日 本 数 学 会

２００８年度　秋季総合分科会

函 数 論 分 科 会

講演アブストラクト

２００８年 9月

於　東 京 工 業 大 学

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
   函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする．

2. 委員会の任務
   (a) 函数論分科会評議員候補者を選出する．
   (b) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦．
   (c) 科研費基盤研究（審査区分（１））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼．
   (d) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる．
   (e) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する．
   (f) 分科会の行事 (たとえば，シンポジウムの開催等) について決定する．
   (g) 次期委員会委員候補者の推薦．
   (h) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する．

3. 委員会の構成及び委員の選出・任期
   (a) 委員の定数は特に定めないが 10 名程度をもって構成する．必要に応じ追加，削減できる．
   (b) 委員の任期は春季学会から２年間とする．再任は妨げないが，原則として再々任は認めない．
   (c) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う．
      i. 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する．その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する．
      ii. 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する．

4. 委員会の開催及び議決
   (a) 委員会は評議員が召集する．
   (b) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する．
   (c) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する．必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる．
   (d) 案件の議決は投票によってはならない．決定できない時は懸案事項として次回に繰越す．緊急事項については評議員に処置を一任する．

5. 函数論分科会委員会における評議員の任務
   (a) 委員会の司会をする．
   (b) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する．
   (c) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する．
   (d) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する．

付 則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する．
付 則　この規則の改正は，1996 年 8 月 1 日より施行する．

函 数 論 分 科 会

9 月 24 日 (水) 第 II 会場

9:30 ~ 12:15

14:30 ~ 15:45

16:00 ~ 17:00 特別講演

9 月 25 日 (木) 第 II 会場

9:00 ~ 12:10

13:10 ∼ 14:10 特別講演

佐 野 友 二 (IPMU)* トーリック・ファノ多様体の乗数イデアル層と積分不変量

1

N- Fractional Calculus of A Power Function and Generalized Hypergeometric Functions

Katsuyuki Nishimoto   Descartes Press

Abstract

In this article, some theorems derived from the N- fractional calculus of a power function

$$(z-c)^{-(n+1)} \qquad (n \in Z_0^+,\ z \neq c)$$

are reported. For example, we have the following ;

Theorem 1. (iii)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left((z-c)^{-(n+1)}\right)_\alpha \left((z-c)^{-(n+1)}\right)_\beta = e^{-i\pi(\alpha+\beta)}(z-c)^{-\alpha-\beta-2}$$

$$\times \Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)\cdot {}_2F_1(1+\alpha, 1+\beta\,; 1\,; (z-c)^{-2})$$

where $\alpha, \beta \notin Z^-$, $\left|\dfrac{1}{z-c}\right| < 1$ and ${}_pF_q$ is generalized Hypergeometric function.

Theorem 2. (i)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left((z-c)^{-(n+1)}\right)_\alpha / \left((z-c)^{-(n+1)}\right)_\gamma\right] = e^{i\pi(\gamma-\alpha)}(z-c)^{\gamma-\alpha}$$

$$\times \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\gamma)}\cdot {}_2F_1(1+\alpha, 1\,; 1+\gamma\,; 1)$$

where $\alpha, \gamma \notin Z^-$, $z \neq c$ and $\gamma-\alpha-1>0$.

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.
[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^ν (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.
[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.
[5] K. Nishimoto ; On the fractional calculus of functions $(a-z)^\beta$ and $\log(a-z)$, J. Frac. Calc. Vol. 3, May (1993), 19 - 27.
[6] K. Nishimoto and S.- T. Tu ; Fractional calculus of Psi functions (Generalized Polygamma functions, J. Frac. Calc. Vol. 5, May (1994), 27 - 34.
[7] S. - T. Tu and K. Nishimoto ; On the fractional calculus of functions $(cz-a)^\beta$ and $\log(cz-a)$, J. Frac. Calc. Vol. 5, May (1994), 35 - 43.
[8] K. Nishimoto ; N-Fractional Calculus of the Power and Logarithmic Functions, and some Identities J. Frac. Calc. Vol. 21, May (2002), 1 - 6.
[9] K. Nishimoto ; Some Theorems for N- Fractional Calculus of Logarithmic Functions I, J. Frac. Calc. Vol. 21, May (2002), 7 - 12.
[10] K. Nishimoto ; Ring and Field Produced from The Set of N- Fractional Calculus Operator, J. Frac. Calc. Vol. 24, Nov. (2003), 29 - 36.
[11] K. B. Oldham and J. Spanier ; The Fractional Calculus, Academic Press (1974).
[12] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev ; Fractional Integrals and Derivatives, and Some Their Applications (1987), Nauka, USSR.
[13] A.C. McBride ; Fractional Calculus and Integral Transforms of Generalized Functions, Research Notes, Vol. 31, (1979), Pitman.
[14] K. S. Miller and B. Ross ; An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons, (1993).
[15] V. Kiryakova ; Generalized fractional calculus and applications, Pitman Research Notes, No.301, (1994), Longman.
[16] A. Carpinteri and F. Mainardi (Ed.); Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics (1997), Springer, Wien, New York.
[17] Igor Podlubny ; Fractional Differential Equations (1999), Academic Press.
[18] R. Hilfer (Ed.) ; Applications of Fractional Calculus in Physics, (2000), World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong.

Katsuyuki Nishimoto
Institute for Applied Mathematics
Descartes Press Co.
2 - 13 - 10 Kaguike, Koriyama
963 - 8833 JAPAN

2

単葉関数の擬等角拡張性と Löwner 鎖

堀田　一敬（東北大・情報）

$\mathbb{D}$ を複素平面上の単位円板，$\mathcal{A}$ を $\mathbb{D}$ 上解析的で正規化条件 $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ を満たす関数全体，$\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ を $\mathbb{D}$ 上単葉な関数全体とする．

単葉関数の擬等角拡張性を保証する定理の 1 つとして，次の結果が知られている；

Theorem 1 (須川 [6]). $0 \le k < 1$ とする．$f \in \mathcal{A}$ に対して $F(z)$ で $zf'(z)/f(z), 1 + zf''(z)/f'(z), f'(z)$ のいずれかの関数を表すとする．このとき $z \in \mathbb{D}$ に対し

$$\left| F(z) - \frac{1+k^2}{1-k^2} \right| \le \frac{2k}{1-k^2}$$

が成り立つならば，$f(z)$ は $\mathbb{C}$ 上の k-擬等角写像に拡張可能である．

本講演では，Löwner 鎖 $\{f(z,t)\}$ を構築し $p(z,t) = (\partial f/\partial t)/(z\,\partial f/\partial z)$ に対して次の Theorem 2 を用いることで，Theorem 1 の初等的な別証明を与える．

Theorem 2 (Becker[1], see also [3]). $p(z,t)$ に対し，ある k, $0 \le k < 1$ が存在し全ての $z \in \mathbf{D}$, $t \in [0,\infty)$ に対し

$$\left| p(z,t) - \frac{1+k^2}{1-k^2} \right| \le \frac{2k}{1-k^2}$$

が成り立つとする．このとき $f(z,0)$ は $\mathbb{C}$ 上の k-擬等角写像に拡張可能である．

Theorem 1 を導いた [6] の手法では拡張の具体的な形まではわからない．しかし Theorem 2 を用い，構築した Löwner 鎖の構成をみることで拡張の具体的な形を書き下すことができることを紹介する．またこの方法では，拡張された関数の具体的な形から逆に同様の擬等角拡張条件を与えるような Löwner 鎖を構成することもできる．

拡張された写像 $\widehat{F}$ は，$F(w) = wf'(w)/f(w)$ のときは

$$\widehat{F}(w) = \begin{cases} f(w) & |w| < 1 \\ |w|\, f\left(\dfrac{w}{|w|}\right) & |w| \ge 1 \end{cases} \tag{1}$$

で，$F(w) = 1 + wf''(w)/f'(w)$ のときは

$$\widehat{F}(w) = \begin{cases} f(w) & |w| < 1 \\ f\left(\dfrac{w}{|w|}\right) + wf'\left(\dfrac{w}{|w|}\right)\left(1 - \dfrac{1}{|w|}\right) & |w| \geq 1 \end{cases}$$

で，$F(w) = f'(w)$ のときは

$$\widehat{F}(w) = \begin{cases} f(w) & |w| < 1 \\ f\left(\dfrac{w}{|w|}\right) + w\left(1 - \dfrac{1}{|w|}\right) & |w| \geq 1 \end{cases}$$

で，それぞれ与えられる．(1) は [2] による．また $F(w) = f'(w)$ の場合に構築した鎖によって能代-Warschawski の定理 ([4],[7]) の別証明が与えられる．さらに $F(w) = 1 + wf''(w)/f'(w)$ の場合に構築した鎖より，系として次の性質が導かれる；

Corollary 3. f を $\mathbb{D}$ 上定義された凸関数で正規化条件 $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ を満たすものとする．このとき任意の定数 $\alpha \in [0, 1]$ に対し，凸結合

$$(1 - \alpha)f(z) + \alpha z f'(z)$$

は単葉である．

参考文献

[1] J. Becker, *Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen*, J. Reine Angew. Math. 255(1972), 23–43.

[2] J. E. Brown, *Quasiconformal extensions for some geometric subclasses of univalent functions*, Internat J. Math. Math. Sci. 7(1984), 187–195.

[3] S. L. Krushkal, *Quasiconformal extensions and reflections*, Handbook of complex analysis: geometric function theory. Vol. 2, 507–553, Elsevier, Amsterdam, 2005.

[4] K. Noshiro, *On the theory of schlicht functions*, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., 2(1934–35), 129–155.

[5] C. Pommerenke, *Univalent functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

[6] T. Sugawa, *Holomorphic motions and quasiconformal extensions*, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sectio A **53** (1999), 239–252.

[7] S. E. Warschawski, *On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping*, Trans. Amer. Math. Soc., 38(1935), no. 2, 310–340.

3

Some subordination criteria concerning Sălăgean operator

Kazuo Kuroki and Shigeyoshi Owa

Let $\mathcal{A}$ denote the class of functions $f(z)$ of the form:

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z : z \in \mathbb{C} \quad and \quad |z| < 1\}$.

