point of P with multiplier λ. Let $\Delta(P, 1)$ be the Siegel disk of P centered at $z = 1$.

Theorem 1. *There exist simply connected domains $U \Subset V$ containing $\Delta(P, 1)$ such that $P : U \to V$ is a polynomial-like map of degree two.*

Second, we consider the transcendental entire function $f(z) = z^m e^{g(z)}$, where $g(z) = (\lambda - m)(e^{z-1} - 1)$. The origin is a superattracting fixed point of f and $z = 1$ is a fixed point of f with multiplier λ. Let $A(f, 0)$ be the immediate basin of f at the origin and let $\Delta(f,1)$ be the Siegel disk of f centered at $z = 1$. The origin is not only a critical value but also a asymptotic value and there exists $v \in \mathrm{Sing}(f^{-1})$ such that $\partial\Delta(f,1) \subset \overline{\{f^n(v)\}_{n=1}^{\infty}}$.

Theorem 2. *For a large $m \geq 2$, there exist simply connected domains $U \Subset V$ containing $A(f,0)$ and $\Delta(f,1)$ such that $f : U \to V$ is a polynomial-like map of degree $m+1$.*

Let m be large enough. By Theorem 1 and 2, the Siegel disk $\Delta(f,1)$ inherits properties of the Siegel disk of some quadratic polynomial. For example:

Corollary 1. *The transcendental entire function f is linearizable near $z = 1$ if and only if α is a Bryuno number.*

Corollary 2. *For some α, there is no singular value on the boundary of the Siegel disk $\Delta(f,1)$.*

Finally, we consider the logarithmic lift $\tilde{f}(z) = mz + g(e^z)$ of f. Then the functional equation $\exp \circ \tilde{f} = f \circ \exp$ holds. Therefore we have $\exp F(\tilde{f}) = F(f)$. The origin is a fixed point of $\tilde{f}$ with multiplier λ. Let $\Delta(\tilde{f},0)$ be the Siegel disk of $\tilde{f}$ centered at the origin and $\tilde{\Delta}_k$ be the Fatou component containing $2\pi ki$, where $k \in \mathbb{Z}$. (Note that $\tilde{\Delta}_0 = \Delta(\tilde{f},0)$ holds.) Since $\exp \circ \tilde{f} = f \circ \exp$, we have $\exp \tilde{\Delta}_k = \Delta(f,1)$. The behavior of $2\pi ki$ is

$$2\pi ki \overset{\tilde{f}}{\mapsto} 2\pi kmi \overset{\tilde{f}}{\mapsto} 2\pi km^2 i \overset{\tilde{f}}{\mapsto} \cdots \overset{\tilde{f}}{\mapsto} 2\pi km^n i \overset{\tilde{f}}{\mapsto} \cdots$$

or $\tilde{f}^n(2\pi ki) = 2\pi km^n i$. Hence we have $2\pi km^{n_1} i \neq 2\pi lm^{n_2} i$ for positive integers n_1 and n_2 and prime numbers $k \neq l$. Therefore $\{\tilde{\Delta}_k\}_{k:\text{a prime number}}$ is a family of infinitely many wandering domains having distinct orbits.

Let m be large enough. Conditions of the Bryuno number α determine properties of wandering domains. For example:

Theorem 3. *For some α, there exists a family of infinitely many wandering domains of $\tilde{f}$ having distinct orbits such that their boundaries have no singular value.*

References

[1] A. Douady and J. H. Hubbard, On the dynamics of polynomial-like mappings, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (*4*) **18** (1985), no. 2, 287–343.

[2] S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi and T. Ueda, *Holomorphic Dynamics*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 66, 2000.

[3] J. H. Zheng, Iteration of functions which are meromorphic outside a small set, *Tohoku Math. J.* (2), **57** (2005), no. 1, 23–43.

ランダムな複素力学系における協調原理と複素平面上の特異関数

角 大輝 (Sumi, Hiroki) 大阪大学理学部数学教室
E-mail: sumi@math.sci.osaka-u.ac.jp
http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~sumi/

ランダムな複素力学系では多くの場合に (通常の複素力学系と異なって) 複数の写像の協力により**カオスが消滅する**ことを示し, 極限状態において悪魔の階段の $\mathbb{C}$ 上版などの「**$\mathbb{C}$ 上の特異関数**」が出現しうることを示す.

定義 1. $\hat{\mathbb{C}}$ をリーマン球面とする. $\hat{\mathbb{C}}$ 上の非定数有理写像全体を Rat と表し, それに $\hat{\mathbb{C}}$ 上の一様収束から導かれる位相を入れる. $\hat{\mathbb{C}}$ 上の 2 次以上の多項式写像全体を $\mathcal{P}$ とかき, それに Rat からの相対位相を入れる.

Rat と $\mathcal{P}$ は写像の合成を積とする半群になっていることに注意する. Rat の部分半群を**有理半群**, $\mathcal{P}$ の部分半群を**多項式半群**という.

定義 2. G を有理半群とする.
$F(G) := \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \exists \text{ nbd } U \text{ of } z \text{ s.t. } G$ は U 上同程度連続 $\}$ とおいて, $F(G)$ を G の**ファトウ集合**という. $J(G) := \hat{\mathbb{C}} \setminus F(G)$ とおいて $J(G)$ を G の**ジュリア集合**という.

定義 3. 位相空間 X に対し, $\mathfrak{M}_1(X)$ で X 上のボレル確率測度全体を表す.

以下, $\tau \in \mathfrak{M}_1(\text{Rat})$ を一つとり, 毎回, τ に応じて $h \in \text{Rat}$ を選択するような $\hat{\mathbb{C}}$ 上の (独立同分布の) ランダム力学系を考える.

定義 4. $\tau \in \mathfrak{M}_1(\text{Rat})$ とする.

(1) $C(\hat{\mathbb{C}}) := \{\varphi : \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C} \mid \varphi$ は連続 $\}$ とおき, sup. norm を入れる.

(2) 作用素 $M_\tau : C(\hat{\mathbb{C}}) \to C(\hat{\mathbb{C}})$ を $M_\tau(\varphi)(z) := \int_{\text{Rat}} \varphi(g(z))\, d\tau(g)$, ただし $\varphi \in C(\hat{\mathbb{C}}), z \in \hat{\mathbb{C}}$, で定義する.

(3) $\mathcal{U}_\tau$ で, 「$M_\tau : C(\hat{\mathbb{C}}) \to C(\hat{\mathbb{C}})$ の有限個のユニタリー固有関数の一次結合の全体」を表す. ここで固有関数がユニタリーとは対応する固有値の絶対値が 1 のときをいう.

(4) $\mathcal{B}_{0,\tau} := \{\varphi \in C(\hat{\mathbb{C}}) \mid M_\tau^n(\varphi) \to 0 \text{ as } n \to \infty\}$ とおく.

(5) G_τ で, 「$\operatorname{supp} \tau$ で生成された有理半群」を表す.

ランダムな複素力学系を考えるときは次が鍵となる.

定義 5. G を有理半群とする. $J_{\ker}(G) := \bigcap_{h \in G} h^{-1}(J(G))$ とおいてこれを G の**核ジュリア集合**という.

注意: 実はある意味でほとんどの $\tau \in \mathfrak{M}_1(\mathcal{P})$ with compact support について $J_{\ker}(G_\tau) = \emptyset$ であることがわかる. (Montelの定理を使う.)

定理 A (協調原理によるカオスの消滅). $\tau \in \mathfrak{M}_1(\mathrm{Rat})$ とし, $\mathrm{supp}\,\tau$ はコンパクトとする. また, $J_{\ker}(G_\tau) = \emptyset$ かつ $J(G_\tau) \neq \emptyset$ とする. このとき, 以下の全てが成り立つ.

(1) $\mathcal{B}_{0,\tau}$ は $C(\hat{\mathbb{C}})$ の閉部分空間で $C(\hat{\mathbb{C}}) = \mathcal{U}_\tau \oplus \mathcal{B}_{0,\tau}$.

(2) $1 \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{U}_\tau < \infty$.

(3) 任意の $\varphi \in \mathcal{U}_\tau$ と $F(G_\tau)$ の任意の連結成分 U に対し, $\varphi|_U$ は定数.

(4) 任意の $z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対しある $\mathcal{A}_z \subset (\mathrm{Rat})^{\mathbf{N}}$ with $(\bigotimes_{j=1}^{\infty} \tau)(\mathcal{A}_z) = 1$ で, 次を満たすものが存在する.
「任意の $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots) \in \mathcal{A}_z$ に対し, ある $\delta = \delta(z, \gamma) > 0$ が存在して $\mathrm{diam}\gamma_n \cdots \gamma_1(B(z, \delta)) \to 0 \ \ (n \to \infty)$ となる.」

(5) G_τ の $\hat{\mathbb{C}}$ への作用に関する極小集合は有限個のみ存在する. それら全ての合併を K とすると, $\forall z \in \hat{\mathbb{C}} \ \ \exists \mathcal{C}_z \subset (\mathrm{Rat})^{\mathbf{N}}$ with $(\bigotimes_{j=1}^{\infty} \tau)(\mathcal{C}_z) = 1$ s.t. $\forall \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots) \in \mathcal{C}_z$, $d(\gamma_n \cdots \gamma_1(z), K) \to 0$ as $n \to \infty$.

注意: $h \in \mathrm{Rat}, \deg(h) \geq 2, \tau = \delta_h$ のとき（つまり通常の複素力学系のとき）は, 定理 A の (1)(4)(5) の主張はいずれも成立しない.

定理 B ($\mathcal{U}_\tau$ の元の微分不可能性). $h_1, h_2 \in \mathcal{P}, 0 < p_1, p_2 < 1, p_1 + p_2 = 1$ とし, $\tau := \sum_{i=1}^{2} p_i \delta_{h_i} \in \mathfrak{M}_1(\mathcal{P})$ とおく. $P(G_\tau) := \overline{\bigcup_{h \in G_\tau} \{h : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \text{の臨界値}\}} \ (\subset \hat{\mathbb{C}})$ とおく. そして以下の **(a)(b)(c)** を仮定する.
(a) $P(G_\tau) \subset F(G_\tau)$,
(b) $h_1^{-1}(J(G_\tau)) \cap h_2^{-1}(J(G_\tau)) = \emptyset$,
(c) $\exists z \in \mathbb{C}$ s.t. $\bigcup_{h \in G_\tau} \{h(z)\}$ は $\mathbb{C}$ で有界.
このとき, 以下の全てが成立する.

(1) $J_{\ker}(G_\tau) = \emptyset$ かつ $J(G_\tau) \neq \emptyset$. (よって定理 A の主張が成立.)

(2) $\dim_H(J(G_\tau)) < 2$. ($\dim_H$ はユークリッド距離に関するハウスドルフ次元を表す.)

(3) $\mathcal{U}_\tau$ の元で非定数のものがある. （例：∞ に収束する確率の関数 $T_{\infty,\tau}$.)

(4) $J(G_\tau)$ のある稠密部分集合 A で $\dim_H(A) > 0$ なるもので, 「任意の $z \in A$ と任意の非定数 $\varphi \in \mathcal{U}_\tau$ に対して φ は z で全微分不可能」となるものがある.

参 考 文 献:
[1] H. Sumi, *Random complex dynamics and semigroups of holomorphic maps*, preprint 2008, http://arxiv.org/abs/0812.4483. (本講演の内容はこのプレプリントに含まれます.)
[2] H. Sumi, *Interaction cohomology of forward or backward self-similar systems*, to appear in Adv. Math., http://arxiv.org/abs/0804.3822.
[3] 角大輝, 「有理半群, ランダムな複素力学系と複素平面上の特異関数」, 数学第 61 巻第 2 号 2009 年 4 月春季号論説 p133-161.

Weighted Green functions of polynomial skew products on $\mathbf{C}^2$

Kohei Ueno (Kyoto University)

We consider the dynamics of polynomial skew products on $\mathbf{C}^2$. We introduce the weighted Green function of a polynomial skew product f, a generalization of the Green function of f. Moreover, we consider the dynamics of the extension of f to a holomorphic map on the weighted projective space.

1 Weighted Green functions

We consider the dynamics of a polynomial skew product on $\mathbf{C}^2$ of the form $f(z,w) = (p(z), q(z,w))$, where $p(z)$ and $q(z,w)$ are polynomials such that $p(z) = z^d + O(z^{d-1})$ and $q(z,w) = w^d + O_z(w^{d-1})$. We assume that $d \geq 2$. It follows that the dynamical degree of f is equal to d.

An important tool for the study of the dynamics of a polynomial map f on $\mathbf{C}^2$ is the Green function G_f of f, which is defined by

$$G_f(z,w) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d^n} \log^+ |f^n(z,w)|,$$

where $|(z,w)| = max\{|z|,|w|\}$ and d is the dynamical degree of f. The question is whether the limit G_f is well behaved or not. It is known that if f is regular, then G_f is well-defined, continuous and plurisubharmonic on $\mathbf{C}^2$. However, there are many polynomial skew products whose Green functions are not well behaved on $\mathbf{C}^2$.

Let $f(z,w) = (p(z), q(z,w))$ be a polynomial skew product on $\mathbf{C}^2$. We define the weighted Green function G_f^k of f as

$$G_f^k(z,w) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d^n} \log^+ |f^n(z,w)|_k,$$

where $|(z,w)|_k = max\{|z|^k, |w|\}$ and

$$k = max_j \left\{ \frac{n_j}{d-m_j} \;\middle|\; c_j z^{n_j} w^{m_j} \text{ is a term in } q(z,w) \text{ which is not } w^d \right\}.$$

Theorem 1. *The weighted Green function G_f^k is well-defined, continuous and plurisubharmonic on* $\mathbf{C}^2$.

2 Dynamics on weighted projective spaces

The weighted projective space $\mathbf{P}(r, s, 1)$ is a quotient space of $\mathbf{C}^3 \setminus \{0\}$,

$$\mathbf{P}(r, s, 1) = \mathbf{C}^3 \setminus \{0\} \big/ \sim,$$

where $(z, w, t) \sim (\lambda^r z, \lambda^s w, \lambda t)$ for any λ in $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. A polynomial skew product $f(z, w) = (p(z), q(z, w))$ extends to a holomorphic map $\tilde{f}$ on $\mathbf{P}(r, s, 1)$,

$$\tilde{f}[z : w : t] = \left[p\left(\frac{z}{t^r}\right) t^{dr} : q\left(\frac{z}{t^r}, \frac{w}{t^s}\right) t^{ds} : t^d \right], \text{ where } k = \frac{s}{r}.$$

The weighted Green function of f determines the Fatou and Julia sets of $\tilde{f}$.

Theorem 2. *The Julia set of $\tilde{f}$ coincides with the closure of the set where G_f^k is not pluriharmonic.*

References

[1] C. Favre, M. Jonsson, *Dynamical compactifications of* $\mathbf{C}^2$, arXiv, 2007.

[2] K. Ueno, *Symmetries of Julia sets of non-degenerate polynomial skew products on* $\mathbf{C}^2$, to be appear in Michigan Math. J.

(非) アルキメデス的力学系の非線型性と力学系への応用

奥山裕介 (京都工芸繊維大学)

Projective spaces over valued fields. Let K be a commutative algebraically closed field which is complete with respect to a non-trivial absolute value (or valuation) $|\cdot|$. This $|\cdot|$ is said to be *non-Archimedean* if $\forall z, \forall w \in K, |z-w| \leq \max\{|z|,|w|\}$. Otherwise, $|\cdot|$ is said to be *Archimedean* and K is then topologically isomorphic to $\mathbb{C}$ (with Hermitian norm). We extend $|\cdot|$ to K^ℓ ($\ell \in \mathbb{N}$) as the maximum norm $|Z| = |Z|_\ell = \max_{j=1,\dots,\ell} |z_j|$ for $Z = (z_1, \dots, z_\ell)$. Let $\pi : K^{n+1} \setminus \{O\} \to \mathbb{P}^n(K)$ be the canonical projection and set $\ell(n) \in \mathbb{N}$ so that $\bigwedge^2 K^{n+1} \cong K^{\ell(n)}$. The *chordal distance* $[\cdot,\cdot]$ on $\mathbb{P}^n(K)$ is defined as

$$[z,w] := \frac{|Z \wedge W|_{\ell(n)}}{|Z|_{n+1}|W|_{n+1}},$$

where $Z \in \pi^{-1}(z), W \in \pi^{-1}(w)$. For $z_0 \in \mathbb{P}^n(K)$ and $r > 0$, we consider the ball

$$\overline{B}(z_0, r) := \{z \in \mathbb{P}^n(K); [z, z_0] \leq r\}.$$

Nonlinearity of morphisms. Let $f : \mathbb{P}^n(K) \to \mathbb{P}^n(K)$ be a (finite) *morphism*, i.e., there is a homogeneous polynomial map $F : K^{n+1} \to K^{n+1}$ over K, which is called a *lift* of f, such that $F^{-1}(O) = \{O\}$ and satisfies

$$\pi \circ F = f \circ \pi.$$

The degree $d = \deg f$ is that of F as homogeneous polynomial map. As in the case of $K = \mathbb{C}$, the *Fatou set* $F(f)$ is the largest open set at each point of which the family $\{f^k; k \in \mathbb{N}\}$ is equicontinuous.

The *Julia set* $J(f)$ is defined by $\mathbb{P}^n(K) \setminus F(f)$. In non-Archimedean case, $J(f)$ may be empty even if $d \geq 2$.

Theorem 1 (nonlinearity of morphisms). *Let $f : \mathbb{P}^n(K) \to \mathbb{P}^n(K)$ be a morphism of degree $d \geq 1$. If there are a ball $\overline{B}(z_0, r) \subset \mathbb{P}^n(K)$ and a morphism $g : \mathbb{P}^n(K) \to \mathbb{P}^n(K)$ such that*

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{1}{d^k} \log \sup_{\overline{B}(z_0,r)} [f^k, g] = -\infty,$$

then either f is linear or $J(f) = \emptyset$.

Theorem 1 has several application for both non-Archimedean and Archimedean dynamics.

Singular domain over the field $\mathbb{C}$. Let $f : \mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^n$ be a morphism, which is now holomorphic, of degree $d \geq 2$.

Each component D of $F(f)$, which is called a *Fatou component* of f, is Stein and Kobayashi hyperbolic. In particular, D is holomorphically separable and the biholomorphic automorphisms $\mathrm{Aut}(D)$ is a Lie group. When there is a sequence $(f^{k_j}) \subset \{f^k\}$ which converges to Id_D locally uniformly on D, we have $f^p(D) = D$ for some $p \in \mathbb{N}$ and moreover $f^p|D \in \mathrm{Aut}(D)$. We call such D a *singular domain* of f. When $n = 1$, a singular domain D is either a Siegel disk or an Herman ring. When $n \geq 2$, a partial analogue is known: let G be the closed subgroup generated by $f^p|D$ in $\mathrm{Aut}(D)$, and G_0 the component of G containing Id_D. Then there is a Lie group isomorphism $G_0 \to \mathbb{T}^s$ for some $s \in [1, n]$, which maps $f^q|D$ for some $q \in \mathbb{N}$ to $(e^{2i\pi\alpha_1}, \ldots, e^{2i\pi\alpha_s})$ for some $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. In the maximal case of $s = n$, we say the singular domain D to be *of maximal type*.

A singular domain D of maximal type is exactly a generalization of one-dimensional Siegel disks and Herman rings: setting $\lambda_j := e^{2i\pi\alpha_j}$ ($j = 1, \ldots, n$), we have a biholomorphic homeomorphism Φ from a Reinhardt domain $U \subset \mathbb{C}^n$ to D which satisfies the Schröder equation

$$f^q(\Phi(w_1, \ldots, w_n)) = \Phi(\lambda_1 w_1, \ldots, \lambda_n w_n) \quad \text{on } U.$$

Theorem 2 (a priori bound). *Let $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ be a holomorphic map of degree $d \geq 2$. If a singular domain D of f is of maximal type, then under the same notation as in the above, D satisfies*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{d^{qk}} \log \max_{j=1,\ldots,n} |\lambda_j^k - 1| = 0.$$

In the case of $n = 1$, every singular domain of f is of maximal type. In this case, Theorem 2 has been proved in several ways which contain some one-dimensional arguments which are not easily extended to higher dimensions. Our proof of Theorem 2 is based on a proof of Theorem 1, which dispenses with pluripotential theory.

Finally, we study the Valiron deficiency

$$\delta_V(\mathrm{Id}_{\mathbb{P}^n}, (f^k)) := \limsup_{k \to \infty} \frac{1}{d^k} \int_{\mathbb{P}^n} \log \frac{1}{[f^k, \mathrm{Id}]} d\omega_{FS}^{\wedge n}.$$

Here ω_{FS} denotes the Fubini-Study Kähler form on $\mathbb{P}^n$.

Theorem 3 (a vanishing theorem). *Let $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ be a holomorphic map of degree ≥ 2. If every singular domain of f is of maximal type, then*

$$\delta_V(\mathrm{Id}_{\mathbb{P}^n}, (f^k)) = 0.$$

We expect that the assertion of Theorem 3 still remains true with no maximality assumption on singular domains.

