日本数学会
2009年度 年会

函数論分科会
講演アブストラクト

2009年 3月
於 東京大学

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
   函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする．

2. 委員会の任務
   (a) 函数論分科会評議員候補者を選出する．
   (b) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦．
   (c) 科研費基盤研究（審査区分（１））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼．
   (d) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる．
   (e) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する．
   (f) 分科会の行事 (たとえば，シンポジウムの開催等) について決定する．
   (g) 次期委員会委員候補者の推薦．
   (h) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する．

3. 委員会の構成及び委員の選出・任期
   (a) 委員の定数は特に定めないが10名程度をもって構成する．必要に応じ追加，削減できる．
   (b) 委員の任期は春季学会から２年間とする．再任は妨げないが，原則として再々任は認めない．
   (c) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う．
      i. 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する．その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する．
      ii. 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する．

4. 委員会の開催及び議決
   (a) 委員会は評議員が召集する．
   (b) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する．
   (c) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する．必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる．
   (d) 案件の議決は投票によってはならない．決定できない時は懸案事項として次回に繰越す．緊急事項については評議員に処置を一任する．

5. 函数論分科会委員会における評議員の任務
   (a) 委員会の司会をする．
   (b) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する．
   (c) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する．
   (d) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する．

付 則　この規則は，1974年10月12日より施行する．
付 則　この規則の改正は，1996年8月1日より施行する．

函数論分科会

第3日　3月28日 (土)

9:30〜12:00

1	西本　勝之	(デカルト出版)	N-fractional calculus of some functions, which have a root sign	15
2	西本　勝之	(デカルト出版)	N-fractional calculus operator method to Laguerre's equations (I)	15
3	菱川　洋介	(岐阜大工)	* The reproducing property and the normal derivative norm with fractional orders on the parabolic Bloch space	15
4	尾和　重義	(近畿大理工)	* Notes on Jack's lemma	15
5	中西　敏浩	(島根大総合理工)	* A series associated to a pair of simple closed geodesics	15
6	志賀　啓成 S. Mitra	(東工大理工) (CUNY)	* Extensions of holomorphic motions and holomorphic families of Möbius groups	15
7	佐藤　宏樹 後藤　浩文		* Remarks on Jørgensen groups of parabolic type	15
8	大竹　博巳	(京都教育大)	単位円板からタイヒミュラー空間および漸近的タイヒミュラー空間への等距離写像について	15
9	戸田　暢茂		* On a defect for holomorphic curves	15

14:15〜15:30

10	倉田　久靖	(米子工高専)	* ネットワーク上の ∞ 調和関数に関するディリクレ問題	15
11	二村　俊英 水田　義弘 下村　哲	(大同工大) (広島大) (広島大)	* 変動指数をもつ関数空間におけるリースポテンシャルのハーディー型不等式	15
12	鈴木　紀明 西尾　昌治 山田　雅博	(名城大理工) (阪市大理) (岐阜大教育)	* 放物型 Bergman 空間における指数 1 以下の Schatten 族 Toeplitz 作用素の特徴付け	15
13	中井　三留	(名工大*)	* 準有界調和関数のスペクトル分解	15

15:45〜16:45　特別講演

塚本　真輝　(京大理)　* Brody 曲線の空間の幾何と平均次元

第4日　3月29日 (日)

10:00〜11:45

14 奥山　裕介　(京 都 工 繊 大) * 複素力学系の等分布定理の定量化とネヴァンリンナ理論 ・・・・・・・・・・・・・15

15 奥山　裕介　(京 都 工 繊 大) * 複素力学系の双曲性と Schröder 函数の特異性 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・15

16 宍倉　光広　(京　　大　　理) ♯ 正則関数の無理的中立不動点の周りの不変集合について ・・・・・・・・・・・・・15

17 野口　潤次郎 (東　大　数　理)　準アーベル多様体内の整正則曲線の第二主要定理について ・・・・・・・・・・15
J. Winkelmann
(Bayreuther 大)
山ノ井　克俊 (熊　　本　　大)

18 野口　潤次郎 (東　大　数　理)　代数多様体内の整正則曲線の退化について ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・15
J. Winkelmann
(Bayreuther 大)
山ノ井　克俊 (熊　　本　　大)

19 大沢　健夫　(名 大 多 元 数 理)　A remark on Kazhdan's theorem on sequences of Bergman metrics ・・15

14:15〜15:15　特別講演

高山　茂晴　(東　大　数　理) ♯ 高次順像層のホッジ計量について

1

N- Fractional Calculus Operator Method to Laguerre's Equations (I)

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press Co.

Abstract

In this article, solutions to the homogeneous Laguerre's equations

$$\varphi_2 \cdot z + \varphi_1 \cdot (-z + \alpha + 1) + \varphi \cdot \beta = 0 \quad (z \neq 0)$$

$$(\varphi_\nu = d^\nu \varphi / dz^\nu \text{ for } \nu > 0,\ \varphi_0 = \varphi = \varphi(z)\ )$$

are discussed by means of N-fractional calculus operator (NFCO- Method).

By our method, some particular solutions to the above equations are given as below for example, in fractional differintegrated forms.

Group I.

(i) $$\varphi = (e^z \cdot z^{-(\alpha+\beta+1)})_{-(1+\beta)} \equiv \varphi_{[1](\alpha,\beta)} \quad \text{(denote)}$$

and

(ii) $$\varphi = (z^{-(\alpha+\beta+1)} \cdot e^z)_{-(1+\beta)} \equiv \varphi_{[2](\alpha,\beta)}$$

And the familiar forms are

$$\varphi_{[1](\alpha,\beta)} = e^z z^{-(\alpha+\beta+1)}\,{}_2F_0(\alpha+1, \alpha+\beta+1; \tfrac{1}{z})$$

and

$$\varphi_{[2](\alpha,\beta)} = -e^{i\pi\beta} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} z^{-\alpha} e^z\ {}_1F_1(\beta+1; 1-\alpha;\ -z\ )$$

respectively.

Where ${}_pF_q(\cdots)$ is the generalized Gauss hypergeometric function.

2

N- Fractional Calculus of Some Functions, Which Have A Root Sign

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press Co.

Abstract

In this article N- fractional calculus of functions

$$\sqrt[m]{z-c} \quad , \quad 1/\sqrt[m]{z-c} \quad (m \in \mathbf{Z}^{+})$$

and

$$(az+b)\ /\ \sqrt[m]{z-c}$$

are reported.

We have the following for example.

1) $$\left(\frac{az+b}{\sqrt[m]{z-c}}\right)_{\gamma} = e^{-i\pi\gamma}\frac{\Gamma(\gamma-1+(1/m))}{\Gamma(1/m)}(z-c)^{-(1/m)-\gamma}$$

$$\times\left\{\left(\gamma-1+\tfrac{1}{m}\right)(az+b)-a\gamma(z-c)\right\}$$

$$(\ z-c \neq 0, \quad |\Gamma(\gamma-1+(1/m))| < \infty\ ),$$

2) $$\left(\frac{az+b}{\sqrt[m]{z-c}}\right)_{n} = (-1)^{n}\frac{\Gamma(n-1+(1/m))}{\Gamma(1/m)}(z-c)^{-(1/m)-n}$$

$$\times\left\{\left(n-1+\tfrac{1}{m}\right)(az+b)-an(z-c)\right\}$$

$$(\ z-c \neq 0, \quad n \in \mathbf{Z}_0^{+}\ ),$$

and

3) $$\left(\frac{az+b}{\sqrt[m]{z-c}}\right)_{-1/m} = -e^{i\pi/m}\frac{1}{\Gamma(1/m)}$$

$$\times\left\{(az+b)\log(z-c)-\tfrac{a}{m}(z-c)\left(\log(z-c)-1\right)\right\} \qquad (\ z-c \neq 0,1)$$

where $$m \in \mathbf{Z}^{+}\ .$$

3

The reproducing property and the normal derivative norm with fractioanl orders on the parabolic Bloch space

菱川　洋介 (岐阜大・工)

H を $n+1$ 次元実 Euclid 空間 $\mathbb{R}^{n+1}(n \geq 1)$ の上半空間とする. すなわち,

$$H = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}; x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}.$$

$0 < \alpha \leq 1$ に対し, $L^{(\alpha)} = \partial_t + (-\Delta_x)^\alpha$ とする. ここで, $\partial_t = \partial/\partial t$, Δ_x は x に関する Laplacian である. また, H 上の連続関数 u が $L^{(\alpha)}$ 調和であるとは, 超関数の意味で $L^{(\alpha)}u = 0$ となるときをいう. $W^{(\alpha)}$ は $L^{(\alpha)}$ の基本解を表す.

放物型 Bloch 空間 $\mathcal{B}_\alpha$ を次のように定義する.

$$\mathcal{B}_\alpha := \{u \in C^1(H); L^{(\alpha)}\text{調和}, \|u\|_{\mathcal{B}_\alpha} = \sup_{(x,t)\in H} \{t^{\frac{1}{2\alpha}}|\nabla_x u(x,t)| + t|\partial_t u(x,t)|\} < \infty\}$$

ここで, ∇_x は x に関する gradient を表す. さらに, $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha$ を次のように定義する.

$$\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha := \{u \in \mathcal{B}_\alpha; u(0,1) = 0\}.$$

ここで, $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha$ はノルム $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_\alpha}$ に関して Banach 空間となる. また $\alpha = 1/2$ のとき, $\widetilde{\mathcal{B}}_{1/2}$ は調和 Bloch 空間 ([4]) である.

調和 Bloch 空間は, [2] や [4] で研究されている. また, 放物型 Bloch 空間は, [3] で研究されている. 一方, [1] では, 放物型 Bergman 関数の fractional derivative について研究している. 本講演では, 放物型 Bloch 関数に fractional derivative を導入し, reproducing property と normal derivative norm の評価について得られた結果を報告する.

κ を実数とする. fractional order の微分作用素 $\mathcal{D}_t^\kappa$ を, $\mathcal{D}_t^\kappa = (-\partial_t)^\kappa$ とする. 特に $\kappa \geq 0$ とすると, $u \in \mathcal{B}_\alpha$ に対して, $\mathcal{D}_t^\kappa u$ は well-defined であることに注意しておく. 放物型 Bergman 関数の fractional derivative について, すでに得られている結果を紹介する. $1 \leq p < \infty, \lambda > -1$ に対して, 放物型 Bergman 空間 $\boldsymbol{b}_\alpha^p(\lambda)$ を次のように定義する.

$$\boldsymbol{b}_\alpha^p(\lambda) = \{u; L^{(\alpha)}\text{調和}, \int_H |u(x,t)|^p t^\lambda dV(x,t) < \infty\}.$$

ここで, dV は H 上の Lebesgue volume measure を表す. Theorem A では, 放物型 Bergman 関数の reproducing property を与えている.

THEOREM A ([1]). $0 < \alpha \leq 1, 1 \leq p < \infty, \lambda > -1, \nu > -\frac{\lambda+1}{p}, \kappa > \frac{\lambda+1}{p}$ とする. このとき, 任意の $u \in \boldsymbol{b}_\alpha^p(\lambda)$ に対して,

$$u(x,t) = C_{\nu+\kappa} \int_H \mathcal{D}_t^\nu u(y,s) \mathcal{D}_t^\kappa W^{(\alpha)}(x-y, t+s) s^{\nu+\kappa-1} dV(y,s), \qquad (x,t) \in H$$

が成り立つ．ここで，$C_\kappa = 2^\kappa/\Gamma(\kappa)$.

主結果を述べるために，次を定義する．$\kappa > -\frac{n}{2\alpha}$ に対して，$H \times H$ 上の関数 ω_α^κ を

$$\omega_\alpha^\kappa(x,t;y,s) = \mathcal{D}_t^\kappa W^{(\alpha)}(x-y,t+s) - \mathcal{D}_t^\kappa W^{(\alpha)}(-y,1+s)$$

とする．以下，主結果について述べる．Theorem 1 は放物型 Bloch 空間上の reproducing property を与えている．特に，Theorem 1 における ν と κ の条件が，Theorem A の limiting case ($p \to \infty$) となっていることに注意する．

THEOREM 1. $0 < \alpha \leq 1$, $\nu \geq 0$, $\kappa > 0$ とする．このとき，任意の $u \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha$ に対して，

$$u(x,t) = C_{\nu+\kappa} \int_H \mathcal{D}_t^\nu u(y,s)\omega_\alpha^\kappa(x,t;y,s)s^{\nu+\kappa-1}dV(y,s), \qquad (x,t) \in H$$

が成り立つ．

Theorem 2 では，放物型 Bloch 関数の normal derivative norm の評価を与えている．

THEOREM 2. $0 < \alpha \leq 1, \nu > 0$ とする．このとき，ある定数 $C > 0$ が存在して，任意の $u \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha$ に対して，

$$C^{-1}\|u\|_{\mathcal{B}_\alpha} \leq \|t^\nu \mathcal{D}_t^\nu u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{\mathcal{B}_\alpha}$$

が成り立つ．ここで，

$$\|f\|_{L^\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_{(x,t)\in H} |f(x,t)|.$$

References

[1] Y. Hishikawa, *Fractional calculus on parabolic Bergman spaces*, to appear in Hiroshima Math. J.

[2] H. Koo, K. Nam, and H. Yi, *Weighted harmonic Bergman functions on half-spaces*, J. Korean Math. Soc., Vol 42, No. 5, (2006), 975–1002.

[3] M. Nishio, K. Shimomura and N. Suzuki, *α-parabolic Bergman space*, Osaka J. Math. 42, no. 1, (2005), 133-162.

[4] W. Ramey and H. Yi, *Harmonic Bergman functions on half-spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 348 (1996), 633–660.

[5] M. Yamada, *Harmonic conjugates of parabolic Bergman functions*, Advanced studies Pure Math., 44 (2006) 391-402.

4 Notes on jack's lemma

Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}$ denote the class of functions $f_j(z)$ of the form

$$f_j(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n,j} z^n \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots)$$

that are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. For $f_j(z) \in \mathcal{A}$, the convolution of $f_j(z)$ $(j = 1, 2, 3, \cdots, m)$ is defined by

$$(f_1 * f_2 * \cdots * f)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{m} a_{n,j} \right) z^n.$$

If $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{A}$, $g(z) = \dfrac{z}{1-z} = z + \sum_{n=2}^{\infty} z^n$, and $k(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2} = z + \sum_{n=2}^{\infty} n z^n$, then

$$(f * g)(z) = (f * g^{-1})(z) = f(z)$$

with $g^{-1}(z) = g(z)$ and

$$(f * k)(z) = z f'(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^n$$

with $(k * k^{-1})(z) = \dfrac{z}{1-z}$.

For $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{A}$, G. S. Salagean introduced the following Salagean differential operator

$$D^0 f(z) = f(z), D^1 f(z) = Df(z) = z f'(z) = (f * k)(z),$$

$$D^j f(z) = D\left(D^{j-1} f(z)\right) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n^j a_n z^n = (k * k * \cdots * k * f)(z) \quad (j = 1, 2, 3, \cdots).$$

J. W. Alexander has given Alexander integral operator given by

$$D^{-1} f(z) = \int_0^z \frac{f(t)}{t} dt = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} a_n z^n.$$

Furthermore, we introduce

$$D^{-j} f(z) = D^{-1}\left(D^{1-j} f(z)\right) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^j a_n z^n = (k^{-1} * k^{-1} * \cdots * k^{-1} * f)(z) \quad (j = 1, 2, 3, \cdots).$$

Therefore, for any integer j,

$$D^j f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n^j a_n z^n.$$

For $f(z) \in \mathcal{A}$ and $g(z) \in \mathcal{A}$, $f(z)$ is said to be subordinate to $g(z)$ if there exists an anlytic function $w(z)$ with $w(0) = 0, |w(z)| < 1$ $(z \in \mathbb{U})$ such that $f(z) = (g \circ w)(z)$. We denote this subordination by $f(z) \prec g(z)$. If $g(z)$ is univalent in $\mathbb{U}$, then $f(z) \prec g(z)$ is equivalent to $f(0) = g(0)$ and $f(\mathbb{U}) \subset g(\mathbb{U})$.

Applying Jack's lemma due to I. S. Jack (J. London Math. Soc. 3(1971)), we derive

Theorem 1 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$\mathrm{Re}\left(\frac{D^{j+2}f(z)}{D^{j+1}f(z)}\right) < \frac{\alpha+1}{2(\alpha-1)} \quad (z \in \mathbb{U})$$

for some real α $(2 \leqq \alpha < 3)$, or

$$\mathrm{Re}\left(\frac{D^{j+2}f(z)}{D^{j+1}f(z)}\right) < \frac{5\alpha-1}{2(\alpha+1)} \quad (z \in \mathbb{U})$$

for some real α $(1 < \alpha \leqq 2)$, then

$$\frac{D^{j+1}f(z)}{D^j f(z)} \prec \frac{\alpha(1-z)}{\alpha - z} \quad (z \in \mathbb{U}),$$

so

$$\left|\frac{D^{j+1}f(z)}{D^j f(z)} - \frac{\alpha}{\alpha+1}\right| < \frac{\alpha}{\alpha+1} \quad (z \in \mathbb{U}).$$

Theorem 2 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$\mathrm{Re}\left(\frac{D^{j+2}f(z)}{D^{j+1}f(z)}\right) > -\frac{\alpha+1}{2\alpha(\alpha-1)} \quad (z \in \mathbb{U})$$

for some real α $(\alpha \leqq -1)$, or

$$\mathrm{Re}\left(\frac{D^{j+2}f(z)}{D^{j+1}f(z)}\right) > \frac{3\alpha+1}{2\alpha(\alpha+1)} \quad (z \in \mathbb{U})$$

for some real α $(\alpha > 1)$, then

$$\frac{D^j f(z)}{D^{j+1}f(z)} \prec \frac{\alpha(1-z)}{\alpha - z} \quad (z \in \mathbb{U}).$$

5

A series associated to a pair of simple closed geodesics

中西敏浩 (島根大学・総合理工学部)

定曲率 -1 の完備かつ面積有限な計量が与えられた 1 点穴あきトーラス F 上にある 3 つの Weierstrass 点の 2 つ P_1,P_2 を固定する。S を P_1 と P_2 を通る単純閉測地線全体の集合とする。G.McShane[4]([5] も参照のこと) は次の恒等式を証明した。

$$\sum_{\gamma \in S} \arcsin\left(\frac{1}{\cosh(|\gamma|/2)}\right) = \frac{\pi}{2}, \tag{1}$$

ここで $|\gamma|$ は γ の長さである。この講演では (1) の別証明を紹介する。

G を双曲平面 D に作用するフックス群で $D/G = F$ となるものとする。双曲元の対 $\{a, b\}$ が G の正標準生成系であるとは、次の条件をみたすときいう。
- G は a, b で生成される自由群。
- $aba^{-1}b^{-1}$ は放物元
- b の軸は a の軸をその左側から右側に横切る

ただし双曲元の軸には、反発不動点から吸引不動点に向かう向きが与えられているものとする。F 上の単純閉測地線 γ が定める G の元 $g = g_\gamma$ (単純元と呼ぶ) で a, b の巡回的に被約な語であるものを選ぶ。$n_a(g)$,$n_b(g)$ をそれぞれ g に含まれる a と b の個数とする。正標準生成系 $\{a, b\}$ を適当に選ぶと、S は $n_a(g_\gamma) \equiv n_b(g_\gamma) \equiv 1 \mod 2$ をみたす単純閉曲線 γ の集合としても特徴づけられる。さらにこのことを用いると a の軸と b の軸の交点を O として、集合

$$\mathcal{G} = \{\{g, h\} : \{g, h\} \text{ は正標準生成系で } g, h \text{ の軸は } O \text{ を通る }\}$$

を定めるとき、(1) は

$$\sum_{\{g,h\} \in \mathcal{G}} \arcsin\left(\frac{2}{|\mathrm{tr} gh|}\right) = \pi \tag{2}$$

と書き直すことができる。

(2) の証明の概略。O を通る軸をもつ単純双曲元の不動点の集合の閉包 $E(\subset \partial D)$ を Birman-Series 集合と呼ぶ。E はカントール集合でその 1 次元ルベーグ測度は 0 であ

る ([1])。∂D における E の補集合の成分を "gap" と呼ぶ。gap の集合を Gap で表わし,gap I の O から見た中心角を θ_I とすると、E の性質から

$$\sum_{I\in Gap} \theta_I = 2\pi. \tag{3}$$

$\mathcal{G}$ に属する正標準生成系 $\{g,h\}$ に対して $ghg^{-1}h^{-1}$ の不動点を含む gap $I_{\{g,h\}} \in Gap$ が存在して、対応 $\mathcal{G} \to Gap$, $\{g,h\} \mapsto I_{\{g,h\}}$, は全単射である。さらに $\theta_{\{g,h\}} = \theta_{I_{\{g,h\}}}$ とするとき

$$\theta_{\{g,h\}} = 2\arcsin\left(\frac{2}{|\mathrm{tr}gh|}\right). \tag{4}$$

よって (3),(4) から (2) が従う。最後に [3],[1] の結果を用いると $\mathcal{G}$ の元をすべて数え上げられることを注意しておく。

参考文献

[1] J. S. Birman and C. Series, An algorithm for simple curves on surfaces. J. London Math. Soc. (2), **29** (1984), 331–342.