By the familiar principle of differential subordination between analytic functions $f(z)$ and $g(z)$ in $\mathbb{U}$, we say that $f(z)$ is subordinate to $g(z)$ in $\mathbb{U}$ if there exists an analytic function $w(z)$ satisfying $w(0) = 0$, $|w(z)| < 1 \quad (z \in \mathbb{U})$ and $f(z) = g\big(w(z)\big) \quad (z \in \mathbb{U})$. We denote this subordination by $f(z) \prec g(z)$. In particular, if $g(z)$ is univalent in $\mathbb{U}$, then

$$f(z) \prec g(z) \qquad (z \in \mathbb{U}) \quad \Longleftrightarrow \quad f(0) = g(0) \quad and \quad f(\mathbb{U}) \subset g(\mathbb{U}).$$

We define the following differential operator due to Sălăgean.
For a function $f(z)$ and $j = 1, 2, 3, \cdots$,

$$D^0 f(z) = f(z), \quad D^1 f(z) = Df(z) = zf'(z), \quad D^j f(z) = D\big(D^{j-1} f(z)\big).$$

Also, we consider the following integral operator

$$D^{-1} f(z) = \int_0^z \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta, \quad D^{-j} f(z) = D^{-1}\big(D^{-(j-1)} f(z)\big)$$

for $j = 1, 2, 3, \cdots$. Then, we know that

$$D^j f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n^j a_n z^n \quad (j = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \cdots).$$

As the generalization of Janowski function : $p(z) = \dfrac{1 + Az}{1 + Bz} \quad (-1 \leqq B < A \leqq 1)$, we consider the following function.

$$p(z) = \frac{1 + Az}{1 + Bz}$$

for some complex parameters A and B which satisfy one of following conditions

$$\begin{cases} (i) \ |A| \leqq 1, \ |B| < 1, \ A \neq B, \ and \ \operatorname{Re}(1 - A\overline{B}) \geqq |A - B| \\ \\ (ii) \ |A| \leqq 1, \ |B| = 1, \ A \neq B, \ and \ 1 - A\overline{B} > 0. \end{cases}$$

In this present talk, by applying Sălăgean operator for $f(z) \in \mathcal{A}$, we consider the following subordination criteria for the generalized Janowski function.

Theorem 1 *Let the function* $f(z) \in \mathcal{A}$ *be so chosen that* $\dfrac{D^j f(z)}{z} \neq 0 \quad (z \in \mathbb{U})$. *Also, let* α $(\alpha \neq 0)$, β $(-1 \leqq \beta \leqq 1)$, *and some complex parameters* A *and* B *which satisfy one of following conditions*

(*i*) $|B| < 1$, $A \neq B$, *and* $\operatorname{Re}(1 - A\overline{B}) \geqq |A - B|$ *be so that*

$$\frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha} + \frac{(1+\beta)\{\operatorname{Re}(1-A\overline{B}) - |A-B|\}}{1-|B|^2} + \frac{1-\beta}{1+|A|} + \frac{1+\beta}{1+|B|} - 1 \geqq 0,$$

(*ii*) $|B| = 1$, $|A| \leqq 1$, $A \neq B$, *and* $1 - A\overline{B} > 0$ *be so that*

$$\frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha} + \frac{(1+\beta)(1-|A|^2)}{2(1-A\overline{B})} + \frac{(1-\beta)(1-|A|)}{2(1+|A|)} \geqq 0.$$

If

$$\left(\frac{D^k f(z)}{D^j f(z)}\right)^{\beta} \left\{(1-\alpha) + \alpha\left(\frac{D^k f(z)}{D^j f(z)} + \frac{D^{k+1} f(z)}{D^k f(z)} - \frac{D^{j+1} f(z)}{D^j f(z)}\right)\right\} \prec h(z),$$

where

$$h(z) = \left(\frac{1+Az}{1+Bz}\right)^{\beta-1} \left\{(1-\alpha)\frac{1+Az}{1+Bz} + \frac{\alpha(1+Az)^2 + \alpha(A-B)z}{(1+Bz)^2}\right\},$$

then

$$\frac{D^k f(z)}{D^j f(z)} \prec \frac{1+Az}{1+Bz} \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

Theorem 2 *Let* α $(\alpha \neq 0)$, β $(-1 \leqq \beta \leqq 1)$, *and some complex parameters* A *and* B *which satisfy one of following conditions*

(*i*) $|B| < 1$, $A \neq B$, *and* $\operatorname{Re}(1 - A\overline{B}) \geqq |A - B|$ *be so that*

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1-\beta}{1+|A|} + \frac{1+\beta}{1+|B|} - 1 \geqq 0,$$

(*ii*) $|B| = 1$, $|A| \leqq 1$, $A \neq B$, *and* $1 - A\overline{B} > 0$ *be so that*

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{(1-\beta)(1-|A|)}{2(1+|A|)} \geqq 0.$$

If $f(z) \in \mathcal{A}$ *satisfies*

$$\left(\frac{D^j f(z)}{z}\right)^{\beta} \left(1 - \alpha + \alpha\frac{D^{j+1} f(z)}{D^j f(z)}\right) \prec \left(\frac{1+Az}{1+Bz}\right)^{\beta} + \frac{\alpha(A-B)z(1+Az)^{\beta-1}}{(1+Bz)^{\beta+1}},$$

then

$$\frac{D^j f(z)}{z} \prec \frac{1+Az}{1+Bz} \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

4
On p-valently uniformly starlike functions

Junichi Nishiwaki (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}_p$ denote the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n \qquad (p \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\})$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. A function $f(z) \in \mathcal{A}_p$ is said to be in the class $\mathcal{SD}_p(\alpha, \beta)$ if it satisfies

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - p\right| + \beta \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some α ($\alpha \geqq 0$) and β ($0 \leqq \beta < p$). If $p = 1$ for $f(z) \in \mathcal{A}_p$, then $f(z) \in \mathcal{SD}_1(\alpha, \beta)$ is equivalent to

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| + \beta \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some α ($\alpha \geqq 0$) and β ($0 \leqq \beta < 1$). This class was introduced by S. Shams, S. R. Kulkarni and J. M. Jahangiri (Internat. J. Math. Math. Sci. 55(2004), 2959 - 2961). Also this class was denoted by $\mathcal{SD}_1(\alpha, \beta)$.

Remark 1. For $f(z) \in \mathcal{SD}_p(\alpha, \beta)$, we write that $w(z) = zf'(z)/f(z) = u + iv$.

If $\alpha > 1$, then w lies in the domain which is the part of the complex plane which contains $w = p$ and is bounded by the elliptic domain such that

$$\frac{\left(u - \dfrac{\alpha^2 p - \beta}{\alpha^2 - 1}\right)^2}{\left(\dfrac{\alpha(p - \beta)}{\alpha^2 - 1}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\dfrac{\alpha(p - \beta)}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}\right)^2} < 1.$$

If $\alpha = 1$, then w lies in the domain which is the part of the complex plane which contains $w = p$ and is bounded by the parabolic domain such that

$$u > \frac{v^2}{2(p - \beta)} + \frac{p + \beta}{2}.$$

If $0 < \alpha < 1$, then w lies in the domain which is the part of the complex plane which contains $w = p$ and is bounded by the hyperbolic domain such that

$$\frac{\left(u+\dfrac{\alpha^2p-\beta}{1-\alpha^2}\right)^2}{\left(\dfrac{\alpha(p-\beta)}{1-\alpha^2}\right)^2}-\frac{v^2}{\left(\dfrac{\alpha(p-\beta)}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)^2}>1$$

Lemma 1. *If $f(z)\in\mathcal{A}_1$ satisfies*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\{(1-\beta)+(1+\alpha)(n-1)\}|a_n|\leqq 1-\beta$$

for some α $(\alpha\geqq 0)$ and β $(0\leqq\beta<1)$, then $f(z)\in\mathcal{SD}_1(\alpha,\beta)$.

Lemma 2. *If $f(z)\in\mathcal{A}_p$ satisfies*

$$\sum_{n=p+1}^{\infty}\{(p-\beta)+(1+\alpha)(n-p)\}|a_n|\leqq p-\beta$$

for some α $(\alpha\geqq 0)$ and β $(0\leqq\beta<p)$, then $f(z)\in\mathcal{SD}_p(\alpha,\beta)$.

We introduce the subclass $\mathcal{SD}_1^*(\alpha,\beta)$ of $\mathcal{A}_1$ consisting of functions $f(z)$ which satisfy the coefficient inequality of Lemma 1 and the subclass $\mathcal{SD}_p^*(\alpha,\beta)$ of $\mathcal{A}_p$ consisting of functions $f(z)$ which satisfy the coefficient inequality of Lemma 2.

Let $f_j(z)\in\mathcal{A}_p$ be given by $f_j(z)=z^p+\sum_{n=p+1}^{\infty}a_{n,j}z^n$ for each $j=1,2,3,\cdots,m$. For $f_j(z)\in\mathcal{A}_p$, we define

$$H_{p,m}(z)=z^p+\sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{m}a_{n,j}^{p_j}\right)z^n \qquad (p_j>0),$$

which is the generalization of convolution.

Applying Hölder-type inequality, we derive

Theorem 1. *If $f_j(z)\in\mathcal{SD}_1^*(\alpha,\beta_j)$ for each $j=1,2,3,\cdots,m$, then $H_{1,m}(z)\in\mathcal{SD}_1^*(\alpha,\beta^*)$ with*

$$\beta^*=1-\frac{(1+\alpha)\prod_{j=1}^{m}(1-\beta_j)^{p_j}}{\prod_{j=1}^{m}\{(1-\beta_j)+(1+\alpha)\}^{p_j}-\prod_{j=1}^{m}(1-\beta_j)^{p_j}}$$

where $\sum_{j=1}^{m}p_j\geqq 1+\dfrac{1-\beta_j^*}{1+\alpha}$ $(\beta_j^*=\min\{\beta_j\}),p_j\geqq\dfrac{1}{q_j}$ and $\sum_{j=1}^{m}\dfrac{1}{q_j}\geqq 1$.

Theorem 2. *If $f_j(z)\in\mathcal{SD}_p^*(\alpha,\beta_j)$ for each $j=1,2,3,\cdots,m$, then $H_{p,m}(z)\in\mathcal{SD}_p^*(\alpha,\beta^*)$ with*

$$\beta^*=p-\frac{(1+\alpha)\prod_{j=1}^{m}(p-\beta_j)^{p_j}}{\prod_{j=1}^{m}\{(p-\beta_j)+(1+\alpha)\}^{p_j}-\prod_{j=1}^{m}(p-\beta_j)^{p_j}}$$

where $\sum_{j=1}^{m}p_j\geqq 1+\dfrac{p-\beta_j^*}{1+\alpha}$ $(\beta_j^*=\min\{\beta_j\}),p_j\geqq\dfrac{1}{q_j}$ and $\sum_{j=1}^{m}\dfrac{1}{q_j}\geqq 1$.