半空間上のノイマン問題について

朱　文山　楽天
田中　真樹　千葉大・理
柳下　稔　千葉大・理

この講演では, 半空間 $\mathbf{T}_{n+1} = \{M = (X, y) \in \mathbf{R}^{n+1} : y > 0\}$ 上のノイマン問題, つまり, $\mathbf{T}_{n+1}$ の境界 $\partial\mathbf{T}_{n+1}$ 上に関数 f を与え, $\mathbf{T}_{n+1}$ 上で調和な関数で境界上でのその関数の法線微分の値が f に等しくなるような関数を求める問題を考察する. 始めに, 次数 k の $n+1$ 次元ルジャンドル多項式 $L_{k,n+1}$ を用いて非負整数 l に対して一般化されたノイマン核 $K_{l,n+1}(M, N)$ $(M \in \mathbf{T}_{n+1}, N \in \partial\mathbf{T}_{n+1})$ を定義することにより, Armitage [1] の結果を拡張する. $<M, N>$ で内積を表し, $\rho = \frac{<M,N>}{|M||N|}$ とおく. 任意の $M \in \mathbf{T}_{n+1}$, $N \in \partial\mathbf{T}_{n+1}$ に対して,

$$V_{l,n+1}(M, N) = \begin{cases} -k_{n+1}\sum_{k=0}^{l-1} c_{k,n+1}|N|^{1-k-n}|M|^k L_{k,n+1}(\rho) & |N| \geq 1, \quad l \geq 1 \\ 0 & |N| < 1, \quad l \geq 1 \\ 0 & l = 0 \end{cases}$$

とおく. ここで, k_{n+1} は $\mathbf{R}^{n+1}$ の単位球面の表面積の $\frac{1}{2}$ の値とし, $c_{k,n+1} = \binom{k+n-2}{k}$ とする. 一般化されたノイマン核 $K_{l,n+1}(M, N)$ を

$$K_{0,n+1}(M, N) = -k_{n+1}|M - N|^{1-n} \quad (l = 0),$$

$$K_{l,n+1}(M, N) = K_{0,n+1}(M, N) - V_{l,n+1}(M, N) \quad (l \geq 1)$$

によって定義する. いま, $F_{l,n+1}$ は $\partial\mathbf{T}_{n+1} = \mathbf{R}^n$ 上の連続関数 f で条件

$$\int_{\mathbf{R}^n} \frac{|f(N)|}{1 + |N|^{n+l-1}} dN < \infty$$

を満たす集合とする. 次の定理 1 は Armitage [1] の結果を (定理 1 で $l = 0$ の場合として) 拡張する.

定理 1. l を非負整数とし, $f \in F_{l,n+1}$ とする. このとき, $\mathbf{T}_{n+1}$ 上の一般化された f のノイマン積分,

$$H_{l,n+1}f(M) = \int_{\mathbf{R}^n} K_{l,n+1}(M, N) f(N) dN \quad (M \in \mathbf{T}_{n+1})$$

は f に対するノイマン問題の解を与え, 以下の条件を満たす.

$$\mathcal{M}(|H_{l,n+1}f|; r) = O(r^l) \quad (r \to \infty)$$

但し, $\mathcal{M}(g; r)$ は原点中心, 半径 r の半球面における g の球面平均とする.

Siegel と Talvila [4] はゲーゲンバウアー多項式を用いて定理 1 を一般化した結果を与えているが, 以下に示す境界上の任意の連続関数に対するノイマン問題の解を与える上においては, ルジャンドル多項式を用いた一般化したノイマン核で十分であり, この核をもとに境界上の連続関数 f に対して新たに別のノイマン核 $K_{\varphi,n+1}(M,N)$ を構成し, 定理 1 及び Finkelstein と Scheinberg [2] の手法を用いることで簡潔に与えることができる. また, この結果は Gardiner [3] とは別の解を与えるものである.

定理 2. *f を $\partial\mathbf{T}_{n+1}$ 上の任意の連続関数とする. このとき f に対して正値連続関数 $\varphi(t)$ $(t \geq 1)$ で*

$$H_{\varphi,n+1}f(M) = \int_{\mathbf{R}^n} K_{\varphi,n+1}(M,N)f(N)dN \qquad (M \in \mathbf{T}_{n+1})$$

が f に対するノイマン問題の解となるものが存在する.

最後に, 以下にノイマン問題に対する解のある種の一意性に関する結果を与える. この結果は, Armitage [1] の結果を (定理 3 で $l=0$ の場合として) 拡張する.

定理 3. *l を非負整数, k を正の整数とし, $l \geq k$ を満たすとする. $f \in F_{l,n+1}$ とし, h を f に対する $\mathbf{T}_{n+1}$ 上のノイマン問題の解で条件*

$$\mathcal{M}(h^+;r) = o(r^{k+l}) \quad (r \to \infty)$$

を満たすものとする. このとき

$$h(M) = \begin{cases} H_{l,n+1}f(M) + C & (k=1) \\ H_{l,n+1}f(M) + \Pi(X) + \sum_{j=1}^{[\frac{k+1}{2}]} \frac{(-1)^j}{(2j)!} y^{2j} \Delta^j \Pi(X) & (k \geq 2) \end{cases}$$

$(M=(X,y) \in \mathbf{T}_{n+1})$. ここで, C は定数とし, Π は次数が $k+l$ 以下の $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}^n$ の多項式である.

参考文献

[1] D.H. Armitage, *The Neumann problem for a function harmonic in $\mathbf{R}^n \times (0,\infty)$,* Arch. Rational Mech. Anal., **63** (1976), 89-105.

[2] M. Finkelstein and S. Scheinberg, *Kernels for solving problems of Dirichlet type in a half-plane,* Advances in Math., **18** (1975), 108-113.

[3] S.J. Gardiner, *The Dirichlet and Neumann problems for harmonic functions in half-spaces,* J. London Math. Soc., (2) **24** (1981), 502-512.

[4] D. Siegel and E. Talvila, *Sharp growth estimates for modified Poisson integrals in a half space,* Potential Analysis, **15** (2001), 333-360.

放物型 Bergman 空間上の atomic 分解

菱川　洋介 (岐阜大・工)

H を $n+1$ 次元実 Euclid 空間 $\mathbb{R}^{n+1}(n \geq 1)$ の上半空間とする. すなわち,

$$H = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}; x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}.$$

$0 < \alpha \leq 1$ に対し, $L^{(\alpha)} = \partial_t + (-\Delta_x)^\alpha$ とする. ここで, $\partial_t = \partial/\partial t$, Δ_x は x に関する Laplacian である. また, H 上の連続関数 u が $L^{(\alpha)}$ 調和であるとは, 超関数の意味で $L^{(\alpha)}u = 0$ となるときをいう. $W^{(\alpha)}$ は $L^{(\alpha)}$ の基本解を表す.

$1 \leq p < \infty$, $\lambda > -1$ に対して, 放物型 Bergman 空間 $\boldsymbol{b}^p_\alpha(\lambda)$ を次のように定義する.

$$\boldsymbol{b}^p_\alpha(\lambda) := \{u \in C(H); L^{(\alpha)}\text{調和}, \|u\|_{L^p(\lambda)} := \left(\int_H |u(x,t)|^p t^\lambda dV(x,t)\right)^{1/p} < \infty\}.$$

ここで dV は Lebesgue 体積測度を表す. 注意として, $\boldsymbol{b}^p_\alpha(\lambda)$ はノルム $\|\cdot\|_{L^p(\lambda)}$ に関して Banach 空間となる. 特に $\alpha = 1/2$ のとき, $\boldsymbol{b}^p_{1/2}(\lambda)$ は調和 Bergman 空間となる.

ν を実数とする. t に関する fractional order の微分作用素 (Riemann-Liouville operator) を $\mathcal{D}^\nu_t = (-\partial_t)^\nu$ とする. 特に $\nu > -\left(\frac{n}{2\alpha} + \lambda + 1\right)\frac{1}{p}$ であれば, $u \in \boldsymbol{b}^p_\alpha(\lambda)$ に対して, $\mathcal{D}^\nu_t u$ は well-defined であることに注意しておく.

本研究の目的は, 放物型 Bergman 空間上の atomic 分解について調べることである. [1] では調和 Bergman 空間上の atomic 分解を与えており, その研究では Poisson 核の導関数が重要な役割を担っている. 一方, [2] では放物型 Bergman 空間上の再生公式を与えており, 放物型作用素 $L^{(\alpha)}$ の基本解 $W^{(\alpha)}$ の fractional 導関数が重要な役割を担っている. 本講演では, 放物型 Bergman 空間上の atomic 分解が $W^{(\alpha)}$ の fractional 導関数によって得られることを述べる.

定義 1. $0 < \alpha \leq 1$, $1 \leq p < \infty$, $\lambda > -1$, $\kappa > 0$ とする. また $\{(x_j, t_j)\}$ を H 内の点列, $\{\eta_j\}$ を実数列とする. H 上の関数 u を次のように定義する:

$$u(x,t) = \sum_j \eta_j t_j^{\frac{n}{2\alpha}+\kappa-\left(\frac{n}{2\alpha}+\lambda+1\right)\frac{1}{p}} \mathcal{D}^\kappa_t W^{(\alpha)}(x - x_j, t + t_j). \tag{1.1}$$

定義 1 において, $\alpha = 1/2$, $\lambda = 0$, $\kappa = k \in \mathbb{N}$ とすると,

$$u(x,t) = \sum_j \eta_j t_j^{n+k-(n+1)\frac{1}{p}} \mathcal{D}^k_t P(x - x_j, t + t_j) \tag{A.1}$$

となる. $P(\cdot,\cdot) = W^{(1/2)}(\cdot,\cdot)$ は Poisson 核を表す. 次の定理は調和 Bergman 空間上の atomic 分解に関する結果である.

定理 A. ([1]) $1 < p < \infty$ とし，$k \geq 1$ を整数とする．そのとき，次を満たすような H の点列 $\{(x_j, t_j)\}$ と定数 $C > 0$ が存在する: 任意の $\{\eta_j\} \in \ell^p$ に対して，(A.1) によって定義された H 上の関数 u が存在し，$u \in \boldsymbol{b}^p_{1/2}$ かつ，$\|u\|_{L^p} \leq \|\{\eta_j\}\|_{\ell^p}$ を満たす．逆に任意の $u \in \boldsymbol{b}^p_{1/2}$ に対して，実数列 $\{\eta_j\} \in \ell^p$ が存在し，(A.1) かつ $\|\{\eta_j\}\|_{\ell^p} \leq C\|u\|_{L^p}$ を満たす．

さらに，$p = 1$ の場合は $k \geq 2$ で成立する．

次の定理が，放物型 Bergman 空間上の atomic 分解に関する結果である．

定理 1. $0 < \alpha \leq 1$，$1 \leq p < \infty$，$\lambda > -1$，$\kappa > \frac{\lambda+1}{p}$ とする．そのとき，次を満たすような H の点列 $\{(x_j, t_j)\}$ と定数 $C > 0$ が存在する: 任意の $\{\eta_j\} \in \ell^p$ に対して，(1.1) によって定義された H 上の関数 u が存在し，$u \in \boldsymbol{b}^p_\alpha(\lambda)$ かつ，$\|u\|_{L^p(\lambda)} \leq \|\{\eta_j\}\|_{\ell^p}$ を満たす．逆に任意の $u \in \boldsymbol{b}^p_\alpha(\lambda)$ に対して，実数列 $\{\eta_j\} \in \ell^p$ が存在し，(1.1) かつ $\|\{\eta_j\}\|_{\ell^p} \leq C\|u\|_{L^p(\lambda)}$ を満たす．

References

[1] B. R. Choe and H. Yi, *Representations and Interpolations of Harmonic Bergman functions on half-spaces,* Nagoya Math. J., **151** (1998), 51–89.

[2] Y. Hishikawa, *Fractional calculus on parabolic Bergman spaces*, Hiroshima math. J., **38** (2008), 471-488.

[3] M. Nishio, K. Shimomura and N. Suzuki, *α-parabolic Bergman space*, Osaka J. Math., **42** (2005), 133-162.

[4] W. Ramey and H. Yi, *Harmonic Bergman functions on half-spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **348** (1996), 633–660.

ON SOME VALUES OF THE BETA FUNCTION AND GAUSS'S HYPERGEOMETRIC FUNCTION FROM ARITHMETIC VIEWPOINT

小川 琢磨　　鎌田 保雄

(目的) ベータ関数 $B(p,q)$ と超幾何関数 $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ の関数としての意味と特殊値の意義を提示する。

(背景) 第一著者（小川）は①周期、②関数、③関数の値、この3つ巴の世界を考えています。
具体的には、

1, 三角関数の場合 $\quad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \frac{\pi}{2}:=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

2,lemniscate 関数の場合 $\quad \mathrm{sl}\left(\frac{\omega}{4}\right)=\sqrt{\sqrt{2}-1}, \qquad \frac{\omega}{2}:=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$

と、これらに続く関係式をどんどん構成出来ないか … というのが筆者の一つの研究計画 (目標) です。

さて、定理①の主張は、一連の特殊な代数曲線達（円、lemniscate、三様模様、…）を含む曲線族の構成法を与え、さらに、**これら得られた曲線族の弧長が全てベータ関数 $B(p,q)$ で描けている**という事実です。元々の視点は、『三角関数と lemniscate 関数は同じ関数だ !!! 』という視点に基づき、改めて双方の関数の構成法やアナロジーとしての性質に焦点を当てて、素の曲線（円と lemniscate) に何らかの繋がりが在るのでは？それを明らかにした結果です。(これらの背景や詳細については [2, 3] や [6] を参照下さい。)

(定理①) [1, 2, 3] 2004.03.28、関数論分科会において（筑波大学にて）次の結果を発表した。

自然数 n に依存する平面代数曲線 $f_n(x,y)=0$ として次のようなものを考える。($c>0$:実数)

$$(*1) \qquad \prod_{k=1}^{n}\left(x^2+y^2-2c\left(x\cos\frac{2k\pi}{n}+y\sin\frac{2k\pi}{n}\right)+c^2\right)-c^{2n}=0.$$

この時、この平面代数曲線 $f_n(x,y)=0$ の弧長全体の長さ L_n は、次のように与えられる。

$$L_n=\sqrt[n]{2}\,cB\left(\frac{1}{2n},\frac{1}{2}\right). \qquad \text{但し、} B(p,q) \text{ は} \qquad B(p,q):=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad (p,q>0).$$

(構成法) 上記 $(*1)$ の平面代数曲線 $f_n(x,y)=0$ は、以下の考え方によって構成されたものです。

$\mathbb{R}^2$ 上の点 $P:=(x,y)$、焦点 $F_{ij}:=(a_{ij},b_{ij})$（固定で F_{ij} は自然数の i,j に依存する。)、自然数から、実数への関数 ϕ ($\phi:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}$)、を用意して以下のようなものを考える。

$$f_n(x,y)=0\begin{cases} f_1(x,y)=0 & \Longleftrightarrow |PF_{11}|=\phi(1),\\ f_2(x,y)=0 & \Longleftrightarrow |PF_{21}||PF_{22}|=\phi(2),\\ f_3(x,y)=0 & \Longleftrightarrow |PF_{31}||PF_{32}||PF_{33}|=\phi(3),\\ \cdots, & \\ f_k(x,y)=0 & \Longleftrightarrow |PF_{k1}||PF_{k2}||PF_{k3}|\cdots|PF_{kk}|=\phi(k),\\ \cdots. & \end{cases} \qquad \left(|PF_{ij}|:=\sqrt{(x-a_{ij})^2+(y-b_{ij})^2}\right)$$

このような考え方に対して $c>0$ 実数（定数）を用意して、具体的に焦点 F_{nk} と関数 ϕ を以下のように定めたもの

$$F_{nk}:=\left(c\cos\frac{2k\pi}{n},c\sin\frac{2k\pi}{n}\right), \quad (k=1,2,\cdots,n, \quad n\in\mathbb{N});$$
$$\phi(n):=c^n.$$

Date: 講演内容の一部は 2004.03.28(筑波大学)、2004.10.16(津田塾大学)、2006.03.27(中央大学) にて発表している.

第一著者連絡先:（住所）埼玉県北葛飾郡庄和町永沼１５９－３、(郵便番号) ３４４－０１２３、投稿中の記事の内容、発表内容（アブストラクトを含む)、の全ての責任は第一著者（小川琢磨）にある.

これが、上記の代数曲線 (*1) となります。さらに代数曲線 (*1) は以下の (*2) 及び (*3) の形になる。

$$(*2) \quad |z^n - c^n| = c^n, \qquad\qquad (*3) \quad r^n = 2c^n \cos n\theta.$$

(新たな問題とその結果) [3, 4]

先の定理①の曲線族は、特に (*1) の具体例から自然数の n に依存して決定している２つの部分に分かれている事に気付きます。そこで、新たに、$g_n(x,y)$ （但し $g_n(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^n \cos n\theta$ を満たす。）という多項式を用意して、次のような問題とその結果を得るに至りました。これは定理①を含む拡張定理で、本質的には曲線族の形 (*3) の拡張を考えたものです。

(定理②) [3, 4, 5] 2006.03.27、関数論分科会において（中央大学にて）次の結果を発表した。

自然数の m, n に依存する平面代数曲線

$$(**) \qquad (x^2+y^2)^m = 2c^n g_n(x,y) \qquad \text{つまり} \qquad r^{2m-n} = 2c^n \cos n\theta.$$

を与えます。（但し c は定数）ここで、$l := 2m-n$ と置きます。$l > 0$ のとき、この曲線の弧長全体 $L_{m,n}$ は次のように与えられる。

$$L_{m,n} = \sqrt[l]{2c^n}\,\frac{n}{l}\,B\Big(\frac{1}{2l},\frac{1}{2}\Big)\,F\Big(-\frac{1}{2},\frac{1}{2l},\frac{1}{2l}+\frac{1}{2};1-\Big(\frac{l}{n}\Big)^2\Big),$$

但し $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ は Gauss の超幾何関数を表す。

(上記定理②より得られる知見、) [5]

代数曲線達 (**) は、定理①の代数曲線達を含んでいます。$l = m = n$ のとき、双方の代数曲線達は一致します。今日は

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \qquad F(\alpha,\beta,\gamma;x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}dt.$$

という Γ-関数とベータ関数の関係式、それから、Gauss の超幾何関数の積分表示を持っているので、ここに、**『曲線の拡張（あるいは一般化）のみならず、それに対応するように弧長全体も秩序を保ちつつ拡張つまり定理①が拡張（あるいは一般化）されている』** という一例を見る事ができます。定理①及び定理②より改めて得られる知見を以下に整理します。

1. ベータ関数や（Gauss の）超幾何関数が特定の曲線族の弧長を与える関数の役割を果たしている。
2. **ベータ関数と超幾何関数の積を考えた事により第二種完全楕円積分の１つの拡張例（定理②）が得られた。(円と、その円に内接 (外接) する楕円のそれぞれの弧長の関係と類似のモデル) 実際に定理②に依り $l = 2m-n = 1$ となるとき、弧長の $L_{m,n}$ は第２種完全楕円積分になる。勿論、$l = m = n$ のときと考えて、定理①を含む拡張にも成っている。**
3. シュナイダーの結果 [7, 8] （①ベータ関数 $B(p,q)$ に対して p,q が有理数ならば $B(p,q)$ の値は超越数。②第２種完全楕円積分、つまり楕円の弧長は超越数。ただし長径 a 短径 b は代数的数）を踏まえることにより、超越数の視覚的認識も与える事になった。

上記の 1, 2, 3, のような視点、認識等により [9] に対して寄与したと考えています。また、これらは [2] で提示した問題 4.3 や、[3] で提示した問題 5.4 の一つの進展です。

References

[1] T.Ogawa: *The connection between the trigonometric function and the lemniscate function from some plane algebraic curves*, a meeting of mathematical society of Japan in Tsukuba, 関数論分科会アブストラクト (2004.3), 5–6.

[2] 小川 琢磨:「三角関数 ｖｓ (対) lemniscate 関数 ～懐かしさを感じた場所から、見えた景色～」第１５回 数学史シンポジウム (2004.10.16), 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 No.26 (2005.4), 44–77.

[3] T.Ogawa: *Analogies between Circular Functions and Lemniscate Functions from a Viewpoint of Number Theory*, Doctoral thesis (Mathematics), University of Tsukuba (2006).

[4] 小川 琢磨、 鎌田保雄: *A mathematical huge object?*, a meeting of mathematical society of Japan, 関数論分科会アブストラクト (2006.3), 51–52.

[5] T. Ogawa and Y. Kamata: *On some values of the Beta function and Gauss's hypergeometric function from arithmetic viewpoint*, a preprint and submitted for publication.

[6] 高瀬 正仁 論説 『Gauss「整数論」と Hilbert の第１２問題』、数学（日本数学会編集）、岩波書店、第５４巻、第４号、２００２年１０月 秋季号.

[7] A. Baker: *Transcendental Number Theory*, Cambridge Mathematical Library, in Chapter 6 (1975).

[8] 杉浦 光夫 (編)：『ヒルベルト２３の問題』(特に第７問題に関連して), 日本評論社, (1997).

[9] M.Kontsevich, D.Zagier, 訳、黒川 信重: 『周期』、数学の最先端２１世紀への挑戦 vol 1, シュプリンガーフェアラーク東京 (2002), 74–125.