[2] J. S. Birman and C. Series, Geodesics with bounded intersection are sparce, Topology, **24** (1985), 217–225.

[3] M. Cohen, W. Metzler and A. Zimmermann, What does a basis of $F(a,b)$ look like?, Math. Ann., **257** (1981), 435–445.

Proc. Amer. Math. Soc., **119** (1993), n 893–896.

[4] G. McShane, Weierstrass points and simple geodesics, Bull. London Math. Soc., **36** (2004), 181–187.

[5] S.-P. Tan, Y.-L. Wong and Y. Zhang, Generalizations of McShane's identity to hyperbolic cone-surfaces. J. Differential Geom. **72** (2006), 73–112

6

Extensions of holomorphic motions and holomorphic families of Möbius groups

Sudeb Mitra (CUNY)
志賀　啓成（東工大理工学研究科）

1 Intoroduction

Holomorphic motion のアイディアは Mañé, Sad, and Sullivan によって複素力学系において初めて導入された．それ以来 holomorphic motion は複素力学系，タイヒミュラー空間論，Klein 群論において広く応用されている．本講演では holomorphic motion の拡張定理をいくつか与える．さらに Bers による Möbius groups の同型の正則族に関する結果の一般化を与える．

定義 1.1 *V を連結な複素 Banach 多様体とし，基点 $x_0 \in V$ を固定する．E を $\mathbb{C}$ の部分集合とする．V 上の E の holomorphic motion とは以下の条件を満たす写像 $\phi: V \times E \to \hat{\mathbb{C}}$ のことである：*

1. *$\phi(x_0, z) = z$ for all z in E,*

2. *各 $x \in V$ を固定したとき写像 $\phi(x, \cdot): E \to \hat{\mathbb{C}}$ は 1 対 1 である．*

3. *各 $z \in E$ を固定したとき写像 $\phi(\cdot, z): V \to \hat{\mathbb{C}}$ は V 上正則である．*

また上の 2 と 3 の条件を

- 任意の $x \in V$ と任意の $\epsilon > 0$ に対して x の近傍 U_x が存在して，E 内の異なる 4 点 a, b, c, d に対し

$$\rho\big(\phi_y(a,b,c,d), \phi_{y'}(a,b,c,d)\big) < \epsilon \quad \textit{for all } y \textit{ and } y' \textit{ in } U_x.$$

  が成立する．ここに ρ は $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ のポアンカレ距離である．

という条件で置き換えたものを V 上の E の quasiconformal motion という．

2 Results

主結果は以下の4つの定理である.

定理 1 Xをリーマン面とする. このとき, X上に非自明な$\mathbb{C}$の *holomorphic motion* $\phi : X \times \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$が存在するための必要十分条件は$X \notin O_{AB}$である. 特に, $X \in O_{AB}$ならば, X上の非自明な *holomorphic motion* は$\hat{\mathbb{C}}$の *holomorphic motion* に拡張出来ない.

定理 2 Kを単位円板Δ内のコンパクト集合とする.

Kが*AB-removable*であるとき, *holomorphic motion* $\phi : (\Delta - K) \times E \to \hat{\mathbb{C}}$に関して以下は同値である:

1. ϕ *can be extended to a continuous motion* $\widetilde{\phi} : (\Delta - K) \times \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$.
2. ϕ *can be extended to a holomorphic motion* $\widehat{\phi} : (\Delta - K) \times \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$.
3. ϕ *can be extended to a holomorphic motion* $\phi_0 : \Delta \times E \to \hat{\mathbb{C}}$.

またKが*AB-removable*でないとき, $(\Delta - K) \times E$における *holomorphic motion* で$(\Delta - K) \times \hat{\mathbb{C}}$の *holomorphic motion* に拡張出来るが, $\Delta \times E$の *holomorphic motion* に拡張出来ないものが存在する.

定理 3 Gをメビウス変換からなる群, $E \subset \hat{\mathbb{C}}$を$G(E) = E$なる集合とする. G-同変な *holomorphic motion* $\phi : V \times E \to \hat{\mathbb{C}}$が *continuous motion* $\widehat{\phi} : V \times \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$に拡張出来たとする. このとき以下の性質を持つ *quasiconformal motion* $\widetilde{\phi} : V \times \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$が存在する:

1. $\widetilde{\phi}$はϕの拡張でG-同変である.
2. 任意の$x \in V$に対して$\widetilde{\phi}_x := \widetilde{\phi}(x, \cdot)$と$\widehat{\phi}_x := \widehat{\phi}(x, \cdot)$は *isotopic rel* E.

定理 4 V, G, Eは上と同じもので, E上の$1-1$写像の正則族$\{\phi_x\}_{x \in V}$がGの群同型の正則族$\{\theta_x\}_{x \in V}$を定めているとする. もし, ある$x_0 \in V$に対してθ_{x_0}がGの擬等角変形を導くならば, 任意の$x \in V$についてもθ_xはGの擬等角変形である. さらにV単連結であるならば$\{\theta_x\}_{x \in V}$はある *quasiconformal motion* $\widetilde{\phi} : V \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$より定まり, これは$\{\phi_x\}_{x \in V}$の拡張である.

時間が許せばこれらの結果の応用・例などを述べたい.

7

Remarks on Jørgensen groups of parabolic type

Hirofumi Goto
Hiroki Sato (Emeritus Professor, Shizuoka University)

In this talk we will deal with extreme discrete groups (Jørgensen groups) of parabolic type for Jørgensen's inequality. It is one of the most important problems in the theory of Kleinian groups to decide whether or not a subgroup G of the Möbius transformation group is discrete. For this problem there are two important and useful theorems: One is Poincaré's polyhedron theorem, which gives a sufficient condition for G to be discrete. The other is Jørgensen's inequality theorem ([**1**]), which gives a necessary condition for a two-generator Möbius transformation group $G = \langle A, B\rangle$ to be discrete. We set $J(A, B) := |\mathrm{tr}^2(A) - 4| + |\mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1}) - 2|$. A non-elementary discrete two-generator subgroup G of the Möbius transformation group is called a *Jørgensen group* if there exist generators A and B of G such that $J(A, B) = 1$.

Let $G = \langle A, B\rangle$ be a Jørgensen group. Then either A is elliptic of order at least seven or A is parabolic. If A is parabolic, then we call it a *Jørgensen group of parabolic type.* Now it gives rise to the following problem: Find all Jørgensen grou[ps of parabolic type. For this problem, C. Li, M. Oichi and H. Sato ([**2**],[**3**],[**4**]) introduced parameters (θ, k) $(0 \leq \theta \leq 2\pi : k \in \mathbf{R})$ and found all Jørgensen groups of parabolic type, which contain the following familiar groups:The modular group, the Picard group and the figure-eight knot group. However the case of $\theta = \pi/4$ in their papers is not perfect. This time we solved this case, and so the problem for parabolic type, completely. Our theorem is as follows ([**5**]).

THEOREM. *The group $G_{\pi/4,k}$ with $1 < k < 2$ is a Jørgensen group if and only if one of the following conditions holds.* (

(1) $k = 1 + \cos(\pi/3)$. In this case, $G_{\pi/4,k}$ *is a Kleinian group of the first kind, and the volume of the 3-manifold* $\mathbf{H}^3/G_{\pi/4,k}$ *is* $V(G_{\pi/4,3/2}) = 3V(G_{\pi/2,1/2})$, *where* $V(G_{\pi/2,1/2}) = 2(2L(\pi/4) - L(5\pi/12) - L(\pi/12))$.

(2) $k = 1+\cos(\pi/4)$. In this case, *$G_{\pi/4,k}$ is a Kleinian group of the first kind, the volume of the 3-manifold $\mathbf{H}^3/G_{\pi/4,k}$ is $V(G_{\pi/4,1+\sqrt{2}/2}) = V(G_{\pi/2,\sqrt{2}/2})/2 + 2V(G_{\pi/2,1/2})$, where $V(G_{\pi/2,\sqrt{2}/2}) = L(\alpha+\pi/3) + L(\alpha-\pi/3) + 2L(\alpha) + 2L(\pi/2-\alpha) + L(3\pi/4-\alpha) + L(\pi/4-\alpha)$ and $\tan\alpha = \sqrt{2}$.*

(3) $k = 1+\cos(\pi/5)$. In this case, *$G_{\pi/4,k}$ is a Kleinian group of the first kind, and the volume of the 3-manifold $\mathbf{H}^3/G_{\pi/4,k}$ is $V(G_{\pi/4,(1+\sqrt{5})/4}) = V(G_{\pi/2,(1+\sqrt{5})/4})/2 + 2V(G_{\pi/2,1/2})$, where $V(G_{\pi/4,(1+\sqrt{5})/4}) = L(\beta+\pi/3) + L(\beta-\pi/3) + 2L(\pi/2-\beta) + L(7\pi/10-\beta) + L(3\pi/10-\beta) + 2L(\beta)$ and $\tan\beta = (1+\sqrt{5})/2$.*

(4) $k = 1+\cos(\pi/6)$. In this case, *$G_{\pi/4,k}$ is a Kleinian group of the first kind, and the volume of the 3-manifold $\mathbf{H}^3/G_{\pi/4,k}$ is $V(G_{\pi/4,1+\sqrt{3}/2}) = V(G_{\pi/2,\sqrt{3}/2})/2 + 2V(G_{\pi/2,1/2})$, where $V(G_{\pi/2,\sqrt{3}/2}) = 5L(\pi/3)$.*

(5) $k = 1+\cos(\pi/(2m+1))$ $(m = 3,4,5,\ldots)$. *In this case, $G_{\pi/4,k}$ are Kleinian groups of the second kind, and $\Omega(G_{\pi/4,k})/G_{\pi/4,k}$ is a Riemann surface with signature $(0;2,3,2m+1)$.*

(6) $k = 1+\cos(\pi/2m)$ $(m = 4,5,6,\ldots)$. *In this case, $G_{\pi/4,k}$ are Kleinian groups of the second kind, and $\Omega(G_{\pi/4,k})/G_{\pi/4,k}$ is a Riemann surface with signature $(0;3,3,m)$.*

References

[1] T. Jørgensen, On discrete groups of Möbius transformations, Amer. J. Math. **98** (1976), 739–749.

[2] C. Li, M. Oichi and H. Sato, *Jørgensen groups of parabolic type* I (*Finite case*), CMFT (2006) 1-22.

[3] C. Li, M. Oichi and H. Sato, *Jørgensen groups of parabolic type* II (*Countable infinite case*), Osaka J. Math. (2004) 491-506.

[4] C. Li, M. Oichi and H. Sato, *Jørgensen groups of parabolic type* III (*Uncountable infinite case*), Kodai Math. J. (2005) 248-264.

[5] H. Goto and H. Sato, *Remarks on Jørgensen groups of parabolic type*, in submission.

8

単位円板からタイヒミュラー空間および漸近的タイヒミュラー空間への等距離写像について

大竹博巳　(京都教育大学)

リーマン面 R は $\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{C}\setminus\{0\}, \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ のどれとも等角同値でないとする．R が解析的有限型であるとき，つまり種数有限のリーマン面から有限個の点を取り除いて得られる面であるとき，R のタイヒミュラー空間 $T(R)$ は有限次元であり，単位円板 $\mathbb{D}$ から $T(R)$ への正則な等距離写像は，R 上の可積分な正則 2 次微分 $\phi \neq 0$ を用いて，$\mathbb{D} \ni \zeta \mapsto [\zeta|\phi|/\phi] \in T(R)$ と表されることが知られている (いわゆるタイヒミュラー円板)．ここに，$[\mu]$ はベルトラミ係数 μ の属するタイヒミュラー空間の同値類である．

以下の問題がある (Krushkal[1] 参照)．筆者の知る限り，この問題は open problem である．

問題 1. 単位円板から有限次元タイヒミュラー空間への任意の等距離写像は正則または反正則となるか？

R が解析的有限型でない場合，対応する問題の解は否定的である．実際，次の主張が成立する．

定理 1. R の可測部分集合 E_+, E_- とベルトラミ微分 μ_+, μ_- が条件

(i) E_+，E_- はともに零集合でなく，$E_+ \cap E_- = \emptyset$,

(ii) E_+ 上では $|\mu_+| = 1$, E_- 上では $|\mu_-| = 1$,

(iii) E_+ の外では $\mu_+ = 0$, E_- の外では $\mu_- = 0$,

(iv) μ_+ と μ_- はともに極値的である．

をみたすならば，二つの写像

$$\mathbb{D} \ni \zeta \mapsto [\zeta\mu_+ + \overline{\zeta}\mu_-] \in T(R),$$
$$\mathbb{D} \ni \zeta \mapsto [[\zeta\mu_+ + \overline{\zeta}\mu_-]] \in AT(R)$$

は正則でも反正則でもない等距離写像である．

ここに，$AT(R)$ は R の漸近的タイヒミュラー空間であり，$[[\mu]]$ はベルトラミ係数 μ の属する，$AT(R)$ における同値類である．

R が解析的有限型でない場合，上の定理の条件をみたす E_+, E_-, μ_+, μ_- が標準的手法により構成できるので，次の系が成立する．

系 1. リーマン面 R が解析的有限型でないならば，$\mathbb{D}$ から $T(R)$ および $AT(R)$ への正則でも反正則でもないような等距離写像が存在する．

この系において,「$T(R)$ へ」の部分は実質的に既に知られていた主張であるが,「$AT(R)$ へ」の部分は新しい結果である．

最初に述べた，R が解析的有限型である場合の事実と上の定理を見ると，解析的有限型であるか否かに依らない問題として，次の問題が自然に生じる．

問題 2. $\mathbb{D}$ からベルトラミ係数の集合 $M(R)$ への写像 μ で，$M(R)$ から $T(R)$ または $AT(R)$ への射影との合成が等距離写像になるような任意の写像に対して，ノルム 1 の正則 2 次微分の列 $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ をうまく選ぶと，

$$\mathbb{D} \ni \zeta \mapsto \lim_{n\to\infty} \int_R \mu(\zeta)\phi_n \in \mathbb{D}$$

が等距離写像となるか？

しかしながら，

定理 2. 上の問題の答えも否定的である．

参考文献

[1] S. Krushkal, Complex Geomerty of the Universal Teichmüller Space. II, Georgian Math. J., vol.14, no.3, (2007), 483–498.

9

On a defect for holomorphic curves

戸田 暢茂

1. Introduction. **(a)** Let $f = [f_1, \cdots, f_{n+1}]$ be a non-degenerate, transcendental holomorphic curve from $\boldsymbol{C}$ into $P^n(\boldsymbol{C})$ with a reduced representation

$$(f_1, \cdots, f_{n+1}) \; : \; \boldsymbol{C} \; \rightarrow \; \boldsymbol{C}^{n+1} - \{0\},$$

where n is a positive integer. Let $T(r, f)$ be its characteristic function and for $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_{n+1}) \in \boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$, we use $N(r, \boldsymbol{a}, f), \delta(\boldsymbol{a}, f)$ and $\delta_n(\boldsymbol{a}, f)$ as usual.

Let m be the multiplicity of $\boldsymbol{a}$ with respect to f. We put

$$\mu_n(\boldsymbol{a}, f) = (1 - \frac{n}{m})^+ = 1 - \frac{n}{\max(m, n)}$$

and we give the following definition.

Definition. $\delta_\mu(\boldsymbol{a}, f) = 1 - \dfrac{n}{\max(m, n)} \limsup\limits_{r \to \infty} \dfrac{N(r, \boldsymbol{a}, f)}{T(r, f)}$.

It is easy to see that

(I) $\delta_\mu(\boldsymbol{a}, f) = 1 - (1 - \delta(\boldsymbol{a}, f))(1 - \mu_n(\boldsymbol{a}, f))$.

(II) $\delta_n(\boldsymbol{a}, f) \geq \delta_\mu(\boldsymbol{a}, f) \geq \max\{\delta(\boldsymbol{a}, f), \mu_n(\boldsymbol{a}, f)\}$.

(b) Let X be a subset of $\boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$ in $N-$subgeneral position satisfying $\# X \geq 2N - n + 2$, where N is an integer such that $N \geq n$.

For a non-empty, finite subset S of X, we denote by $V(S)$ the vector space spanned by elements of S and by $d(S)$ the dimension of $V(S)$. Let

$$\mathcal{O} = \{S \subset X \mid 0 < \# S \leq N + 1\}.$$

Then, $\#\{d(S)/\# S \mid S \in \mathcal{O}\} < \infty$ and we put $\lambda = \min_{S \in \mathcal{O}} d(S)/\# S$ (see [2]).

2. Result.

Proposition 1. $\sum\limits_{\boldsymbol{a} \in X} \delta_\mu(\boldsymbol{a}, f) \leq 2N - n + 1$.

We put

$$\begin{aligned} \Delta^+ &= \{\boldsymbol{a} \in X \mid \delta(\boldsymbol{a}, f) > 0\}, & \Delta^1 &= \{\boldsymbol{a} \in X \mid \delta(\boldsymbol{a}, f) = 1\}; \\ M^+ &= \{\boldsymbol{a} \in X \mid \mu_n(\boldsymbol{a}, f) > 0\}, & M^1 &= \{\boldsymbol{a} \in X \mid \mu_n(\boldsymbol{a}, f) = 1\}; \\ \Delta_\mu^+ &= \{\boldsymbol{a} \in X \mid \delta_\mu(\boldsymbol{a}, f) > 0\}, & \Delta_\mu^1 &= \{\boldsymbol{a} \in X \mid \delta_\mu(\boldsymbol{a}, f) = 1\}. \end{aligned}$$

Proposition 2. 1) $\Delta_\mu^+ = \Delta^+ \cup M^+$; 2) $\Delta_\mu^1 = \Delta^1$ and $\Delta_\mu^1 \supset M^1$.

Theorem 1.

[I] $\sum_{\boldsymbol{a}\in\Delta^+} \delta(\boldsymbol{a}, f) = 2N - n + 1 \Longrightarrow \forall \boldsymbol{a} \in X,\ \boldsymbol{a} \in \Delta^1$ or $\mu_n(\boldsymbol{a}, f) = 0.$

[II] $\sum_{\boldsymbol{a}\in M^+} \mu_n(\boldsymbol{a}, f) = 2N - n + 1 \Longrightarrow \forall \boldsymbol{a} \in X,\ \boldsymbol{a} \in M^1$ or $\delta(\boldsymbol{a}, f) = 0.$

Theorem 2. Suppose that (i) $N > n \geq 2$ and that

$$\sum_{\boldsymbol{a}\in\Delta_\mu^+} \delta_\mu(\boldsymbol{a}, f) = 2N - n + 1.$$

Then, $\lambda \leq (n+1)/(2N-n+1)$ and we have the followings.

[1] If $d(\Delta_\mu^1) = n+1$, then $\#\Delta_\mu^1 = 2N - n + 1$.

[2] If $d(\Delta_\mu^1) = n$, then $\#\Delta_\mu^1 = N$.

[3] If $\lambda < \dfrac{n+1}{2N-n+1}$ and $d(\Delta_\mu^1) \leq n$, then $\#\Delta_\mu^1 = d(\Delta_\mu^1) + N - n$.

[4] If $\Delta^1 = \Delta^+$ and $d(\Delta_\mu^1) \leq n$, then when $\lambda < (n+1)/(2N-n+1)$,

$$\#\Delta_\mu^1 = d(\Delta_\mu^1) + N - n \ (d(\Delta_\mu^1) < (n-1)/2)$$

and when $\lambda = (n+1)/(2N-n+1)$, n is odd and

$$\#\Delta_\mu^1 = \frac{2N-n+1}{n+1} d(\Delta_\mu^1).$$

(cf. [1],[3].)

References

[1] N. Toda: On holomorphic curves extremal for the truncated defect relation and some applications. Proc. Japan Acad., Ser. A, 81-6(2005), 99-104.

[2] N. Toda: A generalization of Nochka weight function. Proc. Japan Acad., Ser. A, 83-9,10(2007), 170-175.

[3] 戸田暢茂：Nochka 荷重関数の一般化と正則曲線の値分布。第 50 回函数論シンポジウム講演アブストラクト (2007).