5

Coefficient inequalities for certain classes related to Sălăgean operator and applications

Toshio Hayami (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}$ denote the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

We define the following differential operater due to Sălăgean.
For a function $f(z) \in \mathcal{A}$,

$$D^0 f(z) = f(z), \quad D^1 f(z) = Df(z) = zf'(z), \quad D^j f(z) = D\big(D^{j-1} f(z)\big).$$

Also, we meditate the following integral operator

$$D^{-1} f(z) = \int_0^z \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta, \quad D^{-j} f(z) = D^{-1}\big(D^{-(j-1)} f(z)\big)$$

for $j = 1, 2, 3, \cdots$. Then, for $f(z) \in \mathcal{A}$, we know that

$$D^j f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n^j a_n z^n \quad (j = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \cdots).$$

Using the above operator $D^j f(z)$, we consider the subclass $\mathcal{S}_j^m(\alpha)$ of $\mathcal{A}$ as follows:

$$\mathcal{S}_j^m(\alpha) = \left\{ f(z) \in \mathcal{A} \ : \ \mathrm{Re}\left(\frac{D^m f(z)}{D^j f(z)}\right) > \alpha \quad (z \in \mathbb{U}; \ m \neq j, \ 0 \leqq \alpha < 1) \right\}.$$

Let $f(z)$ and $g(z)$ be analytic in $\mathbb{U}$. Then, we say that $f(z)$ is subordinate to $g(z)$ in $\mathbb{U}$, written $f(z) \prec g(z)$, if there exists an analytic function $w(z)$ in $\mathbb{U}$, such that $w(0) = 0$, $|w(z)| < 1$ $(z \in \mathbb{U})$ and $f(z) = g(w(z))$.

If $g(z)$ is univalent in $\mathbb{U}$, then it is known that

$$f(z) \prec g(z) \quad \Longleftrightarrow \quad f(0) = g(0) \quad \text{and} \quad f(\mathbb{U}) \subset g(\mathbb{U}).$$

In this present talk, we derive coefficient conditions for functions $f(z)$ to be in the class $\mathcal{S}_j^m(\alpha)$ and satisfying certain differential subordinations.

Theorem 1 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies any one of the following inequalities*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left|\sum_{l=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{l}(k^{m-j}-\alpha+\beta)k^{j}(-1)^{l-k}\binom{\gamma}{l-k}a_k\right\}\binom{\delta}{n-l}\right| + \left|\sum_{l=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{l}(k^{m-j}-\alpha-\beta)k^{j}(-1)^{l-k}\binom{\gamma}{l-k}a_k\right\}\binom{\delta}{n-l}\right|\right] \leqq 2\beta \qquad (0<\beta\leqq 1-\alpha),$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left|\sum_{l=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{l}(k^{m-j}-\alpha+\beta)k^{j}(-1)^{l-k}\binom{\gamma}{l-k}a_k\right\}\binom{\delta}{n-l}\right| + \left|\sum_{l=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{l}(k^{m-j}-\alpha-\beta)k^{j}(-1)^{l-k}\binom{\gamma}{l-k}a_k\right\}\binom{\delta}{n-l}\right|\right] \leqq 2(1-\alpha) \qquad (\beta>1-\alpha)$$

for some α $(0\leqq\alpha<1)$, $\gamma\in\mathbb{R}$ and $\delta\in\mathbb{R}$, then $f(z)\in\mathcal{S}_j^m(\alpha)$.

Theorem 2 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies the following condition*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left|\sum_{l=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{l}(k-1)(-1)^{l-k}\binom{\gamma}{l-k}a_k\right\}\binom{\delta}{n-l}\right| + \left|\sum_{l=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{l}(A-kB)(-1)^{l-k}\binom{\gamma}{l-k}a_k\right\}\binom{\delta}{n-l}\right|\right] \leqq |A-B|$$

for some $A,B\in\mathbb{C}$ $(|B|\leqq 1,\ A\neq B)$, $\gamma\in\mathbb{R}$ and $\delta\in\mathbb{R}$, then $\dfrac{zf'(z)}{f(z)} \prec \dfrac{1+Az}{1+Bz}$.

References

[1] P. L. Duren, *Univalent Functions*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1983.

[2] T. Hayami, S. Owa and H. M. Srivastava, *Coefficient inequalities for certain classes of analytic and univalent functions*, J. Ineq. Pure and Appl. Math., **8**(4) Article 95 (2007), 1-10.

[3] I. R. Nezhmetdinov and S. Ponnusamy, *New coefficient conditions for the starlikeness of analytic functions and their applications*, Houston J. Math. **31**, No. 2 (2005), 587-604.

[4] M. S. Robertson, *On the theory of univalent functions*, Ann. Math. **37** (1936), 374-408.

[5] G. S. Sălăgean, *Subclass of univalent functions*, Complex Analysis-Fifth Romanian-Finnish Seminar, Part 1(Bucharest, 1981), Lecture Notes in Math., vol. 1013, Springer, Berlin, 1983, pp. 362-372.

[6] H. Silverman, *Univalent functions with negative coefficient*, Proc. Amer. Math. Soc., **51** (1975), 109-116.

[7] H. Silverman, E. M. Silvia, and D. Telage, *Convolution conditions for convexity, starlikeness and spiral-likeness*, Math. Z., **162** (1978), 125-130.

6

カールソンの定理の拡張

米田　力生　　（小樽商科大学）

$\alpha > 0$ に対して、空間 $\mathcal{B}_\alpha$ は

$$\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^\alpha|f(z)| < +\infty$$

を満たす D 上の解析関数全体とする．ブロッホ空間 $\mathcal{B}$ は

$$\| f \|_\beta = |f(0)| + \sup_{z\in D}(1-|z|^2)|f'(z)| < +\infty$$

を満たす D 上の解析関数全体とする．$dA(z)$ は D 上の正規化された面積測度とする．そのとき, $\alpha > -1$ に対して, 荷重付きベルグマン空間 $\mathcal{D}^\alpha$ は

$$\int_D (1-|z|^2)^\alpha |f(z)|^2(\alpha+1)dA(z) < +\infty$$

を満たす D 上の解析関数全体とする．$\alpha = 0$ のとき, $\mathcal{D}^0 = L_a^2$ はベルグマン空間である．

一般に X を バナッハ空間とし，T を linear operator from X into X とする．そのとき，T は 次を満たすならば，bounded below on X と呼ばれる：　　ある正の定数 $C > 0$ が存在して、$\| Tf \| \geq C \| f \|$ for all $f \in X$ を満たす．

D 上の解析関数 g に対して, 一般化された積分作用素 J_g は

$$J_g(f)(z) = \int_0^z f(\zeta)g'(\zeta)d\zeta$$

と定義される．この研究では，この一般化された積分作用素 J_g がいつ $\mathcal{D}^\alpha$ 上で bounded below になるのかに関する研究をし，以下の結果が得られた：

Theorem 1. *Let $\alpha > 0$. Suppose that $g \in \mathcal{B}$. Then the following are equivalent:*

(1)　*J_g is bounded below on $L_a^2\left((1-|z|^2)^{2\alpha}\,dA(z)\right)$*
i.e.　there is a constant $k > 0$ such that

$$\left\{\int_D |J_g f(z)|^2(1-|z|^2)^{2\alpha}dA(z)\right\}^{\frac{1}{2}} \geq k\left\{\int_D |f(z)|^2(1-|z|^2)^{2\alpha}dA(z)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

for all $f \in L_a^2\left((1-|z|^2)^{2\alpha}\,dA(z)\right)$.

(2)　*There exists $\epsilon > 0$ such that $\left\{z \in D, (1-|z|^2)|g'(z)| \geq \epsilon\right\}$ is a sampling set for $\mathcal{B}^\alpha$.*

(3)　$\inf_{w\in D}\sup_{z\in D}(1-|\varphi_w(z)|^2)^\alpha(1-|z|^2)|g'(z)| > 0.$

上の定理を利用して次の結果を得た：

Theorem 2. *Let* $\alpha > 0$. *Let* $B(z)$ *be a Blaschke product (a* H^∞ *function) of the form* $B(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{z_j - z}{1 - \overline{z_j} z} \right)$ *and let* $\{z_n\}$ *be its zeros, counted with their multiplicities. Then the following are equivalent:*

(1) $B(z)$ *is a finite product of interpolating Blaschke products,*

(2) $\inf_{w \in D} \left\{ \sup_{z \in D} (1 - |\varphi_w(z)|^2)^\alpha |B(z)| \right\} > 0,$

(3) $\inf_{w \in D} \left\{ \sup_{z \in D} (1 - |\varphi_w(z)|^2)^\alpha (1 - |z|^2) |B'(z)| \right\} > 0,$

(4) M_B *is bounded below on* $L^2_a \left((1 - |z|^2)^{2\alpha} dA(z) \right)$,

(5) M_B *is bounded below on* L^2_a,

(6) J_B *is bounded below on* $L^2_a \left((1 - |z|^2)^{2\alpha} dA(z) \right)$,

(7) *There exists a positive constant* $\epsilon > 0$ *such that* $\left\{ z \in D, (1 - |z|^2)|B'(z)| \geq \epsilon \right\}$ *is a sampling set for* $\mathcal{B}^\alpha$.

In particular, if $\inf_{n \neq m} \rho(z_n, z_m) > 0$,

$$\inf_{w \in D} \left\{ \sup_{z \in D} (1 - |\varphi_w(z)|^2)^\alpha |B(z)| \right\} \sim \inf_{w \in D} \left\{ \sup_{z \in D} (1 - |\varphi_w(z)|^2)^\alpha (1 - |z|^2) |B'(z)| \right\}$$

$$\sim \inf_n \prod_{j \neq n} \rho(z_j, z_n) = \inf_n (1 - |z_n|^2) \left| B'(z_n) \right| .$$

References

[1] A.Aleman and A.G.Siskakis, An integral operator on H^p, Complex Variables, 28(1995),149-158.

[2] R.Aulaskari, P.Lappan and J.Miao, On $\alpha-$Bloch Spaces and Multipliers of Dirichlet Spaces, J.Math.Anal.Appl.209(1997),103-121.

[3] P.S.Bourdon and J.A.Cima and A.L.Matheson, Compact composi tion operators on BMOA, Trans.Amer.Math.Soc.344(1994), 2183-2196.

[4] H.Chen and P.Gauthier, Boundedness From Below of Composition Operators on Bloch spaces, in preprint.

[5] P.Ghatage and D.Zheng and Nina Zorboska, Sampling sets and closed range composition operators on the Bloch space, Proceedings of the Amer.Math.Soc.133,5 (2004), 1371-1377.

[6] P.Ghatage and D.Zheng, Hyperbolic derivatives and generalized schwartz-Pick estimates, Proceedings of the Amer.Math.Soc.132,11(2004), 3309-3318.

[7] M.Jovovic and B.MacCluer, Composition operators on Dirichlet spaces, Acta Sci.Math.(Szeged) 63(1997), 229-247.

[8] D.Leucking, Inequalities on Bergman spaces, Illinois J.Math.25(1981), 1-11.

[9] G.McDonald and C.Sundberg, Toeplitz operators on the disc, indiana Univ.Math.J.28(1979),595-611.

[10] R.Zhao, On α-Bloch functions and VMOA, Acta Math.Sci.16(1996), 349-360.