A SIMILAR SYMMETRY BETWEEN CIRCULAR FUNCTIONS AND LEMNISCATE FUNCTIONS FROM ARITHMETIC VIEWPOINTS

小川　琢磨

三角関数と lemniscate 関数の双方には数論的な観点から見ていくつかの似ている性質達があります。その似ている性質達を研究の出発点として、具体例から感知される対称性という世界を構築していくのが筆者にとっての一つの研究テーマです。これまでに類似の性質として認識される対称性という性質を関数等式という形にして報告しました [2, 3, 4]。今回は、この得られた関数等式を用いて考えられる全ての変換を考えた結果、ある有限郡との関連が判明したので [7]、その事を報告します。

1. 背景とこれまでの経緯

整数論の観点から見る事のできる、三角関数とレムニスケート関数の幾つかの類似性に焦点を当てた。類似性を認める事が可能なひとつの証拠として、Eisenstein による相互法則の証明と、Abel 拡大体の記述 (Kronecker-Weber の定理と高木貞治学位論文) があげられる。Eisenstein は、三角関数を使って平方剰余の相互法則の証明を与え、同様の手法により、レムニスケート関数を使って４次剰余の相互法則の証明を与えている。この Eisenstein による相互法則の証明が研究の出発点である。実は、Eisenstein の相互法則の証明と Abel 拡大体の記述の間に、巡回方程式達がよこたわっている。Eisenstein の相互法則の証明はルジャンドル記号を三角関数で表し、奇素数 q に対して $P_q(\sin u) = \sin qu/\sin u$ を満たす多項式 $P_q(x)$ の性質を用いて平方剰余の相互法則の証明を与え、同様にして、４次剰余記号をレムニスケートサイン $(\mathrm{sl}(u))$ で表し、準素な素数 s に対して $R_s(\mathrm{sl}(u)) = \mathrm{sl}(su)/\mathrm{sl}(u)$ を満たす有理関数 $R_s(x)$ の性質を用いて４次剰余の相互法則の証明を与えるというものである。実は、この $P_q(x) = 0$ や $R_s(x)$ の分子の多項式$= 0$ が巡回方程式となっている。具体例から感知される対称性という世界は、上記の有理関数 $R_s(x)$ 等に見る事が出来る。

(有理関数の例) [1, 5, 6] (右辺の lemniscate sine $\mathrm{sl}(u)$ を s と置き、lemniscate cosine を $\mathrm{cl}(u)$ と置いた。)

$$F_{-1,0} = \frac{\mathrm{sl}((3-2i)u)}{\mathrm{sl}(u)} = \frac{(3-2i)+(7+4i)s^4+(-11-10i)s^8+s^{12}}{1+(-11-10i)s^4+(7+4i)s^8+(3-2i)s^{12}};$$

$$G_{-1,0} = \frac{\mathrm{cl}((3-2i)u)}{\mathrm{cl}(u)} = \frac{1-(2-6i)s^2+(3+8i)s^4+(12-4i)s^6+(3+8i)s^8-(2-6i)s^{10}+s^{12}}{1+(2-6i)s^2+(3+8i)s^4-(12-4i)s^6+(3+8i)s^8+(2-6i)s^{10}+s^{12}}.$$

このような、具体例に示唆されて、具体的な関数等式を提示しました。

2. 対称性を表す関数等式達と有限群

定義が先か？定理が先か？主張したい定理（得られた結果）を記述するのに、時に物凄くハマル事がある … 。対称性を表す関数等式達と有限群の関連を言うために、以下に定義を為直します。

(再定義) [7] (cf. [2, 3, 4, 5])

（1、三角関数の場合）　m: 正の奇数、$w := \sin^2 u$、として以下のように定義される $\sin^2 u$ の多項式と $-\tan^2 u$ により与えられる有理関数を考える。

$$P_{s,m}(w) := \frac{\sin mu}{\sin u}, \qquad P_{c,m}(w) := \frac{\cos mu}{\cos u}, \qquad R_{t,m}(-\tan^2 u) = R_{t,m}\left(\frac{w}{w-1}\right) := \frac{\tan mu}{\tan u}.$$

（２、lemniscate 関数の場合）　n: primary 数、$w = \mathrm{sl}^2(u)$、として以下のように定義される $\mathrm{sl}^2(u)$ の有理関数を考える。$\mathrm{sl}(u)$:lemniscate sine, $\mathrm{cl}(u)$:lemniscate cosine, と置き、

$$R_{s,n}(w) := \frac{\mathrm{sl}(nu)}{\mathrm{sl}(u)}, \qquad R_{c,n}(w) := \frac{\mathrm{cl}(nu)}{\mathrm{cl}(u)}, \qquad R_{f,n}(w) := \frac{\mathrm{fl}(nu)}{\mathrm{fl}(u)}, \qquad R_{F,n}(w) := \frac{\mathrm{Fl}(nu)}{\mathrm{Fl}(u)},$$

とする。但し、

$$\mathrm{fl}(u) := \sqrt{1-\mathrm{sl}^2(u)}, \qquad \mathrm{Fl}(u) := \sqrt{1+\mathrm{sl}^2(u)},$$

とする。上記定義に対して、以前提示した具体的な関数等式は以下のとうりです。(上記定義に合わせて、書き換えたもので、結果としての報告（発表）は既にしています。)

Date: 本稿は 2004.03.28(筑波大学)、2004.10.16(津田塾大学)、2006.10.15(津田塾大学) の発表内容の、その後の進展です。.
連絡先：(住所) 埼玉県北葛飾郡庄和町永沼１５９－３、(郵便番号) ３４４－０１２３.

(関数等式) [2, 3, 4]

$$P_{c,m}(1-w) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} P_{s,m}(w), \qquad R_{c,n}\left(\frac{1-w}{1+w}\right) = R_{s,n}(w).$$

これらの関数等式の意味や、あるいは関数等式を得るための手法を改めて考えたときに、付け加えて考えるべき有理関数達に気付きます。それらが、先に述べた再定義として与えた中の、三角関数の場合の $R_{t,m}$, lemniscate の場合の $R_{f,n}$, $R_{F,n}$ になります。そして、再定義をしたもの達に対して関数等式の意味や、得るための手法を適用し考えられる関数等式達を掘り出した結果、次の事がわかりました。

(主結果) [7]

(1, 三角関数の場合) 2 つの多項式 $P_{s,m}$, $P_{c,m}$ と有理関数 $R_{t,m}$ は以下の 6 つの (1 次分数) 変換

$$G_c := \left\{w, \quad \frac{1}{w}, \quad 1-w, \quad \frac{w-1}{w}, \quad \frac{w}{w-1}, \quad \frac{1}{1-w}\right\}$$

に対して互いを補完する関数等式を満たす。また、この 6 つの変換はその合成で有限群になる。それを G_c とおく。この G_c は $G_c \cong$ (対称群)$S_3 \cong$ (正二面体群)D_6. という関係を持っている。

(2, lemniscate 関数の場合) 4 つの有理関数 $R_{s,n}$, $R_{c,n}$, $R_{f,n}$, $R_{F,n}$ は以下の 8 つの (1 次分数) 変換

$$G_l := \left\{w, \quad -w, \quad \frac{1}{w}, \quad -\frac{1}{w}, \quad \frac{1-w}{1+w}, \quad \frac{w-1}{1+w}. \quad \frac{1+w}{1-w}, \quad \frac{1+w}{w-1}\right\}$$

に対して互いを補完する関数等式を満たす。また、この 8 つの変換はその合成で有限群になる。それを G_l とおく。この G_l は対称群 S_4 のある部分郡と同型で実は $G_l \cong$ 正二面体群 D_8 という関係をもっている。

以下に三角関数の場合で $m = 4n+1$ の場合の関数等式の表を提示する。また、同様の関数等式の表が lemniscate の場合にも作成される。(紙面の関係上、割愛する。)

$*$	w	$\frac{1}{w}$	$1-w$	$\frac{w-1}{w}$	$\frac{w}{w-1}$	$\frac{1}{1-w}$
$P_{s,m}$	$P_{c,m}(1-w)$	$P_{c,m}\left(\frac{w-1}{w}\right)$	$P_{c,m}(w)$	$P_{c,m}\left(\frac{1}{w}\right)$	$P_{c,m}\left(\frac{1}{1-w}\right)$	$P_{c,m}\left(\frac{w}{w-1}\right)$
$P_{c,m}$	$P_{s,m}(1-w)$	$P_{s,m}\left(\frac{w-1}{w}\right)$	$P_{s,m}(w)$	$P_{s,m}\left(\frac{1}{w}\right)$	$P_{s,m}\left(\frac{1}{1-w}\right)$	$P_{s,m}\left(\frac{w}{w-1}\right)$
$R_{t,m}$	$\frac{1}{R_{t,m}\left(\frac{1}{w}\right)}$	$\frac{1}{R_{t,m}(w)}$	$\frac{1}{R_{t,m}\left(\frac{1}{1-w}\right)}$	$\frac{1}{R_{t,m}\left(\frac{w}{w-1}\right)}$	$\frac{1}{R_{t,m}\left(\frac{w-1}{w}\right)}$	$\frac{1}{R_{t,m}(1-w)}$

(追記) $\cdots$ ここまで。そして、これから (研究計画) $\cdots$

今回、対称性を統制しているものの存在 (正二面体群 D_{2n}) 、そして、具体的な変換等が判明したので、ここに報告をします。これらは、[3] の問題 3.7 や、[5] の問題 5.3 に対する進展を与えたものと考えています。尚、ここに具体的な変換等が判明したので、これらを超幾何関数の視点より書き換えると、さらなる展望が与えられると考えています。

References

[1] T.Ogawa, *The rational functions defined by the lemniscate functions and primary numbers of Gaussian integers*, 代数学分科会アブストラクト (2002.9), 112–113.

[2] T.Ogawa: *Similar properties between the trigonometric function and the lemniscate function from some arithmetical points*, a meeting of mathematical society of Japan in Tsukuba, 関数論分科会アブストラクト (2004.3), 3–4.

[3] 小川 琢磨: 「三角関数 v s (対) lemniscate 関数 ～懐かしさを感じた場所から、見えた景色～」第15回 数学史シンポジウム (2004.10.16), 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 **No.26** (2005.4), 44–77.

[4] T.Ogawa: *Similarities between the trigonometric function and the lemniscate function from arithemetic view point*, Tsukuba Journal of Mathematics, **29**(2005), 65–77.

[5] T.Ogawa: *Analogies between Circular Functions and Lemniscate Functions from a Viewpoint of Number Theory*, Doctoral thesis (Mathematics), University of Tsukuba (2006).

[6] 小川 琢磨: 「*Rational functions defined by lemniscate functions and primary numbers of Gaussian integers (step 1)*」第17回 数学史シンポジウム (2006.10.15), 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 **No.28** (2007.4), 351–373.

[7] T.Ogawa: *Some arithmetical peculiarities of the lemniscate functions*, preprint (2009).

Approximate identities and Young type inequalities in variable Lebesgue-Orlicz spaces $L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}$

前田 文之
水田 義弘　広島大学・総合科学部
大野 貴雄　広島商船高等専門学校・一般教科

$\mathbf{R}^n$ 上の可積分関数 ϕ と $t>0$ に対して、$\phi_t(x)=t^{-n}\phi(x/t)$ とする。

(1) $\int_{\mathbf{R}^n}\phi(x)dx=1$ ならば、関数族 $\{\phi_t\}$ を approximate identity と呼ぶ。

(2) $\hat{\phi}(x)=\sup_{|y|\geq|x|}|\phi(y)|$ が可積分関数ならば、関数族 $\{\phi_t\}$ はポテンシャルタイプであるという。

次の事実はよく知られている 。

定理 A. $1\leq p<\infty$, 関数族 $\{\phi_t\}$ を approximate identity とすると $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$ ならば、$\{\phi_t*f\}$ は f に $L^p(\mathbf{R}^n)$ において収束する。

定理 A に対して、次のような変動指数をもつ Lebesgue 空間に対しての拡張された結果が知られている。ここに、変動指数 $p(\cdot)$ は、

(p1) $1\leq p_-:=\inf_{x\in\mathbf{R}^n}p(x)\leq\sup_{x\in\mathbf{R}^n}p(x)=:p_+<\infty$;

(p2) $|p(x)-p(y)|\leq C/\log(e+1/|x-y|)$;

(p3) $|p(x)-p(y)|\leq C/\log(e+|x|)\qquad(|y|\geq|x|/2)$

を満たすものとし、

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}=\inf\left\{\lambda>0:\int_{\mathbf{R}^n}(|f(y)|/\lambda)^{p(y)}dy\leq 1\right\}<\infty$$

を満たす $\mathbf{R}^n$ 上の可測関数 f からなる関数空間を $L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ とする ([3])。

定理 B ([1, Theorem 2.3]). 関数族 $\{\phi_t\}$ を approximate identity とする。さらに、ϕ　は次のどちらかを満たすとする:

(1) 関数族 $\{\phi_t\}$ はポテンシャルタイプ;

(2) $\phi\in L^{(p_-)'}(\mathbf{R}^n)$ で ϕ の台ははコンパクト。

このとき、$f\in L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ ならば、$\{\phi_t*f\}$ は f に $L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ において収束する。

本講演では、定理 B の拡張を行う。このために、変動指数 $p(\cdot)$ は (p1), (p2), (p3) を満たし、変動指数 $q(\cdot)$ は、

(q1) $-\infty < \inf_{x\in\mathbf{R}^n} q(x) \le \sup_{x\in\mathbf{R}^n} q(x) < \infty$;

(q2) $|q(x)-q(y)| \le C/\log(e+\log(e+1/|x-y|))$

を満たすものを考える。さらに、正定数 K があって，すべての $x \in \mathbf{R}^n$ に対し $K(p(x)-1)+q(x) \ge 0$ を満たすとする。

$t \ge 0, x \in \mathbf{R}^n$ に対して、 $\Phi_{p(\cdot),q(\cdot)}(x,t) = t^{p(x)}(\log(e+t))^{q(x)}$ とし、

$$\|f\|_{\Phi_{p(\cdot),q(\cdot)},\mathbf{R}^n} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{\mathbf{R}^n} \Phi_{p(\cdot),q(\cdot)}(y, |f(y)|/\lambda)dy \le 1\right\} < \infty$$

を満たす $\mathbf{R}^n$ 上の可測関数 f からなる関数空間を $L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ とする ([2],[4])。

定理. 関数族 $\{\phi_t\}$ を approximate identity とする。さらに、ϕ は次のどちらかを満たすとする:

(1) $p_- > 1$ で 関数族 $\{\phi_t\}$ はポテンシャルタイプ;

(2) $t \mapsto t^{-p_0}\Phi_{p(\cdot),q(\cdot)}(x,t)$ が一様概増加であるような $1 \le p_0 \le p_-$ に対し $\phi \in L^{(p_0)'}(\mathbf{R}^n)$ で, ϕ の台はコンパクト。

このとき、$f \in L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ ならば、$\{\phi_t * f\}$ は f に $L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ において収束する。つまり

$$\lim_{t\to 0} \|\phi_t * f - f\|_{\Phi_{p(\cdot),q(\cdot)},\mathbf{R}^n} = 0.$$

また、本講演では $L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}$ ノルムに対する Young の不等式についても紹介をする。

参考文献

[1] D. Cruz-Uribe and A. Fiorenza, Approximate identities in variable L^p spaces, Math. Nachr. **280** (2007), 256-270.

[2] D. Cruz-Uribe and A. Fiorenza, $L \log L$ results for the maximal operator in variable L^p spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), 2631–2647.

[3] O. Kováčik and J. Rákosník, On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$, Czechoslovak Math. J. **41** (1991), 592–618.

[4] Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Sobolev's inequalities and vanishing integrability for Riesz potentials of functions in the generalized Lebesgue space $L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}$, J. Math. Anal. Appl. **345** (2008), 70-85.

Sobolev inequalities for Orlicz spaces of two variable exponents

Peter Hästö University of Oulu
水田 義弘 広島大学大学院・理学研究科
大野 貴雄 広島商船高等専門学校・一般教科
下村 哲 広島大学大学院・教育学研究科

次の事実はよく知られている.

定理 A (Sobolev の不等式). $1 \le p < n$ に対して, $\mathbf{R}^n$ 上の非負可測関数 u は

$$\int_{\mathbf{R}^n} u(x)^p dx \le 1, \quad \int_{\mathbf{R}^n} |\nabla u(x)|^p dx \le 1$$

を満たすとする. このとき, ある定数 $C > 0$ が存在して,

$$\int_{\mathbf{R}^n} u(x)^{p^*} dx \le C.$$

ここに, $1/p^* = 1/p - 1/n$.

定理 A に対して, 次のような変動指数をもつ Sobolev 空間に対しての Sobolev の不等式が知られている. 変動指数 $p(\cdot)$ は,

(p1) $1 \le \inf_{x \in \mathbf{R}^n} p(x) \le \sup_{x \in \mathbf{R}^n} p(x) < n$;

(p2) $|p(x) - p(y)| \le C/\log(1/|x-y|) \qquad (|x-y| < 1/e)$

を満たすものとする.

定理 B ([2, Proposition 4.2 (1)]). 有界開集合 G 上の非負可測関数 u は

$$\int_G u(x)^{p(x)} dx \le 1, \quad \int_G |\nabla u(x)|^{p(x)} dx \le 1$$

を満たすとする. このとき, ある定数 $C > 0$ が存在して,

$$\int_G u(x)^{p^*(x)} dx \le C.$$

ここに, $1/p^*(x) = 1/p(x) - 1/n$.

本講演では, 定理 B の拡張を行う. このために, 変動指数 $p(\cdot)$ は (p1), (p2),

(p3) $|p(x) - p(y)| \le \dfrac{C}{\log(e + |x|)} \qquad (|y| \ge |x|/2)$

を満たし, 変動指数 $q(\cdot)$ は,

(q1) $-\infty < \inf_{x \in \mathbf{R}^n} q(x) \le \sup_{x \in \mathbf{R}^n} q(x) < \infty$;

(q2) $|q(x) - q(y)| \le C/\log(\log(1/|x-y|)) \qquad (|x-y| < 1/e^2)$

を満たすものを考える．さらに，$t \geq 0, x \in \mathbf{R}^n$ に対して，

$$\Phi(x,t) = t^{p(x)}(\log(c_0 + t))^{q(x)}$$

とし，

$$\|f\|_{\Phi(\cdot,\cdot)(\mathbf{R}^n)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{\mathbf{R}^n} \Phi(y, |f(y)|/\lambda)dy \leq 1\right\} < \infty$$

を満たす $\mathbf{R}^n$ 上の可測関数 f からなる関数空間を $L^{\Phi}(\mathbf{R}^n)$ とする ([1, Cruz-Uribe and Fiorenza], [3, Kováčik-Rákosník],[4])．また，

$$\|u\|_{1,\Phi(\cdot,\cdot)(\mathbf{R}^n)} := \|u\|_{\Phi(\cdot,\cdot)(\mathbf{R}^n)} + \|\nabla u\|_{\Phi(\cdot,\cdot)(\mathbf{R}^n)} < \infty$$

を満たす $\mathbf{R}^n$ 上の可測関数 u からなる関数空間を $W^{1,\Phi}(\mathbf{R}^n)$ とする．

次のリースポテンシャルを考える：

$$Uf(x) = \int_{\mathbf{R}^n} |x-y|^{1-n} f(y)dy$$

補題. $\mathbf{R}^n$ 上の非負可測関数 f は $\|f\|_{\Phi(\cdot,\cdot)(\mathbf{R}^n)} \leq 1$ を満たすとする．このとき，ある定数 $C > 0$ が存在して，

$$\int_{\{x \in \mathbf{R}^n : Uf(x) > t\}} \left\{t(\log(c_0 + t))^{q(x)/p(x)}\right\}^{p^*(x)} dx \leq C.$$

補題を用いることによって，次の Sobolev の不等式を示す．

定理. $\mathbf{R}^n$ 上の非負可測関数 u は $\|u\|_{1,\Phi(\cdot,\cdot)(\mathbf{R}^n)} \leq 1$ を満たすとする．このとき，ある定数 $C > 0$ が存在して，

$$\int_{\mathbf{R}^n} \left\{u(x)(\log(c_0 + u(x)))^{q(x)/p(x)}\right\}^{p^*(x)} dx \leq C.$$

本報告の結果は，[5] による．

参考文献

[1] D. Cruz-Uribe and A. Fiorenza, $L \log L$ results for the maximal operator in variable L^p spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), 2631–2647.

[2] P. Harjulehto and P. Hästö: Sobolev inequalities for variable exponents attaining the values 1 and n, Publ. Mat. **52** (2008), 347–363.

[3] O. Kováčik and J. Rákosník, On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$, Czechoslovak Math. J. **41** (1991), 592–618.

[4] Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Sobolev's inequalities and vanishing integrability for Riesz potentials of functions in the generalized Lebesgue space $L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}$, J. Math. Anal. Appl. **345** (2008), 70-85.

[5] P. Hästö, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Sobolev inequalities for Orlicz spaces of two variable exponents, to appear in Glasgow Math. J.

Maximal functions in variable exponent spaces: limiting cases of the exponent

Lars Diening	Freiburg University
Petteri Harjulehto	University of Helsinki
Peter Hästö	University of Oulu
水田 義弘	広島大学大学院・理学研究科
下村 哲	広島大学大学院・教育学研究科

In this talk, we discuss the Hardy–Littlewood maximal operator in variable exponent spaces when the exponent is not assumed to be bounded away from 1 and ∞.

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an open set. For $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ and $A \subset \mathbb{R}^n$ with positive finite measure we write

$$f_A = \fint_A f(y)\,dy := |A|^{-1} \int_{A\cap\Omega} f(y)\,dy.$$

By M we denote the centered Hardy–Littlewood maximal operator, $Mf(x) = \sup_{r>0} |f|_{B(x,r)}$.