10

ネットワーク上の∞調和関数に関するディリクレ問題

倉田久靖（米子高専）

(V,E,r) をネットワークとする．ただし、V は頂点の集合、E は辺の集合、r は抵抗である．また、Ω を無限路の集合とする．$x,y\in V$ と $\xi=\{x_m\}_m, \eta=\{y_n\}_n\in\Omega$ について

$$
\begin{aligned}
d(x,y) &= \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} r(x_{i-1},x_i)\,;\, x_{i-1}\sim x_i, x_0=x, x_n=y\right\},\\
d(x,\eta) &= \limsup_{n\to\infty} d(x,y_n),\\
d(\xi,\eta) &= \limsup_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} d(x_m,y_n),
\end{aligned}
$$

と定める．

$x\in V$ と、その隣接点で定義された関数 u について

$$
\mu_{x,u}(t) = \max_{y\sim x}\frac{|u(y)-t|}{r(x,y)}
$$

とおくと、これを最小にする t は唯一に定まる．それを $\mathrm{H}_x u$ と書く．V の部分集合 D について、D 内の各点 x で $u(x)=\mathrm{H}_x u$ を満たすとき、u は D で∞調和であるという．「∞ノルムを最小にする」だけでは一意性がないため、上記のように局所的変分問題に解として∞調和関数を定める．

Ω を V の境界と考え、∞調和関数に関するディリクレ問題について考察する．Ω を次の3つに分割する．

$$
\begin{aligned}
\Omega_0 &= \left\{\zeta=\{z_n\}_n\in\Omega; \limsup_{n\to\infty} d(z_n,\zeta)=0\right\},\\
\Omega_{\mathrm{f}} &= \left\{\zeta=\{z_n\}_n\in\Omega; 0<\limsup_{n\to\infty} d(z_n,\zeta)<\infty\right\},\\
\Omega_\infty &= \left\{\zeta=\{z_n\}_n\in\Omega; \limsup_{n\to\infty} d(z_n,\zeta)=\infty\right\}.
\end{aligned}
$$

補題 1. $\zeta=\{z_n\}_n\in\Omega$、$a\in V$ とする．

(1) $\zeta\in\Omega_0$ ならば、$d(a,\zeta)<\infty$ である．更に $\lim_{n\to\infty} d(a,z_n)=d(a,\zeta)$ が成り立つ．

(2) $\zeta\in\Omega_{\mathrm{f}}$ ならば、$\sum_{i=1}^{\infty} r(z_{i-1},z_i)=\infty$ かつ $d(a,\zeta)<\infty$ である．

(3) $\zeta\in\Omega_\infty$ ならば、$\sum_{i=1}^{\infty} r(z_{i-1},z_i)=\infty$ かつ $d(a,\zeta)=\infty$ である．

ネットワークは、$\Omega_0 \neq \emptyset$ のとき ∞ 双曲型、そうでないとき ∞ 放物型と呼ばれる.

定理 1. (V, E, r) を ∞ 放物型ネットワークとする. 上または下に有界で、V 全体で ∞ 調和な関数は、定数関数に限る.

補題 2. (V, E, r) を ∞ 双曲型ネットワークとし、$A \subset \Omega$ とする. u は、∇u が有界で、A の各路 $\zeta = \{z_n\}_n$ について $f(\zeta) := \lim_{n\to\infty} u(z_n)$ が存在するとする. このとき f は A 上リプシッツ連続である.

定理 2. (V, E, r) を ∞ 双曲型ネットワークとする. Ω_0 で定義されたリプシッツ連続関数 f について、Ω_0 の各路 $\zeta = \{z_n\}_n$ について $f(\zeta) = \lim_{n\to\infty} u(z_n)$ を満たす ∞ 調和関数 u が存在する.

定理 3. (V, E, r) を ∞ 双曲型ネットワークとする. Ω で定義されたリプシッツ連続関数 f について、Ω の各路 $\zeta = \{z_n\}_n$ について $f(\zeta) = \lim_{n\to\infty} u(z_n)$ を満たす ∞ 調和関数 u が存在すれば、それは一意的である.

11

変動指数をもつ関数空間における リースポテンシャルのハーディー型不等式

二村 俊英　大同工業大学・教養部
水田 義弘　広島大学大学院・理学研究科
下村 哲　広島大学大学院・教育学研究科

$\mathbf{R}^n$ 上の連続関数 $p(\cdot)$ は以下の 3 つの条件を満たすとする：

(P1) $1 < p^- = \inf_{\mathbf{R}^n} p(x) \le \sup_{\mathbf{R}^n} p(x) = p^+ < \infty$

(P2) $|p(x) - p(y)| \le \dfrac{\log \varphi(1/|x-y|)}{\log(1/|x-y|)} \qquad (|x-y| < 1/e)$

(P3) $|p(x) - p(y)| \le \dfrac{\log \psi(|x|)}{\log |x|} \qquad (|y| > |x|/2 > e/2)$

ただし，φ, ψ は $[0,\infty)$ 上の正値非減少関数で，ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して

$$(\log(1/r))^{-\varepsilon_0}\varphi(1/r) \quad および \quad (\log(1/r))^{-\varepsilon_0}\psi(1/r)$$

は $r = 0$ の近くで非減少とする.

変動指数 $p(\cdot)$ をもつ関数空間 $L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ を考え，そのノルムを

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{\mathbf{R}^n} \left|\frac{f(y)}{\lambda}\right|^{p(y)} dy \le 1\right\}$$

で定める．有界領域上の関数空間を扱うときは条件 (P3) は必要としない.

α $(0 < \alpha < n)$ 次のリースポテンシャル

$$U_\alpha f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} f(y)\, dy$$

を考える．$p(x) \equiv p$ (一定)，$0 < \alpha < n/p$ のとき，次の不等式が成り立つことが知られている ([4, Stein])：

$$\int_{\mathbf{R}^n} |x|^{-\alpha p} |U_\alpha f(x)|^p \, dx \leqq C \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^p \, dx$$

この不等式は，S. Samko [3] によって，有界領域における log-Hölder 連続な変動指数の場合に一般化された.

本講演では，この不等式を (P1)，(P2)，(P3) を満たす $\mathbf{R}^n$ 上の変動指数 $p(\cdot)$ の場合に拡張する．このために，定数 A および $t \geqq 0$, $x \in \mathbf{R}^n$ に対して，

$$\mathcal{P}_A(x,t) = \min\{t^{p(x)}\varphi(t)^{-A/p(x)}, t^{p(x)}\psi(t^{-1})^{-A/p(x)}\}$$

とする．

定理 1. $p^+ < n/\alpha$, $A > n$ とする．このとき，$\|f\|_{p(\cdot)} \leqq 1$ ならば，

$$\int_{\mathbf{R}^n} \mathcal{P}_A(x, |x|^{-\alpha} |U_\alpha f(x)|)\, dx \leqq C$$

極大関数 $\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy$ を考えると，

$$\begin{aligned} |U_\alpha f(x)| &\leqq \int_{B(x,2|x|)} |x-y|^{\alpha-n} |f(y)|\, dy + \int_{\mathbf{R}^n \setminus B(x,2|x|)} |x-y|^{\alpha-n} |f(y)|\, dy \\ &\leqq C|x|^\alpha \mathcal{M}f(x) + \int_{\mathbf{R}^n \setminus B(x,2|x|)} |x-y|^{\alpha-n} |f(y)|\, dy. \end{aligned}$$

$\|f\|_{p(\cdot)} \leqq 1$ のとき，

$$\int_{\mathbf{R}^n} \mathcal{P}_A(x, \mathcal{M}f(x))\, dx \leqq C$$

が成り立つので，定理 1 の証明は $J_\alpha f(x) = |x|^{-\alpha} \int_{\mathbf{R}^n \setminus B(x,2|x|)} |x-y|^{\alpha-n} |f(y)|\, dy$ の評価をすればよい．

さらに，定理 1 は次の形に一般化できる．

定理 2. $p^+ < n/\alpha$, $0 < \beta < \alpha$, $A > n$ とし，

$$\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha - \beta}{n}$$

とする．このとき，$\|f\|_{p(\cdot)} \leqq 1$ ならば，

$$\int_{\mathbf{R}^n} \left\{ \mathcal{P}_A(x, |x|^{-\beta} |U_\alpha f(x)|) \right\}^{q(x)/p(x)}\, dx \leqq C$$

参考文献

[1] T.Futamura, Y. Mizuta and T. Shimomura, Sobolev embeddings for Riesz potential space of variable exponent, Math. Nachr. **279** (2006), 1463-1473.

[2] P. Harjulehto, P. Hästö and M. Koskenoja, Hardy's inequality in a variable exponent Sobolev space, Georgian Math. J. **12** (2005), no. 3, 431–442.

[3] S. Samko, Hardy inequality in the generalized Lebesgue spaces, Fract. Calc. Appl. Anal. **6** (2003), 355–362.

[4] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.

12

放物型 Bergman 空間における指数 1 以下の Schatten 族 Toeplitz 作用素の特徴付け

鈴木 紀明 (名城大・理工)
西尾 昌治 (大阪市大・理)
山田 雅博 (岐阜大・教育)

上半空間 $\boldsymbol{R}_+^{n+1} = \boldsymbol{R}^n \times (0,\infty)$ 上の放物型作用素

$$L^{(\alpha)} := \frac{\partial}{\partial t} + (-\Delta_x)^\alpha \qquad (0 < \alpha \leq 1)$$

に関する Bergman 空間

$$\boldsymbol{b}_\alpha^2 := \{u \in L^2(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V);\ u \text{ は} \boldsymbol{R}_+^{n+1} \text{上 } L^{(\alpha)}\text{-調和}\}$$

を考える. ここで, V は 上半空間 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 上の Lebesgue 測度である. そのとき, $\boldsymbol{b}_\alpha^2$ 再生核を持つ Hilbert 空間となる. 上半空間上の正測度 μ に対し, その再生核 R_α を用いて,

$$(T_\mu u)(X) := \int R_\alpha(X,Y)\, u(Y)\, d\mu(Y)$$

とおき, Toeplitz 作用素とよぶ. ここでは, コンパクトな Toeplitz 作用素を考察する. そのためには次の補助関数が有用である.

定義 1. 上半空間上の正測度 μ に対し,

$$\hat{\mu}^{(\alpha)}(Y) := \mu(Q^{(\alpha)}(Y))\Big/V(Q^{(\alpha)}(Y))$$
$$\tilde{\mu}^{(\alpha)}(Y) := \int R_\alpha(X,Y)^2 d\mu(X)\Big/\int R_\alpha(X,Y)^2 dV(X)$$

とおき, それぞれ μ の averaging function および Berezin 変換と呼ぶ. ここで, $Q^{(\alpha)}(Y)$ は次で定義される α-parabolic Carleson box である.

$$Q^{(\alpha)}(Y) := \{(x_1, \cdots, x_n, t);\ s \leq t \leq 2s, |x_j - y_j| \leq 2^{-1}s^{1/2\alpha}, j = 1, \cdots, n\}.$$

定理 A. (cf. [4, Theorem 1]) 上半空間上の正測度 μ はある $\delta \in \boldsymbol{R}$ に対し次を満たすとする.

$$\int (1 + t + |x|^{2\alpha})^{-\delta}\, d\mu(x,t) < \infty \tag{1}$$

そのとき, 次は同値である. ただし, $\mathcal{A}$ は上半空間の 1 点コンパクト化における無限遠点を表す.

(i) T_μ は $\boldsymbol{b}_\alpha^2$ 上コンパクト

(ii) $\lim_{Y\to\mathcal{A}} \hat{\mu}^{(\alpha)}(Y) = 0$

(iii) $\lim_{Y \to \mathcal{A}} \tilde{\mu}^{(\alpha)}(Y) = 0$

Hilbert 空間上のコンパクト作用素 T に対し, $|T| := \sqrt{T^*T}$ の固有値を重複度を考慮して並べた列を $(\lambda_j)_j$ とする.

定義 2. $0 < \sigma < \infty$ とする. Hilbert 空間上のコンパクト作用素 T が Schatten σ-族に属するとは $(\lambda_j)_j \in l^\sigma$ となることをいう. また, このとき, $T \in \mathcal{S}^\sigma$ と表す.

$1 \leq \sigma < \infty$ の場合の Schatten 族 Toeplitz 作用素の特徴付けについては, 次の結果を前回の学会（２００８年度秋）で報告した.

定理 B. (**[6, Theorem 1]**) $1 \leq \sigma < \infty$ とする. (1) をみたす上半空間上の正測度 μ に対し, 次は同値である. ただし, $dV^*(X) := t^{-(\frac{n}{2\alpha}+1)}dV(X)$ とする.

(i) $T_\mu \in \mathcal{S}^\sigma$

(ii) $\hat{\mu}^{(\alpha)} \in L^\sigma(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V^*)$

(iii) $\tilde{\mu}^{(\alpha)} \in L^\sigma(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V^*)$

今回は, $0 < \sigma < 1$ の場合に, 次の結果が得られたことを報告する.

定理 1. $1 \leq \sigma < \infty$ とする. (1) をみたす上半空間上の正測度 μ に対し, $T_\mu \in \mathcal{S}^\sigma$ となるための必要十分条件は $\hat{\mu}^{(\alpha)} \in L^\sigma(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V^*)$ となることである.

最後に, Berezin 変換との関係を注意する.

命題 1. $\sigma > n/(n+2\alpha)$ とする. そのとき, 次が成り立つ.

$$\hat{\mu}^{(\alpha)} \in L^\sigma(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V^*) \Longleftrightarrow \tilde{\mu}^{(\alpha)} \in L^\sigma(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V^*)$$

References

[1] B. R. Choe, H. Koo and Y. J. Lee, Positive Schatten (-Herz) class Toeplitz operators on the half space, Potential Analysis, 27 (2007), 73–100.

[2] D. H. Lueking, Trace ideal criteria for Toeplitz operators, J. Funct. Anal., 73 (1987), 345–368.

[3] M. Nishio, K. Shimomura and N. Suzuki, α-parabolic Bergman spaces, Osaka J. Math., 42 (2005), 133–162.

[4] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, Compact Toeplitz operators on parabolic Bergman spaces, Hiroshima Math. J., 38 (2008), 177–192.

[5] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, Interpolating sequences of parabolic Bergman spaces, Potential Analysis, 28 (2008), 353–378.

[6] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, Weighted Berezin transformations with application to the Schatten class Toeplitz operators on parabolic Bergman spaces, Preprint.

13 準有界調和関数のスペクトル分解

中井 三留（名工大・名誉教授）

Riemann 面 R 上の調和関数の族 $H(R)$ の 2 元 u, v に対して u, v の最大 (又は, 最小) 調和劣 (又は, 優) 関数を $u \wedge v$ (又は, $u \vee v$) と記す. $u \in H(R)$ が

$$(1) \qquad u \wedge (1-u) = 0$$

をみたすとき, u を R 上の**調和測度**と呼び ([1], [2]), その全体を $Hm(R)$ とかく. R 上の有界調和関数の全体を $HB(R)$ とかけば, $Hm(R) \subset HB(R)$ である. さて $H(R)$ の 1 径数族 $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ (但し $\mathbb{R}$ は実数体) が次の 4 条件をみたすとき, $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ を**単位の分解**と呼ぶ: $e_\lambda \in Hm(R)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$; $e_\lambda \leqq e_\mu$ $(\lambda \leqq \mu)$; $e_{\lambda+0} = e_\lambda$, 但し $e_{\lambda+0} := \lim_{\mu\downarrow\lambda} e_\mu$; $e_{-\infty} := \lim_{\mu\downarrow-\infty} e_\mu = 0$ 及び $e_\infty := \lim_{\mu\uparrow\infty} e_\mu = 1$. 単位の分解 $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ に対し $-\infty < a < b < +\infty$ がとれて $e_\lambda = 0$ $(\lambda < a)$, $e_\lambda = 1$ $(\lambda \geqq b)$ と出来るとき, $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ は**有限型**であると言う. 先日次に述べる結果を発表した ([3]).

定理 1: 任意の $u \in HB(R)$ に対し, 唯一の有限型単位の分解 $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ が定まり

$$(2) \qquad u = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda de_\lambda \qquad \text{(Riemann-Stieltjes 積分)}$$

とスペクトル分解出来る. 逆に有限型単位の分解 $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ を任意に与えて (2) で u を定めると, $u \in HB(R)$ となる.

$u \in H(R)$ について, 先ず各 $n \in \mathbb{N}$ (但し $\mathbb{N}$ は自然数全体) に対し $(u \wedge n) \vee (-n) \in HB(R)$ であるが, 次いで R 上局所一様に $u = \lim_{n\uparrow\infty}(u \wedge n) \vee (-n)$ となるとき, u を**準有界**と呼び, その全体を $HB'(R)$ と記せば, $HB(R) \subset HB'(R)$ となる. 今回は定理 1 を $HB(R)$ から $HB'(R)$ に拡張したい. その為単位の分解 $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ が, どれかひとつの, 従って任意の $a \in R$ に対して

$$(3) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda| de_\lambda(a) < +\infty$$

をみたすとき, $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ は**準有限型**であると言うことにする. 有限型なら準有限型であるし, 又準有限型とならぬ単位の分解 $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ も存在する. 今回は次の定理 1 の拡張の成立を報告する：

定理 2: 任意の $u \in HB'(R)$ に対し唯一つの準有限型単位の分解 $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ が定まって, u は (2) とスペクトル分解出来る. 逆に準有限型単位の分解を任意に与えて (2) で u を定めると, $u \in HB'(R)$ となる.

$Hm(R)$ の部分族 F の異なる 2 元 u, v が常に $u \wedge v = 0$ をみたすとき, F は互いに素な族であると言う. 定理 1 により次の $HB(R)$ の近似定理が示される. 任意の $u \in HB(R)$ をとるとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $Hm(R)$ の互いに素な有限部分集合 $\{w_j\}_{1 \leqq j \leqq n}$ と実数の有限列 $(\lambda_j)_{1 \leqq j \leqq n}$ がとれて

$$\|u - \sum_{1 \leqq j \leqq n} \lambda_j w_j ; R\|_\infty < \varepsilon \tag{4}$$

と出来る, ここに $\|\cdot\,; R\|_\infty$ は R 上の上限ノルムである. 特に $Hm(R)$ はこのノルムによる Banach 空間 $HB(R)$ の基本集合である, 即ち $HB(R)$ は $Hm(R)$ の線形スパンの閉被である. 対応する所は $HB'(R)$ に対しては次の様になる: 任意の $u \in HB'(R) \setminus HB(R)$ をとるとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $Hm(R)$ の互いに素な可算部分集合 $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ と実数列 $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ がとれて

$$\|u - \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j w_j ; R\|_\infty < \varepsilon \tag{5}$$

と出来る.

参 照 文 献

[1] M. HEINS: *On the Lindelöfian principle*, Ann. of Math., **61**(1955), 440-473.

[2] M. HEINS: *Lindelöfian maps*, Ann. of Math., **62**(1955), 418-446.

[3] M. NAKAI: *Spectral resolutions of bounded harmonic functions*, 2008 年度ポテンシャル論研究集会報告集.

特別講演

Brody 曲線の空間の幾何と平均次元

塚本真輝 (京都大学大学院理学研究科)*

概 要

Brody 曲線のモジュライ空間 (無限次元空間になる) の幾何学を，Gromov の「平均次元」という観点から研究するというテーマを解説する.

1 序

正則曲線 (複素平面 $\mathbb{C}$ からの正則写像) はとても心惹かれる対象である. 幾何学を 3 つに分類する時, すなわち, 正曲率 (球面幾何), 平坦 (平面幾何), 負曲率 (双曲幾何) という分類を考える際, $\mathbb{C}$ は平面幾何という「狭間」の場所に位置する. つまり, 有限性と超越性の境界上にある. そのため, はっきりとした秩序を持ちながらも, 同時に多様でワイルドなふるまいを持つという魅力的な二面性を正則曲線は持つ. (むろん, そのような魅力的な対象は他にもあろうが.)

正則曲線を調べるうえで大変な力を発揮する理論に Nevanlinna 理論がある. 高次元 Nevanlinna 理論は未だ未完成とはいえ, 現時点でも極めて優れた理論だと思う. (非コンパクト空間上で, エネルギーの有限性を仮定せずに非線形偏微分方程式を研究するという, ほとんど無謀とも思える試みで, ここまでうまくいっている理論が他にあるだろうか？)

しかし, この論説では, 通常の Nevanlinna 理論とは少し異なった道を示してみたい. ここで論じたいのは Brody 曲線のモジュライ空間の研究である. Brody 曲線とは正則写像 $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}P^N$ であって, $|df| \le 1$ を満たすものである. (詳しくは後述する.) 複素平面 $\mathbb{C}$ は非コンパクトなので, Brody 曲線全体は無限次元の空間を成す. この無限次元空間の研究を行いたい.