7 A conjugate system and tangential derivative norms on parabolic Bergman spaces

菱川　洋介 (岐阜大・工)
西尾　昌治 (大阪市大・理)
山田　雅博 (岐阜大・教育)

H を $n+1$ 次元実ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}(n \geq 1)$ の上半空間とする. すなわち,

$$H = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}; x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}.$$

$0 < \alpha \leq 1$ に対し, $L^{(\alpha)} = \partial_t + (-\Delta_x)^\alpha$ とする. ここで, $\partial_t = \partial/\partial t$, Δ_x は x に関するラプラシアンである. また, H 上の連続関数 u が $L^{(\alpha)}$ 調和であるとは, 超関数の意味で $L^{(\alpha)}u = 0$ となるときをいう.

$1 \leq p < \infty, \lambda > -1$ に対し, 放物型 Bergman 空間 $b^p_\alpha(\lambda)$ を次のように定義する.

$$b^p_\alpha(\lambda) := \{u; H \text{ 上 } L^{(\alpha)}\text{調和}, \|u\|_{L^p(\lambda)} = \left(\int_H |u(x,t)|^p t^\lambda dV(x,t)\right)^{1/p} < \infty\}.$$

ここで, dV は H 上のルベーグ測度である. 特に, $\alpha = 1/2$ のとき, $b^p_{1/2}(\lambda)$ は重み付き調和 Bergman 空間となることがわかる.

κ を実数とする. このとき, t に関する fractional order の微分作用素を $\mathcal{D}^\kappa_t = (-\partial_t)^\kappa$ とする (詳しい定義は講演で紹介する). 特に $u \in b^p_\alpha(\lambda)$ とし, $\kappa > -(\frac{n}{2\alpha} + \lambda + 1)\frac{1}{p}$ ならば, $D^\kappa_t u$ は well-defined であることを注意しておく.

本研究では, 放物型 Bergman 関数の α–放物型共役関数を定義し, その存在性及び一意性を示した. また, それらを用いて放物型 Bergman 関数の tangential derivative norm の評価を与えた.

調和 Bergman 空間において, 共役調和関数に対するこれらの研究は知られている ([3]). また, α–放物型共役関数は [4] で研究されているが, 調和 Bergman 空間の場合と比較すると, 拡張に改良の余地が見られた. そこで我々は, fractional order の微分を用いることによって, より適切な定義を与え, それらの性質について研究した. 本講演では, これらの結果を述べる.

<u>定義（α–放物型共役関数）</u>

$u \in b^p_\alpha(\lambda)$ に対して, H 上のベクトル値関数 $V = (v_1, \cdots, v_n)$(各 v_j が H 上の実数値関数) が u の α–放物型共役関数であるとは, 次の条件を満たすときをいう.

$$\nabla_x u = -\mathcal{D}_t V, \qquad \nabla_x v_j = \partial_j V \quad (1 \leq j \leq n),$$
$$\mathcal{D}^{\frac{1}{\alpha}-1}_t u = \nabla_x \cdot V.$$

ここで, $\partial_j = \partial/\partial x_j$, $\nabla_x = (\partial_1, \cdots, \partial_n)$, また $\nabla_x \cdot V$ は V の divergence を表す.

注意

$\alpha=1/2$ の場合を考える．上で述べたように $\alpha=1/2$ のとき，$b^p_{1/2}(\lambda)$ は重み付き調和 Bergman 空間となる．特に $n=1$ の場合, 上の定義は 2 変数関数におけるコーシー・リーマンの関係式である．

$$u_x=v_t, \qquad -u_t=v_x.$$

また, $n\geq 1$ の場合は, 調和関数に関する一般化されたコーシー・リーマンの関係式に対応している．

$$\partial_j u=\partial_t v_j, \qquad \partial_k v_j=\partial_j v_k \quad (1\leq j,k\leq n),$$
$$\partial_t u+\sum_{j=1}^{n}\partial_j v_j=0.$$

次の 2 定理は, それぞれ α–放物型共役関数の存在性及び一意性と, 放物型 Bergman 関数の tangential derivative norm の評価を与えている．

定理 1. $0<\alpha\leq 1$, $1\leq p<\infty$, $\lambda>-1$, $u\in b^p_\alpha(\lambda)$ とする．α,p,λ が $\eta=p(\frac{1}{2\alpha}-1)+\lambda>-1$ を満たすならば, u の α–放物型共役関数 $V=(v_1,\cdots,v_n)$ が唯一存在して, 全ての v_j が H 上 $L^{(\alpha)}$ 調和かつ, $|V|\in L^p(\eta)$. ここで, $|V|=\{v_1^2+\cdots+v_n^2\}^{1/2}$. さらに, u によらないある正の定数 $C=C(n,\alpha,p,\lambda)$ が存在して,

$$C^{-1}\|u\|_{L^p(\lambda)}\leq \||V|\|_{L^p(\eta)}\leq C\|u\|_{L^p(\lambda)}.$$

定理 2. $0<\alpha\leq 1$, $1\leq p<\infty$, $\lambda>-1$, $u\in b^p_\alpha(\lambda)$ とする. 任意の $m\in\mathbb{N}_0$ に対して, u によらないある正の定数 $C=C(n,\alpha,p,\lambda,m)$ が存在して,

$$C^{-1}\|u\|_{L^p(\lambda)}\leq \sum_{|\gamma|=m}\|t^{\frac{m}{2\alpha}}\partial_x^\gamma u\|_{L^p(\lambda)}\leq C\|u\|_{L^p(\lambda)}.$$

References

[1] Y. Hishikawa, *Fractional calculus on parabolic Bergman spaces*, preprint.

[2] M. Nishio, K. Shimomura and N. Suzuki, *α-parabolic Bergman space*, Osaka J. Math. 42, no. 1, (2005), 133-162.

[3] W. Ramey and H. Yi, *Harmonic Bergman functions on half-spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 348 (1996), 633–660.

[4] M. Yamada, *Harmonic conjugates of parabolic Bergman functions*, Advanced studies Pure Math., 44 (2006) 391-402.

8

Toeplitz operators of Schatten class on the parabolic Bergman space

西尾昌治　阪市大・理
鈴木紀明　名城大・理工
山田雅博　岐阜大・教育

We consider the α-parabolic operator

$$L^{(\alpha)} := \frac{\partial}{\partial t} + (-\Delta_x)^\alpha$$

on the upper half space $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$, where $\Delta_x := \partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_n}^2$ denotes the Laplacian on the x-space $\boldsymbol{R}^n$ and $0 < \alpha \leq 1$. Here we denote by $X = (x, t)$ and $Y = (y, s)$ points in $\boldsymbol{R}_+^{n+1} = \boldsymbol{R}^n \times (0, \infty)$. The Hilbert space $(\boldsymbol{b}_\alpha^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ is defined by

$$\boldsymbol{b}_\alpha^2 := \{u \in L^2(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V) \cap C(\boldsymbol{R}_+^{n+1});\ L^{(\alpha)}u = 0 \quad \text{in the sense of distributions}\},$$

where V denotes the $(n+1)$-dimensional Lebesgue measure on $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$.

Since for $X \in \boldsymbol{R}_+^{n+1}$ the point evaluation $u \mapsto u(X) : \boldsymbol{b}_\alpha^2 \to \boldsymbol{R}$ is bounded (see [1]), the orthogonal projection from $L^2(V) := L^2(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V)$ to $\boldsymbol{b}_\alpha^2$ is represented as an integral operator by a kernel R_α, which is called the α-parabolic Bergman kernel. By using the kernel R_α, we define the Toeplitz operators by

$$(T_\mu u)(X) := \int R_\alpha(X, Y)\, u(Y)\, d\mu(Y)$$

with symbol μ, which are positive Radon measures on $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$. In the study of Toeplitz operators, the averaging function

$$\hat{\mu}^{(\alpha)}(Y) := \mu(Q^{(\alpha)}(Y))\Big/V(Q^{(\alpha)}(Y))$$

plays an important role, where $Q^{(\alpha)}(Y)$ is an α-parabolic Carleson box, defined by

$$Q^{(\alpha)}(Y) := \{(x_1, \cdots, x_n, t);\ s \leq t \leq 2s, |x_j - y_j| \leq 2^{-1}s^{1/2\alpha}, j = 1, \cdots, n\}.$$

In [2], we give a necessary and sufficient condition that the Toeplitz operator is compact on $\boldsymbol{b}_\alpha^2$. Compact operators admit only point spectra, i.e., eigenvalues. The Schatten calsses are defined in order to classify compact operators according as the distribution of eigenvalues.

DEFINITION 1. Let $0 < \sigma < \infty$. A compact operator T on a Hilbert space $\mathcal{H}$ is said to be of Schatten σ-class if the sequence of all singular values $(\lambda_j)_j$ of T belongs to the sequence space l^σ, where the singular values λ_j of T mean the eigenvalue of $|T| := \sqrt{T^*T}$. We denote by $S^\sigma(\mathcal{H})$ the totality of compact operators on $\mathcal{H}$ of Schatten σ-class.

In this talk, we characterize the Toeplitz operator of Schatten class in the case of $\sigma \geq 1$.

Theorem 1. *Let $1 \leq \sigma < \infty$ and $\mu \geq 0$ a Radon measure on $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ satisfying the growth condition*

$$\int (1 + t + |x|^{2\alpha})^{-\delta} \, d\mu(x,t) < \infty \tag{1}$$

for some $\delta \in \boldsymbol{R}$. Then the Toeplitz operator T_μ on $\boldsymbol{b}_\alpha^2$ is in the Schatten σ-class $\mathcal{S}^\sigma(\boldsymbol{b}_\alpha^2)$ if and only if $\hat{\mu}^{(\alpha)} \in L^\sigma(V^l)$, where

$$dV^l(X) := t^{-(\frac{n}{2\alpha}+1)} dV(X).$$

Here we a little generalize the above theorem to Schatten class operators of the Orlicz type. Let ψ be a Young function, i.e., $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ is a convex and strictly increasing function with $\psi(0) = 0$ and $\lim_{s\to\infty} \psi(s) = \infty$.

DEFINITION 2. A compact operator T on a Hilbert space $\mathcal{H}$ is said to be of Schatten ψ-class if the sequence of all singular values $(\lambda_j)_j$ of T belongs to the sequence space l^ψ of Orlicz type, and then we write $T \in \mathcal{S}^\psi(\mathcal{H})$, where $(\lambda_j)_j \in l^\psi$ means

$$\sum_j \psi(\lambda_j/\tau) < \infty$$

with some constant $\tau > 0$. We put

$$\|T\|_{\mathcal{S}^\psi(\mathcal{H})} := \inf\{\tau > 0; \sum_j \psi(\lambda_j/\tau) \leq 1\}.$$

Theorem 2. *Let $\mu \geq 0$ be a Radon measure on $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ satisfying (1). Then $T_\mu \in \mathcal{S}^\psi(\boldsymbol{b}_\alpha^2)$ if and only if $\hat{\mu}^{(\alpha)} \in L^\psi(V^l)$, where $L^\psi(V^l)$ is the Orlicz space. Moreover, norms $\|T_\mu\|_{\mathcal{S}^\psi(b_\alpha^2)}$ and $\|\hat{\mu}^{(\alpha)}\|_{L^\psi(V^l)}$ are equivalent to each other, where*

$$\|f\|_{L^\psi(V_\eta)} := \inf\{\tau > 0; \int \psi\Big(\frac{|f|}{\tau}\Big) \, dV_\eta \leq 1\}$$

for $f \in L^\psi(V^l)$.