Let $p\colon \Omega \to [1,\infty]$ be a measurable function, which we call a variable exponent. We define

$$\rho_p(x,t) := \begin{cases} t^{p(x)} & \text{for } 0 < p(x) < \infty, \\ 0 & \text{for } p(x) = \infty, t \in (0,1], \\ \infty & \text{for } p(x) = \infty, t \in (1,\infty). \end{cases}$$

The variable exponent *modular* is defined for measurable functions by

$$\varrho_{p(\cdot)}(f) = \int_\Omega \rho_p(x, |f(x)|)\,dx.$$

The *variable exponent Lebesgue space* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ consists of measurable functions $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ with $\varrho_{p(\cdot)}(f/\lambda) < \infty$ for some $\lambda > 0$. We define the Luxemburg norm on this space by the formula

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \inf\left\{\lambda > 0\colon \varrho_{p(\cdot)}(f/\lambda) \leqslant 1\right\}.$$

Recall that the Orlicz–Musielak space with modular $\Phi(x,t)$ is defined by the Luxemburg type-norm

$$\|f\|_{L^\Phi(\Omega)} := \inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega \Phi\Big(x, \frac{f(x)}{\lambda}\Big)\,dx \leqslant 1\right\}.$$

(The function Φ must satisfy certain conditions, which we will not detail here.) We need a function which behaves like a logarithm when $p = 1$ and fades away when $p > 1$. Since the embedding constant of $M\colon L^p \hookrightarrow L^p$ is p', the function

$$\min\left\{p', \log(e + |t|)\right\}, \quad p' := p/(p-1),$$

would be a natural choice. Unfortunately, it does not yield a convex modular. The following variant fixes this problem:

$$\psi_p(t) = \begin{cases} \log(e + |t|), & \text{for } |t| < e^{p'} - e \\ 2p' - \frac{e^{p'}}{e+|t|}p', & \text{for } |t| \geqslant e^{p'} - e. \end{cases}$$

Note that $t \mapsto t^p \psi_p(t)$ is convex on $[0, \infty)$ and that

$$\frac{1}{2}\psi_p(t) \leqslant \min\{p', \log(e + |t|)\} \leqslant \psi_p(t),$$

so ψ_p is equivalent up to a contant to the natural choice of modular.

The norm $\|f\|_{L^{p(\cdot)}\psi_{p(\cdot)}[L]}$ is then given by the modular

$$\Phi(x, t) = |t|^{p(x)}\psi_{p(x)}(t).$$

Let $\alpha \in C(\Omega)$. We say that α is log-Hölder continuous if there exists $c_{\log} > 0$ so that

$$|\alpha(x) - \alpha(y)| \leqslant \frac{c_{\log}}{\log(e + 1/|x - y|)}$$

for all $x, y \in \Omega$.

Theorem. *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded open set and let $1/p\colon \Omega \to \mathbb{R}$ be log-Hölder continuous with $1 \leqslant \inf_{x\in\Omega} p(x) \leqslant \sup_{x\in\Omega} p(x) \leqslant \infty$. Then*

$$\|Mf\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L^{p(\cdot)}\psi_{p(\cdot)}[L](\Omega)}.$$

Cruz-Uribe and Fiorenza [1] have recently investigated the behavior of the maximal operator in variable exponent spaces when $p \to 1$. As a consequence of Theorem, we get the improvement of Cruz-Uribe and Fiorenza [1, Theorem 1.5].

REFERENCES

[1] D. Cruz-Uribe and A. Fiorenza: $L \log L$ results the maximal operator in variable L^p spaces, *Trans. Amer. Math. Soc* **361** (2009) 2631–2647.

[2] L. Diening: Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$, *Math. Inequal. Appl.* **7** (2004), no. 2, 245–254.

[3] Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura: Integrability of maximal functions for generalized Lebesgue spaces with variable exponent, *Math. Nachr.* **281** (2008), no. 3, 386–395.

[4] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, Y. Mizuta and T. Shimomura: Maximal functions in variable exponent spaces: limiting cases of the exponent, to appear in Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.

1変数ベルグマン空間上のコンパクト荷重合成作用素について

植木　誠一郎（茨城大学 工学部）

$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ を単位円板, $H(\mathbb{D})$ を $\mathbb{D}$ 上の解析関数の全体とする. $u \in H(\mathbb{D})$ と $\varphi \in H(\mathbb{D})$ $(\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D})$ に対して, uC_φ を次のように定義する:

$$(uC_\varphi)f(z) = u(z) \cdot (f \circ \varphi)(z) \qquad (f \in H(\mathbb{D}),\ z \in \mathbb{D}).$$

明らかに, $uC_\varphi : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$ は線形作用素である. この作用素 uC_φ は**荷重合成作用素** (***weighted composition operator***) と呼ばれ, 最近では Hardy 空間を中心に様々な解析関数空間上で, 多くの研究者によって活発に研究がなされている. また, $u(z) = 1$ の場合には, uC_φ は合成作用素 C_φ である. 今回の講演では, 荷重ベルグマン空間の上で定義される荷重合成作用素 uC_φ のコンパクト性について考える.

$\mathbb{D}$ 上の**荷重ベルグマン空間** (***weighted Bergman space***) $\boldsymbol{L_a^2(dA_\alpha)}$ $(\alpha > -1)$ は次のように定義される:

$$L_a^2(dA_\alpha) = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) \ : \ \|f\|_\alpha^2 = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha dA(z) < \infty \right\}.$$

ここで, dA は $\mathbb{D}$ 上の正規化された Lebesgue 測度である. このとき, $\|1\|_\alpha = 1$ となる. 簡単のため, $(\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha dA(z)$ を dA_α と表す.

荷重ベルグマン空間上の uC_φ について, 次の問題を考察する：

> **問題**　$uC_\varphi : L_a^2(dA_\alpha) \to L_a^2(dA_\alpha)$ が有界作用素であるとき, uC_φ のコンパクト性を関数 u と φ の性質により特徴付けよ.

問題の背景　$\varphi \in H(\mathbb{D})$ $(\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D})$ に対して, 合成作用素 C_φ は常に $L_a^2(dA_\alpha)$ 上の有界線形作用素である. そのコンパクト性は, 1986 年に B.D. MacCluer と J.H. Shapiro[2] により次のように特徴付けられている：

$$C_\varphi : L_a^2(dA_\alpha) \text{ 上のコンパクト作用素である} \iff \lim_{|z|\to 1^-} \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} = 0. \qquad (\dagger)$$

Julia-Carathéodory の定理によれば、この条件は「φ が $\mathbb{D}$ の境界上全ての点で有限な angular derivative を持たない」ことと同値である. すなわち, C_φ のコンパクト性という作用素の性質が φ の境界挙動という函数論的性質で特徴付けられている.

一方, 荷重合成作用素 uC_φ については必ずしも有界作用素になるとは限らないが, Ž. Čučković と R. Zhao による最近の研究 [1] において, uC_φ が $L_a^2(dA_\alpha)$ 上のコンパクト作用素であるための必要十分条件が

$$\lim_{|z|\to 1^-} \int_{\mathbb{D}} |u(w)|^2 \left\{ \frac{1-|z|^2}{|1-\varphi(w)\overline{z}|^2} \right\}^{2+\alpha} dA_\alpha(w) = 0$$

であることが示された．これは uC_φ の symbol 関数 u と φ から構成される積分変換（Berezin 型積分変換）の境界挙動による特徴付けと見ることができ，これまでに知られていた Carleson 型測度条件による特徴付けを改良した結果である．しかしながら，合成作用素の場合の条件 (†) と比較すると u と φ の境界挙動により特徴付けるという意味合いが薄い結果であるように思われる．

得られた結果　以上の先行研究を踏まえると，前述の問題の真意は，

「$uC_\varphi : L_a^2(dA_\alpha) \to L_a^2(dA_\alpha)$ のコンパクト性を u と φ の**直接の境界挙動**により特徴付けよ」

ということである．これについて，講演者は次の特徴付けを得た：

Theorem ([3]). $\alpha > -1$, $u \in H(\mathbb{D})$, $\varphi \in H(\mathbb{D})$ $(\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D})$ とする．$uC_\varphi : L_a^2(dA_\alpha) \to L_a^2(dA_\alpha)$ が有界な荷重合成作用素であるとき，次の 2 条件は同値である：

(a) $uC_\varphi : L_a^2(dA_\alpha) \to L_a^2(dA_\alpha)$ はコンパクト作用素である．

(b) $$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{|u(z)|^2(1-|z|^2)^{\alpha+2}}{(1-|\varphi(z)|^2)^{\alpha+2}} = 0.$$

Example　$u \in H(\mathbb{D})$ と $\varphi \in H(\mathbb{D})$ を次のように定める：

$$u(z) = \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{1+\alpha}{4}}, \qquad \varphi(z) = \frac{z+1}{2}.$$

このとき，φ は $z=1$ で有限な angular derivative を持つので，MacCluer と Shapiro の結果より C_φ は $L_a^2(dA_\alpha)$ 上のコンパクト作用素にはならない．しかし，u と φ は uC_φ の有界性判定条件（例えば，Čučković と Zhao の結果）を満たすので，$uC_\varphi : L_a^2(dA_\alpha) \to L_a^2(dA_\alpha)$ は有界な荷重合成作用素となる．さらに，上記 Theorem の条件 (b) を満たすことが確かめられるので，uC_φ は $L_a^2(dA_\alpha)$ 上のコンパクト作用素であることがわかる．

References

[1] Ž. Čučković and R. Zhao, Weighted composition operators on the Bergman space, *J. London Math. Soc.*, **70** (2004), 499–511.

[2] B. D. MacCluer and J. H. Shapiro, Angular derivatives and compact composition operators on the Hardy and Bergman spaces, *Canad. J. Math.*, **38** (1986), 878–906.

[3] S. Ueki, Compact weighted composition operators on weighted Bergman spaces, *to appear in Acta Sci. Math. (Szeged).*

On Stoll-Shi's theorem concerning the fractional derivatives of holomorphic functions

真次康夫（信州大学理学部）、　山田尊彦（信州大学理学部）

$\mathbf{C^n}$ の単位球 $\mathbf{B_n}$ 上の正則関数全体を $H(\mathbf{B_n})$ で表す。$f \in H(\mathbf{B_n})$ の原点における同次多項式展開を $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ とする。$\beta > 0$ に対して、

$$f^{[\beta]} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1+\beta)}{k!} f_k, \quad J^{\beta} f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+n+\beta)}{\Gamma(k+n)} f_k,$$

$$f_{[\beta]} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{\Gamma(k+1+\beta)} f_k, \quad J_{\beta} f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(k+n+\beta)} f_k.$$

と定義する。また、$n+s, n+s+t$ が何れも負の整数とならないような、2つの実数 s,t に対して、

$$R^{s,t} f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1+s)\Gamma(n+1+k+s+t)}{\Gamma(n+1+s+t)\Gamma(n+1+k+s)} f_k,$$

$$R_{s,t} f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1+s+t)\Gamma(n+1+k+s)}{\Gamma(n+1+s)\Gamma(n+1+k+s+t)} f_k$$

と定義する。$\beta > 0$ に対して、

$$f^{[\beta]} = \Gamma(1+\beta)(R^{-n,\beta} f), \qquad f_{[\beta]} = \frac{1}{\Gamma(1+\beta)}(R_{-n,\beta} f),$$

$$J^{\beta} f = \frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n)}(R^{-1,\beta} f), \qquad J_{\beta} f = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\beta)}(R_{-1,\beta} f)$$

が成立する。

$\mathbf{C^n}$ の単位球面 $\mathbf{S_n}$ 上の正規化された Euclidean surface measure を σ で表す。$f \in H(\mathbf{B_n})$、$p > 0$、$r \in [0,1)$ に対して、

$$M_p(r,f) = \left\{ \int_{\mathbf{S_n}} |f(r\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) \right\}^{\frac{1}{p}},$$

$$M_{\infty}(r,f) = \sup_{\zeta \in \mathbf{S_n}} |f(r\zeta)|$$

と定義する。次の定理は、M.Stoll[1], J.Shi[2] の結果である：

Theorem. $0 < p \leq \infty$, $0 < q < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$, $0 < \beta < \infty$ とする。この時、任意の $f \in H(\mathbf{B_n})$ に対して、次の不等式が成り立つ。

(i) $$\int_0^1 (1-r)^{\alpha+\beta q} M_p^q(r, f^{[\beta]}) dr \leq C \int_0^1 (1-r)^{\alpha} M_p^q(r,f) dr,$$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 (1-r)^{\alpha+\beta q} M_p^q(r, J^\beta f)dr \le C \int_0^1 (1-r)^\alpha M_p^q(r,f)dr,$

(iii) $\displaystyle\int_0^1 (1-r)^\alpha M_p^q(r, f_{[\beta]})dr \le C \int_0^1 (1-r)^{\alpha+\beta q} M_p^q(r,f)dr,$

(iv) $\displaystyle\int_0^1 (1-r)^\alpha M_p^q(r, J_\beta f)dr \le C \int_0^1 (1-r)^{\alpha+\beta q} M_p^q(r,f)dr$

ここで、C は α,β,p,q 及び n にのみ依存する正定数である。

上の定理の一般化として、次の結果を得た [3]：

Theorem 1. $p \in (0,\infty], q > 0, \alpha \in \mathbf{R}, s \in \mathbf{R}, t > 0$ とする。
$n+s, n+s+t$ が何れも負の整数でなければ、任意の $f \in H(\mathbf{B_n})$ に対して、次の不等式が成り立つ。

$$\int_0^1 (1-r)^{\alpha+qt} M_p^q(r, R^{s,t} f)dr \le C \int_0^1 (1-r)^\alpha M_p^q(r,f)dr.$$

ここで、C は p,q,α,s,t 及び n にのみ依存する正定数である。

Theorem 2. $p \in (0,\infty], q > 0, \alpha \in (-1,\infty), s \in \mathbf{R}, t > 0$ とする。
$n+s > -1$ であれば、任意の $f \in H(\mathbf{B_n})$ に対して、次の不等式が成り立つ。

$$\int_0^1 (1-r)^\alpha M_p^q(r, R_{s,t} f)dr \le C \int_0^1 (1-r)^{\alpha+qt} M_p^q(r,f)dr.$$

ここで、C は p,q,α,s,t 及び n にのみ依存する正定数である。

引用文献

[1]M.Stoll, On the rate of growth of the means M_p of holomorphic and pluriharmonic functions on the ball, J.Math.Anal.Appl.**93**(1983), 109-127.
[2]J.Shi, On the rate of growth of the means M_p of holomorphic and pluriharmonic functions on bounded symmetric domains of $\mathbf{C^n}$, J.Math.Anal.Appl.**126**(1987), 161-175.
[3]Y.Matsugu and T.Yamada, On Stoll-Shi's theorem concerning the fractional derivatives of holomolphic functions, Far East J.Math.Sci.**32**(2009), 359-386.

CGSの列として捉えた特異点非退化条件

高橋　正　　　神戸大・人間発達環境学研究科

原点において孤立特異点を持つ正則関数芽の分類に関しては、多くの結果が得られ、modality という観点から、系統的に特異点の class が分類されている。

パラメータを持つ特異点定義方程式について、その特異点が非退化となるパラメータの条件がある。それをグレブナー基底の計算によって求めることができる。しかし、パラメータを持つ多項式環のグレブナー基底計算は様々な問題がある。パラメータの数が増えるほど計算量は増大し、また、先頭項の決定方法、パラメータの条件分岐を考慮することが必要になる等の問題が生じる。

一例として、$S_{k,0}$特異点（アーノルドの分類による）の定義方程式に関する、グレブナー基底計算を用いた非退化条件導出計算の例を以下に示す。（$S_{k,0}$特異点の定義方程式は、$x^2 z + y z^2 + y^{4k+1} + a\, xy^{3k+1} + b\, z\, y^{2k+1} = 0$ である）

条件 1. $b \neq 0$

条件 2. $-2 + b^2 - 12k + 4b^2 k \neq 0$

条件 3. $10 - 3b^2 + 24k - 8b^2 k \neq 0$

条件 4. $5 - 2b^2 + 52k - 14b^2 k + 156k^2 - 24b^2 k^2 + 144k^3 \neq 0$

条件 5. $5 - 2b^2 + 60k - 18b^2 k + 228k^2 - 52b^2 k^2 + 288k^3 - 48b^2 k^3 \neq 0$

条件 6. $-3 + b^2 - 32k + 10b^2 k - 84k^2 + 32b^2 k^2 + 48k^3 + 32b^2 k^3 + 288k^4 \neq 0$

条件 7. $8 - 3b^2 + 24k - 8b^2 k \neq 0$

条件 8. $b^2 \neq 4$

条件 9. $1 + b^2 + 6k + 5b^2 k + 6b^2 k^2 \neq 0$

条件 10. $2 - b^2 - 2b^2 k \neq 0$

条件 11. $b^2 \neq 3$
条件 12. $-1 + b^2 - 6k + 2b^2 k \neq 0$
条件 13. $-2 + b^2 - 8k + 2b^2 k \neq 0$

これらの条件により、多項式環 $< f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} >$ (f を特異点定義方程式とする) に対し、包括的グレブナーシステムを得る (紙面の関係上一部のみを示す)。

$a = 0$ and $b \neq 0$ and $b^2 \neq 4$ に対して,

$$g_1 = x\,z,$$
$$g_2 = z^2 + (1+4k)\,y^{4k} + (1+2k)\,b\,y^{2k}z,$$
$$g_3 = x^2 + 2\,y\,z + b\,y^{1+2k},$$
$$g_4 = y^{1+2k}\,z + \frac{2\,y^{1+4k}}{b},$$
$$g_5 = x\,y^{4k},$$
$$g_6 = y^{1+6k}.$$

....

$a = 0$ and $b^2 = 4$ に対して,

$$g_1 = x\,z,$$
$$g_2 = z^2 + (1+4k)\,y^{4k} + (1+2k)\,b\,y^{2k}z,$$
$$g_3 = x^2 + 2\,y\,z + b\,y^{1+2k},$$
$$g_4 = y^{i+2k}\,z + \frac{2\,y^{1+4k}}{b},$$
$$g_5 = x\,y^{4k}.$$

グレブナー基底の理論は多項式環に関する理論であり、特異点定義方程式は多項式である。しかし、$S_{k,0}$ 型の特異点定義方程式は、k として表されている部分は、指数関数の型となっている。人間は、それを k が変化した際の多項式を同時に表現することと理解している。これは、数列の考え方と同様である。

そこで、$\{gs_k\}$ (正整数kに対するグレブナーシステムの列) として捉え、k の変化に対して数列のように考察することを考える。このように考えると、正整数 k の変化に対して、包括的グレブナーシステムが収束することが、包括的グレブナー基底が定まることに対応し、有限回の操作によって、包括的グレブナー基底を得ることができない場合は、$\{gs_k\}$ が発散すると考えることができる。この捉え方は、グレブナー基底の計算を級数のような解析的な関数へと拡張できる可能性を示唆する。

レゾルベントを用いた行列のスペクトル分解と固有ベクトル計算

小原功任　(金沢大学理工研究域)
田島慎一　(新潟大学工学部)

われわれは, 行列のスペクトル分解と固有ベクトル計算に関して, レゾルベントの留数解析に基づいた, 新しい exact な計算法を提案する. 本予稿ではスペクトル分解の計算方法とあわせて計算機への応用について述べる.

以下, A を有理数を要素とする n 次正方行列, $f(x)$ を A の最小多項式とし, $f(x)$ は無平方であると仮定する. A の固有値 λ に対し,

$$P_\lambda = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_\lambda (A - xE)^{-1} dx$$

は A のスペクトル分解を与える. すなわち

$$A = \sum_{f(\lambda)=0} \lambda P_\lambda, \qquad E = \sum_{f(\lambda)=0} P_\lambda.$$

ここで E は単位行列であり, 行列値関数 $R(x) = (A - xE)^{-1}$ を A のレゾルベントと呼ぶ. さて, $R(x)$ については次が成り立つ.

$$(A - xE)^{-1} = -\frac{1}{f(x)} q(A, xE), \quad \text{ここで } q(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \in \mathbf{Q}[x, y].$$

次に $f(x)$ が無平方であることから, 拡張ユークリッド互除法により

$$a(x)f(x) + b(x)f'(x) = 1 = \gcd(f, f')$$

となる多項式 $a(x), b(x) \in \mathbf{Q}[x]$ が存在する. よって, 留数定理により

$$\begin{aligned}
P_\lambda &= \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_\lambda (A - xE)^{-1} dx = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_\lambda \frac{1}{f(x)} q(A, xE) dx \\
&= -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_\lambda \left\{ b(x)q(A, xE)\frac{f'(x)}{f(x)} + a(x)q(A, xE) \right\} dx \\
&= b(\lambda)q(A, \lambda E).
\end{aligned}$$

ここで $g(x,y)=(b(x)-b(y))/(x-y)\in \mathbf{Q}[x,y]$ と置けば,

$$b(y)q(x,y)=b(x)q(y,x)-f(x)g(x,y)+f(y)g(x,y)$$

であるから, $f(\lambda)=0$, $f(A)=0$ に注意すれば, 結局

$$P_\lambda=b(A)q(A,\lambda E).$$

以上より, 拡大体 $\mathbf{Q}(\lambda)$ の元を要素とする行列 P_λ は次の手順で求まることがわかる.