無限次元空間 (あるいは, 類似のエキゾティックな対象物) を研究する際に最も困難なことは, そもそも何を研究すべきかわからないことである. そこに, Gromov が極めて単純で, しかし優れた問題の設定を与えた. 彼は, 無限次元空間に群が作用している際, その群作用で「平均を取った」次元という概念が定義できることを見抜いた. (正確には, 作用する群にアメナブルという条件が要る.) 例えば, $[0,1]$ の無限直積 $[0,1]^{\mathbb{Z}}$ には $\mathbb{Z}$ がシフトとして作用するが, この時の平均次元は 1

*Supported by Grant-in-Aid for JSPS Fellows (19·1530) from Japan Society for the Promotion of Science

である．Brody 曲線のモジュライ空間には，Lie 群 $\mathbb{C}$ の自然な作用がある．従って，この作用に関する平均次元を求めよという問題を考えることができる．この論説では，この問題に関して得られている結果を紹介したい．

Brody 曲線の空間の平均次元の研究は，筆者が知る限りでは，現時点では，通常の Nevanlinna 理論に応用はない．ただ，平均次元の研究というのは，おそらく氷山の一角にすぎまいと思われる．次元というのは，空間にとって根本的なデータであるが，それはまた，極めて不十分なデータでもある．平均次元は，無限次元空間の姿を「見る」きっかけを与えた．さらに先に何があるのかは不明だが，大きな荒野が広がっていることは確かである．(むろん，何か良いものが存在している保証は無い．何もない荒野が広がっているだけという可能性もあろう．)

2 平均次元

平均次元に関する基本的なことがらを解説する．詳しくは Gromov [4], Lindenstrauss-Weiss [7] を見よ．

(X,d) をコンパクト距離空間，Y を位相空間，$f : X \to Y$ を連続写像とする．正の数 ε に対して，f が「ε-埋め込み」であるとは，任意の $y \in Y$ に対して，$\mathrm{Diam} f^{-1}(y) \leq \varepsilon$ が成立することとする．つまり，ε 程度の「誤差」をのぞけば，埋め込みになっているということである．各 $\varepsilon > 0$ に対して，次の性質を持つ整数 $n \geq 0$ の最小値を $\mathrm{Widim}_\varepsilon(X,d)$ と書くことにする：「n 次元多面体 P と ε-埋め込み $f : X \to P$ が存在する」．

$\varepsilon \to 0$ の時，$\mathrm{Widim}_\varepsilon(X,d)$ は被覆次元 $\dim X$ を与える：

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} \mathrm{Widim}_\varepsilon(X,d) = \dim X.$$

$\mathrm{Widim}_\varepsilon(X,d)$ は「ε-スケールで見た時の」X の次元である．例えば，$X := [0,1] \times [0,\varepsilon]$ $(\varepsilon < 1)$ として，距離はユークリッド距離を入れることにすると，自然な射影 $X \to [0,1]$ は ε-埋め込みであって，$\mathrm{Widim}_\varepsilon X = 1$．

基本的な重要性を持つ例は次である (cf. Gromov [4, p. 332, 333]. 証明は Lindenstrauss-Weiss [7, Lemma 3.2], もしくは Tsukamoto [8, Example 4.1] を参照.)

Example 1. $X = [0,1]^N$，$d(x,y) := \max_i |x_i - y_i|$ とすると，

$$\mathrm{Widim}_\varepsilon([0,1]^N, d) = N \quad (\varepsilon < 1).$$

ここで重要なことは $\varepsilon < 1$ という評価が N に依存しないという点である．

次に，加法群 $\mathbb{Z}$ が X に連続に作用しているとしよう．このとき，各整数 $N \geq 0$ に対して，X 上の距離 $d_N(\cdot,\cdot)$ を次で定義する：

$$d_N(x,y) := \max_{0 \leq k \leq N-1} d(k.x, k.y) \quad (x, y \in X).$$

そして, 次の極限値を考える（常に極限が存在する）:

$$\mathrm{Widim}_\varepsilon(X:\mathbb{Z}) := \lim_{N\to\infty} \frac{\mathrm{Widim}_\varepsilon(X, d_N)}{N}.$$

平均次元 $\dim(X:\mathbb{Z})$ を次で定義する：

$$\dim(X:\mathbb{Z}) := \lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{Widim}_\varepsilon(X:\mathbb{Z}).$$

一般に, 平均次元の値は 0 以上の実数（$+\infty$ も含む）である. 平均次元の定義には距離が使われているが, 実は位相不変量になる（つまり, 同じ位相を定める別の距離を使って平均次元を定義しても, 値は変わらない.）最も基本的な例は次である.

Example 2. $B \subset \mathbb{R}^n$ を閉球とする. $B^{\mathbb{Z}}$ を, 整数で添え字づけた B のコピーの無限直積とする.（位相は直積位相.）加法群 $\mathbb{Z}$ が自然なシフト作用として $B^{\mathbb{Z}}$ に作用する. この時,

$$\dim(B^{\mathbb{Z}}:\mathbb{Z}) = n.$$

直感的には,

$$\dim(B^{\mathbb{Z}}:\mathbb{Z}) = \dim B^{\mathbb{Z}}/|\mathbb{Z}| = n|\mathbb{Z}|/|\mathbb{Z}| = n.$$

特に,

$$\dim([0,1]^{\mathbb{Z}}:\mathbb{Z}) = 1.$$

以上では, 空間に作用する群は離散群 $\mathbb{Z}$ であったが, 後で実際に出てくるのは, 連続群 $\mathbb{C}$ の作用である. そこで, 次にこの場合の平均次元の定義を述べよう.

(X,d) をコンパクト距離空間とし, そこに Lie 群 $\mathbb{C}$ が連続に作用しているとする. 各正数 $R>0$ に対して, X 上の距離 $d_R(\cdot,\cdot)$ を次で定める：

$$d_R(x,y) := \sup_{a\in\mathbb{C}, |a|\le R} d(a.x, a.y) \quad (x,y\in X).$$

そして, 各 $\varepsilon>0$ に対して, $\mathrm{Widim}_\varepsilon(X:\mathbb{C})$ を次で定める.

$$\mathrm{Widim}_\varepsilon(X:\mathbb{C}) := \lim_{R\to\infty} \frac{\mathrm{Widim}_\varepsilon(X, d_R)}{\pi R^2}.$$

そして平均次元 $\dim(X:\mathbb{C})$ を次で定める：

$$\dim(X:\mathbb{C}) := \lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{Widim}_\varepsilon(X:\mathbb{C}).$$

この値は, やはり位相不変量になる. 直感的には,

$$\dim(X:\mathbb{C}) = \dim X/\mathrm{vol}(\mathbb{C}).$$

X の被覆次元 $\dim X$ が有限の時, 平均次元 $\dim(X:\mathbb{C})$ は常に 0 になる. 従って, 平均次元の値は X の「無限次元幾何学の」情報を捕まえていることになる.

最後に，もう一つ関連することを述べる．$\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ を格子とする．$\mathbb{C}$ が X に連続に作用していると，特に $\mathbb{C}$ の部分群 Λ も X に連続に作用する．各 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，

$$\Omega_n := \{x\omega_1 + y\omega_2 \in \Lambda |\, x, y \in \mathbb{Z},\, 0 \leq x, y \leq n-1\}.$$

そして，X 上の距離 $d_{\Omega_n}(\cdot, \cdot)$ を次のように定める．

$$d_{\Omega_n}(x, y) := \max_{a \in \Omega_n} d(a.x, a.y) \quad \text{for } x, y \in X.$$

平均次元 $\dim(X : \Lambda)$ が以下の様にして定まる．

$$\mathrm{Widim}_\varepsilon(X : \Lambda) := \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \mathrm{Widim}_\varepsilon(X, d_{\Omega_n}).$$

$$\dim(X : \Lambda) := \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{Widim}_\varepsilon(X : \Lambda).$$

これは，$\dim(X : \mathbb{C})$ と次の関係にある．(Gromov [4, p. 329], Lindenstrauss-Weiss [7, Proposition 2.7], Tsukamoto [8, Proposition 4.5] を参照.)

Proposition 3.

$$\dim(X : \mathbb{C}) = |\mathbb{C}/\Lambda| \dim(X : \mathbb{C}).$$

ここで，$|\mathbb{C}/\Lambda|$ は Λ の基本領域の面積である．

3 Brody 曲線

$z = x + \sqrt{-1}y$ を複素平面 $\mathbb{C}$ 上の自然な座標とする．正則写像 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}P^N$ に対して，その微分 df の各点ノルム $|df|(z) \geq 0$ を次で定める：

$$|df|^2(z) := \frac{1}{4\pi} \Delta \log(|f_0|^2 + |f_1|^2 + \cdots + |f_N|^2) \quad (\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2),$$

ただし，ここで $f = [f_0 : f_1 : \cdots : f_N]$（各 f_i は正則函数）である．正則写像 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}P^N$ が $|df|(z) \leq 1$ を全ての点 $z \in \mathbb{C}$ で満たすとき，f を Brody 曲線と呼ぶことにする．(Brody [2] 参照.)

Remark 4. ある定数 $C > 0$ が存在して，$|df| \leq C$ となった場合，$f(z/C)$ は Brody 曲線になる．

Brody 曲線の例をいくつか述べよう（全て $N = 1$ の例．すなわち有理型函数であって，Brody 曲線になる例.）

Example 5. 指数函数 e^z は Brody 曲線.

Example 6. $f(z) = z$ は Brody 曲線．より一般に，$f(z)$ を任意の有理函数とすると，ある定数 $C > 0$ があって，$|df| \le C$ となる．従って，$f(z/C)$ は Brody 曲線になる．

Example 7. $f(z)$ を楕円函数とする．(すなわち，ある格子 $\Lambda \subset \mathbb{C}$ が存在して，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して，$f(z+\lambda) = f(z)$ となる．) すると，ある定数 $C > 0$ が存在して $|df| \le C$ が成立する．よって，$f(z/C)$ は Brody 曲線になる．

以上の例より，Brody 曲線は豊富に存在することがわかる．簡単に言えば，全ての有理函数や楕円函数は適当なスケール変換で Brody 曲線になる．Brody 曲線にならない例も一つ書いておく（Winkelmann [11, Proposition 2] 参照）．

Example 8. $f(z) := z + e^z$ とすると，$\sup_{z\in\mathbb{C}} |df|(z) = +\infty$. 従って，$f(z)$ は，いかなるスケール変換を施しても Brody 曲線にはならない．ここで，z や e^z は Brody 曲線であったことに注意せよ．この例は，Brody 曲線という条件が本質的に非線形な条件であることを良く示していると思う．

さて，$\mathbb{C}P^N$ 内の Brody 曲線全体を $\mathcal{M}(\mathbb{C}P^N)$ と書くことにする．位相はコンパクト開位相を考える．言い換えれば，コンパクト一様収束の位相である．つまり，Brody 曲線の列 $\{f_n\}_{n\ge 1} \subset \mathcal{M}(\mathbb{C}P^N)$ が $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}P^N)$ に収束するとは，任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{C}$ に対して，$f_n|_K$ が $f|_K$ に一様収束するということである．この位相は距離化可能であり，$\mathcal{M}(\mathbb{C}P^N)$ は無限次元のコンパクト空間になる．また，次のようにして，Lie 群 $\mathbb{C}$ が $\mathcal{M}(\mathbb{C}P^N)$ に連続に作用する：

$$\mathcal{M}(\mathbb{C}P^N) \times \mathbb{C} \to \mathcal{M}(\mathbb{C}P^N), \quad (f(z), a) \mapsto f(z+a).$$

従って，平均次元 $\dim(\mathcal{M}(\mathbb{C}P^N) : \mathbb{C})$ を考えることができる．ただ，これに関する結果を述べる前にもう一つ準備をしよう．

4 Brody 曲線の平均エネルギー

Brody 曲線 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}P^N$ に対して，その特性函数 $T(r, f)$ を次で定める：

$$T(r, f) := \int_1^r \frac{dt}{t} \int_{|z|\le t} |df|^2 dxdy \quad (r \ge 1).$$

$|df| \le 1$ であるから，$T(r, f) \le \pi r^2/2$ となる．そこで，平均エネルギー $e(f)$ を次式で定める：

$$e(f) := \limsup_{r\to\infty} \frac{2}{\pi r^2} T(r, f) \in [0, 1].$$

さらに，$e(\mathbb{C}P^N)$ を次で定める：

$$e(\mathbb{C}P^N) := \sup_{f\in\mathcal{M}(\mathbb{C}P^N)} e(f) \in [0, 1].$$

この数について最も基本的なことは，これが非自明な情報を持つということである．すなわち次が成り立つ（Tsukamoto [8, 10]）

$$0 < e(\mathbb{C}P^N) < 1.$$

Example 9. $f(z)$ が有理函数，もしくは指数函数の場合，$e(f) = 0$. f が楕円函数（定数ではない）とすると，$e(f) > 0$.

もう一つ類似の不変量を導入する．Brody 曲線 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}P^N$ に対して，ある格子 $\Lambda \subset \mathbb{C}$ が存在して，任意の $\lambda \in \Lambda$ で $f(z+\lambda) = f(z)$ となるとき，f を楕円 Brody 曲線と呼ぶことにしよう．$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}P^N$ が楕円 Brody 曲線全体を走る時の $e(f)$ の上限を $e(\mathbb{C}P^N)_{ell}$ と書くことにする．$0 < e(\mathbb{C}P^N)_{ell} \le e(\mathbb{C}P^N) < 1$ である．また，次が成立する（Tsukamoto [10, Section 4] 参照）

$$\lim_{N\to\infty} e(\mathbb{C}P^N)_{ell} = \lim_{N\to\infty} e(\mathbb{C}P^N) = 1.$$

5 $\mathcal{M}(\mathbb{C}P^N)$ の平均次元

状況を思い出すと，$\mathcal{M}(\mathbb{C}P^N)$ は $\mathbb{C}P^N$ 内の Brody 曲線全体の空間であり，ここには Lie 群 $\mathbb{C}$ が連続に作用していた．従って，平均次元 $\dim(\mathcal{M}(\mathbb{C}P^N) : \mathbb{C})$ が考えられる．これに関する主結果は次の評価式である．

Theorem 10.

$$2(N+1)e(\mathbb{C}P^N)_{ell} \le \dim(\mathcal{M}(\mathbb{C}P^N) : \mathbb{C}) \le 4Ne(\mathbb{C}P^N).$$

上からの評価と下からの評価は，以下で解説するように，全く異なった手法で証明される．上からの評価式は，本質的には Nevanlinna の第一主要定理によるものであり，下からの評価は楕円 Brody 曲線に対する変形理論の構築による．また，上からの評価については，Gromov [4, p. 396 (c)] も Eremenko [3] の結果を用いた評価式を書いている．(細かいことが書かれていないので，Theorem 10 の評価とどちらが良いかは不明．ただ，以下に述べるように，私は Theorem 10 の評価は，$N = 1$ の時には最良評価だと予想している．)

上の定理より，特に次を得る．

Theorem 11.

$$4e(\mathbb{C}P^1)_{ell} \le \dim(\mathcal{M}(\mathbb{C}P^1) : \mathbb{C}) \le 4e(\mathbb{C}P^1).$$

これから，次を予想として提出する．

Conjecture 12.

$$e(\mathbb{C}P^1)_{ell} = e(\mathbb{C}P^1).$$

もしこれが正しいなら，Theorem 11 から次の結果を得る．

$$\dim(\mathcal{M}(\mathbb{C}P^1):\mathbb{C}) = 4e(\mathbb{C}P^1).$$

上の Conjecture 12 に関連して，次の例を出しておく．

Example 13. 以下に構成する楕円函数 f は，$e(f)$ の上限値を達成する函数の良い候補なのではないかと思う．この f は Bonk-Eremenko [1] で解決された Bloch 定数型の問題の極値函数の一つである．

$\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の 4 点を次のように取る：

$$e_1 := 1/\sqrt{2}, \quad e_2 := e^{2\pi\sqrt{-1}/3}/\sqrt{2}, \quad e_3 := e^{4\pi\sqrt{-1}/3}/\sqrt{2}, \quad e_4 := \infty.$$

この 4 点は Riemann 球面に内接する正四面体の 4 頂点をなしている．ω_1 を正定数，$\omega_2 := \omega_1 e^{\pi\sqrt{-1}/3}$ とする．$\Delta \subset \mathbb{C}$ を $0, \omega_1, \omega_2$ を 3 頂点とする正三角形とし，$\tilde{\Delta} \subset \mathbb{C}P^1$ を e_1, e_2, e_4 を頂点とする，球面正三角形とする．Riemann の写像定理により，正則写像 $f : \Delta \to \tilde{\Delta}$ であって，$0, \omega_1, \omega_2$ を e_1, e_4, e_2 にそれぞれ写すものが存在している．鏡像の原理から，この f は複素平面全体に拡張できて，$\Lambda := \mathbb{Z}(2\omega_1) + \mathbb{Z}(2\omega_2)$ を周期格子とする楕円函数になる．f の臨界点全体は $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ であり，臨界値全体は e_1, e_2, e_3, e_4 になる．$\deg(f : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}P^1) = 2$ であり，f は次の微分方程式を満たす．

$$(f')^2 = K(f - e_1)(f - e_2)(f - e_3) = K(f^3 - 1/\sqrt{8}).$$

ただし，K は次式で定まる正定数である．

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{K}} \int_{1/\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - 1/\sqrt{8}}} = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{K}} \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - 1}}.$$

次が成立する：

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} |df|^2(z) = \frac{K}{\pi\sqrt{8}}.$$

$K = \pi\sqrt{8}$ となるように ω_1 を取る．すると，$\sup_{z\in\mathbb{C}} |df|(z) = 1$ であって f は楕円 Brody 曲線になる．基本領域の面積 $|\mathbb{C}/\Lambda| = 2\sqrt{3}\omega_1^2$ であり，これから

$$e(f) = \frac{2}{|\mathbb{C}/\Lambda|} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left(\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - 1}} \right)^{-2} = 0.6150198678198\cdots.$$

Theorem 11 から，

$$\dim(\mathcal{M}(\mathbb{C}P^1):\mathbb{C}) \geq 4e(f) = \frac{8\pi}{\sqrt{3}} \left(\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - 1}} \right)^{-2} = 2.460079471279\cdots.$$

この不等式は，もしかすると，実は等式になるかもしれない．

6 上からの評価の証明：正則曲線の離散化

この章では上からの評価

$$\dim(\mathcal{M}(\mathbb{C}P^N):\mathbb{C}) \leq 4Ne(\mathbb{C}P^N),$$

を証明する．鍵になるのは次の補題である：

Lemma 14. *$f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}P^N$ を二つの Brody 曲線とし，$\Lambda \subset \mathbb{C}$ を次を満たす格子とする：*

$$e(f) + e(g) < 1/|\mathbb{C}/\Lambda|.$$

ただし，$|\mathbb{C}/\Lambda|$ は Λ の基本領域の面積である．この時，もし Λ 上で f と g が一致するなら，実は f と g は恒等的に等しい．(i.e., $f|_\Lambda = g|_\Lambda \Rightarrow f = g$.)

Proof. 以下と類似の議論は Eremenko [3, Theorem 2.5] で与えられている．証明の本質を見やすくするために，$N = 1$ の時（つまり f, g が有理型函数）に限って証明を書く．一般次元の場合も本質は同じである．(詳しくは Tsukamoto [8, Lemma 2.1] を参照.)