References

[1] M. Nishio, K. Shimomura and N. Suzuki, α-parabolic Bergman spaces, Osaka J. Math., 42 (2005), 133–162.

[2] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, Compact Toeplitz operators on parabolic Bergman spaces, to appear in Hiroshima Math. J., 38 (2008).

9 シリンダー内の無限遠点での minimally thin な集合の定量的な特徴付け

宮本育子（千葉大学理学研究科）
吉田英信（秀明大学学校教師学部）

$\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ を n 次元ユークリッド空間、U を $\mathbf{R}^n$ 内の領域とする。U の通常の境界を ∂U、マルチン境界を $\Delta(U)$ であらわし、$Q \in \Delta(U)$ でのマルチン関数を $K(P;Q,U)$ $(P \in U)$ であらわす。U の部分集合 E が「U に関して点 $Q \in \Delta(U)$ で minimally thin である」とは、

$$\hat{R}^E_{K(\cdot;Q,U)}(P) \neq K(P;Q,U)$$

となる点 $P \in U$ があることとする。ここで、 $\hat{R}^E_{K(\cdot;Q,U)}(P)$ は E に関する $K(P;Q,U)$ の「balayage」である。U に関して点 $Q \in \Delta(U)$ で minimally thin な集合は U 上の優調和関数の Q の近傍での除外集合として、その優調和関数の境界挙動に深く関係している。minimal thinness の上の定義は「定性的」なので、その「定量的」な特徴付けのために、次の定理 A が証明されている。

$\mathbf{R}^n$ 内の点は $P = (X, y), X = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ によって、$\mathbf{R}^n$ 内の原点と点 P との距離を $|P|$ によってあらわす。半空間 $\{(X,y) \in \mathbf{R}^n; y > 0\}$ は $\mathbf{T}_n$、中心 P、半径 r の $\mathbf{R}^n$ 内の球は $B(P,r)$ によってあらわされる。

定理 A (Essén, Jackson and Rippon [1]). $h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ は $h(0) = 0$、

$$\int_0^1 h(x)x^{1-n}dx \ < \ \infty$$

を満たす連続な増加関数とする。このとき、$\mathbf{T}_n$ に関して ∞ で minimally thin な集合は、条件

$$0 < \frac{r_k}{y_k} \leq \sqrt{n} \qquad (k = 1,2,3,\ldots), \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{y_k}{|P_k|})^n h(\frac{r_k}{y_k}) < \infty$$

を満たす球の列 $B_k = B(P_k, r_k)$, $P_k = (X_k, y_k) \in \mathbf{T}_n$ $(k = 1,2,3,\ldots)$ によって被覆される。

ケルビン変換を考えると、この結果は球の一点での minimal thinness に関係しているが、昨年の講演では、角をもつ領域の角の点、具体的には、コーンの無限遠点での minimal thinness な集合に関しても同様な定理が成立することを報告した。

今回の講演では、尖点をもつ領域の尖点、具体的には、シリンダーの無限遠点での minimal thinness な集合に関しても定理Aに類似の次の定理が成立することを報告する。

D は $\mathbf{R}^{n-1}(n \geq 2)$ 内の滑らかな境界をもつ有界領域とし、$\mathbf{R}$ の部分集合 I にたいして、集合

$$\{P = (X,y) \in \mathbf{R}^n; X \in D, \ y \in I\}$$

を $\Gamma_n(D;\ I)$ であらわす。特に、$I = \mathbf{R}$ のときにこれを簡単に $\Gamma_n(D)$ であらわし、これを「シリンダー ($n = 2$ の場合は帯状領域)」と呼ぶ。このとき

$$\Delta(\Gamma_n(D)) = \partial\Gamma_n(D) \cup \{+\infty, -\infty\}.$$

定理. h は 定理Aと同じ条件を満たす関数とする。もし、$E \subset \Gamma_n(D; [0,\infty))$ が $\Gamma_n(D)$ に関して $+\infty$ で minimally thin ならば、どんなに小さな数 $c > 0$ に対しても、

$$(*) \qquad 0 < \frac{r_k}{d(P_k)} \leq \frac{\sqrt{n}}{2}c \quad (k = 1, 2, 3, ...), \quad \sum_{k=1}^{\infty} (d(P_k))^n h(\frac{r_k}{d(P_k)}) < \infty$$

を満たす中心 $P_k \in \Gamma_n(D)$, 半径 r_k の球の可算列 $\{B(P_k, r_k)\}$ $(k = 1, 2, 3, ...)$ によって被覆される。ここで、$d(P_k)$ は P_k から $\partial\Gamma_n(D)$ までの距離

この定理において、$h(r) = r^n$ とおくことによって、次の結果が得られることを注意したい。

定理 B (Miyamoto and Yanagishita [2])。$\Gamma_n(D; [0,\infty))$ の部分集合 E が $\Gamma_n(D)$ に関して $+\infty$ で minimally thin ならば、E は

$$\sum_{k=1}^{\infty} {r_k}^n < \infty$$

を満たす中心 $P_k \in \Gamma_n(D)$, 半径 r_k の球の可算列 $\{B(P_k, r_k)\}$ $(k = 1, 2, 3, ...)$ によって被覆される。

この定理の証明は、Essén, Jackson and Rippon [1] の方法とは異なり、Besicovitch の被覆定理を利用する方法でなされる。また、$(*)$ を得るために、次の条件

$$(\delta - 1)diam(W_i) \leq dist(W_i, \partial\Gamma_n(D)) \leq 2\delta diam(W_i),$$

を満たす「δ $(\delta > 1)$ に関する $\Gamma_n(D)$ の Whitney cubes の列 $\{W_i\}$」を用いる。 ここで、$dist(W_i, \partial\Gamma_n(D))$ は W_i と $\partial\Gamma_n(D)$ との距離を、$diam(W_i)$ は W_i の直径を表す。

最後に、 Essén, Jackson and Rippon [1] と同様な方法によって、この定理の sharpness についても報告したい。

References

[1] M. Essén, H.L. Jackson and P.J. Rippon, On minimally thin and rarefied sets sets in $\mathbf{R}^p, p \geq 2$, Hiroshima Math. J. 15(1985), 393-410.

[2] I. Miyamoto and M. Yanagishita, Some characterization of minimally thin sets in a cylinder and Beurling-Dahlberg-Sjögren type theorems, Proc. Amer. Math. Soc. 133(2004), 1391-1400.

10　特異調和関数を持たぬ面の調和次元

中井 三留（名工大・名誉教授）
瀬川 重男（大同工大）
多田 俊政（大同工大）

Riemann 面 R 上の準正値調和関数族 $HP(R)$ は擬有界調和関数からなる部分空間 $HP_q(R)$ と特異調和関数からなる部分空間 $HP_s(R)$ により Parreau 分解と呼ばれる直和分解

$$HP(R) = HP_q(R) \oplus HP_s(R) \tag{1}$$

を持つ ([5]). 通常通り Green 関数を許容せぬ事で特徴付けられる放物型（即ち非双曲型）面 R の族 $\mathcal{O}_G$ と $HP(R) = \mathbb{R}$（実数体）となる面 R の族 $\mathcal{O}_{HP}$ に加えて $HP_s(R) = \{0\}$ となる面 $R \notin \mathcal{O}_G$ の族を $\mathcal{O}_s$ と記す. $\mathcal{O}_s$ に関する基礎知識の一つに

$$\mathcal{O}_{HP} \setminus \mathcal{O}_G < \mathcal{O}_s \quad (\text{真の包含}) \tag{2}$$

がある. 上記左辺の非空を示す具体例に Sario 面或いは Toki 面があり (cf. e.g. [1], [6]) その構成は大変難しい. 次に参照点 $o \in R$ の選び方に依らぬ $HP(R)$ の構造に関する濃度

$$\dim R := \operatorname{card}\left(\operatorname{ex}\{u \in HP(R)^+ : u(o) = 1\}\right) \tag{3}$$

を R の調和次元と呼ぶ. 写像 $R \mapsto \dim R$ に依る $\mathcal{O}_s$ の像 $\dim \mathcal{O}_s$ については $\aleph_0 := \operatorname{card} \mathbb{N}$（$\mathbb{N}$: 自然数全体）として $\mathbb{N} \subset \dim \mathcal{O}_s \subset [1, \aleph_0] := \mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}$ が識られていた (cf. [2], [3], [6]) が果たして $\aleph_0 \in \dim \mathcal{O}_s$ か否かは不明であった. 本講演の目的は

$$\dim \mathcal{O}_s = [1, \aleph_0] \tag{4}$$

を系として含む一定理を報告する事にある.

植林地と呼ぶ Riemann 面 P と樹木と呼ぶ Riemann 面 T_n の列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 及び T_n の根と呼ぶ弧 $\sigma_n \subset P \cap T_n$ の列 $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$（但し $\sigma_n \cap \sigma_m = \emptyset$ $(n \neq m)$ と仮定する）に依り以下の様に構成された Riemann 面 $R := \langle P, (T_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle$ を植林面と呼ぶことにしたい：

$$R := \cdots \left(\left((P \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n) \uplus_{\sigma_1} (T_1 \setminus \sigma_1) \right) \uplus_{\sigma_2} (T_2 \setminus \sigma_2) \right) \cdots . \tag{5}$$

$(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\overline{V}_n \cap \overline{V}_m = \emptyset$ $(n \neq m)$ となる P の ζ_n 中心の座標円板 V_n の列で $\zeta_n \in \sigma_n \subset (1/2)V_n$ $(n \in \mathbb{N})$ となるものを採る. 参照点 $o \in P \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}} \overline{V}_n$ を固定する時

$HP\left(P \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}}(1/2)\overline{V}_n\right)^+$ に関する $\{o\}\cup\partial V_n$ の Harnack 定数を M_n と記し次の条件

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(4M_n+1)\frac{\sup_{P\setminus V_n} G(\cdot,\zeta_n;P)}{\inf_{\sigma_n} G(\cdot,\zeta_n;P)} < 1 \tag{6}$$

を考える, 但し $G(\cdot,\zeta_n;P)$ は P 上の極 ζ_n の Green 関数とする. この時次の結果が得られる ([4]):

定理： 植林地 $P \in \mathcal{O}_s$ かつ樹木 $T_n \in \mathcal{O}_s$ $(n \in \mathbb{N})$ のとき, 根列 $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を (6) を満たす程短くとるならば (5) で定めた植林面 $R \in \mathcal{O}_s$ となる.