アルゴリズム 1 入力: A, 出力: P_λ

1. 最小多項式 $f(x)$ の導出
2. 逆元計算 $b(x)\leftarrow f'(x)^{-1}$ (in $\mathbf{Q}[x]/\langle f(x)\rangle$)
3. 行列計算 $k\leftarrow \deg f-1$
   $C_k\leftarrow b(A)$
   for $i=k-1,\ldots,0$; **do** $C_i\leftarrow C_{i+1}A+(\mathrm{coef}_{i+1}f)\,C_k$; **done**
   $P_\lambda\leftarrow C_k\lambda^k+\cdots+C_1\lambda+C_0.$

この計算法の特徴は, 計算機代数システムに実装した場合のプログラムの計算効率の高さである. また応用上重要なことであるが, 並列計算システムとの相性が非常によく, ほぼ線形に近い並列性を示す.

また, $f(x)$ が $\mathbf{Q}[x]$ で可約な場合には, $f(x)$ の因数分解を用いてさらに計算量を減らすことができるが, そのことについては割愛する.

参考文献

[1] 田島慎一, 樋口水紀: レゾルベントを用いた固有ベクトル計算, 数理研講究録掲載予定

[2] 小原功任, 田島慎一: 行列のスペクトル分解・固有ベクトルの分散計算, 数理研講究録掲載予定

孤立特異点の μ-constant deformation に付随する Tjurina stratification と代数的局所コホモロジー

田島 慎一 (新潟大学工学部情報工学科)

問題 X は, $\mathbf{C}^n$ の原点 O の開近傍, T (パラメータ空間) は, $\mathbf{C}^\ell$ の原点の開近傍とする. $X \times T$ 上の正則関数 $F(x,t)$ であり, μ-constant deformation を定めるものが与えられたとする. 即ち, F は以下の条件をみたすものとする.

(i) X における超曲面 $f(x) = F(x,0) = 0$ は, 原点 O を孤立特異点として持つ quasi-homogeneous 関数.

(ii) 超曲面 $F_t(x) = F(x,t) = 0$ の原点における Milnor 数は, $f(x) = 0$ の Milnor 数と一致.

このとき, 超曲面 $F_t(x) = 0$ の Tjurina 数はパラメータ t と共に変化する ([3], [5], [6]). 本稿では, Tjurina 数のパラメータ依存性を解明するための新たな枠組みを与える.

代数的局所コホモロジー $X \times T$ 上の (正則パラメータを持つ) n 次正則微分形式の成す層を $\Omega^{(n,\,0)}_{X\times T}$ とおき, $V = \{O\} \times T$ に台を持つ n 次の代数的局所コホモロジー群を $H^n_{[V]}(\Omega^{(n,\,0)}_{X\times T})$ で表す.

いま, W_F を次で定める.

$$W_F = \{\omega \in H^n_{[V]}(\Omega^{(n,\,0)}_{X\times T}) \mid \frac{\partial F}{\partial x_1}\omega = \frac{\partial F}{\partial x_2}\omega = \cdots \frac{\partial F}{\partial x_n}\omega = 0\ \}$$

W_F の要素 ω は, 正則パラメータ t を持つ $H^n_{[O]}(\Omega^n_X)$ の元と見做すことができ, 各 t 毎に, $\omega_t \in H^n_{[O]}(\Omega^n_X)$ を定める. そこで, 各 $t \in T$ に対し, $W_{F_t} = \{\omega_t \mid \omega \in W_F\}$ とおく.

さて, 関数 $F_t(x) = F(x.t)$ の形式冪級数環 $\hat{O}_{X,O}$ におけるヤコビイデアルを J_{F_t} で表す. Grothendieck 留数は, 次の非退化な pairing を定める

$$res : W_{F_t} \times \hat{O}_{X,O}/J_{F_t} \longrightarrow \mathbf{C}.$$

即ち, W_{F_t} は $\hat{O}_{X,O}/J_{F_t}$ の双対ベクトル空間である.

注意 論文 [7], [8] の結果を拡張することで, W_F を求めるアルゴリズムを構成することができる。

F_t と J_{F_t} のイデアル商を, $F_t : J_{F_t}$ で表す. このとき, ベクトル空間 $F_t W_{F_t}$ は, 剰余空間 $\hat{O}_{X,O}/(F_t : J_{F_t})$ の双対ベクトル空間となる. 従って, FW_F の構造を解析することで, Tjurina 数のパラメータ依存性等を明らかにすることが可能である.

W_F と FW_F を用いると, Tjurina stratification のみでなく Tjurina 代数の Hilbert function も同時に扱うことができる. また, 本稿で述べたことは, Newton 非退化な場合に拡張することも可能である.

参考文献

[1] R. Bahloul, Stratification by the local Hilbert-Samuel function, preprint.

[2] S. Endrass, Standard bases with respect to the Newton filtration, arXiv: math.AG/9904071

[3] G.-M. Greuel, C. Hertling, G. Pfister, Moduli space of semiquasihomogeneous singularities with fixes principal part, J. Algebraic Geom. **6** (1997), 169–199.

[4] M. Kato, The b-function of μ-constant deformation of $x^7 + y^5$, Bull. Coll. Sci. Univ. Ryukyus, **32** (1981), 5–10.

[5] O. A. Laudal, G. Pfister, Local Moduli and Singularities, Lecture Notes in Math. **1310**, (1988).

[6] B. Martin, G. Pfister, The kernel of the Kodaira-Spencer map of the versal μ -constant deformation of an irreducible plane curve singularity with C^r-action, J. Symbolic Computation **7** (1989), 527–531.

[7] Y. Nakamura, S. Tajima, On weighted-degrees for algebraic local cohomologies attaches to with semiquasihomogeneous singularities, Adv. Studies in Pure Math. **46** (2007), 105 - 117.

[8] S. Tajima, Y. Nakamura, K. Nabeshima, Standard bases and algebraic local cohomology for zero-dimensional ideals, Adv. Studies in Pure Math. to appear.

Remarks on our characterization of the unit polydisc

Akio Kodama (Kanazawa Univ.)
Satoru Shimizu (Tohoku Univ.)

Let M be a connected complex manifold and $\mathrm{Aut}(M)$ the group of all biholomorphic automorphisms of M. Then, equipped with the compact-open topology, $\mathrm{Aut}(M)$ is a topological group acting continuously on M.

In the previous paper [2], we studied the following question: *Let M and N be connected complex manifolds and assume that their holomorphic automorphism groups $\mathrm{Aut}(M)$ and $\mathrm{Aut}(N)$ are isomorphic as topological groups. Then, is M biholomorphically equivalent to N?* And, as our main result, we obtained the following intrinsic characterization of the unit polydisc Δ^n in $\mathbf{C}^n$:

Theorem A ([2, Theorem]). *Let M be a connected complex manifold of dimension n that is holomorphically separable and admits a smooth envelope of holomorphy. Assume that $\mathrm{Aut}(M)$ is isomorphic to $\mathrm{Aut}(\Delta^n)$ as topological groups. Then M is biholomorphically equivalent to Δ^n.*

Recently, in connection with this, Isaev investigated a complex manifold M having the property that its isotropy subgroup $\mathrm{Aut}_p(M)$ at every point $p \in M$ is compact, and showed the following:

Theorem B ([1, Theorem 1.2]). *Let M be a connected complex manifold of dimension n such that, for every point $p \in M$, the isotropy subgroup $\mathrm{Aut}_p(M)$ of $\mathrm{Aut}(M)$ at p is compact in $\mathrm{Aut}(M)$. If $\mathrm{Aut}(M)$ and $\mathrm{Aut}(\Delta^n)$ are isomorphic as topological groups, then M is biholomorphically equivalent to Δ^n.*

The main purpose of this talk is to announce that Theorems A and B can be generalized as follows:

Theorem 1. *Let M be a connected complex manifold of dimension n that* *is holomorphically separable and admits a smooth envelope of holomorphy. Assume that* $\mathrm{Aut}(M)$ *contains a topological, not necessarily closed, subgroup* G *that is isomorphic to* $\mathrm{Aut}(\Delta^n)$ *as topological groups. Then* M *itself is biholomorphically equivalent to* Δ^n.

Let D be an arbitrary domain in $\mathbf{C}^n$. Then it is well known that D admits a smooth envelope of holomorphy. Hence, as an immediate consequence of this theorem, we obtain the following:

Corollary 1. *Let* M *be a connected Stein manifold of dimension* n *or a domain in* $\mathbf{C}^n$. *Assume that* $\mathrm{Aut}(M)$ *contains a topological, not necessarily closed, subgroup* G *that is isomorphic to* $\mathrm{Aut}(\Delta^n)$ *as topological groups. Then* M *is biholomorphically equivalent to* Δ^n.

On the other hand, Theorem B can be extended to any symmetric bounded domain D in $\mathbf{C}^n$ as follows:

Theorem 2. *Let* M *be a connected complex manifold of dimension* n *and let* D *be a symmetric bounded domain in* $\mathbf{C}^n$. *Assume that* $\mathrm{Aut}(M)$ *contains a topological, not necessarily closed, subgroup* G *such that the isotropy subgroup* G_p *of* G *at every point* $p \in M$ *is compact and* G *is isomorphic to* $\mathrm{Aut}(D)$ *as topological groups. Then* M *is biholomorphically equivalent to* D.

Let M be a hyperbolic manifold in the sense of Kobayashi. Then its isotropy subgroup $\mathrm{Aut}_p(M)$ at each point $p \in M$ is compact; consequently, we have the following:

Corollary 2. *Let* M *be a connected hyperbolic manifold of dimension* n *and let* D *be a symmetric bounded domain in* $\mathbf{C}^n$. *Assume that* $\mathrm{Aut}(M)$ *is isomorphic to* $\mathrm{Aut}(D)$ *as topological groups. Then* M *is biholomorphically equivalent to* D.

References: [1] A. V. Isaev, *A remark on a theorem by Kodama and Shimizu*, J. Geom. Anal. **18** (2008), 795–799. [2] A. Kodama and S. Shimizu, *An intrinsic characterization of the unit polydisc*, Michigan Math. J. **56** (2008), 173–181.

変化する領域の Analytic Span の多変数関数論的性質

濱野佐知子 (松江高専・数理科学科)

1. 境界が滑らかで planar なリーマン面 $R(t)$ が複素助変数 $t \in B = \{|t| < \rho\}$ と共に滑らかに変動 $\mathcal{R} : t \in B \to R(t)$ すると仮定する. 従って, 複素2次元領域 $\mathcal{R} = \bigcup_{t\in B}(t, R(t))$ の境界 $\bigcup_{t\in B}(t, \partial R(t))$ は滑らかである. このとき, 前回 ([1][2]) は, 2定点 a, b で極 $\log|z-a|$, $-\log|z-b|$ をもつ L_i-主関数 $(i = 1, 0)$ の2階変分公式を示し, その応用を述べた. 今回は, 変化する平面領域 $D(t)$ に関して, 1定点 a (簡単のため $a = 0$ とする) に極 $\Re\{1/z\}$ をもつ L_1-主関数 $p(t, z)$ および L_0-主関数 $q(t, z)$ の定める1次の項 z の係数の実部 $\Re\{A_1(t)\}, \Re\{B_1(t)\}$ に関する2階変分公式が次の (1), (2) で与えられることを報告する. 実関数 $\Re\{A_1(t)\}$, $\Re\{B_1(t)\}$ は $(D(0), 0)$ に関する L_1-, L_0-定数と呼ばれる ([4]). ここで, $C_j(t)\,(j = 1, \ldots, \nu)$ は $D(t)$ の境界成分とし, $\partial\mathcal{D} := \bigcup_{t\in B}(t, \partial D(t))$ とする.

定義 (極 $\Re\{1/z\}$ をもつ L_1-主関数 $p(t, z)$ および L_0-主関数 $q(t, z)$).
$p(t, z), q(t, z)$ は $R(t) \setminus \{0\}$ での調和関数であって

$$\begin{cases} p(t,z) &= \Re\{\frac{1}{z}\} + 0 + \Re\{\sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) z^n\} \qquad \text{near } z = 0, \\ p(t,z) &= \text{constant } c_j(t) \text{ on } C_j(t), \quad \int_{C_j(t)} \frac{\partial p(t,z)}{\partial n_z} ds_z = 0 \quad (j = 1, \ldots, \nu). \end{cases}$$

$$\begin{cases} q(t,z) &= \Re\{\frac{1}{z}\} + 0 + \Re\{\sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) z^n\} \qquad \text{near } z = 0, \\ \frac{\partial q(t,z)}{\partial n_z} &= 0 \quad \text{on } C_j(t) \quad (j = 1, \ldots, \nu). \end{cases}$$

補題 (2階変分公式). 上述の状況のもとで

$$(1)\quad \frac{\partial^2 \Re\{A_1(t)\}}{\partial t \partial \bar{t}} = -\frac{1}{\pi} \int_{\partial D(t)} k_2(t,z) \left|\frac{\partial p(t,z)}{\partial z}\right|^2 ds_z - \frac{4}{\pi} \iint_{D(t)} \left|\frac{\partial^2 p(t,z)}{\partial t \partial \bar{t}}\right| dxdy.$$

$$(2)\quad \frac{\partial^2 \Re\{B_1(t)\}}{\partial t \partial \bar{t}} = \frac{1}{\pi} \int_{\partial D(t)} k_2(t,z) \left|\frac{\partial q(t,z)}{\partial z}\right|^2 ds_z + \frac{4}{\pi} \iint_{D(t)} \left|\frac{\partial^2 q(t,z)}{\partial t \partial \bar{t}}\right| dxdy.$$

ただし, $k_2(t, z)$ は米谷-山口 [3] の導入した $\partial\mathcal{D}$ のレビ曲率関数である.

2. $\mathbb{C}_z$ 内の有限個の滑らかな閉曲線で囲まれた閉集合 K に対して, 一変数関数論において, K の analytic span $s(K)$ が次のように定義されている [4].

$$\mathcal{F}_K := \{f \mid K \text{ の補集合 } D \text{ での単葉正則関数かつ } \lim_{z\to\infty} f(z)/z = 1 \text{ を満たす}\},$$

$$E_f(K) := \{f\ (\in \mathcal{F}_K) \text{ による像領域 } f(D) \text{ の補集合のユークリッド面積}\},$$

$$s(K) := \max\{E_f(K) \mid f \in \mathcal{F}_K\} > 0.$$

このとき, K の analytic span $s(K)$ は

$$s(K) = \Re\{B_1(D)\} - \Re\{A_1(D)\}$$

であることが示されている ([5]). ここで, $\Re\{A_1(D)\}$ および $\Re\{B_1(D)\}$ は (D, ∞) に関する L_1-定数および L_0-定数である.

今, 有限個の滑らかな閉曲線で囲まれた閉集合 $K(t) \Subset \mathbb{C}_z$ が $t \in B$ と共に滑らかに変動したとする. 各 $K(t)$, $t \in B$ の analytic span $s(K(t))$ を簡単に $s(t)$ と書く. このとき, 上述の 2 階変分公式 (1),(2) から $s(t)$ は次の意味で, 多変数関数論的に変化することを示した:

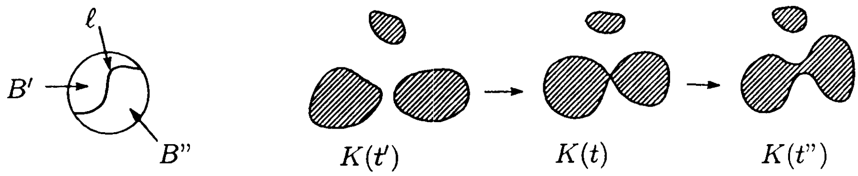
定理 1. 複素 2 次元の集合 $\mathcal{K} = \cup_{t\in B}(t, K(t))$ が $B \times \mathbb{C}_z$ の 2 次元擬凹状集合ならば, $K(t)$ の analytic span $s(t)$ は B 上の 対数的劣調和関数である.

この事実は, 次の命題に対応している:
次の減少関数 $d_n(t)$ の極限関数として定義される $K(t) \Subset \mathbb{C}_z$ の超越直径を $d(t) := \lim_{n\to\infty} d_n(t)$ とする:

$$d_n(t) := \max\left\{ \left(\Pi_{i,j=1}^{n} |z_i - z_j|\right)^{2/n(n-1)} \mid z_i, z_j \in K(t) \right\}.$$

命題. 複素 2 次元集合 $\mathcal{K}$ が $B \times \mathbb{C}_z$ の擬凹状集合ならば, $K(t)$ の超越直径 $d(t)$ は B 上の対数的劣調和関数である.

注意. 複素 2 次元集合 $\mathcal{K}$ が $B \times \mathbb{C}_z$ の擬凹状集合であることは保ちつつ, 各閉集合 $K(t)$ が下図のように急激に変化する場合でも, 超越直径 $d(t)$ の対数的劣調和性は保たれることが知られている. しかし, analytic span $s(t)$ の対数的劣調和性は保たれそうにない. 正確な議論は今後の問題である.



参考文献

[1] 濱野佐知子, L_1-主関数に関する 2 階変分公式と Schottky covering の同時一意化について. 日本数学会 2008 年度秋季総合分科会函数論分科会講演アブストラクト集, pp 47-48.

[2] 濱野佐知子, 米谷文男, 山口博史. L_0-主関数に関する 2 階変分公式と開リーマン面の span の動きについて. 日本数学会 2008 年度秋季総合分科会函数論分科会講演アブストラクト集, pp 49-50.

[3] F.Maitani and H.Yamaguchi, *Variation of Bergman metrics on Riemann surfaces*, Math. Ann. 330 (2004), 477–489.

[4] L.Sario and M.Nakai, *Classification theory of Riemann surfaces*, Springer-Verlag (1970).

[5] M.Schiffer, *The span of multiply connected domains*, Duke Math. J. 10 (1943), 209–216.

一般次元再生核に関するソレノイド補題

山口博史 (滋賀大学)

1. $D \Subset R^3$ を境界が C^ω 閉曲面 Σ の領域; $Z_1(D)$ を D での C^∞ 閉 1 形式の全体; $\gamma \Subset D$ を閉曲線とする．このとき, D での次の条件を満たす余閉 2 形式 $\Omega_\gamma = \alpha\, dy \wedge dz + \beta\, dz \wedge dx + \gamma\, dx \wedge dy$ が一意的に存在する：

$$\int_\gamma \omega = \iint_D \omega \wedge \Omega_\gamma \qquad \forall\, \omega \in Z_1(D).$$

Ω_γ が (D,γ) に関する再生核である．Ω の係数から人工的に作られる $\mathbb{R}^3$ での不連続ベクトル場 $B := \begin{cases} (\alpha,\beta,\gamma) & \text{in } D \\ 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D} \end{cases}$ を用いて次を示した：

(i) 対称トーラス T にはソレノイド (即ち，T の外には磁場が漏れない) が存在することは静電磁場で良く知られているが，閉曲面 Σ に関してもソレノイドが存在し，それはベクトル場 B である．(北大紀要 (1996); Potential theory(2001)&Math. Proc.RIA.(2008) は U. Cegrell と共著).

(ii) 領域 $D(t)$ が時間 t と共に歪曲しながら動くとき，ソレノイド $B(t,\cdot)$ のエネルギー $\|B(t,\cdot)\|^2_{D(t)}$ の 2 階変分公式が成立する (京大紀要 (1996)).

これらを証明する際に, 次が基本的であった：

命題. $V \Subset \mathbb{R}^3$ を原点中心の球; σ を原点を通る V 内の C^ω 曲面; ω_2 は V での C^ω 閉 2 形式とする．もし V での C^ω 級 1 形式 e_1 が存在して

$$(1)\ \omega_2 = de_1 \quad \text{in } V, \qquad (2)\ e_1 = 0 \quad \text{on } \sigma$$

ならば, σ のある近傍 $V_0 (\subset V)$ での C^ω 級 1 形式 $\widehat{e}_1$ が一意的に存在して

$$(1')\ \omega_2 = d\widehat{e}_1 \quad \text{in } V_0, \qquad (2')\ \widehat{e}_1 = 0 \quad \text{on } \sigma, \qquad (3')\ d * \widehat{e}_1 = 0 \quad \text{in } V_0.$$

2. ここでは, $\mathbb{R}^n$ の領域 D 内の k 次元閉曲面 γ に関する再生核 Ω_γ を用いて，上記の (i), (ii) を拡張するための準備として, 上の命題が高次元に拡張されることを示す．その際, 3 次元の場合と異なった面白い性質の問題が起こった.