$f|_\Lambda = g|_\Lambda$ かつ，f と g は恒等的には等しくないとしよう．まず，$\mathbb{C}P^1$ の適当な回転を考えることで，$\infty \notin f(\Lambda) = g(\Lambda)$ であるとして良い．仮定より，$(f-g)$ は Λ の各点で 0 になる非定数の有理型函数である．従って，第一主要定理から，

$$\frac{\pi r^2}{2|\mathbb{C}/\Lambda|} + O(r) \leq T(r, f-g) \leq T(r,f) + T(r,g) + O(1).$$

これより，($e(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{2}{\pi r^2} T(r,f)$ であった.)

$$\frac{1}{|\mathbb{C}/\Lambda|} \leq e(f) + e(g) < \frac{1}{|\mathbb{C}/\Lambda|}.$$

これは矛盾である． □

さて，$\dim(\mathcal{M}(\mathbb{C}P^N):\mathbb{C}) \leq 4Ne(\mathbb{C}P^N)$ を証明しよう．$\Lambda \subset \mathbb{C}$ を格子であって，次を満たすものとして任意に取る．

$$2e(\mathbb{C}P^N) < 1/|\mathbb{C}/\Lambda|. \tag{1}$$

そして次の写像（「離散化」）を考えよう．

$$D : \mathcal{M}(\mathbb{C}P^N) \to (\mathbb{C}P^N)^\Lambda, \quad f \mapsto (f(\lambda))_{\lambda\in\Lambda}.$$

ただし，$(\mathbb{C}P^N)^\Lambda$ は Λ で添え字づけた $\mathbb{C}P^N$ のコピーの無限直積である．この写像 D は Λ-同変であって，また埋め込みである．実際，$D(f) = D(g)$ とすると，条件 (1) より，

$$e(f) + e(g) \leq 2e(\mathbb{C}P^N) < 1/|\mathbb{C}/\Lambda|.$$

従って，Lemma 14 より，$f = g$ となる．よって，

$$\dim(\mathcal{M}(\mathbb{C}P^N) : \Lambda) = \dim(D(\mathcal{M}(\mathbb{C}P^N)) : \Lambda) \le \dim((\mathbb{C}P^N)^\Lambda : \Lambda) = 2N.$$

すると，Proposition 3 によって，

$$\dim(\mathcal{M}(\mathbb{C}P^N) : \mathbb{C}) = |\mathbb{C}/\Lambda|^{-1} \dim(\mathcal{M}(\mathbb{C}P^N) : \Lambda) \le 2|\mathbb{C}/\Lambda|^{-1}N.$$

$|\mathbb{C}/\Lambda|^{-1}$ は $2e(\mathbb{C}P^N)$ にいくらでも近づけられるので，

$$\dim(\mathcal{M}(\mathbb{C}P^N) : \mathbb{C}) \le 4Ne(\mathbb{C}P^N).$$

以上で上からの評価の証明を終わる．

7　下からの評価の証明：変形理論

この章では，Theorem 10 の下からの評価

$$2(N+1)e(\mathbb{C}P^N)_{ell} \le \dim(\mathcal{M}(\mathbb{C}P^N) : \mathbb{C}),$$

の証明のアイデアを紹介する．証明の本質は以下で述べる変形理論である．詳細を知りたい方は Tsukamoto [9] を参照していただきたい．

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}P^N$ を定数ではない正則写像であって，$|df| < 1$ かつ，格子 $\Lambda \subset \mathbb{C}$ が存在して $f(z+\lambda) = f(z)$ $(\lambda \in \Lambda)$ が成り立つとする．この f の微少変形を構成したい．$T'\mathbb{C}P^N$ を複素射影空間 $\mathbb{C}P^N$ の正則接束とし，$E := f^*T'\mathbb{C}P^N$ をその引き戻しとする．E は複素平面 $\mathbb{C}$ 上の正則ベクトル束であり，Fubini-Study 計量の引き戻しを Hermite 計量として持つ．また，E には自然に Λ が作用する（計量を保つ作用）．E の正則切断からなる（無限次元の）ベクトル空間 V を次で定める．

$$V := \{u : \mathbb{C} \to E \mid u \text{ は正則切断であって}, \|u\|_\infty := \sup_{z\in\mathbb{C}} |u(z)| < \infty\}.$$

V は $\|\cdot\|_\infty$ をノルムとする無限次元の Banach 空間になる．Λ は V に作用する（ノルムを保つ）．$r > 0$ に対して次のように置く：

$$B_r(V) := \{u \in V \mid \|u\|_\infty \le r\}.$$

次が変形理論の帰結である．（これの証明は説明しない．論文 [9] を見ていただきたい．）

Proposition 15. 正定数 δ と C が存在して，次が成り立つ．各 $u \in B_\delta(V)$ に対して，$f_u \in \mathcal{M}(\mathbb{C}P^N)$ が存在して，以下の条件を満たす．
(i) $f_0 = f$.
(ii) 写像 $B_\delta(V) \ni u \mapsto f_u \in \mathcal{M}(\mathbb{C}P^N)$ は Λ-同変である．
(iii) 任意の $u, v \in B_\delta(V)$ に対して，

$$C^{-1}\|u - v\|_\infty \le \sup_{z\in\mathbb{C}} d(f_u(z), f_v(z)) \le C\|u - v\|_\infty.$$

ここで，$d(\cdot,\cdot)$ は複素射影空間上の *Fubini-Study* 計量による距離である．

これを使って，どのようにして下からの評価を証明するのかをナイーブに説明する．(以下の議論を厳密にすることはそれほど難しくないのだが，厳密な議論は論文 [9] に書いたので，ここではむしろ，直感的な説明をしたい.)

Λ-不変性から，f は正則写像 $\underline{f}:\mathbb{C}/\Lambda\to\mathbb{C}P^N$ を誘導する．各 $n=1,2,3,\cdots$ に対して，Λ の部分群 $n\Lambda$ を考える．V の元であって，$n\Lambda$ の作用で不変なもの全体の成す部分空間を $V_n\subset V$ としよう．$\pi_n:\mathbb{C}/n\Lambda\to\mathbb{C}/\Lambda$ を自然な n^2-重被覆とすると，V_n は自然に $\mathbb{C}/n\Lambda$ 上の $(\underline{f}\circ\pi_n)^*T'\mathbb{C}P^N$ の正則切断全体と同一視できる：

$$V_n\cong H^0(\mathbb{C}/n\Lambda;\mathcal{O}((\underline{f}\circ\pi_n)^*T'\mathbb{C}P^N)).$$

$\underline{f}:\mathbb{C}/\Lambda\to\mathbb{C}P^N$ の degree を d と置こう．Riemann-Roch より，

$$\dim_{\mathbb{R}}V_n=2\dim_{\mathbb{C}}V_n=2n^2(N+1)d.$$

ここで, $H^1=0$ となることを用いている.(ただし，以下の議論で必要なのは不等式 $\dim_{\mathbb{R}}V_n\geq 2n^2(N+1)d$ なので，実際には $H^1=0$ は使う必要はない.)

直感的に言うと，f の変形のパラメータが，$n\Lambda$ の基本領域上に $2n^2(N+1)d$ 個存在しているということになる.(しかも，Proposition 15 は，ある意味でこれらのパラメータが「effective に」効いていることを保証する.)

すると，f の変形のパラメータ数は,「単位面積あたりに」少なくとも

$$\frac{\dim_{\mathbb{R}}V_n}{|\mathbb{C}/n\Lambda|}=\frac{2(N+1)d}{|\mathbb{C}/\Lambda|}=2(N+1)e(f),$$

存在することになる.($e(f)$ は f の平均エネルギー.) すると，

$$\dim(\mathcal{M}(\mathbb{C}P^N):\mathbb{C})=\frac{\dim\mathcal{M}(\mathbb{C}P^N)}{\mathrm{vol}(\mathbb{C})}\geq\lim_{n\to\infty}\frac{\dim_{\mathbb{R}}V_n}{|\mathbb{C}/n\Lambda|}=2(N+1)e(f).$$

f について上限を取ると，求めていた下からの評価が得られる．

Remark 16. 各 V_n は正則写像 $\underline{f}\circ\pi_n:\mathbb{C}/n\Lambda\to\mathbb{C}P^N$ の変形を記述している．$\mathbb{C}/n\Lambda$ はコンパクトなので，$\underline{f}\circ\pi_n$ の変形は通常の変形理論で構成できる．Proposition 15 の要点は，全ての $\underline{f}\circ\pi_n$ の変形を「一様に」(つまり，n に依存しない評価をもって) 構成できるという点にある．

8 Gromov の予想について

ここまでの議論は主に $\dim(\mathcal{M}(\mathbb{C}P^N):\mathbb{C})$ についての研究であったが，より一般に Hermite 多様体 X に対して，X 内の Brody 曲線全体の空間 $\mathcal{M}(X)$ が考えられる．これについて，Gromov [4, p. 329] が次の予想を提出した．

Conjecture 17. X をコンパクト，非特異射影代数多様体とする．この時，平均次元 $\dim(\mathcal{M}(X):\mathbb{C})$ が正ならば，X は有理曲線を含む．

逆に，X が有理曲線を含むなら，$\dim(\mathcal{M}(X):\mathbb{C})$ が正になることは容易に証明できる．この予想について，次の結果を得た．

Proposition 18. コンパクト *Hermite* 多様体（であって *kähler* 計量を持たない）X が存在して，次が成立する：X は有理曲線を含まないが，$\dim(\mathcal{M}(X):\mathbb{C}) > 0$.

Kollár-Mori [5, Example 1.8] で与えられている多様体が，この性質を持つことを [9] で証明した．この結果から Conjecture 17 において，X の射影性，もしくは Kähler 性が本質的であることがわかる．

参考文献

[1] M. Bonk, A. Eremenko, Covering properties of meromorphic functions, negative curvature and spherical geometry, Ann. of Math. **152** (2000) 551-592

[2] R. Brody, Compact manifolds and hyperbolicity, Trans. Amer. Math. Soc. **235** (1978) 213-219

[3] A. Eremenko, Normal holomorphic curves from parabolic regions to projective spaces, preprint, Purdue University (1998), arXiv:0710.1281

[4] M. Gromov, Topological invariants of dynamical systems and spaces of holomorphic maps: I, Math. Phys. Anal. Geom. **2** (1999) 323-415

[5] J. Kollár, S. Mori, Birational geometry of algebraic varieties, With the collaboration of C.H. Clemens and A. Corti, Cambridge Tracts in Mathematics, 134, Cambridge University Press, Cambridge (1998)

[6] E. Lindenstrauss, Mean dimension, small entropy factors and an embedding theorem, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **89** (1999) 227-262

[7] E. Lindenstrauss, B. Weiss, Mean topological dimension, Israel J. Math. **115** (2000) 1-24

[8] M. Tsukamoto, Moduli space of Brody curves, energy and mean dimension, Nagoya Math. J. **192** (2008) 27-58

[9] M. Tsukamoto, Deformation of Brody curves and mean dimension, arXiv:0706.2981, to appear in Ergod. Th. & Dynam. Sys.

[10] M. Tsukamoto, A packing problem for holomorphic curves, arXiv: math.CV/0605353, to appear in Nagoya Math. J.

[11] J. Winkelmann, On meromorphic functions which are Brody curves, arXiv:0709.3929

14

複素力学系の等分布定理の定量化とネヴァンリンナ理論

奥山裕介（京都工芸繊維大学）

Let f be a rational map on $\hat{\mathbb{C}}$ of degree $d \geq 2$, $f^0 := \mathrm{Id}_{\hat{\mathbb{C}}}$ and for each $k \in \mathbb{N}$, $f^k := f \circ f^{k-1}$. We use the following notation:

- the local degree $n_z = n_z(f) := \deg_z f$ of f at $z \in \hat{\mathbb{C}}$,
- the spherical area measure σ on $\hat{\mathbb{C}}$, normalized by $\sigma(\hat{\mathbb{C}}) = 1$,
- the chordal distance $[z_0, z_1]$ on $\hat{\mathbb{C}}$ normalized by $[\infty, 0] = 1$,
- the chordal ball $B[a, r] := \{w \in \hat{\mathbb{C}}; [w, a] < r\}$ for $a \in \hat{\mathbb{C}}$ and $r > 0$.

Let $F(f)$ be the *Fatou set*, the maximal open subset in $\hat{\mathbb{C}}$ on which $\{f^k; k \in \mathbb{N}\}$ is normal, and $J(f)$ the *Julia set*, $\hat{\mathbb{C}} - F(f)$. The *exceptional set* $E(f)$ is defined and characterized as

$$E(f) := \{a \in \hat{\mathbb{C}}; \# \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(a) < \infty\} = \{a \in \hat{\mathbb{C}}; f^2(a) = a \text{ and } n_a = n_{f(a)} = d\}.$$

This talk pursues the analogy in which $J(f)$ and $E(f)$ respectively play the roles of essential singularity and Picard exceptional set of a meromorphic map. By the Riemann-Hurwitz formula, the *critical set*

$$C(f) := \{c \in \hat{\mathbb{C}}; n_c \geq 2\}$$

satisfies $\sum_{c \in C(f)} (n_c - 1) = 2d - 2$, and hence $\# E(f) \leq 2$, which is already an analogue of the Picard theorem. $E(f)$ is a subset of

$$SAT(f) := \{\text{superattracting periodic points of } f\},$$

whose cardinality is still *finite* since each superattracting cycle of f intersects $C(f)$. The main theme is the role $SAT(f)$ plays in this analogy.

The Nevanlinna theory for iterates f^k of f was introduced by Sodin: the degree d^k of f^k and the *proximity* of f^k,

$$m(a, f^k) := \int_{\hat{\mathbb{C}}} \log \frac{1}{[a, f^k(\cdot)]} d\sigma \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

($a \in \hat{\mathbb{C}}$), are respectively the counterparts of the (Shimizu-Ahlfors) characteristic and the (integrated version of) proximity function in the Nevanlinna theory for meromorphic maps. Moreover, for each $\eta > 1$, the *Valiron exceptional set* of exponent η is

$$E_V(f; \eta) := \left\{ a \in \hat{\mathbb{C}}; \limsup_{k \to \infty} \frac{m(a, f^k)}{\eta^k} > 0 \right\}.$$

We quote only a simplified version of Russakovskii and Shiffman, which implies the arbitrarily slow exponential growth of $m(a, f^k)$ *nearly everywhere* on $\hat{\mathbb{C}}$.

Theorem 0.1 (Russakovskii-Shiffman). *Let f be a rational map on $\hat{\mathbb{C}}$ of degree ≥ 2. Then for every $\eta > 1$, $E_V(f; \eta)$ is polar, i.e., of capacity zero.*

We have a stronger consequence.

Theorem 1 (finiteness of the Valiron exceptional sets). *Let f be a rational map on $\hat{\mathbb{C}}$ of degree ≥ 2. Then*

$$\bigcup_{\eta>1} E_V(f;\eta) = SAT(f).$$

The proof of Theorem 1 uses a precise estimate of the growth of $m(a, f^k)$. This is especially tame under *semihyperbolicity*.

Definition 0.2 (semihyperbolicity). Let $UH(f)$ (unhyperbolic) be the set of all $a \in \hat{\mathbb{C}}$ such that for every $s > 0$,

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \max_{V^{-k}} \deg(f^k : V^{-k} \to B[a, s]) = \infty,$$

where V^{-k} ranges over the set of all components of $f^{-k}(B[a, s])$. Then f is said to be *semihyperbolic* at each $a \in \hat{\mathbb{C}} - UH(f)$.

For example,

$$UH(f) - J(f) = AT(f) := \{\text{attracting periodic points of } f\}.$$

Our principal result is the following, which yields a quantitative version of Theorem 1.

Theorem 2. *Let f be a rational map on $\hat{\mathbb{C}}$ of degree ≥ 2. Then as $k \to \infty$,*

$$m(a, f^k) = \begin{cases} O(1) & (a \in \hat{\mathbb{C}} - UH(f)), \\ o(\eta^k) & (a \in J(f), \text{ for every } \eta > 1), \\ O(k) & (a \in AT(f) - SAT(f)), \\ O(\deg_a(f^k)) & (a \in SAT(f)). \end{cases}$$

Each estimate is locally uniform, and the final two are sharp.

As an application, we have an equdistribution theorem in complex dynamics with uniform exponential error estimates. This is recently generalized to higher dimension by Dinh and Sibony.

Theorem 3 (equidistribution theorem with order estimates). *There exists a regular probability measure μ_f on $\hat{\mathbb{C}}$ with support $J(f)$ such that for every $a \in \hat{\mathbb{C}} - E(f)$,*

$$\frac{(f^k)^*\delta_a}{d^k} \to \mu_f$$

weakly as $k \to \infty$. More precisely, for every $\eta > 1$, there exist $C_\eta > 0$ and $N_\eta \in \mathbb{N}$ such that for every $k > N_\eta$ and every $\phi \in C^2(\hat{\mathbb{C}})$,

$$\sup_{a\in J(f)} \left| \frac{((f^k)_*\phi)(a)}{d^k} - \int_{J(f)} \phi d\mu_f \right| \leq C_\phi C_\eta \left(\frac{\eta}{d}\right)^k.$$

15

複素力学系の双曲性と SCHRÖDER 函数の特異性

奥山裕介（京都工芸繊維大学）

Let f be a rational function on $\hat{\mathbb{C}}$ of degree $d = \deg f \geq 2$, i.e., the critical set $C(f) := \{f'(c) = 0\} \neq \emptyset$. Denote its k-th iterate ($k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) by f^k. For every *repelling* periodic point z_0 of f of period p, there exists a unique meromorphic map h on $\mathbb{C}$, which is called the *Schröder map of f at z_0*, such that $h(0) = z_0$, $h'(0) = 1$ and

$$f^p \circ h = h \circ \lambda \tag{0.1}$$

on $\mathbb{C}$. Here the multiplier $\lambda := (f^p)'(z_0)$ ($|\lambda| > 1$) also denotes multiplication by λ on $\mathbb{C}$. Using complex dynamics and Nevanlinna theory, we study the relationship between *singularities* of Schröder maps h and the *unhyperbolicity* of f.

We say that f is *not semihyperbolic* or, more conveniently, *unhyperbolic* at $a \in \hat{\mathbb{C}}$ if for every open neighborhood U of a,

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \max_{V^{-k}} \deg(f^k : V^{-k} \to U) = \infty, \tag{0.2}$$

where V^{-k} ranges over all components of $f^{-k}(U)$. We denote by $UH(f)$ (unhyperbolic) the set of all such $a \in \hat{\mathbb{C}}$.

Notation 0.3. $U_r(a)$ is the spherical open disk centered at $a \in \hat{\mathbb{C}}$ and of radius $r > 0$. Let $F(f)$ and $J(f)$ be the Fatou and Julia sets of f, respectively, and let $AT(f), PB(f)$ and $CM(f)$ be the attracting, parabolic and Cremer periodic points of f, respectively.

If g is transcendental meromorphic on $\mathbb{C}$, we can consider more general singularities than its critical set $C(g)$: let $\mathfrak{N}$ be the set of *decreasing* families $\mathcal{A} = \{A_r\}_{r>0} \subset 2^{\mathbb{C}}$, so that $A_s \subset A_r$ if $s < r$. Let $TS(g) \subset \mathfrak{N}$ be the set of $\mathcal{A} \in \mathfrak{N}$ such that there exists (the unique) $a = a_{\mathcal{A}} \in \hat{\mathbb{C}}$ such that for every $r > 0$, A_r is a component of $g^{-1}(U_r(a))$ and in addition that $\bigcap_{r>0} A_r = \emptyset$. Each $\mathcal{A} \in TS(g)$ is called a *transcendental singularity of g*, and we extend g to the map from $\mathbb{C} \cup TS(g)$ to $\hat{\mathbb{C}}$ by setting $g(\mathcal{A}) := a$ for $\mathcal{A} \in TS(g)$. $\mathcal{A}$ is said to be *direct* if the point $g(\mathcal{A})$ is not contained in $g(A_r)$ for some $r > 0$, and *indirect* otherwise.

For $\mathcal{A} = \{A_r\}, \mathcal{B} = \{B_r\} \in \mathfrak{N}$, we say $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ if

- for every $r > 0$, there exists $s > 0$ such that $A_s \subset B_r$,
- for every $r > 0$, there exists $s > 0$ such that $B_s \subset A_r$.

This defines an equivalence relation on $\mathfrak{N}$. When g is a Schröder map h as (0.1), we call the map $\Lambda = \Lambda_h$ below the *natural* extension of the multiplication action of λ on $\mathbb{C}$ since from (0.5), we have $h \circ \Lambda = f^p \circ h$ on $TS(h)$.

Theorem 0.4. *Let f and h be as above. Then there exists a map $\Lambda = \Lambda_h : TS(h) \to TS(h)$ such that for each $\mathcal{A} = \{A_r\} \in TS(h)$,*

$$\Lambda\mathcal{A} \sim \{\lambda A_r\}_{r>0}. \tag{0.5}$$

The map Λ is bijective and preserves the direct or indirect character of $\mathcal{A} \in TS(h)$, i.e., $\mathcal{A}$ is direct if and only if $\Lambda\mathcal{A}$ is direct.

Definition 0.6. An $\mathcal{A} \in TS(h)$ is *periodic* if it is periodic under Λ_h.

We consider the *omega-limit set*

$$\omega_f(c) := \{z \in \hat{\mathbb{C}}; \exists k_j \to \infty \text{ such that } \lim_{j\to\infty} f^{k_j}(c) = z\}$$

for each $c \in \hat{\mathbb{C}}$, and define the *Mañé set* of f as

$$M(f) := \bigcup_{\substack{c\in C(f)\cap J(f)\\ \text{such that } c\in\omega_f(c)}} \omega_f(c).$$

We recall that $CM(f) \subset M(f)$ and that $AT(f) \cup PB(f) \cup M(f)$ coincides with $UH(f)$.