参 照 文 献

[1] L. Ahlfors and L. Sario: *Riemann Surfaces*, Princeton Mathematical Series, No **26**, Princeton Univ. Press, 1960.

[2] C. Constantinescu und A. Cornea: *Ideale Ränder Riemannscher Flächen*, Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete, Band **32**, Springer-Verlag, 1963.

[3] M. Masaoka and S. Segawa: *On several classes of harmonic functions on a hyperbolic Riemann surfaces*, Complex Analysis and its Applications, Proceeding of the 15th ICFIDCAA Osaka 2007, OCAMI Studies, **2**(2008), 289-294.

[4] M. Nakai and S. Segawa: *Types of afforested surfaces*, Kodai Math. J., to appear.

[5] M. Parreau: *Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et la classification des surfaces de Riemann*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **3**(1951/1952), 103-197.

[6] L. Sario and M. Nakai: *Classification Theory of Riemann Surfaces*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band **164**, Springer-Verlag, 1970.

11 Periodicity of elliptic modular transformations on asymptotic Teichmüller spaces

Ege Fujikawa (Chiba University)

The Teichmüller space $T(R)$ of a Riemann surface R is the set of all Teichmüller equivalence classes of quasiconformal homeomorphisms of R which is endowed with a complex Banach manifold structure. A quasiconformal mapping class is the homotopy equivalence class $[g]$ of quasiconformal automorphisms g of a Riemann surface, and the quasiconformal mapping class group $\mathrm{MCG}(R)$ of R is the group of all quasiconformal mapping classes of R. Every element $[g] \in \mathrm{MCG}(R)$ induces a biholomorphic automorphism $[g]_*$ of $T(R)$ by $[f] \mapsto [f \circ g^{-1}]$, which is also isometric with respect to the Teichmüller distance. Let $\mathrm{Aut}(T(R))$ be the group of all biholomorphic automorphisms of $T(R)$. Then we have a homomorphism $\iota_T : \mathrm{MCG}(R) \to \mathrm{Aut}(T(R))$ given by $[g] \mapsto [g]_*$, and we define the Teichmüller modular group of R by $\mathrm{Mod}(R) = \iota_T(\mathrm{MCG}(R))$. It is known that the homomorphism ι_T is bijective for all Riemann surfaces R of non-exceptional type, namely, $\mathrm{Mod}(R) = \mathrm{Aut}(T(R))$.

Definition. We say that a non-trivial Teichmüller modular transformation of $\mathrm{Mod}(R)$ is *elliptic* if it has a fixed point in $T(R)$.

Every elliptic element $\gamma \in \mathrm{Mod}(R)$ is realized as a conformal automorphism of the Riemann surface corresponding to the fixed point of γ. We investigate a relationship between elliptic elements and periodic elements of $\mathrm{Mod}(R)$.

In the case where R is analytically finite, $\gamma \in \mathrm{Mod}(R)$ is elliptic if and only if it is periodic. Indeed, every conformal automorphism of an analytically finite Riemann surface is of finite order. This means that, every elliptic element is periodic. Conversely, a solution of Nielsen realization problem implies that a non-trivial periodic element is elliptic.

In the case where R is analytically infinite, an elliptic element of $\mathrm{Mod}(R)$ can be of infinite order. However, an elliptic element of $\mathrm{Mod}(R)$ induced by a conformal automorphism fixing a simple closed geodesic is periodic. This follows from the fact that the group of conformal automorphisms of R acts properly discontinuously on R. On the other hand, every periodic element is elliptic. In fact, if the orbit $\{\gamma^n(p)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ of any point $p \in T(R)$ is bounded in $T(R)$, then it is elliptic.

In this talk, we consider a corresponding result to the asymptotic Teichmüller space. The asymptotic Teichmüller space $AT(R)$ is the set of all asymptotic equivalence classes of quasiconformal homeomorphisms of R and this equivalence is defined similarly to Teichmüller equivalence by using asymptotically conformal homeomorphisms instead of conformal ones. Here we say that a quasiconformal homeomorphism f on R is asymptotically conformal if, for every $\epsilon > 0$, there exists a compact subset V of R such that the maximal dilatation $K(f|_{R-V})$ of the restriction of f to $R - V$ is less than $1 + \epsilon$.

Every element $[g] \in \mathrm{MCG}(R)$ induces a biholomorphic automorphism $[g]_{**}$ of $AT(R)$ by $[[f]] \mapsto [[f \circ g^{-1}]]$, which is also isometric with respect to the asymptotic Teichmüller distance. Let $\mathrm{Aut}(AT(R))$ be the group of all biholomorphic automorphisms of $AT(R)$. Then we have a homomorphism $\iota_{AT} : \mathrm{MCG}(R) \to \mathrm{Aut}(AT(R))$ given by $[g] \mapsto [g]_{**}$, and we define the asymptotic Teichmüller modular group of R by $\mathrm{Mod}_{AT}(R) = \iota_{AT}(\mathrm{MCG}(R))$. It is different from the case of the representation ι_T that the homomorphism ι_{AT} is not injective, namely, $\mathrm{Ker}\,\iota_{AT} \neq \{[id]\}$ unless R is either the unit disc or the once-punctured disc.

Definition. We say that a non-trivial asymptotic Teichmüller modular transformation of $\mathrm{Mod}_{AT}(R)$ is *elliptic* if it has a fixed point in $AT(R)$.

Every elliptic element $\hat{\gamma} \in \mathrm{Mod}_{AT}(R)$ is realized as an asymptotically conformal automorphism of the Riemann surface corresponding to the fixed point of $\hat{\gamma}$.

Theorem. *Let R be a Riemann surface satisfying the bounded geometry condition, $[g]_{**} \in \mathrm{Mod}_{AT}(R)$ an elliptic element, and $\ell > 0$ a constant. Suppose that, in any topologically infinite neighborhood of each topological end of R, there exists a simple closed geodesic c with $\ell(c) \leq \ell$ such that $g(c)$ is freely homotopic to c. Then $[g]_{**}$ is periodic.*

On the other hand, we do not know whether a periodic element of $\mathrm{Mod}_{AT}(R)$ is elliptic or not.

12 Holomorphic maps between compact Riemann surfaces and Lefschetz trace formula

Masaharu Tanabe (Tokyo Institute of Technology)

We consider two distinct holomorphic maps $f_i : X \to Y$ of degree d_i $(i = 1, 2)$ between compact Riemann surfaces of genera g and $\gamma > 1$, respectively. Y. Fuertes and G. González-Diez (see [1]) gave a sharp bound for the number of coincidences of two holomorphic maps. Their results generarize well known fact about the number of fixed points of automorphisms. Their key tool was Lefschetz trace formula.

The Lefschetz number of two maps $f_i : X \to Y$ $(i = 1, 2)$ is defined to be

$$L(f_1, f_2) = \int_X (f_1 \times f_2)^* \eta_\Delta,$$

where η_Δ is the Poincaré dual of the diagonal submanifold $\Delta \subset X \times X$. In our sutuation, Lefschetz trace formula is written as

$$L(f_1, f_2) = d_1 - \operatorname{trace} f_1^* \circ f_{2*}|_{H^1(X)} + d_2.$$

They use matrix representations of $f_1^* \circ f_{2*}$ and gave the bound.

On the other hand, it is known that the trace $f_1^* \circ f_{2*}$ gives an inner-product on the space of homomorphisms between the Jacobians $\mathrm{J}(X)$ and $\mathrm{J}(Y)$. Using Lefschetz trace formula and the fact that trace $f_1^* \circ f_{2*}$ is an inner-product, we give some theorems concerning the number of coincidences of two holomorphic maps.

References

[1] Y. Fuertes and G. González-Diez, On the number of coincidences of morphisms between closed Riemann surfaces, *Publ. Mat.* **37**, (1993), 339-353.

13

Modulus of continuityに関するHardy-Littlewood型の定理とその応用について

東工大大学院・理工学研究科　志賀　啓成

1 A Hardy-Littlewood theorem

Let f be a continuous function on the unit circle. The modulus of continuity of f is the function

$$\omega(t)=\sup_{|\theta_1-\theta_2|\leq t}|f(e^{i\theta_1})-f(e^{i\theta_2})|.$$

In 1932, Hardy and Littlewood [2] shows the following theorem called a Hardy-Littlewood theorem(cf. [1] p. 74).

Theorem 1.1 *Let f be a holomorphic function on the unit disk Δ and continuous on $\overline{\Delta}=\Delta\cup\partial\Delta$. Suppose that there exists $\alpha\in(0,1]$ such that*

$$|f(e^{i\theta_1})-f(e^{i\theta_2})|=O(|\theta_1-\theta_2|^{\alpha}).$$

Then

$$|f'(z)|=O((1-|z|)^{\alpha-1})$$

holds as $|z|\to 1$.

In this talk, we shall show the following theorem of Hardy-Littlewood type for holomorphic functions whose modulus of continuity is $|\log|\theta||^{-\alpha}$.

Theorem 1.2 *Let f be a holomorphic function on the unit disk Δ and continuous on $\overline{\Delta}=\Delta\cup\partial\Delta$. Suppose that there exists $\alpha>0$ such that*

$$\left|f(e^{i\theta_1})-f(e^{i\theta_2})\right|=O(|\log|\theta_1-\theta_2||^{-\alpha}),\tag{1}$$

if $|\theta_1-\theta_2|<\delta$ for some $\delta\in(0,1)$. Then,

$$|f'(z)|=O((1-|z|)^{-1}|\log(1-|z|)|^{-\alpha})\tag{2}$$

holds as $|z|\to 1$.

2 Conformal mappings and Kleinian groups

Let G be a finitely generated non-elementary Kleinian group. The group G is said to have *bounded geometry* if there exists a constant $\varepsilon > 0$ such that the injectivity radius with respect to the hyperbolic metric at any point in $\mathbb{H}^3/G$ is greater than ε. We also assume that G has a simply connected invariant component D and denote by φ a Riemann mapping from the unit disk Δ onto D as before. From a theorem in [4] and Theorem 1.1, we immediately obtain a theorem which is shown in [7] by a different method;

Theorem 2.3 *Let G, D and φ be the same ones as above. Then,*

$$|\varphi'(z)| = O\left((1-|z|)^{-1}|\log(1-|z|)|^{-\alpha}\right) \tag{3}$$

holds as $|z| \to 1$.

時間が許せば，さらにいくつかの結果に言及する.

References

[1] P. L. Duren, *Theory of H^p spaces*, Academic Press, New York San Francisco London 1970.

[2] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some properties of fractional integrals II, Math. Z. **34** (1932), 403–439.