ソレノイド補題. $V \Subset \mathbb{R}^n$ を原点中心の球; σ を原点を通る V 内の C^ω 曲面; ω_k は V の C^ω 閉 k 形式とする．もし V の C^ω 級 $(k-1)$ 形式 e_{k-1} が存在して

$$(1)\ \omega_k = d\, e_{k-1} \ \text{ in } V, \quad (2)\ e_{k-1} = 0 \ \text{ on } \sigma$$

ならば, σ のある近傍 V_0 の C^ω 級 $(k-1)$ 形式 $\widehat{e}_{k-1}$ が一意的に存在して

$$(1')\ \omega_k = d\widehat{e}_{k-1} \ \text{ in } V_0, \qquad (2')\ \widehat{e}_{k-1} = 0 \ \text{ on } \sigma, \qquad (3')\ d * \widehat{e}_{k-1} = 0 \ \text{ in } V_0.$$

1

補題は『条件 (1), (2) の下で，未知関数の数: ${}_nC_{k-1}$； 方程式の数: ${}_nC_k + {}_nC_{k-2}$； 初期条件の数: ${}_nC_{k-1}$ の過剰系線形偏微分方程式系が解をもつ』ことを述べている．

ここでは，曲面 $\sigma : x_n = 0$ の場合に証明の概略を述べる．$C_j^\omega(V)$ を V での C^ω 級 j 形式の全体； $Z_j^\omega(V)$ を C^ω 閉 j 形式の全体を表す．

第1段階 (形式の次元を1つ落とす) 通常の Poisson の方程式から，補題は次の命題に帰着される：

V での $(k-2)$ 形式 $\omega_{k-2} \in C_{k-2}^\omega(V)$ が条件:

$$(\mathcal{A}) \begin{cases} (1) \ \ d * \omega_{k-2} = 0 \ \text{ in } V, \\ (2) \ \ \exists\, \omega_{k-1} \in C_{k-1}^\omega(V) \ \text{ s.t. } \begin{cases} \text{(i)} \ \ \omega_{k-1} = d\omega_{k-2} & \text{on } \sigma, \\ \text{(ii)} \ \ d * \omega_{k-1} = 0 & \text{in } V \end{cases} \end{cases}$$

を満たすならば，次を満たす $\sigma_{k-2} \in C_{k-2}^\omega(V_0)$ (V_0 は σ の近傍) が存在する：

$$(\mathcal{B}) \begin{cases} (1) \ \ \Delta\sigma_{k-2} = 0 \quad \text{in } V_0, & (2) \ \ \sigma_{k-2} = \omega_{k-2} \ \text{ on } \sigma, \\ (3) \ \ d\sigma_{k-2} = d\omega_{k-2} \ \text{ on } \sigma, & (4) \ \ d * \sigma_{k-2} = 0 \ \text{ in } V_0. \end{cases}$$

第2段階 (関数としての表示) 第1段階において

$$\omega_{k-2} = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_{k-2} \le n} a_{i_1 \ldots i_{k-2}}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i_{k-2}} \ \text{ in } V,$$

$$\sigma_{k-2} = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_{k-2} \le n} c_{i_1 \ldots i_{k-2}}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i_{k-2}} \ \text{ in } V_0$$

とおく．条件 $(\mathcal{B})$ は次となる：任意の $1 \le i_1 < \ldots < i_{k-2} \le n$ に対して

$$(\mathcal{C}) \begin{cases} (1) \ \ \Delta c_{i_1 \ldots i_{k-2}} = 0 \ \text{ in } V, \quad (2) \ \ c_{i_1 \ldots i_{k-2}} = a_{i_1 \ldots i_{k-2}} \ \text{ on } \sigma, \\ (3) \ \ \frac{\partial c_{i_1 \ldots i_{k-2}}}{\partial n_x} = \dfrac{\partial a_{i_1 \ldots i_{k-2}}}{\partial n_x} \ \text{ on } \sigma, \\ (4) \ \ \displaystyle\sum_{1 \le j < i_1} \frac{\partial c_{j i_1 \ldots i_{k-3}}}{\partial x_j} + \cdots + \sum_{i_{k-2} < j \le n} (-1)^{k-3} \frac{\partial c_{i_1, i_2 \ldots i_{k-3} j}}{\partial x_j} = 0 \ \text{ in } V. \end{cases}$$

第3段階 (初期条件) 条件 $(\mathcal{C})$-(1), (2), (3) から未知関数 $c_{i_1 \ldots i_{k-2}}$ は既知関数 $a_{i_1 \ldots i_{k-2}}$ によって一意的に存在する (Cauchy-Kowalevsky の定理)．故に，$\{c_{i_1 \ldots i_{k-2}}\}$ 達が条件 $(\mathcal{C})$-(4) を満たすことを示すのが目的となった．その条件は $\mathcal{C}$-(1), (2), (3) と $(\mathcal{A})$-(1) から，$a_{i_1 \ldots i_{k-2}}$ に関する次の条件に書き換えられる：

$$(\star) \qquad \Delta a_{i_1 \ldots i_{k-3} n} = 0 \quad \text{on } \sigma \qquad (1 \le i_1 < \ldots < i_{k-3} < n).$$

結局，問題は『ω_{k-2} の条件 $(\mathcal{A})$ から $(\star)$ を導く』ことに帰着された．このことが条件 $(\mathcal{A})$-(2) よって保障されることを示す．

On a curvature property of effective divisors and its application to sheaf cohomology

(to appear in Publ. RIMS)

大沢健夫（名古屋大学・多元数理）
布施　洋（第一生命保険・主計部数理科）

Exploring a method of taming the boundary behavior of n-convex exhaustion functions, a curvature property of line bundles associated to effective Cartier divisors is proved. Cohomology vanishing theorems of the Serre type and the Kodaira-Nakano type are obtained as application.

Let X be a complex analytic space of dimension n. It is known that X is n-complete in the sense of Andreotti-Grauert [A-G] if every irreducible component of X is noncompact. This shows that the vanishing theorem for the cohomology groups of top degrees, due to Y.-T. Siu [S], is essentially contained in [A-G].

In [F], based on the 1-completeness of noncompact Riemann surfaces, an elementary proof was given to a basic fact that, for any Riemann surface R and for any point $p \in R$, the line bundle $[p]$ associated to the divisor p, is positive.

The purpose of the present note is to extend the paper [F] to establish the following.

Theorem 1. Let X be a compact complex analytic space of dimension n and let D be an effective Cartier divisor of X such that $|D|$, the support of D, intersects every n-dimensional irreducible component of X. Then the line bundle $[D]$ is n-concave (see section one for the definition).

Theorem 1 supplements [O] and [Dm]. By applying it we shall show at first the following Serre type vanishing theorem.

Theorem 2. Let M be a complex manifold, let Z be a complex analytic space, let $f : M \longrightarrow Z$ be a proper holomorphic map, let D be an effective divisor of M, let $z \in f(|D|)$, and let n be any positive integer exceeding the dimension of any compact irreducible component of $(f^{-1}(z) \setminus |D|) \cup (f^{-1}(z) \cap |D|)$.

Then, for any holomorphic vector bundle $E \longrightarrow M$, there exists a positive number m_0 such that

$$(R^n f_* \mathcal{O}(E \otimes [D]^m))_z = 0$$

holds if $m \geq m_0$. Here $\mathcal{O}(E \otimes [D]^m)$ denotes the sheaf of the germs of holomorphic sections of $E \otimes [D]^m$, and $R^n f_* \mathcal{O}(E \otimes [D]^m)$ the n-th direct image of $\mathcal{O}(E \otimes [D]^m)$ by f.

For the proof of Theorem 2, we need results from [B] and [O].
Further we obtain a refined version of Theorem 2 when E is the canonical bundle of M.

Theorem 3. In the above situation, suppose moreover that E is the canonical bundle K_M of M, and that M admits a Kähler metric. Then

$$(R^n f_* \mathcal{O}(K_M \otimes [D]))_z = 0$$

holds.

Theorem 3 may well be regarded as a supplement to the vanishing theorem of Grauert-Riemenschneider [G-R].

References

[A-G] Andreotti, A. and Grauert, H., Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, Bull. Soc. Math. France 90 (1962), 193–259.
[B] Barlet, D., Base de voisinages n-complets pour un sous-ensemble analytique compact de dimension n, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **286** (1978), 751–753.
[Dm] Demailly, J.-P., Cohomology of q-convex spaces in top degrees. Math. Z. **204** (1990), 283–295.
[F] Fuse, H., Positivity of line bundles associated to point divisors and its parameter dependence, Master Thesis (Japanese), Nagoya Univ. 2009.
[G-R] Grauert, H. and Riemenschneider, R., Verschwindungssätze für analytische kohomologiegruppen auf komplexen räumen, Invent. Math. **11** (1970), 263–292.
[O] Ohsawa, T., Completeness of noncompact analytic spaces, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 20 (1984), 683–692.
[S] Siu, Y.-T., Analytic sheaf cohomology groups of dimension n of n-dimensional complex spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **143** (1969), 77–94.

非線形不等式を満たす優調和関数の境界挙動

平田 賢太郎 (秋田大学教育文化学部)

概要

正値調和関数の境界挙動に関するFatou定理とLittlewood定理および正値優調和関数の境界挙動に関する既存の結果を紹介し，これらを非線形方程式 $-\Delta u = Vu^p$ の正値解に拡張・改良する．具体的には，非線形指数の範囲を考慮しながら，境界増大評価，Harnack型不等式，Fatou型定理，Littlewood型定理，Naïm-Doob型定理を与える．

1 歴史的背景

1.1 球上の正値調和関数の境界挙動

Laplace方程式の解を調和関数という．球上の正値調和関数の境界挙動は古くから研究されよく分かっている．B で $\mathbb{R}^n$ 内の単位球を表す．$y \in \partial B$ と $\theta > 1$ に対して，

$$\Gamma_\theta(y) = \{x \in B : \|x - y\| < \theta(1 - \|x\|)\}$$

とする．これを点 y における非接接近領域という．B 上の関数 f が $y \in \partial B$ で非接極限 ℓ をもつとは，各 $\theta > 1$ に対して

$$\lim_{\Gamma_\theta(y) \ni x \to y} f(x) = \ell$$

であるときをいう．次のFatouの定理は有名である．最初にFatou [8]が2次元円板で示し，Bray & Evans [5]により高次元へ拡張された．

定理 A (Fatou定理). B 上の正値調和関数は ∂B の殆ど至る所で非接極限をもつ．更に，極限値は球面測度に関するPoisson積分表現測度のRadon-Nikodýmの微分に等しい．

任意の正値調和関数の境界極限の存在を保証するためには，接近領域は境界に非接でなければならないか？という疑問が生じるが，Littlewoodにより次の形の定理が示された．$\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ で $\mathbb{R}^n$ 上の直交変換の全体を表す．

定理 B (Littlewood定理). γ は点 $e = (1, 0, \cdots, 0)$ を端点にもつ B 内の曲線で

$$\liminf_{\gamma \ni x \to e} \frac{\|x - e\|}{1 - \|x\|} = +\infty$$

を満たすとする．このとき，B 上の有界な正値調和関数 h で任意の $O \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\liminf_{\|x\|\to 1,\, x\in O\gamma} h(x) = 0 \neq 1 = \limsup_{\|x\|\to 1,\, x\in O\gamma} h(x)$$

となるものが存在する．

注意. 任意の $y \in \partial B$ に対して，$Oe = y$ を満たす $O \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ が存在することに注意すると，定理 B は全ての境界点で接極限の非存在を主張する．実際，Littlewood [16] は 2 次元円板で「殆ど至る所」で接極限をもたない調和関数の存在を示した．「全ての境界点」で接極限の非存在は Aikawa [1, 2] により 2 次元円板と高次元上半空間で示された．

注意. Nagel & Stein [19] や Mair & Singman [18] は，調和解析の研究を応用して，どんな非接領域にも含まれない或る接近領域に沿って極限が存在することを示した．

注意. $\mathbb{C}^n$ の単位球上の Bergman 計量に関する Laplace-Beltrami 方程式の解に対する Fatou 定理は Korányi [15] が示し，Nagel & Stein 定理は Sueiro [21] が示した．また，Littlewood 定理を [9] で与えた．

1.2 球上の正値優調和関数の境界挙動

$B(x,r)$ で中心 x，半径 r の球を表す．領域 Ω 上の関数 $u : \Omega \to (-\infty, +\infty]$ が優調和であるとは，$u \not\equiv +\infty$ なる下半連続関数で平均値の不等式 "$\overline{B(x,r)} \subset \Omega$ ならば，$u(x) \geq \mathcal{A}(u; x, r)$" を満たすときをいう．ここに，$\mathcal{A}(u; x, r)$ は u の $B(x,r)$ 上の体積平均を表す．Ω の Green 関数 $G_\Omega(x,y)$ と測度 μ に対して，関数 $x \mapsto \int_\Omega G_\Omega(x,y)d\mu(y)$ が恒等的に $+\infty$ でないとき，この関数を測度 μ の Green ポテンシャルという．Riesz の分解定理により，Ω 上の正値優調和関数 u は

$$u(x) = h(x) + \int_\Omega G_\Omega(x,y)\, d\mu_u(y) \quad (x \in \Omega)$$

と表される．ただし，h は Ω における u の最大調和劣関数であり，μ_u は Ω 上の測度で超関数の意味で $\mu_u = -\Delta u$ を満たす．従って，優調和関数の境界挙動を知るためには Green ポテンシャルを調べればよい．次が Littlewood [17] により示された．

定理 C. B 上の Green ポテンシャルは ∂B の殆ど至る所で radial 極限 0 をもつ．

Green ポテンシャルの非接極限の存在は一般には保証されない．そこで，測度 μ が Lebesgue 測度に関して絶対連続である場合に非接極限の存在が研究された．Tolsted [23, 24, 25] は 2 次元円板において Green ポテンシャル $\int_B G_B(x,y)f(y)dy$ が非接極限をもつための密度関数 f に対する幾つかの十分条件を与えた．彼の結果を改良し，Arsove & Huber [4] が次の結果を 2 次元のときに示し，Wu [26] が高次元の場合に拡張した．

定理 D. f は B 上の非負値可測関数で $\int_B (1 - \|y\|) f(y)dy < \infty$ を満たすとする．更に，次のいずれかを満たすとする．

(i) 或る $q>1$ に対して $\int_B (1-\|y\|)^{2q-1} f(y)^q dy < \infty$.

(ii) 定数 C が存在して $f(y) \le C(1-\|y\|)^{-2}$ $(y \in B)$.

このとき，$\int_B G_B(x,y) f(y) dy$ は ∂B の殆ど至る所で非接極限 0 をもつ.

1.3 一般領域上の極限定理

領域 Ω に対して，Δ で Martin 境界，Δ_1 で極小 Martin 境界，$K_\Omega(\cdot, y)$ で $y \in \Delta$ に対する Martin 核を表す．Martin の積分表現定理により，Ω 上の正値調和関数 h に対して，Δ 上の測度 ν_h で $\nu_h(\Delta \setminus \Delta_1) = 0$ なるものが存在して $h(x) = \int_{\Delta_1} K_\Omega(x,y) d\nu_h(y)$ と一意的に表される．ν_h を h の Martin 表現測度とよぶ．Ω 上の正値優調和関数 u と集合 $E \subset \Omega$ に対して，

$$R_u^E(x) = \inf\{v(x)\}$$

とする．ただし，下限は E 上で $u \le v$ を満たす Ω 上の正値優調和関数 v に関してとる．R_u^E の下半連続化を $\widehat{R}_u^E$ で表す．E が $y \in \Delta_1$ で極小尖細であるとは，

$$\widehat{R}^E_{K_\Omega(\cdot, y)}(x) < K_\Omega(x,y)$$

を満たす $x \in \Omega$ が存在するときをいう．Ω 上の関数 f が $y \in \Delta_1$ で極小細極限 ℓ をもつとは，点 y で極小尖細な集合 $E \subset \Omega$ が存在して

$$\lim_{\Omega \setminus E \ni x \to y} f(x) = \ell$$

であるときをいう．Naïm [20] と Doob [7] により次が示された.

定理 E (Naïm-Doob 定理). u, v は Ω 上の正値優調和関数とし，それらの最大調和劣関数の Martin 表現測度を ν_u, ν_v とする．このとき，u/v は ν_v に関して Δ_1 上の殆ど至る所で極小細極限をもつ．更に，極限値は ν_v に関する ν_u の Radon-Nikodým の微分に等しい.

この定理において，極小細極限に関する極小尖細集合は関数 u, v に依存するので，接近領域の形は不明である．また，調和関数の場合でさえ，非接極限の存在は直ちに知ることはできず，更なる議論が必要である．Ω が有界 Lipschitz 領域 (又はより一般に一様領域) ならば，Ω の Martin 境界および極小 Martin 境界は位相境界 $\partial\Omega$ と同一視できる ([3, 13, 14] を参照)．また，$y \in \partial\Omega$ に収束する非接点列 $\{x_j\} \subset \Omega$ と $0 < \beta < 1$ に対して，泡集合 $\bigcup_j B(x_j, \beta\delta_\Omega(x_j))$ は点 y で極小尖細でないことがいえる．ここに，$\delta_\Omega(x)$ は点 x から境界 $\partial\Omega$ までの距離を表す．調和関数の Harnack 不等式を用いて次が示された ([3, 13, 22] を参照).

定理 F. 有界 Lipschitz 領域 Ω 上の正値調和関数は調和測度に関して $\partial\Omega$ 上の殆ど至る所で非接極限をもつ.

注意. 極小細極限と非接極限の関係は最初に Brelot & Doob [6] が上半空間で調べた.

2 非線形不等式を満たす優調和関数の族

天体物理学において現れる非線形方程式 $-\Delta u = u^p$ は星の内部構造 (密度分布・圧力分布・質量分布) を記述するモデル方程式であり，Lane-Emden 方程式と呼ばれている (詳細は [27] を参照)．この方程式の正値解の存在は常微分方程式の方法や変分法を用いて古くから研究され，今日ではもっと一般の非線形項を伴う場合に研究されている．本講演では，上記のような非線形方程式の正値解の境界挙動をみる．より一般に，Riesz 分解に現れる測度 μ_u が Lebesgue 測度に関して絶対連続である正値優調和関数 u が次の非線形不等式を満たす場合に議論する．Radon-Nikodým の密度関数を f_u で表す．$c > 0$，$p \geq 1$，$\alpha \geq 0$ とし，

$$f_u(x) \leq c\,\delta_\Omega(x)^{-\alpha} u(x)^p \quad (\text{a.e. } x \in \Omega) \tag{2.1}$$

を満たす Ω 上の正値優調和関数 u の全体を $\mathcal{S}_{p,\alpha}(\Omega)$ で表す．この関数族は定数 c にも依存するが，以下の結果において c に注意を払う必要はないので明記しない．

3 結果

この節では，Ω は有界 Lipschitz 領域とする．また，特に重要でない正定数を C で表すが全て異なるものとする．結果論ではあるが，$\mathcal{S}_{p,\alpha}(\Omega)$ に関する興味深い性質は以下で述べる境界増大評価に深く関係する．先立って，重要な指数を導入する．$x_0 \in \Omega$ は固定点とし，

$$g_\Omega(x) = \min\{1, G_\Omega(x, x_0)\}$$

とする．そこで，

$$i(t) = \inf\left\{\frac{g_\Omega(x)}{\delta_\Omega(x)^t} : x \in \Omega\right\}$$

とし，

$$\tau = \sup\{t > 0 : i(t) = 0\} \tag{3.1}$$

と定義する．これは Green 関数の境界減衰度を表す指数である．実際，有界 Lipschitz 領域では $1 \leq \tau < \infty$ であり，$\tau = \inf\{t > 0 : i(t) > 0\}$ である．特に，有界 $C^{1,1}$-領域では $\tau = 1$ である．

定理 3.1 (境界増大評価 [12])．τ は (3.1) のものとし，

$$1 \leq p \leq \frac{n+\tau}{n+\tau-2}, \qquad 0 \leq \alpha < n + \tau - p(n+\tau-2)$$

とする．このとき，定数 $C = C(c, \alpha, p, n, \Omega)$ と $\beta = \beta(p, n)$ が存在して，任意の $u \in \mathcal{S}_{p,\alpha}(\Omega)$ に対して

$$u(x) \leq \frac{C}{g_\Omega(x)\delta_\Omega(x)^{n-2}} u(x_0)^\beta \quad (x \in \Omega) \tag{3.2}$$

が成り立つ．$i(\tau) > 0$ ならば，$\alpha = n + \tau - p(n+\tau-2)$ の場合にも (3.2) が成り立つ．

注意. $y \in \partial\Omega$ とし，$\Gamma_\theta(y) = \{x \in \Omega : \|x - y\| < \theta\delta_\Omega(x)\}$ とする．このとき，

$$g_\Omega(x)K_\Omega(x,y) \approx \delta_\Omega(x)^{2-n} \quad (x \in \Gamma_\theta(y))$$

が成立する ([10])．従って，(3.2) の右辺は Ω 上の正値調和関数の最大境界増大度である．

注意. 定理 3.1 と (2.1) より，f_u は局所有界である．ゆえに，定理 3.1 の p と α に対して $\mathcal{S}_{p,\alpha}(\Omega) \subset C^1(\Omega)$ が従う．

定理 3.1 から得られる重要な系を述べる．次の 2 つの系において，$p \geq 1$ と $\alpha \geq 0$ は定理 3.1 の範囲のものとする．

系 3.2 (逆平均値の不等式 [12]). $u \in \mathcal{S}_{p,\alpha}(\Omega)$ とし，d は Ω 上の関数で $d(x) \geq 2$ $(x \in \Omega)$ とする．このとき，次を満たす定数 $C = C(c, \alpha, p, n, \Omega)$ が存在する：

$$\rho_d(x,r) = Cu(x_0)^{\beta(p-1)} \frac{r^{2-\alpha-(p-1)(n-2)}}{g_\Omega(x)^{p-1}d(x)^{\alpha+(p-1)(n-2)}}$$

とすると，任意の $x \in \Omega$ と $0 < r \leq \delta_\Omega(x)/d(x)$ に対して

$$\{1 - \rho_d(x,r)\}u(x) \leq \mathcal{M}(u; x, r) \leq \mathcal{A}(u; x, r) \leq u(x)$$

が成り立つ．ここに，$\mathcal{M}(u; x, r)$ は u の $\partial B(x,r)$ 上の球面平均を表し，$\mathcal{A}(u; x, r)$ は u の $B(x,r)$ 上の体積平均を表す．

定数 $C = C(c, \alpha, p, n, \Omega)$ が存在して，任意の $\varepsilon > 0$ に対して関数 d を

$$d(x) \geq C\sqrt{\frac{u(x_0)^{\beta(p-1)}}{\varepsilon}} \quad (x \in \Omega)$$

にとると，すべての $x \in \Omega$ と $0 < r \leq \delta_\Omega(x)/d(x)$ に対して

$$\rho_d(x,r) \leq \varepsilon$$

が従う．ゆえに，次の Harnack 型不等式を得る．

系 3.3 (Harnack 型不等式 [12]). $M > 0$ とし，$u \in \mathcal{S}_{p,\alpha}(\Omega)$ は $u(x_0) \leq M$ を満たすとする．また，$0 < \kappa < 1$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，定数 $d_\varepsilon = d(\varepsilon, M, c, \alpha, p, n, \Omega)$ が存在して任意の $x \in \Omega$，$0 < r \leq \delta_\Omega(x)/4d_\varepsilon$ と $y \in B(x, \kappa r)$ に対して

$$\frac{1-\varepsilon}{(1+\kappa)^n}u(x) \leq u(y) \leq \frac{(1+\kappa)^n}{1-\varepsilon}u(x)$$

が成り立つ．

この系から，比 u/v の非接極限の存在がいえる．

定理 3.4 (Naïm-Doob 型定理 [12]). τ は (3.1) のものとし,

$$1 \leq p \leq \frac{n+\tau}{n+\tau-2}, \qquad 0 \leq \alpha < n+\tau-p(n+\tau-2)$$

とする ($i(\tau)>0$ ならば $\alpha = n+\tau-p(n+\tau-2)$ でもよい). $u, v \in \mathcal{S}_{p,\alpha}(\Omega)$ とし, ν_v を v の最大調和劣関数の Martin 表現測度とする. このとき, u/v は測度 ν_v に関して $\partial\Omega$ 上の殆ど至る所で非接極限をもつ. 特に, $u/K_\Omega(\cdot, y)$ は $y \in \partial\Omega$ で非接極限をもつ.