Theorem 1. *Let h be a Schröder map of the rational function f. Then*

$$h(TS(h)) \subset AT(f) \cup PB(f) \cup M(f), \tag{0.7}$$

$$h(\{\mathcal{A} \in TS(h); \textit{periodic}\}) \subset AT(f) \cup PB(f) \cup CM(f), \tag{0.8}$$

$$h(\{\mathcal{A} \in TS(h); \textit{direct}\}) \subset AT(f). \tag{0.9}$$

By a careful study of immediate basins, we show that the inclusion (0.9) is proper, and that a partial converse of (0.7) holds.

Corollary 1. *For every $a \in AT(f) \cup PB(f)$ of the rational function f, there exists a Schröder map h of f with $a \in h(TS(h))$.*

We have an application of Theorem 1 to a concrete dynamical problem.

Fatou conjecture. We consider the *unicritical* polynomial family

$$\{f_c(z) = z^d + c; c \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C},$$

and we note that $C(f_c) \cap \mathbb{C} = \{0\}$ while $\infty \in AT(f_c)$. The *Mandelbrot set* and its *hyperbolicity locus* are defined as

$$\mathcal{C} := \{c \in \mathbb{C}; \lim_{k\to\infty} |f_c^k(0)| \neq \infty\}, \quad \mathcal{H} := \{c \in \mathbb{C}; AT(f_c) \cap \mathbb{C} \neq \emptyset\}$$

respectively. It is known that $\mathcal{H}$ is an open and closed subset of $\operatorname{int}\mathcal{C}$.

We say that a covering selfmap g of $\mathbb{C}$, which is possibly ramified and not surjective, covers a point $a \in \mathbb{C}$ *completely* if there exists $r > 0$ such that $g^{-1}(U_r(a))$ has no unbounded component; g itself is *complete* if it covers all $a \in \mathbb{C}$ completely.

Corollary 2. *Let $c \in \operatorname{int}\mathcal{C}$. Then $c \notin \mathcal{H}$ if and only if every Schröder map of f_c is a complete covering selfmap of $\mathbb{C}$.*

We remark that it has been expected for a long time that

$$\operatorname{int}\mathcal{C} = \mathcal{H};$$

this is known as a *Fatou conjecture*. Perhaps our characterization of $\mathcal{H}$ might be helpful in understanding this conjecture.

16

正則関数の無理的中立不動点の周りの不変集合について

宍倉 光広 (京都大学 大学院理学研究科)

正則関数の無理的中立不動点は，線型化問題や局所不連結な Julia 集合，Siegel 円板の境界の問題，Perez-Marco の hedgehog など，興味深い問題の源となってきた．ここでは，$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots$ が $z = 0$ の近傍で正則で，$\lambda = e^{2\pi i\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) として，無理的中立不動点 $z = 0$ の周りの不変集合について考える．線型化可能（λz に共役）のときは，最大の線型化領域を Siegel 円板と呼ぶ．また，線型化可能・不可能に関わらず，0 を含む Jordan 領域 D で，$\overline{D}$ の近傍で f が正則かつ単射のとき，f-不変な連結コンパクト集合 $K \subset \overline{D}$ で，$\mathbb{C} \setminus K$ が連結，$K \cap \partial D \neq \emptyset$ となるものが存在し，hedgehog と呼ばれる．ここでは，次の形の関数について考える．

仮定. $f(z) = e^{2\pi i\alpha} z + z^2$ または $f(z) = e^{2\pi i\alpha} h(z)$. ただし，$h(z) = z + O(z^2)$ は [IS] で導入された関数族 $\mathcal{F}_1$ の元．また，$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ は次の意味で "high type",

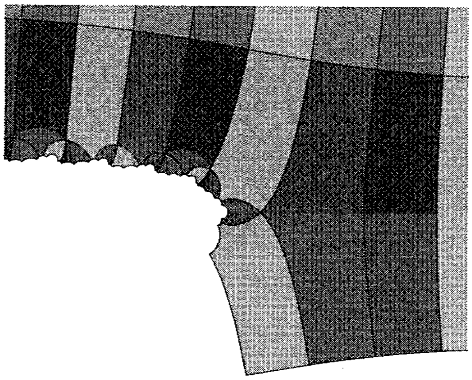
$$\alpha = a_0 + \cfrac{\varepsilon_0}{a_1 + \cfrac{\varepsilon_1}{a_2 + \cfrac{\varepsilon_2}{\ddots}}}, \quad \text{ただし} \quad \begin{array}{l} a_n \in \mathbb{Z},\ \varepsilon_n = \pm 1\ (n = 0, 1, 2, \dots), \\ a_n \geq N\ (n \geq 1). \end{array}$$

ここで，N はやはり [IS] で定められた十分大きな数．

このとき，[IS] によれば，f は定義域 $Dom(f)$ 内に唯一の臨界点 cp_f をもち，「近放物型くりこみ」の列 $\mathcal{R}^n f(z) = e^{2\pi i\alpha_n} h_n(z)$ $(n = 1, 2, \dots)$ が定義でき，$\alpha_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $h_n \in \mathcal{F}_1$ となる．Truncated Checkerboard Pattern Ω_{can} を標準的写像 $F_{can}(w) = w(1 - \frac{1}{w})^{-1} = w + 1 + O(\frac{1}{w})$ の放物型不動点 ∞ の吸引領域内に図のような集合として定義する．

[IS] での証明から，次の事実がわかる．上のような f に対し（$\mathcal{R}^n f$ についても同様），Ω_{can} をある幅で切り取った Ω_f と，正則写像 $\tau_f : \Omega_f \to Dom(f) \setminus \{0\}$, Ω_f の左端の近傍から右端の近傍への正則写像 θ_f があって，

- $\tau_f \circ F_{can} = f \circ \tau_f$ をみたし，
- $\tau_f(\Omega_f) \cup \{0\}$ は 0 の近傍であり，
- τ_f によって同一視される（同じ点にうつされる）のは，w と $\theta_f(w)$ のみに限るようにできる．(すなわち，$\Omega_f/\theta_f \simeq \tau_f(\Omega_f)$.)



上の仮定のもとで以下が成立する．ここで，p_n/q_n は α の連分数展開を打ち切って得られる近似分数．

定理 1 (構造). 0 を含む開集合の列 $\widehat{\Omega}^{(0)} \supset \widehat{\Omega}^{(1)} \supset \widehat{\Omega}^{(2)} \supset \dots$ が存在して，次をみたす．

(a) 各 $\widehat{\Omega}^{(n)} \setminus \{0\}$ は q_n 個の開集合 $\Omega^{(n)}_{k_1,k_2,\dots,k_n}$ の和として書ける．ここで，$(k_1, k_2, \dots, k_n)$ は $\mathbb{Z}^n$ のある部分集合 (個数 q_n 個) 上を動く．

(b) $\Omega^{(n)}_{k_1,k_2,\dots,k_n}$ は $\Omega_{\mathcal{R}^n f}$ に解析的同型であり，その上では，$f^{q_{n-1}}$ は左端と右端を同一視する $\theta_{\mathcal{R}^n f}$ を誘導し，f^{q_n} は標準的写像 F_{can} を誘導する．この意味で，$\Omega^{(n)}_{k_1,k_2,\dots,k_n}/f^{q_{n-1}}$ 上の f^{q_n} は，0 の穴あき近傍 $\tau_{\mathcal{R}^n f}(\Omega_{\mathcal{R}^n f})$ 上の $\mathcal{R}^n f$ に共役．

(c) $\overline{\Omega^{(n)}_{k_1,k_2,\dots,k_n}} \subset \Omega^{(n-1)}_{k_1,k_2,\dots,k_{n-1}} \cup \{0\}$.

(d) 共通集合 $\Lambda_f = \bigcap_{n=0}^{\infty} \widehat{\Omega}^{(n)} = \{0\} \cup \bigcup_{(k_1,k_2,\dots)} \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega^{(n)}_{k_1,k_2,\dots,k_n}$ は 0 および cp_f の軌道を含むコンパクトな連結集合．ここで，右辺の和は $\Omega^{(n)}_{k_1,k_2,\dots,k_n}$ が定義できるようなすべての整数列 $(k_1, k_2, \dots)$ に関する和である．

(e) $f : \Lambda_f \to \Lambda_f$ は全単射.

定理 2. f またはその拡張に対し，*hedgehog* の定義に現れるような D をとり，対応する *hedgehog* を K とすると，$K \subset \Lambda_f$ である．

定理 3. 「許される」整数列 $k_1, k_2, \dots$ に対し，$\cap_{n=1}^{\infty} \Omega^{(n)}_{k_1,k_2,\dots,k_n}$ は空集合かまたは曲線になる．曲線の場合は 0 を加えれば閉弧（$[0,1]$ と同相）になる．2つの曲線は完全に一致するか，または 0 のみで交わる．f はこれらの曲線たちに 0 の周りの周回的順序を保って作用する．特に，Λ_f は弧状連結であり，臨界点 cp_f と不動点 0 を結ぶ Λ_f 内の曲線が存在する．

定理 4. f を仮定にあるような 2 次多項式とする．β を外射角 0 に対応する反発的不動点とするとき，β と $-\beta$ を結び，cp_f と 0 を通るような Julia 集合 J_f 内の閉弧が存在する．また，J_f は *decomposable*(2 つの真部分連結集合の和として書ける)．さらに，J_f はすべての反発的周期点において局所連結である．

定理 5. 無理数 α は Brjuno 条件 $(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < \infty)$ をみたすとする．このとき，f は Siegel disk Δ をもつ (Siegel, Brjuno)．このとき，次が成立する．

(a) Δ は f の定義域内で相対コンパクト．f は $\partial\Delta$ 上で単射．$\partial\Delta$ は cp_f の軌道の閉包に含まれる．

(b) cp_f が $\partial\Delta$ に含まれる $\Longleftrightarrow$ α が Yoccoz の定義した条件 $\mathcal{H}$ をみたす．($\mathcal{H}$ は S^1 上の実解析的微分同相が実解析的に線型化されるための回転数の条件)

(c) $\partial\Delta$ はいつも Jordan 閉曲線であり，その連続度 (*modulus of continuity*) の評価も α の連分数展開を用いて与えることが出来る．

[IS] H. Inou and M. Shishikura, The renormalization for parabolic fixed points and their perturbation, preprint.

17

準アーベル多様体内の整正則曲線の第二主要定理について

野口潤次郎　東大・数理科学
Jörg Winkelmann　Bayreuther 大学
山ノ井克俊　熊本大・自然科学研究科

平成１２年（２０００年）秋の学会（京都大学）で、準アーベル多様体 A への整正則曲線 $f:\mathbf{C}\to A$ と A の因子 D に対するネヴァンリンナの第二主要定理を報告した。その後、この結果は [NWY00], [NWY02] として出版された。この講演は、その続きである。

第二主要定理では、個数関数の打ち切りレベルをきちんと評価することが重要である。アーベル多様体については、最良である打ち切りレベル 1 での評価が山ノ井 [Y04] で得られた。

今回は、準アーベル多様体の場合について、これらを拡張する結果が得られたので報告する（[NWY08]）。また、以前は A のコンパクト化を固定し、因子 D にコンパクト化したときの境界条件を付していたが、今回は、任意の D に対しコンパクト化 $\bar{A}$ を適当に構成して第二主要定理を証明した。

以下, A を準アーベル多様体とする：$0\to(\mathbf{C}^*)^p\to A\xrightarrow{\eta}A_0\to 0$。ここで、$A_0$ は普通のアーベル多様体である。A のジェット束を $J_k(A)$ とし、ジェット持ち上げ $J_k(f):\mathbf{C}\to J_k(A)$ をとる。$X_k(f)$ で像 $J_k(f)(\mathbf{C})$ のザリスキー閉包を表す。

主定理。 $f:\mathbf{C}\to A$ を代数的非退化な整正則曲線とする.

(i) $Z\subset X_k(f)$ を被約な代数的部分空間とすると、$X_k(f)$ のあるコンパクト化 $\bar{X}_k(f)$ が存在して次が成立する。

$$T(r;\omega_{\bar{Z},J_k(f)})\leqq N_1(r;J_k(f)^*Z)+\epsilon T_f(r)||_\epsilon,\quad \forall\epsilon>0.$$

(ii) 更に、もし $\operatorname{codim}_{X_k(f)}Z\geqq 2$ ならば、$T(r;\omega_{\bar{Z},J_k(f)})\leqq\epsilon T_f(r)||_\epsilon,\quad\forall\epsilon>0.$

(iii) $k=0$ $(X_0(f)=A)$ の場合で、Z は A の非負係数因子 D とする。この場合は、コンパクト化 $\bar{A}$ は、f には依らず、A の作用に対し同変非特異なものがとれて、

$$T_f(r;L(\bar{D}))\leqq N_1(r;f^*D)+\epsilon T_f(r;L(\bar{D}))||_\epsilon,\quad\forall\epsilon>0.$$

註。 (1) 上記評価で、剰余項 "$\epsilon T_f(r)||_\epsilon$" は、"$S_f(r)=O(\log^+r+\log^+T_f(r))||$" にはできない。例が与えられている。

(2) A が、アーベル多様体の場合は、山ノ井 [Y04] により得られている。準アーベル多様体では、Poincaré 被約定理がないなど、技術的ではあるがコンパクトな場合とは、いくらか異なる道筋で証明が行われる。

証明は、次のステップを踏んでなされる。

1 ［コンパクト化］ $J_k(A)$ には、A が自然に作用している。この作用について $X_k(f)$ を不変にする部分群の単位元成分を $\mathrm{St}(X_k(f))$ とする。$\mathrm{St}(X_k(f))$ 同変なコンパクト化 $\bar{X}_k(f)$ で、Z のザリスキー閉包 $\bar{Z}$ が $\mathrm{St}(X_k(f))$ 軌道を含まないものがとれることを証明する。

2 ［高打ち切りレベルの第二主要定理］ 次に、打ち切りレベルの高い第二主要定理定理を証明する。

$$T(r;\omega_{\bar{Z},J_k(f)})\leqq N_l(r;J_k(f)^*Z)+S_f(r). \tag{1}$$

$$m_{J_k(f)}(r,Z)=S_f(r). \tag{2}$$

3［高余次元 Z の場合］$\operatorname{codim} Z \geqq 2$ とする。ジェット空間のジェットを考えることにより、次の評価式を示す。

(3) $$N_1(r, J_k(f)^*Z) \leqq \epsilon T_f(r)||_\epsilon.$$

これと、(1)、(2) を合わせると、

(4) $$T(r; \omega_{\bar{Z}, J_k(f)}) \leqq \epsilon T_f(r)||_\epsilon.$$

4［高次交叉の評価］$\operatorname{codim} Z (\geqq 1)$ は、一般とする。$J_k(f)(\zeta) \in Z$ が、高次の交叉をしていれば、$J_{k+1}(f)(\zeta) \in X_{k+1} \cap J_1(Z)$ となる。正則葉層の技術を使って、

(5) $$\operatorname{codim} X_{k+1} \cap J_1(Z) \geqq 2.$$

前ステップまでの評価を $J_{k+1}(f)$ に対し用いると、

(6) $$N_l(r, J_k(f)^*Z) - N_1(r, J_k(f)^*Z) \leqq \epsilon T_f(r)||_\epsilon.$$

5［証明の完成］主定理の (i) の場合をとると、まず

$$T(r; \omega_{\bar{Z}, J_k(f)}) \leqq N_l(r; J_k(f)^*Z) + S_f(r).$$

が示される。これと、(6) を合わせれば、

$$T(r; \omega_{\bar{Z}, J_k(f)}) \leqq N_1(r; J_k(f)^*Z) + \epsilon T_f(r)||_\epsilon$$

が得られ、証明が終わる。

応用。 **定理** (Lang 予想、[SY96]、[N98])。$f : \mathbf{C} \to A$ を準アーベル多様体への正則曲線とし、D を A の被約因子とする。もし、$f(\mathbf{C}) \cap D = \emptyset$ ならば、f は代数退化する。

更なる応用があるが、それは [NWY07] で与えられている。

参考文献

[N98] J. Noguchi, On holomorphic curves in semi-Abelian varieties, Math. Z. **228** (1998), 713-721.

[NWY00] J. Noguchi, J. Winkelmann and K. Yamanoi, The value distribution of holomorphic curves into semi-Abelian varieties, C.R. Acad. Sci. Paris t. **331** (2000), Serié I, 235-240.

[NWY02] Noguchi, J., Winkelmann, J. and Yamanoi, K., The second main theorem for holomorphic curves into semi-abelian varieties, Acta Math. **188** No. 1 (2002), 129-161.

[NWY07] Noguchi, J., Winkelmann, J. and Yamanoi, K., Degeneracy of holomorphic curves into algebraic varieties, J. Math. Pures Appl. **88** Issue 3, (2007), 293–306.

[MWY08] Noguchi, J., Winkelmann, J. and Yamanoi, K., The second main theorem for holomorphic curves into semi-abelian varieties II, Forum Math.**20** (2008), 469–503.

[SY96] Siu, Y.-T., Yeung, S.-K.: A generalized Bloch's theorem and the hyperbolicity of the complement of an ample divisor in an Abelian variety. Math. Ann. **306** (1996), 743-758.

[Y04] Yamanoi, K., Holomorphic curves in abelian varieties and intersection with higher codimensional subvarieties, Forum Math. **16** (2004), 749–788.

18

代数多様体内の整正則曲線の退化について

野口潤次郎	東大・数理科学
Jörg Winkelmann	Bayreuther 大学
山ノ井克俊	熊本大・自然科学研究科

前講演の主定理 ([NWY08]) の整正則曲線の代数退化への応用を報告する。結果は、[NWY07] に出版されている。

以下、A を準アーベル多様体とし、$f : \mathbf{C} \to A$ を整正則曲線とする。

定理 1 D を A の任意の被約代数的因子とし、

$$\mathrm{ord}_\zeta f^* D \geqq 2, \quad \forall \zeta \in f^{-1} D$$

と仮定する。このとき、f は代数退化する。

証明。あらかじめ $\mathrm{St}(D)$ で商をとっておけば、$\mathrm{St}(D) = \{0\}$ としてよい。すると、$\bar{D}$ は、豊富になる。仮定より、

$$\begin{aligned} T_f(r, L(\bar{D})) &\leqq N_1(r, f^*D) + \epsilon T_f(r)|| \\ &\leqq \frac{1}{2} N(r, f^*D) + \epsilon T_f(r)|| \\ &\leqq \left(\frac{1}{2} + \epsilon\right) T_f(r, L(\bar{D}))|| \end{aligned}$$

となり、矛盾を得る。

例 2 $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ から $n+1$ 個の一般の位置にある超平面を引くと $(\mathbf{C}^*)^n$ となり、これは準アーベル多様体の特別な場合である。更に、$\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ の一般次数超曲面の $(\mathbf{C}^*)^n$ との交わりを D とする。$f : \mathbf{C} \to (\mathbf{C}^*)^n$ が、D との交点で常に接触しているならば f は、代数退化する。

定理 3 X を代数多様体とし、次の条件を仮定する。

(i) 対数的正則指数 $\bar{q}(X) \geqq \dim X$。

(ii) 準アルバネーゼ写像 $\alpha : X \to A$ は、固有である。

(iii) 対数的小平次元 $\bar{\kappa}(X) > 0$。

このとき、任意の $f : \mathbf{C} \to X$ は、代数退化する。

証明は、α の分岐因子 D に対し、前講演の主定理を適用する。そのために、X のコンパクト化 $\bar{X}$ を特異点が増えないようにとり、X の対数的標準因子が、本質的に D となるようにとると、$\bar{D}$ は、$\bar{X}$ 上大因子になる。その上で、第二主要定理を使う。

註。 (1) $\bar{q}(X) > \dim X$ ならば、対数的 Bloch 落合の定理 ([N77]、[N81]) により、任意の $f : \mathbf{C} \to X$ は代数退化する。新しい点は、$\bar{q}(X) = \dim X$ の場合であり、1 下げる為に前講演の第二主要定理が本質的に使われる。

(2) 上述の定理 3 で、像 $f(\mathbf{C})$ の X 内でのザリスキー閉包は、準アーベル多様体となり A の準アーベル部分多様体の平行移動の上の不分岐有限被覆となる。

例 4 定理 (1) $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ 内で、$D = \sum_{i=1}^{q} D_i$ を単純正規交叉のみを持つ因子とする。$q > n$、$\deg D > n+1$ ($\Rightarrow \bar{\kappa}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus D) = n$) ならば、任意の $f : \mathbf{C} \to X$ は代数退化する。

(2) 特に、$\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ 内の一般の位置にある直線 2 本と 2 次曲線の和を D とすると、$q = 3 > 2$, $\deg D = 4 > 2+1$ となり、任意の $f : \mathbf{C} \to \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \setminus D$ は代数退化する。

註。 (1) 上記 (2) は、M. Green [G74] が予想してものである。彼自身は、f が有限位数の場合に証明していた。

(2) 上記 (2)(2 lines + 1 conic) の場合の数論的類似は興味深い所で、最近 Corvaja-Zannier は関数体上で類似を示している ([CV08])。

参考文献

[CV08] Corvaja, P., and Zannier, U., Some cases of Vojta's conjecture on integral points over function fields, J. Amer. Math. Soc. (2008).