[3] Y. Minsky, On rigidity, limit set, and end invariants of hyperbolic 3-manifolds, J. Amer. Math. Soc. **7** (1994), 539–588.

[4] H. Miyachi, Moduli of continuity of Cannon-Thurston maps, in "Spaces of Kleinian groups ",Lond. Math. Soc. Lec. Notes **329** 121–149, 2005.

[5] C. A. Nolder and D. M. Oberlin, Moduli of continuity and a Hardy-Littlewood theorem, in "Complex Analysis Joensuu 1987 ", Lecture Notes in Math. 1357, Springer 265–272, 1989.

[6] C. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps*, Springer-Verlag Berlin 1992.

[7] H. Shiga, Riemann mappings of invariant components of Kleinian groups, preprint.

特別講演

穴あきトーラスの擬フックス空間について

糸 健太郎 （名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

本講演ではクライン群の変形空間について考察する．特に穴あきトーラスの擬フックス空間の自己接触の様子を詳しく調べる．さらにこの空間の境界が局所連結ではないという Bromberg の結果を概説する．

1 一般のクライン群の変形空間

1.1 クライン群

リーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ の自己双正則写像は一次分数変換（向きを保つメビウス写像）$f(z) = (az+b)/(cz+d)$ の形をしており，その全体が成す群はリー群 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\{\pm I\}$ と同一視される．メビウス写像は直線と円の反転の合成として得られるので，その作用は自然に上半空間 $\mathbf{H}^3 = \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 : t > 0\} \subset \mathbb{R}^3$ の向きを保つ同相写像に拡張される．さらに $\mathbf{H}^3$ に距離 $ds^2 = (dx^2 + dy^2 + dt^2)/t^2$ を入れて 3 次元双曲空間とみなしたとき，上で拡張された写像は $\mathbf{H}^3$ の等距写像である．このことから $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ は $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^3)$ とも同一視される．

リー群 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ の離散部分群をクライン群と呼ぶ．以下でクライン群は有限生成かつ有限位数の元を含まないものと仮定する．クライン群 Γ は $\mathbf{H}^3$ に真性不連続に作用し，商空間 $\mathbf{H}^3/\Gamma$ は双曲多様体となる．一方で $\mathbf{H}^3$ の理想境界 $\hat{\mathbb{C}}$ は，Γ が真性不連続に作用する不連続領域 $\Omega(\Gamma)$ と，その補集合で Γ の作用がカオス的な極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ に分割される．(最近の Ahlfors 予想の解決より有限生成クライン群 Γ に対して $\Lambda(\Gamma)$ は $\hat{\mathbb{C}}$ に一致するかルベーグ測度 0 である.）クライン群 Γ は，$\Omega(\Gamma) = \emptyset$ ならば Mostow の剛性を持つので，変形空間を考察する立場から，以下ではもっぱら $\Omega(\Gamma) \neq \emptyset$ の場合を考える．この場合 $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ はリーマン面の構造をもつ．さらに，Ahlfors の有限性定理より $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ は高々有限個の連結成分を持ち，各連結成分は有限型である．

1.2 クライン群の変形空間

クライン群の変形空間は，その内部は擬等角変形空間としてよく理解されているが，その境界における現象は複雑で未だ分からないことが多い．ここでは複素力学系におけるマンデルブロー集合とジュリア集合のように，変形空間の境界の様子とクライン群の極限集合の様子に何かしらの関連や類似性が見られるのだろうと期待される．

まず，クライン群の変形空間を定義する．クライン群 Γ の表現空間 $\mathcal{R}(\Gamma)$ を，表現 $\rho : \Gamma \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ で parabolic を parabolic に写すものの共役類 $[\rho]$ の空間とし

て定義し，その空間に各点収束位相の商位相を入れる．このとき Γ の変形空間は $\mathcal{R}(\Gamma)$ の部分集合として

$$\mathcal{D}(\Gamma) := \{[\rho] \in \mathcal{R}(\Gamma) : \rho \text{ is discrete, faithful}\}$$

で定義される．このとき $\mathcal{D}(\Gamma)$ は $\mathcal{R}(\Gamma)$ の閉集合となることが知られている．

$\mathcal{D}(\Gamma)$ の内点集合 $\mathring{\mathcal{D}}(\Gamma)$ は一般に連結とは限らないが，$\mathring{\mathcal{D}}(\Gamma)$ の $[id]$ を含む連結成分は Γ の擬等角変形空間と一致する．さらに $\Omega(\Gamma)/\Gamma = S_1 \cup \cdots \cup S_k$ と書けばこの連結空間はタイヒミュラー空間の直積 $\mathcal{T}(S_1) \times \cdots \times \mathcal{T}(S_k)$ を普遍被覆に持つ．特に各 S_j $(1 \leq j \leq k)$ の基本群 $\pi_1(S_j)$ が Γ に単射に埋め込まれる (boundary incompressible) 場合，この被覆写像は同相になる．boundary-incomplessible である典型例が擬フックス群で，そうでない典型例がショットキー群である．一方で，$[\rho] \in \mathring{\mathcal{D}}(\Gamma)$ が $[id]$ とは異なる連結成分に含まれる場合，$\mathbf{H}^3/\rho(\Gamma)$ は $\mathbf{H}^3/\Gamma$ とホモトピー同値であるが同相ではない多様体となっている．

次に $\mathcal{D}(\Gamma)$ の境界まで含めた話題に移ると，近年になって $\mathring{\mathcal{D}}(\Gamma)$ は $\mathcal{D}(\Gamma)$ の中に稠密に存在するであろうという Bers-Sullivan-Thurston の稠密予想が肯定的に解決された．すなわち $\mathcal{D}(\Gamma) = \overline{\mathring{\mathcal{D}}(\Gamma)}$ が成り立つ．このことは，eniding lamination 予想（クライン群 Γ は $\mathbf{H}^3/\Gamma$ のエンドの潰れる場所を指定した ending lamination と残った理想境界の等角構造を指定すれば一意的に定まるであろうという予想）の解決とも関係する．言い添えると，有限生成クライン群 Γ の商多様体 $\mathbf{H}^3/\Gamma$ はあるコンパクト多様体の内部に同相であろうという Marden 予想も解決した．このことが上述の Ahlfors 予想の解決を導く．ここ数年のこれら大予想の解決に関する事柄は私の手に余るので然るべき所（例えば [Ca]）を参照されたい．

1.3 変形空間の接触 (bumping) と自己接触 (self-bumping)

さて，一般に $\mathring{\mathcal{D}}(\Gamma)$ はいくつかの連結成分を持ち，それら連結成分は $\mathbf{H}^3/\Gamma$ の位相的な情報から定まる集合と 1 対 1 対応するのであった．$\mathring{\mathcal{D}}(\Gamma)$ の異なる連結成分が接触する現象を初めて見出したのは Anderson-Canary [AC] である．その後，Anderson-Canary-McCullough は（boundary incomolessible な場合に）$\mathring{\mathcal{D}}(\Gamma)$ のどの 2 つの成分が接触するかを完全に特徴付けた．それによれば 1 つの成分に接触する成分は高々有限個なので，$\mathring{\mathcal{D}}(\Gamma)$ が無限個の連結成分を持つ場合は $\mathcal{D}(\Gamma)$ 自体も無限個の連結成分を持つ．

次に $\mathring{\mathcal{D}}(\Gamma)$ の連結成分の自分自身との接触について述べる．McMullen [Mc] は Γ が擬フックス群の場合に Anderson-Canary の手法を適用して $\mathring{\mathcal{D}}(\Gamma)$ が自己接触することを示した．すなわち，ある境界の点 $[\rho] \in \partial\mathcal{D}(\Gamma)$ の十分小さな任意の近傍 V に対して $\mathring{\mathcal{D}}(\Gamma) \cap V$ は非連結になる．ここで，クライン群 Γ が擬フックス群であるとは，極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ が Jordan 曲線で，その補集合 $\Omega(\Gamma) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Lambda(\Gamma)$ の成分を入れ替える元を持たないときをいう．このとき，$(\mathbf{H}^3 \cup \Omega(\Gamma))/\Gamma$ はある曲面 S と閉区間 $[0,1]$ の直積と同相である．さらに $\mathring{\mathcal{D}}(\Gamma)$ は連結であり，リーマン面 $\Omega(\Gamma)/\Gamma$

のタイヒミュラー空間$\mathcal{T}(S) \times \mathcal{T}(S)$と同一視される．このとき$\mathring{\mathcal{D}}(\Gamma)$は$\Gamma$と同型な擬フック群より成るので擬フックス空間という．

その後，Bromberg-Holtは，商多様体$\mathbf{H}^3/\Gamma$がある種の円環の埋め込みを持つという非常に一般的な条件を満たすクライン群Γに対して，$\mathring{\mathcal{D}}(\Gamma)$の各連結成分は自己接触することを示した．クライン群の接触・自己接触のより詳しいことはCamnaryの解説[Ca]を参照されたい．

2 穴あきトーラス群

以上より$\mathring{\mathcal{D}}(\Gamma)$が連結，単連結である擬フックス群$\Gamma$の場合を考察するのが基本的である．以下では擬フックス群の中でも最もシンプルな，1点穴あきトーラスの基本群と同型な場合を考察する．途中の話題は一般の擬フックス群に対して成り立つ事実も多いが，いちいち断ることはしなかった．

Sを1点穴あきトーラスとする．タイヒミュラー空間$\mathcal{T}(S)$は，Sと同相なリーマン面Xと同相写像$f : S \to X$の組(f, X)のホモトピー同値類の集合であった．$\pi_1(S)$の生成元α, βを1つ固定するとき，$\mathcal{T} = \mathcal{T}(S)$は上半平面$\mathbf{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$と自然に同一視される．このとき$\mathcal{T}(S)$のサーストン・コンパクト化$\overline{\mathcal{T}}(S)$は$\mathbf{H}$の$\hat{\mathbb{C}}$における閉包$\overline{\mathbf{H}}$に対応し，サーストン境界$\partial\mathcal{T}(S) = \mathcal{PL}(S)$が$\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$に，$S$の単純閉曲線の集合$\mathcal{S}(S)$が有理数集合$\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$に対応する．特に，ホモトピー類$[\alpha], [\beta], [\alpha^{-1}\beta]$が$\infty, 0, 1 \in \hat{\mathbb{Q}}$に対応する．

ここで記号を復習する．表現空間$\mathcal{R}(S)$とは中への準同型$\rho : \pi_1(S) = \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$で$\rho([\alpha, \beta])$がparabolicとなるものの共役類全体の空間とし，その中で変形空間を

$$\mathcal{D}(S) := \{[\rho] \in \mathcal{R}(S) \,:\, \rho \text{ is faithful and discrete}\}$$