以上の結果において, 範囲 $p \leq (n+\tau)/(n+\tau-2)$ と $\alpha \leq n+\tau-p(n+\tau-2)$ は最良である.

定理 3.5 ([12]). Ω は有限多面体領域とする. τ は (3.1) のものとし,

$$p > \frac{n+\tau}{n+\tau-2}, \qquad \alpha \geq 0$$

または

$$p \geq 1, \quad \alpha > n+\tau-p(n+\tau-2)$$

とする. このとき, $u \in \mathcal{S}_{p,\alpha}(\Omega) \cap C^2(\Omega)$ と或る境界点における非接点列 $\{x_j\} \subset \Omega$ が存在して

$$\limsup_{j\to+\infty} g_\Omega(x_j)\delta_\Omega(x_j)^{n-2}u(x_j) = +\infty$$

となる.

定理 3.4 において $v \equiv 1 \in \mathcal{S}_{p,\alpha}(\Omega)$ とすると, u が調和測度に関して $\partial\Omega$ 上の殆ど至る所で非接極限をもつことがいえる. 実は, このことはもっと広い範囲の p と α に対して成立する.

定理 3.6 (Fatou 型定理 [11]).

$$1 \leq p < \frac{n}{n-2}, \qquad 0 \leq \alpha \leq 2$$

ならば, $u \in \mathcal{S}_{p,\alpha}(\Omega)$ は調和測度に関して $\partial\Omega$ 上の殆ど至る所で非接極限をもつ.

定理 3.6 において範囲 $p < n/(n-2)$ と $\alpha \leq 2$ はほぼ最良である.

定理 3.7 ([11]).

$$p > \frac{n}{n-2} \quad \text{または} \quad \alpha > 2$$

とする. このとき, 各 $y \in \partial B$ と $\theta > 1$ に対して

$$\limsup_{\Gamma_\theta(y)\ni x\to y} u(x) = +\infty$$

となる $u \in \mathcal{S}_{p,\alpha}(B) \cap C^2(B)$ が存在する.

定理 3.8 (Littlewood 型定理 [11]). $p \geq 1$, $\alpha < 2$, $c > 0$（$p = 1$ のときは十分小）とする．V は B 上の可測関数で $|V(x)| \leq c(1 - \|x\|)^{-\alpha}$ (a.e. $x \in B$) を満たすとし，γ は点 $e = (1, 0, \cdots, 0)$ を端点をもつ B 内の曲線で

$$\liminf_{\gamma \ni x \to e} \frac{\|x - e\|}{1 - \|x\|} = +\infty$$

を満たすとする．このとき，超関数の意味で $-\Delta u = V u^p$ を満たす正値有界な $u \in C(B)$ が存在して任意の $O \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\liminf_{\|x\| \to 1,\, x \in O\gamma} u(x) \neq \limsup_{\|x\| \to 1,\, x \in O\gamma} u(x)$$

となる．

参考文献

[1] H. Aikawa, *Harmonic functions having no tangential limits*, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), no. 2, 457–464.

[2] ———, *Harmonic functions and Green potentials having no tangential limits*, J. London Math. Soc. (2) **43** (1991), no. 1, 125–136.

[3] ———, *Boundary Harnack principle and Martin boundary for a uniform domain*, J. Math. Soc. Japan **53** (2001), no. 1, 119–145.

[4] M. Arsove and A. Huber, *On the existence of non-tangential limits of subharmonic functions*, J. London Math. Soc. **42** (1967), 125–132.

[5] H. E. Bray and G. C. Evans, *A Class of Functions Harmonic within the Sphere*, Amer. J. Math. **49** (1927), no. 2, 153–180.

[6] M. Brelot and J. L. Doob, *Limites angulaires et limites fines*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **13** (1963), fasc. 2, 395–415.

[7] J. L. Doob, *A non-probabilistic proof of the relative Fatou theorem*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **9** (1959), 293–300.

[8] P. Fatou, *Séries trigonométriques et séries de Taylor*, Acta Math. **30** (1906), no. 1, 335–400.

[9] K. Hirata, *Sharpness of the Korányi approach region*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), no. 8, 2309–2317 (electronic).

[10] ———, *Estimates for the products of the Green function and the Martin kernel*, Nagoya Math. J. **188** (2007), 1–18.

[11] ———, *Boundary behavior of superharmonic functions satisfying nonlinear inequalities in uniform domains*, Trans. Amer. Math. Soc. (to appear)

[12] ———, *Properties of superharmonic functions satisfying nonlinear inequalities in non-smooth domains*, preprint.

[13] R. A. Hunt and R. L. Wheeden, *Positive harmonic functions on Lipschitz domains*, Trans. Amer. Math. Soc. **147** (1970), 507–527.

[14] D. S. Jerison and C. E. Kenig, *Boundary behavior of harmonic functions in nontangentially accessible domains*, Adv. in Math. **46** (1982), no. 1, 80–147.

[15] A. Korányi, *Harmonic functions on Hermitian hyperbolic space*, Trans. Amer. Math. Soc. **135** (1969), 507–516.

[16] J. E. Littlewood, *On a theorem of Fatou*, J. London Math. Soc. **2** (1927), 172–176.

[17] ———, *On functions subharmonic in a circle (II)*, Proc. London Math. Soc. (2) **28** (1928), 383–394.

[18] B. A. Mair and D. Singman, *A generalized Fatou theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. **300** (1987), no. 2, 705–719.

[19] A. Nagel and E. M. Stein, *On certain maximal functions and approach regions*, Adv. in Math. **54** (1984), no. 1, 83–106.

[20] L. Naïm, *Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potentiel*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **7** (1957), 183–281.

[21] J. Sueiro, *On maximal functions and Poisson-Szegő integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. **298** (1986), no. 2, 653–669.

[22] J. C. Taylor, *Fine and nontangential convergence on an NTA domain*, Proc. Amer. Math. Soc. **91** (1984), no. 2, 237–244.

[23] E. Tolsted, *Limiting values of subharmonic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950), 636–647.

[24] ———, *Non-tangential limits of subharmonic functions*, Proc. London Math. Soc. (3) **7** (1957), 321–333.

[25] ———, *Non-tangential limits of subharmonic functions. II*, J. London Math. Soc. **36** (1961), 65–68.

[26] J. M. Wu, *L^p-densities and boundary behaviors of Green potentials*, Indiana Univ. Math. J. **28** (1979), no. 6, 895–911.

[27] 佐藤文隆, 宇宙物理, 岩波書店, (2007)

群作用を用いてジュリア集合を記述する

石井　豊
九州大学数理学研究院

1. Introduction: Hénon maps in $\mathbb{C}^2$

複素エノン写像とは、$(c,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times$ に対して

$$f_{c,b} : (x,y) \longmapsto (x^2 + c - by, x)$$

で与えられる $\mathbb{C}^2$ の多項式自己同型写像のことである。より一般に、次数が2以上の1変数多項式 $p(x)$ と $b \in \mathbb{C}^\times$ に対して

$$f_{p,b} : (x,y) \longmapsto (p(x) - by, x)$$

を**一般化複素エノン写像**と呼ぶ。以下では、これらの有限個の合成：

$$f = f_{p_1,b_1} \circ \cdots \circ f_{p_k,b_k}$$

がなす $\mathbb{C}^2$ の複素力学系を考える。f が多項式の逆写像 f^{-1} を持つことは容易にわかる。f の次数を $d = \deg p_1 \cdots \deg p_k$ として定義する。

上の形の多項式自己同型 f に対して、前方軌道 $\{f^n(x,y)\}_{n\geq 0}$ が有界になる初期点 $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ の全体を K^+、後方軌道 $\{f^{-n}(x,y)\}_{n\geq 0}$ が有界になる初期点 $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ の全体を K^- とし、$J^+ \equiv \partial K^+$、$J^- \equiv \partial K^-$ とおく。そして $J_f \equiv J^+ \cap J^-$ と定め、これを f の**ジュリア集合**と呼ぶ。

一般に、複素エノン写像（或いは上の形の f）のジュリア集合は $\mathbb{C}^2$ 内の複雑な形状をした集合となり、その位相的あるいは組み合わせ論的性質を解析することはたいへん興味深い問題である。本講演の目標は、ある群作用を用いてこのジュリア集合を記述することにある。なぜそのような記述が有益なのかは後述する。

この様にジュリア集合を組み合わせ論的に記述する方法は、講演者の知る限り、現在までに以下の3通りが存在した。

(a) ソレノイドによる記述 (Bedford–Smillie [BS])

連結かつ双曲的なジュリア集合 J_f は**ソレノイド** Σ によって「パラメトライズ」できる。つまり

$$\Sigma \equiv \varprojlim(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; \delta(\theta) = d\theta)$$

とすると、連結性と双曲性の仮定の元では、$\Phi \circ \delta = f \circ \Phi$ を満たす連続な全射：

$$\Phi : \Sigma \longrightarrow J_f$$

が存在する。但しここで、$\delta : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の Σ への持ち上げを再び δ で表した。$z \in J_f$ に対して、$\Phi(\hat{\theta}) = z$ となる $\hat{\theta} \in \Sigma$ を z の外周角と呼ぼう。

Date: 2009 年 9 月, 大阪大学における日本数学会函数論分科会特別講演の予稿.

(b) オートマトンによる記述 (Oliva [O])

$\{1,\cdots,d\}^{\mathbf{Z}}$ を d 個のシンボルの両側無限列がなす記号空間、σ を $\{1,\cdots,d\}^{\mathbf{Z}}$ 上のシフト写像とすると、$\{1,\cdots,d\}^{\mathbf{Z}}$ 上の自然な同値関係 $\sim$ によって商力学系 $\sigma/_\sim:\{1,\cdots,d\}^{\mathbf{Z}}/_\sim\to\{1,\cdots,d\}^{\mathbf{Z}}/_\sim$ は $\delta:\Sigma\to\Sigma$ と位相共役になる。対応する射影を $\mathrm{pr}:\{1,\cdots,d\}^{\mathbf{Z}}\to\Sigma$ で表わそう。このとき (a) で述べた外周角の同一視のルールは、**オートマトン**と呼ばれる２通りのラベリングを各辺に持つ有向グラフで記述される。つまり、各辺が

$$\begin{pmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{pmatrix}$$

(但し $\varepsilon,\varepsilon'\in\{1,\cdots,d\}$) なる記号でラベリングされた有限有向グラフが存在し、$\{1,\cdots,d\}^{\mathbf{Z}}$ の２つの元 $\underline{\varepsilon}=(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ と $\underline{\varepsilon}'=(\varepsilon'_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ に対して、

$$\Phi\circ\mathrm{pr}(\underline{\varepsilon})=\Phi\circ\mathrm{pr}(\underline{\varepsilon}')$$

が成り立つこととグラフ内のある両側無限な道に沿ったラベリングの列が

$$\cdots\begin{pmatrix}\varepsilon_{n-1}\\ \varepsilon'_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_{n}\\ \varepsilon'_{n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_{n+1}\\ \varepsilon'_{n+1}\end{pmatrix}\cdots$$

となることが同値になる。

(c) ハバード木による記述 (I [I2])

あるクラスに属するエノン写像（或いは上の形の f）のジュリア集合は、幾つかの位相円が付与された２つの木（tree）の空間とそれらの間の写像の組：

$$\iota,\tau:\mathcal{T}^1\longrightarrow\mathcal{T}^0$$

が生成する帰納系の帰納極限として記述できる。上の４つ組 $(\mathcal{T}^0,\mathcal{T}^1;\iota,\tau)$ のことを**ハバード木**という。ハバード木の構成の詳細は第４章で述べる。

ちなみに上の Oliva によるオートマトンの構成は、残念ながら今のところ２つの具体的なエノン写像に対してしか得られていない。しかも、それらが本当にエノン写像のジュリア集合の同値関係を与えているかは数学的に証明されていないのだ。というのも、Oliva はコンピュータで描かれた絵をもとにして外周角同士の同一視のルールを丹念に目で読むことで[1]オートマトンを構成したからである！ところがその一方で、この様なオートマトンによるソレノイドの同値関係の記述は、ジュリア集合の性質を調べる上で非常に取り扱いやすい。以上のような事情から、

オートマトンをもっと系統的に構成したい

と望むのは自然なことであろう。実はこの願望を実現する為の方法として、ある群の作用を経由してハバード木からオートマトンを構成するという方針が考えられるのである。今回ここで述べる結果 [I3] は、この様な方向性の研究の一つのステップと捉えることができる。なお、これら３通りの記述同士の関係の総合的な俯瞰については、第５章を参照して頂きたい。

[1]スゴい…。

2. Iterated monodromy groups

さて、前章で述べた群作用とは、反復モノドロミー群 (iterated monodromy group) と呼ばれる群のある根付き正則無限木への作用のことであり、弧状連結空間の被覆写像に対して Nekrashevych et al [N1, BGN] によって初めて考察された。ここではまず彼らの理論を紹介する。

いま、X^0 を弧状連結な位相空間、$X^1 \subset X^0$ をその開部分集合とし、$f : X^1 \to X^0$ を次数 $d \geq 2$ の被覆写像とする。このような $f : X^1 \to X^0$ を**部分自己被覆**と呼ぶことにしよう。$b \in X^0$ を固定し、その逆像の列の非連結和：

$$T_b^* \equiv \bigsqcup_{n \geq 0} f^{-n}(b)$$

を考える。更に、$y \in f^{-n}(b)$ と $x \in f^{-n-1}(b)$ が $f(x) = y$ を満たしている時その時に限り、y と x を辺で結ぶ。すると b を根とする d-正則な根付き木 (rooted tree) が得られる。以後これを T_b で表わし、$f : X^1 \to X^0$ の**逆像木**と呼ぶ。空間 X^0 は弧状連結と仮定したので、根付き木としての T_b は b の取り方に依らない。

f は被覆写像なので、基本群 $\pi_1(X^0, b)$ は各 $f^{-n}(b)$ に作用し、従って逆像木 T_b に作用する。この作用は共役を除いて基点 $b \in X^0$ の取り方に依存しない。しかし一般に、この基本群の作用は忠実ではない。そこで、$\phi : \pi_1(X^0, b) \to \mathfrak{S}(T_b)$ をこの作用が表わす準同型として以下のように定義する。

Definition 2.1.

$$\mathrm{IMG}(f) \equiv \pi_1(X^0, b)/\mathrm{Ker}(\phi)$$

を弧状連結な X^0 の部分自己被覆 $f : X^1 \to X^0$ の**反復モノドロミー群**と呼ぶ。

次に逆像木を記号空間で表現しよう。$\Pi = \{1, \cdots, d\}$ とし、全単射 $\lambda : \Pi \to f^{-1}(b)$ 及び b から $\lambda(\pi) \in f^{-1}(b)$ へ向かう道 l_π の族 $\{l_\pi\}_{\pi \in \Pi}$ を一つ固定する。全ての $\pi_1 \cdots \pi_n \in \Pi^n$ に対して道 $l_{\pi_1 \cdots \pi_n}$ が定義されたとき、$\pi_1 \cdots \pi_{n+1} \in \Pi^{n+1}$ に対して $l_{\pi_1 \cdots \pi_{n+1}} \equiv l_{\pi_1} \cdot l'_{\pi_2 \cdots \pi_{n+1}}$ と定める。ここで $\cdot$ は道同士の結合を表わし、$l'_{\pi_2 \cdots \pi_{n+1}}$ は $l_{\pi_2 \cdots \pi_{n+1}}$ の被覆写像 f による持ち上げであってその始点が l_{π_1} の終点と一致するものを表わす。このようにして、全ての $\pi_1 \cdots \pi_n \in \Pi^n$ に対して帰納的に道 $l_{\pi_1 \cdots \pi_n}$ が定義される。Π 上の有限語 $\pi_1 \cdots \pi_n \in \Pi^n$ に対して $l_{\pi_1 \cdots \pi_n}$ の終点を対応させると、これは全単射 $\widetilde{\Lambda} : \Pi^n \to f^{-n}(b)$ を定め、Π 上の有限語全体 Π^* から逆像木の頂点全体 T^* への全単射 $\widetilde{\Lambda} : \Pi^* \to T^*$ を導く。但し、空語 $\emptyset \in \Pi^*$ に対しては $\widetilde{\Lambda}(\emptyset) \equiv b$ と約束する。すると T^* 上での反復モノドロミー群 $\mathrm{IMG}(f)$ の作用は Π^* 上の作用を誘導する。この誘導された作用を Π^* 上の**標準作用**という。

この標準作用を用いて、記号空間内に同値関係が以下の様に定義される。$\Pi^{\mathbf{N}}$ 内の二つの記号列 $\underline{\pi} = (\pi_n)_{n \geq 0}$ と $\underline{\pi}' = (\pi'_n)_{n \geq 0}$ が**漸近同値**であるとは、有限集合 $F \subset \mathrm{IMG}(f)$ と $M \geq 0$ が存在して、各 $n \geq M$ ごとに

$$g_n(\pi_0 \cdots \pi_n) = \pi'_0 \cdots \pi'_n$$

となる $g_n \in F$ が存在することである。このとき、$\underline{\pi} \sim_{\mathrm{asym}} \underline{\pi}'$ と書く。

Definition 2.2.

$$\mathcal{L}_{\mathrm{IMG}(f)} \equiv \Pi^{\mathbb{N}}/_{\sim_{\mathrm{asym}}}$$

を反復モノドロミー群 IMG(f) の**極限空間**と呼ぶ。

このとき、$\Pi^{\mathbb{N}}$ の上のシフト写像は連続写像 $s : \mathcal{L}_{\mathrm{IMG}(\mathfrak{T})} \to \mathcal{L}_{\mathrm{IMG}(\mathfrak{T})}$ を誘導する。

ここで一つ、力学系的に重要な仮定が必要となる。X^0 を可微分多様体としたとき、部分自己被覆 $f : X^1 \to X^0$ が**拡大的**であるとは、X^0 上に適当な計量、定数 $C > 0$ と $\kappa > 1$ が存在して、全ての $n \geq 0$ と $f^{-n}(X^0)$ での全ての接ベクトル v に対して $\|Df^n(v)\| \geq C\kappa^n \|v\|$ が成り立つことである。実はこの条件も群の言葉で表現出来ることが知られている [N1]。

集合 $X^{+\infty} \equiv \bigcap_{n\geq 0} f^{-n}(X^0)$ 上では f の無限回反復合成を考えることが出来る。次の定理は、$X^{+\infty}$ 上の f の力学系がその反復モノドロミー群の作用という代数的な情報で復元可能であることを示している。

Theorem 2.3 ([N1, BGN]). 弧状連結な空間 X^0 の部分自己被覆 $f : X^1 \to X^0$ が拡大的なとき、$f : X^{+\infty} \to X^{+\infty}$ は $s : \mathcal{L}_{\mathrm{IMG}(\mathfrak{T})} \to \mathcal{L}_{\mathrm{IMG}(\mathfrak{T})}$ と位相共役。

この定理が適用可能な例として、$\mathbb{CP}^1$ 上の拡大的な有理関数が挙げられる。この場合、うまく X^0 を取ると X^∞ はそのジュリア集合と一致するので、反復モノドロミー群がジュリア集合の組み合わせ論的な情報を再現することが分かる。その一方、エノン写像は $\mathbb{C}^2$ の微分同相写像であり、次数が２以上の被覆写像にはなり得ない。しかもエノン写像の場合は、ジュリア集合上で縮小的な方向を持つことは避けられず、従って拡大性という仮定が決して満たされない。以上の２点が、エノン写像に対して反復モノドロミー群を定義しようとする上での本質的な障害となる。