[G74] Green, M., On the functional equation $f^2 = e^{2\phi_1} + e^{2\phi_2} + e^{2\phi_3}$ and a new Picard theorem, Trans. Amer. Math. Soc. **195** (1974), 223–230.

[N77] Noguchi, J., Holomorphic curves in algebraic varieties, Hiroshima Math. J. **7** (1977), 833-853.

[N81] Noguchi, J., Lemma on logarithmic derivatives and holomorphic curves in algebraic varieties, Nagoya Math. J. **83** (1981), 213-233.

[NWY07] Noguchi, J., Winkelmann, J. and Yamanoi, K., Degeneracy of holomorphic curves into algebraic varieties, J. Math. Pures Appl. **88** Issue 3, (2007), 293–306.

[MWY08] Noguchi, J., Winkelmann, J. and Yamanoi, K., The second main theorem for holomorphic curves into semi-abelian varieties II, Forum Math.**20** (2008), 469–503.

19

A Remark on Kazhdan's Theorem on Sequences of Bergman Metrics

大沢健夫（名古屋大学・多元数理）

S.T.Yau[Y]によれば、D.Kazhdan氏は以下の命題を証明した。

定理１．複素多様体Mのガロア被覆　$\tilde{M} \longrightarrow M$, その被覆変換群$\Gamma$，および$\Gamma$の部分群の無限降下列　$\Gamma_1 = \Gamma \supset \Gamma_2 \supset \cdots \supset \Gamma_k \supset \cdots$ があるとする。これらについて条件

１）　$\tilde{M}$はBergman計量を持つ

２）　$[\Gamma_k, \Gamma_{k+1}] < \infty$

３）　$\bigcap_{k=1}^{\infty} \Gamma_k = \{id\}$

が満たされれば、$\tilde{M}/\Gamma_k$ 上のBergman核の、射影　$\pi_k : \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}/\Gamma_k$ による引き戻しはMのBergman核に収束する。Bergman計量に関しても同様である。

定理１のKazhdan氏による証明は未発表(cf.[K],[M])だが、1993年、J.A.Rhodes氏は M_k がすべて１次元かつコンパクトであるという仮定の下に、つぎのいずれかの条件の下では主張が正しいことを示した。

a)　M_k の、Poincaré計量に関するLaplacianの正固有値は、kによらないある正の数より大きい。

b)　Γ_k はすべてΓの正規部分群である。

幾何学的には多様体上の群の作用が中心的な興味なので、Γ_k が正規部分群である場合にわかれば十分であるとも言えようが、P.Sarnakらの結果(cf.[L-R-S])などの適用を視野に入れるとき、M_k の次元やコンパクト性の条件はない方が勝るであろう。

$\bar{\partial}$方程式の逐次近似による解法を適用することにより、定理１の結論を以下のごとくRhodes氏の結果より弱い仮定の下に示すことができる。

定理２．　定理１の１）と３）の仮定に加えて、さらに以下の３つの条件が満たされるとする。

(i)　$\widetilde{M}$のBergman計量は完備である。

(ii)　$\widetilde{M}$のBergman計量はd−有界である。

(iii) 任意のコンパクト集合列　$Q_k \subset M_k$　に対し、自然数N、有限集合列 $A_k \subset M_k$ および発散正数列 r_k　が存在して、

$$\sup\{\mathrm{dist}(p,A_k) \mid p \in M_k\} < r_k^2 - r_k$$

かつ

$$A \subset A_k\ ,\ \#A < N \quad \text{のとき} \quad \bigcap_{q \in A} \{p \mid \mathrm{dist}(p,q) < r_k^2\} = \emptyset$$

が成立する。

このとき　M_k 上のBergman核の$\widetilde{M}$への引き戻しはMのBergman核に収束し、Bergman計量についても同様である。

[K] Kajdan(=Kazhdan),D., Arithmetic varieties and theirs(ママ) fields of quasi-definition, ICM, 1970, 321-325.

[M] Mumford,D., Curves and their Jacobians, Univ. of Michgan Press, Ann Arbor, 1975. (cf. Red book of varieties and schemes, LNM 1358)

[O] Ohsawa,T., A remark on Kazhdan's theorem on sequences of Bergman metrics, to appear in Kyushu J. Math.

[R] Rhodes,J.A., Sequences of metrics on compact Riemann surfaces, Duke mathematical Journal, 72 (1993), 725-738.

[L-R-S] Luo,,W.,Rudnick,Z. and Sarnak,P., Geom.Func.Anal.5 (1995), 387-401.

[Y] Yau,S.T., Nonlinear analysis in geometry, Monograph de l'enseignement mathématique, 33, 1986.

特別講演

高次順像層のホッジ計量について

高山 茂晴　(東大数理)

1. Introduction

The aim is to explain our joint work with Mourougane on the metric positivity of direct image sheaves of adjoint type bundles (mainly [MT2], [MT3], see also [M], [MT1], [MT4]). Our basic setting is as follows. Let $f : X \longrightarrow Y$ be a holomorphic map of complex manifolds, which is proper, surjective and with connected fibers with $\dim Y = m$ and $\dim X = m + n$. Let ω be a Kähler form on X (it is enough to assume that f is Kähler, but ...), and let (E, h) be a holomorphic vector bundle on X with a Hermitian metric h of semi-positive curvature in the sense of Nakano. We denote by $K_{X/Y} = K_X \otimes f^*K_Y^{-1}$ the relative canonical bundle. The first result is the following

Theorem 1.1. [MT2, 1.1]. *Assume f is smooth. Then for any $q \geq 0$, the direct image sheaf $R^qf_*(K_{X/Y} \otimes E)$ is locally free and Nakano semi-positive endowed with the Hodge metric $g = g_{\omega,h}$ with respect to ω and h.*

In case when $q = 0$ and E is a line bundle, this is obtained by Berndtsson [B]. We have also obtained a weaker statement independently [MT1]. This kind of positivity is a basic ingredient in the study of fiber spaces $f : X \longrightarrow Y$ in algebraic geometry.

Needless to say, the smoothness assumption of the map f is unrealistic in practice. If f may be singular, we let $\Delta \subset Y$ be the discriminant locus of f. It is know that $F := R^qf_*(K_{X/Y} \otimes E)$ is torsion free on Y, and F is locally free on $Y \setminus \Delta$ by Takegoshi [Tk] (Kollár [Kol] in algebraic case). Therefore there exists the minimum analytic subset $S_q \subset \Delta$ such that $\mathrm{codim}_Y S_q \geq 2$ and F is locally free on $Y \setminus S_q$. We let $\pi : \mathbb{P}(F|_{Y\setminus S_q}) \longrightarrow Y \setminus S_q$ be the projective space bundle, and $\pi^*F|_{Y\setminus S_q} \longrightarrow \mathcal{O}(1)$ be the universal quotient line bundle. By Theorem 1.1, we can put a canonical metric: the Hodge metric g on $F|_{Y\setminus\Delta}$ with respect to ω and h, with Nakano semi-positive curvature. Then we put the quotient metric $g_{\mathcal{O}(1)^\circ}$ on $\mathcal{O}(1)|_{\pi^{-1}(Y\setminus\Delta)}$ by the quotient: $(\pi^*F|_{Y\setminus\Delta}, \pi^*g) \longrightarrow (\mathcal{O}(1)|_{\pi^{-1}(Y\setminus\Delta)}, g^\circ_{\mathcal{O}(1)})$. This $g_{\mathcal{O}(1)^\circ}$ is a smooth Hermitian metric with semi-positive curvature on $\pi^{-1}(Y \setminus \Delta)$. Then

Theorem 1.2. [MT3, 1.2]. *$g^\circ_{\mathcal{O}(1)}$ extends as a singular Hermitian metric $g_{\mathcal{O}(1)}$ on $\mathcal{O}(1)$ with semi-positive curvature.*

If in particular $R^q f_*(K_{X/Y} \otimes E)$ is locally free and if Y is a smooth projective variety, then the vector bundle $R^q f_*(K_{X/Y} \otimes E)$ is pseudo-effective in the sense of [DPS, §6]. The above curvature property of $\mathcal{O}(1)$ leads to the following algebraic positivity of $R^q f_*(K_{X/Y} \otimes E)$.

Theorem 1.3. [MT3, 1.3]. *Let $f : X \longrightarrow Y$ be a surjective morphism with connected fibers between smooth projective varieties, and let (E, h) be a Nakano semi-positive holomorphic vector bundle on X. Then the torsion free sheaf $R^q f_*(K_{X/Y} \otimes E)$ is weakly positive over $Y \setminus \Delta$ (the smooth locus of f), in the sense of Viehweg* [Vi2, 2.13].

The sheaf F on a smooth projective variety Y is said to be *weakly positive over an open subset* $Y_0 \subset Y$ in the sense of Viehweg [Vi2, 2.13], if for any given ample line bundle A on Y and any given positive integer a, there exists a positive integer b such that $\widehat{S}^{ab}(F) \otimes A^{\otimes b}$ is generated by global sections $H^0(Y, \widehat{S}^{ab}(F) \otimes A^{\otimes b})$ over Y_0. Here $\widehat{S}^m(F)$ is the double dual of the m-th symmetric tensor product $\mathrm{Sym}^m(F)$. We note [Vi2, 2.14] that this condition does not depend on the choice of A.

There are many positivity results of direct image sheaves of relative canonical bundles and of adjoint bundles, which are mostly about the positivity in algebraic geometry. The origin is due to Griffiths in his theory on the variation of Hodge structures [Gr] when the map f is smooth and $E = \mathcal{O}_X$. Griffiths' work has been generalized by Fujita [Ft], when the map f may not be smooth over a curve Y. Fujita analyzed the singularities of the Hodge metric on $f_*K_{X/Y}$. After [Ft], there are a lot of works mostly in algebraic geometry to try to generalize [Ft], for example by Kawamata [Ka1] [Ka2] [Ka3], Viehweg [Vi1], Zucker [Z], Nakayama [N1], Moriwaki [Mw], Fujino [Fn], Campana [C]. Their methods heavily depend on the theory of a variation of Hodge structures. While Kollár [Ko1] and Ohsawa [Oh, §3] reduce the semi-positivity to their vanishing theorems. We refer to [EV] [N2, V.§3] [Vi2] for further related works. On the analytic side, it can be understood as the plurisubharmonic variation of related functions to the Robin constant [Y] [LY], or of the Bergman kernels [MY]. There is also a series of works by Yamaguchi. There are more recent related works from the Bergman kernel point of view, by Berndtsson-Păun [BP1] [BP2] and Tsuji [Ts]. In [BP1] [BP2], they rely on [B] and an extension theorem of Ohsawa-Takegoshi type, and give a new perspective.

2. Hodge metric

In the rest of this note, we assume for simplicity that $Y = \{t = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{C}^m;\ \|t\| < 1\}$. We denote by $y \in Y$ or $t \in Y$, $X_y = f^{-1}(y), \omega_y = \omega|_{X_y}, \ldots$, and by $dt = dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_m$.

We will deal with relative differential forms. A relative differential form is not a differential form on X, but it is an equivalence class. For example, there is a standard exact sequence: $0 \longrightarrow f^*\Omega^1_Y \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0$ (where f is smooth). Here the last quotient map $\Omega^1_X \ni \sigma \mapsto [\sigma] \in \Omega^1_{X/Y}$ defines the equivalence class. For $u, v \in A^{p,q}(X, E)$, they are f-equivalent $[u] = [v]$ if and only if $u|_{X_y} = v|_{X_y} \in A^{p,q}(X_y, E_y)$ on any X_y. For $u \in A^{p,0}(X, E)$, the class defines a holomorphic relative form $[u] \in H^0(X, \Omega^p_{X/Y} \otimes E)$ if and only if $u \wedge dt \in H^0(X, \Omega^{p+m}_X \otimes E)$.

Here we construct the so-called Hodge metric. We can not do it immediately. We need to recall some result on $R^q f_*(K_{X/Y} \otimes E)$.

Definition 2.1. (Hodge metric on $f_*(\Omega^p_{X/Y} \otimes E)$ where f is smooth.) We take p and q with $p + q = n$. Then the so-called Hodge metric g on $f_*(\Omega^p_{X/Y} \otimes E)$ is defined as follows. Over a point $y \in Y$, g_y is defined by a canonical pairing with respect to the Kähler form ω_y and h_y:

$$g_y(\sigma_y, \tau_y) := (\sigma_y, \tau_y)_{h_y} = \int_{X_y} (c_p/q!)\omega_y^q \wedge \sigma_y \wedge h_y \overline{\tau_y}$$

for $\sigma_y, \tau_y \in A^{p,0}(X_y, E_y)$. Here $c_p = \sqrt{-1}^{p^2}$. For relative forms $[\sigma], [\tau] \in H^0(Y, f_*(\Omega^p_{X/Y} \otimes E)) = H^0(X, \Omega^p_{X/Y} \otimes E)$,

$$g([\sigma], [\tau]) := f_*\left((c_p/q!)\omega^q \wedge \sigma \wedge h\overline{\tau}\right) \in A^0(Y, \mathbb{C}).$$

Namely $g([\sigma], [\tau])$ is a family of fiber integrals, or it is understood as a push-forward current. □

We note that we do not know if $f_*(\Omega^p_{X/Y} \otimes E)$ is locally free. However, when we restricted to a locally free subsheaf, the Hodge metric g defines a usual Hermitian metric.

2.1. Hard Lefschetz type theorem.

We recall Enoki's result [E]. Before explaining higher direct images, we explain higher cohomology groups on a compact manifold. We let (X_0, ω_0) be an n-dimensional compact Kähler, and (E_0, h_0) be a Nakano semi-positive vector bundle on X_0. Those are basically the things on the central fiber in our fibration setting.

The space of harmonic forms $\mathcal{H}^{p,q}(X_0, E_0)$ represents $H^q(X_0, \Omega^p_{X_0} \otimes E_0)$. The Nakano formula is $\Delta_{\overline{\partial}} = \Delta_{\partial_h} + \sqrt{-1}\,[e(\Theta_{h_0}), \Lambda_0]$, where $e(\theta)u := \theta \wedge u$ in general. For $u \in A^{n,q}(X_0, E_0)$, we have $\|\overline{\partial} u\|^2 + \|\overline{\partial}^* u\|^2 = \|\partial^*_{h_0} u\|^2 + (\sqrt{-1}e(\Theta_{h_0})\Lambda_0 u, u)$. Here $\overline{\partial}^* u = - *_0 \partial_{h_0}(*_0 u)$, and $\partial^*_{h_0} u = - *_0 \overline{\partial}(*_0 u)$. If u is harmonic, every term has to be zero, and we obtain $\partial_{h_0}(*_0 u) = 0$ and $\overline{\partial}(*_0 u) = 0$. In particular,

$$*_0 : \mathcal{H}^{n,q}(X_0, E_0) \longrightarrow H^0(X_0, \Omega^{n-q}_{X_0} \otimes E_0)$$

is defined, and gives a splitting for the Lefschetz homomorphism:

$$L_0^q = \omega_0^q \wedge \bullet \; : \; H^0(X_0, \Omega^{n-q}_{X_0} \otimes E_0) \longrightarrow H^q(X_0, K_{X_0} \otimes E_0)$$

up to a constant, $(\sqrt{-1}^{(n-q)^2}/q!)\omega_0^q \wedge *_0\, u = u$.

2.2. **Relative hard Lefschetz type theorem.** Takegoshi's theory [Tk] is a relative version of this hard Lefchetz type theorem for Kähler morphisms. We take $\Phi = f^*\|t\|^2$ as a C^∞ plurisubharmonic exhaustion function on X. We consider

$$\mathcal{H}^{n+m,q}(X, E, \Phi) = \{u \in A^{n+m,q}(X, E);\; \overline{\partial} u = \overline{\partial}^* u = 0 \text{ and } e(\overline{\partial}\Phi)^* u = 0 \text{ on } X\}.$$

Here the condition $e(\overline{\partial}\Phi)^* u = 0$ plays a role of a collection of boundary conditions: the $\overline{\partial}$-Neumann condition, and here $\overline{\partial}^*$ is the formal adjoint. The first fundamental result is the following harmonic theory:

Theorem 2.2. [Tk, §5]. *(1) $\mathcal{H}^{n+m,q}(X, E, \Phi)$ does not depend on C^∞ plurisubharmonic exhaustion function Φ.*

(2) $\mathcal{H}^{n+m,q}(X, E, \Phi)$ represents $H^q(X, K_X \otimes E)$.

(3) Let $u \in \mathcal{H}^{n+m,q}(X, E, \Phi)$. Then $\partial_h(*u) = 0$ and $\overline{\partial}(*u) = 0$, i.e., $*u$ is D_h-closed.

Next is the hard Lefschetz type result:

Theorem 2.3. [Tk, §5]. *There exist $H^0(Y, \mathcal{O}_Y)$-module homomorphisms*

$$* \circ \mathcal{H} : H^q(X, K_X \otimes E) \longrightarrow H^0(X, \Omega^{n+m-q}_X \otimes E),$$
$$L^q : H^0(X, \Omega^{n+m-q}_X \otimes E) \longrightarrow H^q(X, K_X \otimes E)$$

such that (1) $(c_{n+m-q}/q!)L^q \circ (* \circ \mathcal{H}) = id$, and

(2) for every $u \in H^q(X, K_X \otimes E)$, there exists a relative holomorphic form $[\sigma_u] \in H^0(X \setminus f^{-1}(\Delta), \Omega^{n-q}_{X/Y} \otimes E)$ such that

$$(* \circ \mathcal{H}(u))|_{X \setminus f^{-1}(\Delta)} = \sigma_u \wedge f^* dt.$$

Since Y is Stein and $K_Y \cong \mathcal{O}_Y$ by $dt = dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_m$, we have an isomorphism $H^0(Y, R^q f_*(K_{X/Y} \otimes E)) \cong H^q(X, K_X \otimes E)$. Hence, by localizing the theorems on Y above, the decomposition $(* \circ \mathcal{H}(u))|_{X \setminus f^{-1}(\Delta)} = \sigma_u \wedge f^* dt$ induces a splitting injection

$$S_\omega : R^q f_*(K_{X/Y} \otimes E)|_{Y \setminus \Delta} \longrightarrow f_*(\Omega^{n-q}_{X/Y} \otimes E)|_{Y \setminus \Delta} \quad \text{by} \quad u \mapsto [\sigma_u].$$

Definition 2.4. (Hodge metric g on $R^q f_*(K_{X/Y} \otimes E)|_{Y \setminus \Delta}$, [MT2, 5.1].) The definition on the Hodge metric g of $R^q f_*(K_{X/Y} \otimes E)|_{Y \setminus \Delta}$ is as follows. For $u, v \in R^q f_*(K_{X/Y} \otimes E)$, the pairing is given by

$$g(u,v)(t) = \int_{X_t} (c_{n-q}/q!)(\omega^q \wedge \sigma_u \wedge h\overline{\sigma_v})|_{X_t}$$

at $t \in Y \setminus \Delta$. Namely the Hodge metric g on $R^q f_*(K_{X/Y} \otimes E)|_{Y \setminus \Delta}$ is the pull-back of the Hodge metric g on $f_*(\Omega^{n-q}_{X/Y} \otimes E)|_{Y \setminus \Delta}$ by the injection S_ω. □

Remark 2.5. In the relation

$$(* \circ \mathcal{H}(u))|_{X \setminus f^{-1}(\Delta)} = \sigma_u \wedge f^* dt,$$

the left hand side is holomorphically extendable across $f^{-1}(\Delta)$, and is non-vanishing if u is, in an appropriate sense. In the right hand side, f^*dt may only have zero along $f^{-1}(\Delta)$, that is "Jacobian" of f. Hence

$$\sigma_u \text{ may only have "pole" along } f^{-1}(\Delta).$$

This is the main reason why $g(u,u)(t)$ has a positive lower bound on $Y \setminus \Delta$, and which is fundamental for the extension of positivity. The importance of the role of the Jacobian of f is already observed by Fujita [Ft]. □

Another result of Takegoshi: the injectivity theorem [Tk, §6] implies the following

Proposition 2.6. *$R^q f_*(K_{X/Y} \otimes E)$ is locally free where f is smooth.*

We will not discuss on this.

3. In case f is smooth

Here we assume f is smooth i.e., $\Delta = \emptyset$ to explain Theorem 1.1, and $\dim Y = 1$ for simplicity. Recall the injection $S_\omega : F := R^q f_*(K_{X/Y} \otimes E) \longrightarrow f_*(\Omega^{n-q}_{X/Y} \otimes E)$. We identity F and the image $S_\omega(F)$. Hence $[\sigma] \in H^0(Y, F)$ is represented by $\sigma \in A^{n-q,0}(X, E)$ such that $\sigma \wedge dt \in H^0(X, \Omega^{n+m-q}_X \otimes E)$.

We want to show that the Hermitian vector bundle (F, g) is Nakano semi-positive, for example, at the origin $t = 0 \in Y$. As it is well known, it is enough to show the following: for any $\sigma_0 \in F_0$, there exists a local extension $[\sigma] \in H^0(Y, F)$ such that

(i) $\sigma|_{X_0} = \sigma_0$,

(ii) $\partial_g[\sigma] = 0$ at $t = 0$, namely $[\sigma]$ is normal at $t = 0$ with respect to g,

(iii) $-\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\, g([\sigma], [\sigma])_{t=0} \geq 0$.

Here we use a convention: for a real $(1,1)$-form $V = v(t)\sqrt{-1}dt \wedge d\overline{t}$, we denote by $V_{t=0} := v(0)$. In fact, $-\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\, g([\sigma], [\sigma])_{t=0} = g_0(\Theta_g \sigma_0, \sigma_0)$.

Then the first variation is described as follows.

Lemma 3.1. *Let $[\sigma] \in H^0(Y, F)$. Then*

(1) there exists $\mu \in A^{n-q,0}(X, E)$ such that $\partial_h \sigma = \mu \wedge dt$;

(2) there exists $\eta \in A^{n-q-1,1}(X, E)$ such that $\overline{\partial}\sigma = \eta \wedge dt$, $\eta|_{X_t}$ is $\overline{\partial}$-closed, $(\eta \wedge \omega^{q+1})|_{X_t}$ is $\overline{\partial}$-exact for any $t \in Y$.

"Proof". Regarding (2), we see immediately $0 = \overline{\partial}(\sigma \wedge dt) = \overline{\partial}\sigma \wedge dt$. Thus $\overline{\partial}\sigma = \eta \wedge dt$ for some $\eta \in A^{n-q-1,1}(X, E)$. But while, (1) is not automatic, because we do not have $\partial_h \sigma = \mu \wedge dt$ for some $\mu \in A^{n-q,0}(X, E)$, in general $\sigma \in A^{n-q,0}(X, E)$ with $[\sigma] \in H^0(Y, f_*(\Omega^{n-q}_{X/Y} \otimes E))$. But, if $[\sigma] \in H^0(Y, F) \subset H^0(Y, f_*(\Omega^{n-q}_{X/Y} \otimes E))$, we have $\partial_h \sigma = \mu \wedge dt$ for some $\mu \in A^{n-q,0}(X, E)$. This is because, by Theorem 2.2, there exists $u \in \mathcal{H}^{n+m,q}(X, E, \Phi)$ such that $\sigma \wedge dt = *u$, and then $(\partial_h \sigma) \wedge dt = \partial_h(*u) = 0$. $\square$

Lemma 3.2. (Curvature formula.) *For $[\sigma] \in H^0(Y, F)$, one has*

$$\begin{aligned} -\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\, g([\sigma], [\sigma])_{t=0} &= f_*((c_N/q!)\omega^q \wedge \sqrt{-1}\Theta_h \wedge \sigma \wedge h\overline{\sigma})_{t=0} \\ &\quad - \int_{X_0} (c_{n-q}/q!)(\omega^q \wedge \mu \wedge h\overline{\mu})|_{X_0} \\ &\quad - \int_{X_0} (c_{n-q}/q!)(\omega^q \wedge \eta \wedge h\overline{\eta})|_{X_0} \\ &= (\geq 0) \quad - \quad \|\mu|_{X_0}\|^2 \quad - \quad (\text{ indefinite }). \end{aligned}$$

Remark 3.3. (1) The first term comes from the curvature of E, and contributes positively.

(2) The second term is $-\|\mu|_{X_0}\|^2_{h_0}$, and it can be seen as the "second fundamental form" of $F \subset \bigcup_{t \in Y} A^{n-q,0}(X_y, E_y)$ at $t = 0$. This negative contribution will be eliminated by a careful choice of forms σ.

(3) The third term is not a definite form. In general one can write $\eta|_{X_0}$ as a sum $\eta|_{X_0} = \eta'_0 + \omega_0 \wedge \eta''_0$ for primitive forms η'_0 and η''_0 on X_0, and then

$$-\int_{X_0} (c_{n-q}/q!)(\omega^q \wedge \eta \wedge h\overline{\eta})|_{X_0} = \|\eta'_0\|^2_{h_0} - \|\eta''_0\|^2_{h_0}.$$

We will see that we can take σ so that $\eta|_{X_0}$ are primitive on X_0. In that case, the third term is $-\int_{X_0}(c_{n-q}/q!)(\omega^q \wedge \eta \wedge h\overline{\eta})|_{X_0} = \|\eta|_{X_0}\|^2_{h_0} \geq 0$.

(4) A well-known and important remark is that η comes from the Kodaira-Spencer class. Let

$$\cup \ : \ H^{n-q,0}(X_0, E_0) \times H^1(X_0, T_{X_0}) \longrightarrow H^{n-q-1,1}(X_0, E_0)$$

be the cup product map. Then the Dolbeault cohomology class $\{\eta|_{X_0}\}$ is well-defined for the class $[\sigma]$ and is the cup product of $\sigma|_{X_0}$ and the Kodaira-Spencer class $\rho_0(\frac{\partial}{\partial t})$. The Kodaira-Spencer class contributes positively. □

Then the main observation due to Berndtsson [B] (in case $q = 0$) is that $\mu|_{X_t}$ and $\eta|_{X_t}$ are well-defined for σ, but not for $[\sigma]$. We can take σ in $[\sigma]$ so that

- $\mu|_{X_0} = 0$ (this is related to $[\sigma]$ is normal at $t = 0$ with respect to g), and
- $\eta|_{X_0}$ is primitive i.e., $\eta|_{X_0} \wedge \omega_0^{q+1} = 0$ (this is related to $(\eta \wedge \omega^{q+1})|_{X_t}$ is $\overline{\partial}$-exact).

Then the curvature formula leads

$$\begin{aligned} -\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\, g([\sigma],[\sigma])_{t=0} &= f_*((c_N/q!)\omega^q \wedge \sqrt{-1}\Theta_h \wedge \sigma \wedge h\overline{\sigma})_{t=0} \\ &\qquad - \int_{X_0} (c_{n-q}/q!)(\omega^q \wedge \mu \wedge h\overline{\mu})|_{X_0} \\ &\qquad\qquad - \int_{X_0} (c_{n-q}/q!)(\omega^q \wedge \eta \wedge h\overline{\eta})|_{X_0} \\ &= (\geq 0) \quad - \quad 0 \quad + \quad \|\eta|_{X_0}\|^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

4. In case f is singular

Here we explain one basic estimate to prove Theorem 1.2. We assume for simplicity that $\dim Y = 1$ and the map f is smooth except the origin $t = 0$. We take $u \in H^0(Y, R^q f_*(K_{X/Y} \otimes E))$ which is nowhere vanishing (i.e., u is a part of local frame of $R^q f_*(K_{X/Y} \otimes E)$). We write $g(u,u) = e^{-\varphi}$ on $Y \setminus \{0\}$. By Theorem 1.1 we know that g has Nakano semi-positive curvature. Then Theorem 1.2 is something like the following

Proposition 4.1. *If $\varphi \in A^0(Y \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ is subharmonic, then φ extends as a subharmonic function on Y.*

Although this is not enough to conclude Theorem 1.2, this is a basic reason for all extension of positivity of direct image sheaves of relative canonical bundles, for example in [Ft], [Ka1], [Vi1], and so on.

Proof. We shall show that φ is bounded from above around $t = 0$. Then the Riemann type extension implies our assertion.

(1) By Theorem 2.3, we have $* \circ \mathcal{H}(u) \in H^0(X, \Omega_X^{n+m-q} \otimes E)$. This $* \circ \mathcal{H}(u)$ does not vanish at $t = 0$ as an element of $H^0(Y, \mathcal{O}_Y)$-module $H^0(X, \Omega_X^{n+m-q} \otimes E)$. This is saying that there exists at least one component B_j in $f^*(t = 0) = \sum b_i B_i$ such that $* \circ \mathcal{H}(u)$ does not vanish of order greater than or equal to b_j along B_j. We take one such B_j and denote by

$$B = B_j \text{ and } b = b_j.$$

(2) We take a general point $x_0 \in B \cap f^{-1}(0)$ so that x_0 is a smooth point on $(f^*(t = 0))_{red}$, and take local coordinates $(U; z = (z_1, \dots, z_{n+1}))$ centered at $x_0 \in X$. We may assume $f(U) = Y$ and $t = f(z) = z_{n+1}^b$ on U.

Over U, the bundle E is also trivialized, i.e., $E|_U \cong U \times \mathbb{C}^{r(E)}$, where $r(E)$ is the rank of E. Using the local trivializations on U, we have a constant $a > 0$ such that (i) $\omega \geq a\omega_{eu}$ on U, where $\omega_{eu} = \sqrt{-1}/2 \sum_{i=1}^{n+1} dz_i \wedge d\overline{z_i}$ is the standard complex euclidean Kähler form, and (ii) $h \geq a\mathrm{Id}$ on U as Hemitian matrixes. Here we regard $h|_U(x)$ as a positive definite Hermitian matrix at each $x \in U$ in terms of $E|_U \cong U \times \mathbb{C}^{r(E)}$, and here Id is the $r(E) \times r(E)$ identity matrix.

(3) By Theorem 2.3, we can write as $(* \circ \mathcal{H}(u))|_{X \setminus f^{-1}(0)} = \sigma_u \wedge f^*dt$ for some $\sigma_u \in A^{n-q,0}(X \setminus f^{-1}(0), E)$. We write $\sigma_u = \sum_{I \in I_{n-q}} \sigma_I dz_I + R \wedge dz_{n+1}$ on $U \setminus B$. Here I_{n-q} is the set of all multi-indexes $1 \leq i_1 < \dots < i_{n-q} \leq n$ of length $n - q$ (not including $n + 1$), $\sigma_I = {}^t(\sigma_{I,1}, \dots, \sigma_{I,r(E)})$ is a vector valued holomorphic function with $\sigma_{I,i} \in H^0(U \setminus B, \mathcal{O}_X)$, and here $R \in A^{n-q-1,0}(U \setminus B, E)$. Now

$$\sigma_u \wedge f^*dt = b z_{n+1}^{b-1} \left(\sum_{I \in I_{n-q}} \sigma_I dz_I \right) \wedge dz_{n+1}$$

on $U \setminus B$. Since $\sigma_u \wedge f^*dt = (* \circ \mathcal{H}(u))|_{X \setminus f^{-1}(0)}$ and $* \circ \mathcal{H}(u) \in H^0(X, \Omega_X^{n+m-q} \otimes E)$, all $z_{n+1}^{b-1}\sigma_I$ can be extended holomorphically on U. By the non-vanishing property of $* \circ \mathcal{H}(u)$ along bB (being x_0 to be general), we have at least one $\sigma_{J_0,i_0} \in H^0(U \setminus B, \mathcal{O}_X)$ whose divisor is

$$\mathrm{div}\,(\sigma_{J_0,i_0}) = -pB|_U$$

with some integer $0 \leq p \leq b - 1$. We take such

$$J_0 \in I_{n-q} \text{ and } i_0 \in \{1, \dots, r(E)\}.$$

(4) Let $0 < \varepsilon \ll 1$ be a sufficiently small number so that, on the ε-polydisc neighbourhood $U(x_1, \varepsilon) = \{z = (z_1, \dots, z_{n+1}) \in U;\ |z_i - z_i(x_1)| < \varepsilon$ for any $1 \leq$

$i \leq n+1\}$, we have

$$A := \inf\{|\sigma_{J_0,i_0}(z)|;\ z \in U(x_0,\varepsilon) \setminus B\} > 0.$$

We should note that σ_{J_0,i_0} may have a pole along B, but no zeros on $U(x_0,\varepsilon)$. Then for any $t \in Y \setminus \{0\}$ close to 0, we have

$$\begin{aligned}\int_{X_t} (c_{n-q}/q!)(\omega^q \wedge \sigma_u \wedge h\overline{\sigma_u})|_{X_t} &\geq a \int_{X_t \cap U} (c_{n-q}/q!)(\omega^q \wedge \sigma_u \wedge \overline{\sigma_u})|_{X_t \cap U} \\ &= a^{q+1} \int_{z \in X_t \cap U} \sum_{I \in I_{n-q}} \sum_{i=1}^{r} |\sigma_{I,i}(z)|^2 dV_n \\ &\geq a^{q+1} \int_{z \in X_t \cap U(x_0,\varepsilon)} A^2\, dV_n \\ &= a^{q+1} A^2 (\pi\varepsilon^2)^n.\end{aligned}$$

Here $dV_n = (\sqrt{-1}/2)^n \bigwedge_{i=1}^n dz_i \wedge d\overline{z_i}$ is the standard euclidean volume form in $\mathbb{C}^n$. Namely we have $g(u,u)(t) \geq a^{q+1}A^2(\pi\varepsilon^2)^n$ for any $t \in Y \setminus \{0\}$. □

5. Question

Question 5.1. Is $(f_*\Omega^{n-q}_{X/Y}(E),\ g)$ Nakano semi-positive, at least where it is locally free ? This may not be true. What is the meaning of negative sign of the curvature (if there are).

Question 5.2. A pairing $\int_{X_y} u_y \wedge \overline{*}_{h_y} v_y$ for harmonic forms $u_y, v_y \in \mathcal{H}^{n,q}(X_y, E_y)$ with respect to ω_y and h_y defines a metric on $H^q(X_y, K_{X_y} \otimes E_y)$, and another Hodge type metric g^+ on $R^q f_*(K_{X/Y} \otimes E)$. We note that g^+ is NOT our g above. Is $(R^q f_*(K_{X/Y} \otimes E), g^+)$ Nakano semi-positive?

Question 5.3. (Matsushita [Ma]) Let $f : X \longrightarrow Y$ be a Lagrangian fibration between smooth projective manifolds. Then by Matsushita, we know $R^1 f_*\mathcal{O}_X \cong \Omega^1_Y$, and $R^{n-1} f_* K_{X/Y} \cong T_Y$ as the dual. Then is $R^{n-1} f_* K_{X/Y} \cong T_Y$ nef? In particular, $R^{n-1} f_* K_{X/Y} \cong T_Y$ is ample if X is an irreducible symplectic manifold? Hwang proved the ampleness of T_Y.

Let X be a Kähler manifold with a holomorphic symplectic form ω and Y a normal variety. A proper surjective morphism $f : X \longrightarrow Y$ is said to be a Lagrangian fibration if a general fibre F of f is a Lagrangian submanifold with respect to ω, that is, the restriction of 2-form $\omega|_F$ is identically zero and $\dim F = (1/2)\dim X$.

REFERENCES

[B] Berndtsson B., *Curvature of vector bundles associated to holomorphic fibrations*, to appear in Ann. of Math., math.CV/0511225v2.

[BP1] Berndtsson B. - Păun M., *Bergman kernels and the pseudoeffectivity of relative canonical bundles*, arXiv:math/0703344 [math.AG].

[BP2] Berndtsson B. - Păun M., *A Bergman kernel proof of the Kawamata subadjunction theorem*, arXiv:0804.3884 [math.AG].

[C] Campana F., *Orbifolds, special varieties and classification theory*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **54** (2004) 499–630.

[DPS] Demailly J.-P., Peternell T. - Schneider M., *Pseudo-effective line bundles on compact Kähler manifolds*, Internat. J. Math. **12** (2001) 689–741.

[E] Enoki I., *Kawamata-Viehweg vanishing theorem for compact Kähler manifolds*, Einstein metrics and Yang-Mills connections (Mabuchi T., Mukai S., ed.), 59–68, Marcel Dekker 1993.

[EV] Esnault H. - Viehweg E., *Lectures on vanishing theorems*, DMV Seminar **20**, Birkhäuser, Basel, (1992).

[Fn] Fujino O., *Higher direct images of log-canonical divisors*, J. Differential Geom. **66** (2004) 453–479.

[FM] Fujino O. - Mori S., *A canonical bundle formula*, J. Differential Geom. **56** (2000) 167–188.

[Ft] Fujita T., *On Kähler fiber spaces over curves*, J. Math. Soc. Japan **30** (1978) 779–794.

[Gr] Griffiths Ph. A., *Periods of integrals on algebraic manifolds. III. Some global differential-geometric properties of the period mapping*, Publ. Math. IHES **38** (1970) 125–180.

[Hö] Höring A., *Positivity of direct image sheaves – a geometric point of view*, notes of the talk at the workshop "Rencontre positivité" in Rennes, 2008.

[Ka1] Kawamata Y., *Characterization of abelian varieties*, Compositio math. **43** (1981) 253–276.

[Ka2] Kawamata Y., *Kodaira dimension of algebraic fiber spaces over curves*, Invent. math. **66** (1982) 57–71.

[Ka3] Kawamata Y., *Kodaira dimension of certain algebraic fiber spaces*, J. Fac. Sic. Univ. Tokyo **30** (1983) 1–24.

[Ko1] Kollár J., *Higher direct images of dualizing sheaves. I*, Ann. of Math. **123** (1986) 11–42. *Higher direct images of dualizing sheaves. II*, Ann. of Math. **124** (1986) 171–202.

[Ko2] Kollár J., *Kodaira's canonical bundle formula and adjunction*, Chapter 8 in *Flips for 3-folds and 4-folds*, ed. by Corti A., (2007).

[LY] Levenberg N. - Yamaguchi H., *The metric induced by the Robin function*, Mem. Amer. Math. Soc. **92** (1991) no. 448.

[MY] Maitani F. - Yamaguchi H., *Variation of Bergman metrics on Riemann surfaces*, Math. Ann. **330** (2004) 477–489.

[Ma] Matsushita D., *Higher direct images of dualizing sheaves on Lagrangian fibrations*, Amer. J. Math. **127** (2005) 243–259.

[Mw] Moriwaki A., *Torsion freeness of higher direct images of canonical bundles*, Math. Ann. **276** (1987) 385–398.

[M] Mourougane Ch., *Images directes de fibrés en droites adjoints*, Publ. RIMS **33** (1997) 893–916.

[MT1] Mourougane Ch. - Takayama S., *Hodge metrics and positivity of direct images*, J. Reine Angew. Math. **606** (2007) 167–178.

[MT2] Mourougane Ch. - Takayama S., *Hodge metrics and the curvature of higher direct images*, arXiv:0707.3551 [mathAG], to appear in Ann. Sci. École Norm. Sup.

[MT3] Mourougane Ch. - Takayama S., *Extension of twisted Hodge metrics for Kähler morphisms*, arXiv:0809.3221 [mathAG], to appear in J. Differential Geom.

[MT4] Mourougane Ch. - Takayama S., *Remarks on the extension of twisted Hodge metrics*, arXiv:0809.3222 [mathAG], 数理解析研究所講究録 1613「Bergman 核と代数幾何への応用」p. 50–65.

[N1] Nakayama N., *Hodge filtrations and the higher direct images of canonical sheaves*, Invent. Math. **85** (1986) 217–221.

[N2] Nakayama N., *Zariski-decomposition and abundance*, MSJ Memoirs **14**, Math. Soc. Japan, 2004.

[Oh] Ohsawa T., *Vanishing theorems on complete Kähler manifolds*, Publ. RIMS. **20** (1984) 21–38.

[Tk] Takegoshi K., *Higher direct images of canonical sheaves tensorized with semi-positive vector bundles by proper Kähler morphisms*, Math. Ann. **303** (1995) 389–416.

[Ts] Tsuji H., *Variation of Bergman kernels of adjoint line bundles*, arXiv:math.CV/0511342.

[Vi1] Viehweg E., *Weak positivity and the additivity of the Kodaira dimension for certain fibre spaces*, In: Algebraic Varieties and Analytic Varieties, Advanced Studies in Pure Math. **1** (1983) 329–353.

[Vi2] Viehweg E., *Quasi-projecitve moduli for polarized manifolds*, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete 3. Folge, Band **30**, A Series of Modern Surveys in Mathematics, Springer. (1995).

[Y] Yamaguchi H., *Variations of pseudoconvex domains over* $\mathbb{C}^n$, Michigan Math. J., **36** (1989) 415-457.

[Z] Zucker S., *Remarks on a theorem of Fujita*, J. Math. Soc. Japan **34** (1982) 47–54.

Shigeharu Takayama

Graduate School of Mathematical Sciences
University of Tokyo
3-8-1 Komaba, Tokyo
153-8914, Japan
e-mail: taka@ms.u-tokyo.ac.jp