3. Hyperbolic complex Henon maps

前章で $\mathbb{CP}^1$ の有理関数が持つ力学系的な「良い」性質として拡大性を挙げたが、エノン写像の場合の対応する力学系的性質は**双曲性**と呼ばれるものである。これは大雑把に言って、ジュリア集合上の接バンドルが Df-共変な拡大方向と縮小方向に一様に分解する、という性質である。この性質を導くための枠組み（Definition 3.3 にある双曲的システムの定義を参照）は以下の構成において鍵となる。その一方で、双曲性の正確な定義そのものは必要無いので、ここでは述べない。

そもそも双曲的なエノン写像の例はどのくらいあるのだろうか？実はごく最近まで、拡大的な１変数多項式の摂動として得られるものしか知られていなかった。つまり、$p(x)$ を拡大的な多項式としたとき $b_* > 0$ が存在して、$0 < |b| < b_*$ ならば一般化エノン写像 $f = f_{p,b}$ はそのジュリア集合上で双曲的になることが証明されていた（Hubbard–ObersteVorth、Fornæss–Sibony、Bedford–Smillie)。しかしこのとき、力学系 $f : J_f \to J_f$ は $p(x)$ の逆極限と位相共役になってしまう [HO]。つまりこのエノン写像は、本質的に１次元的な挙動しか示さないのである。この様に拡大的な多項式の小さな摂動で得られるエノン写像の位相共役類を**平面的**（planar）であると呼ぼう。非平面的な双曲的エノン写像の例はおよそ２０年間知られていなかったが、数年前に筆者は、複素解析の手法と計算機上の精度保証計算を組み合わせることで、真に２次元的な力学系を持つ双曲的複素エノン写像を初めて発見した。

Theorem 3.1 (I [I1]). 3次の双曲的エノン写像で、非平面的なものが存在する。

実際、その写像は $f(x,y)=(-x^3-1.35-0.2y,x)$ で与えられる。

この定理の双曲性を示す上で重要なピースとなるのが、次のような錐場である。A_x と A_y を $\mathbb{C}$ の連結な有界開集合とし、$|\cdot|_{A_x}$ と $|\cdot|_{A_y}$ を各々のポアンカレ計量とする。$p\in\mathcal{A}=A_x\times A_y$ に対して

$$C_p^h\equiv\left\{v=(v_x,v_y)\in T_p\mathcal{A}:|v_x|_{A_x}\geq|v_y|_{A_y}\right\}$$

とおき、$v\in C_p^h$ に対して $\|v\|_h\equiv|D\pi_x(v)|_{A_x}$ と定める。上の不等号を入れ替えて C_p^v と $\|v\|_v$ が定まる。$(\{C_p^h\}_{p\in\mathcal{A}},\|\cdot\|_h)$ を水平的ポアンカレ錐場、$(\{C_p^v\}_{p\in\mathcal{A}},\|\cdot\|_v)$ を垂直的ポアンカレ錐場という。

Definition 3.2. $A_x\times A_y$ の形の集合と双正則で、対応する水平的ポアンカレ錐場と垂直的ポアンカレ錐場が付与された $\mathbb{C}^2$ 内の開集合を**ポアンカレ箱**と呼ぶ。

$\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^N$ をポアンカレ箱の族とし、$\mathcal{A}=\bigcup_{i=1}^N\mathcal{A}_i$ と書く。$\Gamma\subset\{1,\cdots,N\}^2$ とする。

Definition 3.3. $f:\mathcal{A}\cap f^{-1}(\mathcal{A})\to\mathcal{A}$ が Γ 上の**双曲的システム**であるとは、任意の $(i,j)\in\Gamma$ に対して $f:\mathcal{A}_i\cap f^{-1}(\mathcal{A}_j)\to\mathcal{A}_j$ が水平的ポアンカレ錐場を不変にかつ一様に拡大し、垂直的ポアンカレ錐場を不変にかつ一様に縮小することである。

エノン写像の双曲性は上の定義から（ほぼ）従う。また、エノン写像が双曲的システムになるためのチェック可能かつ位相的な判定条件が存在する [I1]。

4. Hubbard trees for Henon maps

前章で述べた双曲的システムに対しては、ハバード木と呼ばれる組み合わせ論的なモデルを構成することが可能である [I2]。この章では、ハバード木の構成の手続きについて簡単に解説する。

その前にまず力学系の一般化について述べる。Y^0 と Y^1 を2つの空間の組とし、$\iota,g:Y^1\to Y^0$ をそれらの間の写像の組とする。このとき、4つ組 $(Y^0,Y^1;\iota,g)$ を**一般化力学系**と呼ぶ。一般化力学系はその**軌道空間**：

$$Y^{+\infty}\equiv\left\{(y_n)_{n\geq0}\in(Y^1)^{\mathbf{N}}:g(y_n)=\iota(y_{n+1})\right\}$$

を定める。$g:Y^{+\infty}\to Y^{+\infty}$ でシフト写像を表すとする。更に上の $\mathbb{N}$ を $\mathbb{Z}$ で置き換えたもの（つまり両側無限列の空間）を $Y^{\pm\infty}$ で表わす。

$\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^N$ をポアンカレ箱 $\mathcal{A}_i=A_{x,i}\times A_{y,i}$ の有限族とし、各 $A_{y,i}$ は単連結であると仮定する。$\mathcal{A}=\bigcup_{i=1}^N\mathcal{A}_i$ と書き、更に $f:\mathcal{A}\cap f^{-1}(\mathcal{A})\to\mathcal{A}$ が双曲的システムであると仮定しよう。$\widetilde{\mathcal{A}}=\bigsqcup_{i=1}^N\mathcal{A}_i$ とし、$\mathrm{pr}:\widetilde{\mathcal{A}}\to\mathcal{A}$ を自然な射影とする。簡単のため、$\widetilde{\mathcal{A}}^0=\widetilde{\mathcal{A}}$、$\widetilde{\mathcal{A}}^1=\widetilde{\mathcal{A}}\cap f^{-1}(\widetilde{\mathcal{A}})$ と書くことにしよう。すると f の持ち上げ $\tilde{f}:\widetilde{\mathcal{A}}^1\to\widetilde{\mathcal{A}}^0$ が定まる。$\widetilde{\mathcal{A}}^m$ は $\tilde{f}$ のジュリア集合の安定多様体がなすラミネーションを持つ。$A_{y,i}$ の単連結性を仮定したので、このラミネーションの葉は全て正則な円板になる。いま、D と D' を $\widetilde{\mathcal{A}}^m$ 内のその様な円板としよう。$D\neq D'$ かつ $\mathrm{pr}(D)\cap\mathrm{pr}(D')\neq\emptyset$ を満たす時、D と D' をそれぞれピンチング円板と呼び、その全体を Δ^m で表わす。更に $\widetilde{S}^0=\bigsqcup_{i=1}^N A_{x,i}$ と書き、$\pi_x:\widetilde{\mathcal{A}}^0\to\widetilde{S}^0$ を x-射影とする。同様にしてもう一つの x-射影 $\pi_x:\widetilde{\mathcal{A}}^1\to\widetilde{S}^1$ が定まる。

Definition 4.1. $\mathfrak{L}^m \equiv \pi_x(\Delta^m)$ を $\widetilde{\mathcal{S}}^m$ 内の**ピンチング・ローカス**[2] (*pinching locus*) と呼ぶ。

写像 $\tilde{f} : \widetilde{\mathcal{A}}^1 \to \widetilde{\mathcal{A}}^0$ を x-方向に射影すると $\tilde{\sigma} : \widetilde{\mathcal{S}}^1 \to \widetilde{\mathcal{S}}^0$ を導く。同様に包含写像 $\tilde{\iota} : \widetilde{\mathcal{A}}^1 \to \widetilde{\mathcal{A}}^0$ も $\tilde{\iota} : \widetilde{\mathcal{S}}^1 \to \widetilde{\mathcal{S}}^0$ を導く。$\mathbb{C} \setminus A_{x,i}$ の有界な連結成分から 1 点ずつ取り、その全体を $\mathfrak{C}^0$ で表わす。同様にして $\mathfrak{C}^1$ を定めることが出来る。$\widetilde{\mathcal{S}}^m$ 内で和集合 $\mathfrak{L}^m \cup \mathfrak{C}^m$ のある種の「凸包」を取り、更にその中にある $\mathfrak{C}^m$ の各点を位相円で置き換えた対象を $\widetilde{\mathcal{T}}^m$ で表わす。すると、$\tilde{\iota}, \tilde{\sigma} : \widetilde{\mathcal{S}}^1 \to \widetilde{\mathcal{S}}^0$ は自然に一般化力学系 $\tilde{\iota}, \tilde{\tau} : \widetilde{\mathcal{T}}^1 \to \widetilde{\mathcal{T}}^0$ を誘導する。最後に、D と D' がピンチング円板をなすときその時に限り対応する $\widetilde{\mathcal{T}}^m$ 上の点同士を同一視することで、$\widetilde{\mathcal{T}}^m$ の商空間 $\mathcal{T}^m$ とそれらの間の写像の組 $\iota, \tau : \mathcal{T}^1 \to \mathcal{T}^0$ を得る。

Definition 4.2. 一般化力学系：

$$\iota, \tau : \mathcal{T}^1 \longrightarrow \mathcal{T}^0$$

を双曲的システム $\iota, f : \mathcal{A} \cap f^{-1}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ の**ハバード木**と呼ぶ。

更に元の $\tilde{\iota}, \tilde{\tau} : \widetilde{\mathcal{T}}^1 \to \widetilde{\mathcal{T}}^0$ をハバード木の**非連結モデル**と呼ぶことにする。一般に、$\tilde{\tau} : \widetilde{\mathcal{T}}^1 \to \widetilde{\mathcal{T}}^0$ は被覆写像になるが、$\tau : \mathcal{T}^1 \to \mathcal{T}^0$ はそうとは限らないことに注意。また、ペロン・フロベニウス理論を用いて、ハバード木が「拡大的」になるような適当な距離を $\widetilde{\mathcal{T}}^0$ と $\widetilde{\mathcal{T}}^1$ に導入することが可能である。これらの事実から、

Theorem 4.3 (I [I2]). 幾つかの条件を満たす双曲的システム $\iota, f : \mathcal{A} \cap f^{-1}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ からハバード木 $\iota, \tau : \mathcal{T}^1 \to \mathcal{T}^0$ が構成出来る。しかもそれぞれに対応する軌道空間上のシフト写像 $f : \mathcal{A}^{\pm\infty} \to \mathcal{A}^{\pm\infty}$ と $\tau : \mathcal{T}^{\pm\infty} \to \mathcal{T}^{\pm\infty}$ 同士は位相共役。

この証明には、J. Smillie との共同研究である "homotopy shadowing" [IS] の手法を本質的に用いる。

5. The status quo: A panorama

前章までで説明してきたように、双曲的な複素エノン写像、或いはより一般の $\mathbb{C}^2$ の多項式自己同型のジュリア集合に対しては、(a) ソレノイド、(b) オートマトン、(c) ハバード木、と 3 通りの組み合わせ論的な記述が得られている。では、これらの記述方法同士の関係はどうなっているのだろうか？実はハバード木の情報から、ソレノイドの同一視もオートマトンも導き出せる（出せそうな）のである [I3]。まず、ハバード木からソレノイドの同一視を決定することは、"homotopy shadowing" [IS] の手法を用いれば比較的容易である。また、ハバード木の情報から反復モノドロミー群を経由してオートマトンを導き出すことが、本研究の動機の一つであった。

ちなみに、ソレノイドとオートマトン同士の関係はどうであろう？オートマトンが生成する同値関係がソレノイドの同一視を与えるという主張は、（今のところ知られている 2 つの例に限れば）そのオートマトンの定義からほぼ自明に従う。逆に、Fried の補題 [F] から、ソレノイドの同一視は必ずオートマトンで記述出来ることが抽象的には分かる。ただしそのオートマトンを具体的に書き下すことは難しい。

[2]つまみ場？すいません、いい訳が思い付きませんでした。

6. IMGs for hyperbolic Henon maps

第２章の最後で述べた様に、エノン写像に対して反復モノドロミー群を定義しようとするときには、２つの本質的な困難が存在した。そこで、エノン写像そのものに対してではなく、そのハバード木から出発して反復モノドロミー群の概念を定義しよう。なお、この章の内容は準備中の論文 [I3] に基づく。

そのための準備として、まず反復モノドロミー群の理論を一般化力学系の設定に拡張し [N2]、更に弧状連結とは限らない空間の被覆写像の場合に拡張する。ここまでは難しくない。但しこの場合、逆像木は正則木にはならず、複数の有限マルコフ的な逆像木の非連結和となる。これより、ハバード木の非連結モデル $\tilde{\iota}, \tilde{\tau} : \widetilde{\mathcal{T}}^1 \to \widetilde{\mathcal{T}}^0$ に対しては、$\tilde{\tau}$ は被覆写像なので、その反復モノドロミー群が定義出来る。

さて、ハバード木 $\mathfrak{T} = (\mathcal{T}^0, \mathcal{T}^1; \iota, \tau)$ そのものに対して反復モノドロミー群を定義しよう。まず、非連結モデルの $\widetilde{\mathcal{T}}^0$ の連結成分 $\mathcal{T}_i^0$ に対応する逆像木を T_i とした時、その非連結和 $T \equiv \bigsqcup_{i=1}^N T_i$ に同値関係を定義する。これは各ポアンカレ箱の中の不安定多様体がなすラミネーション同士がどの様に大域的に接続されるかを記述しているので、**ホロノミー同値関係**と呼んで $\sim_{\mathrm{holo}}$ で表わす。すると、商空間：

$$T/_{\sim_{\mathrm{holo}}}$$

はあたかも幾つかの木が重なり合っているかのように見えるので、これを**逆像森**と呼ぶことにする。実はこの同値関係は、ピンチング・ローカス（これは有限集合）上の一般化力学系 $\tilde{\iota}, \tilde{\tau} : \mathfrak{L}^1 \to \mathfrak{L}^0$ を用いてアルゴリズミックに決定出来る。

各々の逆像木 T_i には $\pi_1(\mathcal{T}_i^0)$ が作用しており、この作用は $T/_{\sim_{\mathrm{holo}}}$ の上に自然に拡張される。これより、基本群 $\pi_1(\mathcal{T}^0) \cong \pi_1(\mathcal{T}_1^0) * \cdots * \pi_1(\mathcal{T}_N^0)$ の逆像森 $T/_{\sim_{\mathrm{holo}}}$ への群作用が定まる。$\phi : \pi_1(\mathcal{T}^0) \to \mathfrak{S}(T/_{\sim_{\mathrm{holo}}})$ をこの基本群の $T/_{\sim_{\mathrm{holo}}}$ への作用が表わす準同型とする。

Definition 6.1.

$$\mathrm{IMG}(\mathfrak{T}) \equiv \pi_1(\mathcal{T}^0)/\mathrm{Ker}(\phi)$$

をハバード木 $\mathfrak{T} = (\mathcal{T}^0, \mathcal{T}^1; \iota, \tau)$ の**反復モノドロミー群**と呼ぶ。

さて次に、この群作用を記号空間に誘導しよう。X^0 が弧状連結な場合と異なり、今の設定では $\widetilde{\mathcal{T}}^0$ の連結成分 $\mathcal{T}_i^0$ ごとにある有限型部分シフト $\Pi_i^{+\infty}$ が対応する。すると第２章の場合と同様にして、シフト $\Pi_i^{+\infty}$ に表れる有限語の全体 Π_i^* と T_i の頂点集合 T_i^* との間の全単射 $\widetilde{\Lambda} : \Pi_i^* \to T_i^*$ が定まる。この $\widetilde{\Lambda}$ を用いて記号列の空間 $\Pi^{+\infty} \equiv \bigsqcup_{i=1}^N \Pi_i^{+\infty}$ の上にホロノミー同値性が誘導される。更に有限語全体の空間 $\Pi^* \equiv \bigsqcup_{i=1}^N \Pi_i^*$ に標準作用が定まり、商空間 $\Pi^{+\infty}/_{\sim_{\mathrm{holo}}}$ に対しても漸近同値性の概念が矛盾無く定義出来ることが分かるので、それを $\approx_{\mathrm{asym}}$ と書く。

Definition 6.2.

$$\mathcal{L}_{\mathrm{IMG}(\mathfrak{T})} \equiv \left(\Pi^{+\infty}/_{\sim_{\mathrm{holo}}}\right)/_{\approx_{\mathrm{asym}}}$$

をハバード木 $\mathfrak{T} = (\mathcal{T}^0, \mathcal{T}^1; \iota, \tau)$ の**極限空間**と呼ぶ。

このとき、記号空間 $\Pi^{+\infty}$ の上のシフト写像は連続写像 $s : \mathcal{L}_{\mathrm{IMG}(\mathfrak{T})} \to \mathcal{L}_{\mathrm{IMG}(\mathfrak{T})}$ を誘導する。

本講演の主定理は以下のように述べられる。

Theorem 6.3 (I [I3]). 双曲的システムのハバード木を $\mathfrak{T} = (\mathcal{T}^0, \mathcal{T}^1; \iota, \tau)$ とした時、$\tau : \mathcal{T}^{+\infty} \to \mathcal{T}^{+\infty}$ と $s : \mathcal{L}_{\mathrm{IMG}(\mathfrak{T})} \to \mathcal{L}_{\mathrm{IMG}(\mathfrak{T})}$ は位相共役。

最後にこの定理を複素エノン写像へ適用する。そのため、$s : \mathcal{L}_{\mathrm{IMG}(\mathfrak{T})} \to \mathcal{L}_{\mathrm{IMG}(\mathfrak{T})}$ の逆極限を $s : \mathcal{S}_{\mathrm{IMG}(\mathfrak{T})} \to \mathcal{S}_{\mathrm{IMG}(\mathfrak{T})}$ で表わし、IMG($\mathfrak{T}$) の**極限ソレノイド**と呼ぼう。f を $\mathbb{C}^2$ の多項式自己同型、J_f をそのジュリア集合とし、$\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{A}_i$ を $\mathbb{C}^2$ 内の有限個のポアンカレ箱の和集合とする。このとき、

Corollary 6.4 (I [I3]). 双曲的システム $\iota, f : \mathcal{A} \cap f^{-1}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ が条件 $J_f \subset \mathcal{A}$ を満たしているとする。すると、そのハバード木を $\mathfrak{T} = (\mathcal{T}^0, \mathcal{T}^1; \iota, \tau)$ としたとき、$f : J_f \to J_f$ は $s : \mathcal{S}_{\mathrm{IMG}(\mathfrak{T})} \to \mathcal{S}_{\mathrm{IMG}(\mathfrak{T})}$ と位相共役。

実際、仮定のもとでは $\tau : \mathcal{T}^{+\infty} \to \mathcal{T}^{+\infty}$ の逆極限と $f : J_f \to J_f$ が位相共役であることがわかる [I2] ので、結論は上の定理から直ちに従う。

References

[BGN] L. Bartholdi, R. I. Grigorchuk, V. Nekrashevych, *From fractal groups to fractal sets.* In Peter Grabner and Wolfgang Woess, editors, Fractals in Graz 2001, Analysis-Dynamics-Geometry-Stochastics, volume 19 of Trends in Mathematics, Birkhäuser, 25–118 (2003).

[BS] E. Bedford, J. Smillie, *Polynomial diffeomorphisms of* $\mathbf{C}^2$*. VII: Hyperbolicity and external rays.* Ann. Sci. École Norm. Sup. **32**, no. 4, 455–497 (1999).

[F] D. Fried, *Finitely presented dynamical systems.* Ergodic Theory Dynam. Systems **7**, no. 4, 489–507 (1987).

[HO] J. H. Hubbard, R. W. Oberste-Vorth, *Hénon mappings in the complex domain. II: Projective and inductive limits of polynomials.* Real and Complex Dynamical Systems (Hillerod, 1993), 89–132, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 464, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1995).

[I1] Y. Ishii, *Hyperbolic polynomial diffeomorphisms of* $\mathbb{C}^2$*. I: A non-planar map.* Adv. Math. **218**, no. 2, 417–464 (2008).

[I2] Y. Ishii, *Hyperbolic polynomial diffeomorphisms of* $\mathbb{C}^2$*. II: Hubbard trees.* Adv. Math. **220**, no. 4, pp. 985–1022 (2009).

[I3] Y. Ishii, *Hyperbolic polynomial diffeomorphisms of* $\mathbb{C}^2$*. III: Iterated monodromy groups.* In preparation (2009).

[IS] Y. Ishii, J. Smillie, *Homotopy shadowing.* To appear in Amer. J. Math. (2009).

[N1] V. Nekrashevych, *Iterated monodromy groups.* Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki, no. 4, 18–20 (2003). See also *Iterated monodromy groups.* Preprint available at the arXiv `math.DS/0312306` (2003).

[N2] V. Nekrashevych, *Combinatorial models of expanding dynamical systems.* Preprint available at the arXiv `arXiv:0810.4936` (2008).

[O] R. Oliva, *On the combinatorics of external rays in the dynamics of the complex Hénon map.* Thesis, Cornell University (1998).

[T] W. P. Thurston, *On the combinatorics of iterated rational maps.* Preprint (1985).

Department of Mathematics, Kyushu University, Motooka, Fukuoka 819–0395, Japan