と定義する．各$[\rho] \in \mathcal{D}(S)$に商多様体$\mathbf{H}^3/\rho(\Gamma)$のend invariantの対$(x, y) \in \overline{\mathbf{H}} \times \overline{\mathbf{H}}$を対応させる写像$\mathcal{E}$は，$\partial\mathbf{H} \times \partial\mathbf{H}$の対角成分$\Delta$の値は取らず，$\mathring{\mathcal{D}}(S)$に制限したものは$\mathbf{H} \times \mathbf{H}$への同相写像である．次の定理は穴あきトーラスの場合のending lamination予想の解決を含んでいる．

Theorem 2.1 (Minsky [Mi]). 写像

$$\mathcal{E} : \mathcal{D}(S) \to (\overline{\mathbf{H}} \times \overline{\mathbf{H}}) \setminus \Delta$$

は全単射であり逆写像$\mathcal{E}^{-1}$は連続である．

以下では$Q := \mathcal{E}^{-1}$と書く．すなわちend invariant $(x, y) \in \overline{\mathbf{H}} \times \overline{\mathbf{H}} \setminus \Delta$を持つ多様体を$Q(x, y) \in \mathcal{D}(S)$と表す．ここで，注目すべき点は$\mathcal{E}^{-1}$は連続だが$\mathcal{E}$自身は連続ではないことである．すなわち，$\mathcal{D}(S)$の収束列$[\rho_n] \to [\rho_\infty]$で，$\mathcal{E}([\rho_n])$が$(\overline{\mathbf{H}} \times \overline{\mathbf{H}}) \setminus \Delta$において収束しない（$\overline{\mathbf{H}} \times \overline{\mathbf{H}}$の中で$\Delta$の点に収束する）ものが存在す

る．このことは $\mathcal{D}(S)$ が自己接触するという現象の言い換えでもある．ここで，上述の列は次のように具体的に与えられる．$\mathbf{H} \cong \mathcal{T}(S)$ の点 x, y と単純閉曲線 $c \in \hat{\mathbb{Q}}$ を固定し，c に関する Dehen twist τ を用いて $(\tau^n x, \tau^{2n} y) \in (\overline{\mathbf{H}} \times \overline{\mathbf{H}}) \setminus \Delta$ という点列を考えると，これは $(c, c) \in \Delta$ に収束するが，一方で $Q(\tau^n x, \tau^{2n} y)$ は $\mathcal{D}(S)$ の中で収束するのである．

この列 $Q(\tau^n x, \tau^{2n} y)$ の構成と収束を，より幾何的に説明する．多様体 $Q(x, y) \cong S \times (0,1)$ から曲線 $c \times \{1/2\}$ を取り除いた集合には，理想境界の複素構造 x, y を保ったままで完備双曲計量が入り，その多様体を $\hat{Q}(x, y)$ と書く．このとき $c \times \{1/2\}$ の近傍は rank-2 cusp の近傍に対応する．また，連続写像 $\varphi : S \to \hat{Q}(x, y)$ を，像が $c \times \{1/2\}$ に 1 回巻き付き，$S \times (0,1)$ の中では恒等写像 $S \to S \times \{0\}$ にホモトピックとなるように定める（図 1 参照）．このとき φ によって誘導される準同型 $\varphi_* : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ は $\partial\mathcal{D}(S)$ の元に対応する．この $\varphi : S \to \hat{Q}(x, y)$ に $\hat{Q}(x, y)$ の rank-2 cusp における $(1, n)$-Dehn filling を合成することで得られる $\mathcal{D}(S)$ の点列が $Q(\tau^n x, \tau^{2n} y)$ であり，この点列は $[\varphi_*] \in \partial\mathcal{D}(S)$ に代数収束する．φ の巻き付く回数を変えれば，任意の整数 p に対して $Q(\tau^{pn} x, \tau^{(p+1)n} y)$ も収束列であることが分かる．

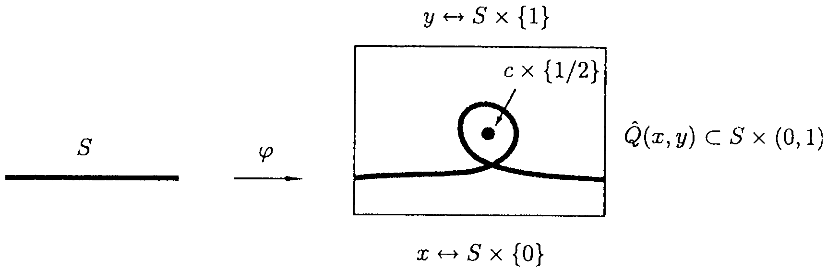


図 1: $\varphi : S \to \hat{Q}(x, y)$ の模式図

逆に，(x_n, y_n) が Δ の点に収束するときに $Q(x_n, y_n)$ が収束するのは，本質的に Anderson-Canary の構成法によるものしかないということを示したのが私の結果である [It]．このことを次の節で説明する．

3 収束・発散条件

ここでは，点列 $(x_n, y_n) \in (\overline{\mathbf{H}} \times \overline{\mathbf{H}}) \setminus \Delta$ がある Δ の点に収束するとき，点列 $Q(x_n, y_n) \in \mathcal{D}(S)$ の収束・発散を特徴付ける．この場合の収束列はエキゾチックな収束列と呼ばれる．まず，次の発散定理は，より一般の形で以前から知られていた．

Theorem 3.1 (Ohshika [Oh1])．ある $x \in \hat{\mathbb{R}} \setminus \hat{\mathbb{Q}}$ に対して $(x_n, y_n) \to (x, x) \in \Delta$ とする．このとき $Q(x_n, y_n)$ は発散する．

次に，ある $c \in \hat{\mathbb{Q}}$ に対して $(x_n, y_n) \to (c, c) \in \Delta$ の場合を考えよう．この場合，点列 $x_n \in \overline{\mathbf{H}} = \overline{T}(S)$ の $c \in \hat{\mathbb{Q}}$ への収束を，次の２種類に分類することが本質的である．すなわち，リーマン面 x_n における曲線 c の双曲的長さを $l_{x_n}(c)$ と表すとき，$l_{x_n}(c) \to 0$ の場合と $l_{x_n}(c) > \exists \epsilon > 0$ の場合である．前者は c で接する $\mathbf{H}$ の任意の horoball に x_n が有限個を除いて含まれることと同値であり，後者は c で接する $\mathbf{H}$ のある horoball にどんな x_n も含まれないことと同値である．

Theorem 3.2 ([It]). ある $c \in \hat{\mathbb{Q}}$ に対して $(x_n, y_n) \to (c, c) \in \Delta$ とする．このとき，$l_{x_n}(c) \to 0$ または $l_{y_n}(c) \to 0$ ならば $Q(x_n, y_n)$ は発散する．

従って，$(x_n, y_n) \to (c, c) \in \Delta$ の状況で $Q(x_n, y_n)$ が収束するのは，$l_{x_n}(c)$, $l_{y_n}(c)$ が共にある正数で下から抑えられるときである．次の定理は，この場合に $Q(x_n, y_n)$ が収束するのは，収束 $x_n \to c$, $y_n \to c$ の速度がある整数 p を用いて $p : p+1$ となるとき，かつそのときに限ることを意味する．

Theorem 3.3 ([It]). ある $c \in \hat{\mathbb{Q}}$ に対して $(x_n, y_n) \to (c, c) \in \Delta$ とし，ある $\epsilon > 0$ が存在して，任意の n に対して $l_{x_n}(c)$, $l_{y_n}(c) \geq \epsilon$ が成り立つとする．必要なら部分列を取ることで，ある整数列 k_n, l_n が存在して $\tau^{k_n} x_n$, $\tau^{l_n} y_n$ は $\overline{\mathbf{H}} \setminus \{c\}$ の中で収束すると仮定できる.（ここで τ は c に関する *Dehn twist* である.）このとき $Q(x_n, y_n)$ が収束列である必要十分条件はある整数 p が存在して

$$(p+1)\, k_n - p\, l_n \equiv const. \quad (n \gg 0)$$

が成り立つことである．

ここでは，上の定理において，なぜ速度の比が $p : p+1$ となるのかを簡単な場合に説明したい．いま $x, y \in \mathbf{H}$ と発散する整数列 $k_n, l_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ を勝手に取り，$[\alpha] = \infty \in \hat{\mathbb{Q}}$ に関する Dehn twist τ を用いて収束列 $(x_n, y_n) := (\tau^{k_n} x, \tau^{l_n} y) \to (\infty, \infty)$ を考える.（定理の k_n, l_n とは符号が異なる．また，Anderson-Canary の例では $k_n = n$, $l_n = 2n$ である.）ここで $\mathcal{D}(S)$ の点列 $Q(x_n, y_n) = Q(\tau^{k_n} x, \tau^{l_n} y)$ が収束すると仮定しよう．このとき，ある整数 p が存在して $m_n := l_n - k_n$ の p 倍が k_n と（定数を除いて）等しいことを見たい．

いま $[\rho_n] = Q(\tau^{k_n} x, \tau^{l_n} y)$, $[\eta_n] = Q(x, \tau^{m_n} y)$ とおく．ここで $[\eta_n] = Q(x, \tau^{m_n} y)$ は代数的に $Q(x, \infty)$, 幾何的に $\hat{Q}(x, y)$ に収束し，$\eta_n(\alpha)$, $\eta_n(\alpha)^{m_n}$ は $\hat{Q}(x, y)$ の rank-2 cusp の生成元 $\delta, \hat{\delta}$ に収束する．ここで仮定から $[\rho_n] = Q(\tau^{k_n} x, \tau^{l_n} y)$ も収束し，$\rho_n(\alpha) = \eta_n(\alpha)$, $\rho_n(\beta) = \eta_n(\alpha)^{k_n} \eta_n(\beta)$ の関係にあることから，$\eta_n(\alpha)^{k_n}$ は収束する．このことから k_n は m_n の整数倍と定数を除いて等しいことがわかる．

なお，この節の穴あきトーラス群の収束・発散の結果の多くは Ohshika [Oh2] により一般の曲面群の場合に拡張されている．

4 ベアス - マスキット・スライス

以下で境界での接触の様子をより詳しく見るため，$\mathcal{D}(S)$ の切り口について準備する．$y \in \overline{\mathbf{H}}$ に対して，$\mathcal{D}(S)$ の複素 1 次元のスライス

$$\mathcal{B}_y := \{Q(x,y) : x \in \overline{\mathbf{H}},\ (x,y) \notin \Delta\}$$

を考える．$y \in \mathbf{H}$ のとき $\mathcal{B}_y$ はベアス・スライスと呼ばれ $\overline{\mathbf{H}}$ と同相，$y \in \hat{\mathbb{Q}} \subset \partial\mathbf{H}$ のとき $\mathcal{B}_y$ はマスキット・スライスと呼ばれ $\overline{\mathbf{H}} \setminus \{y\}$ と同相である．同様に，切る向きを変えたスライス $\mathcal{B}^*_x := \{Q(x,y) : y \in \overline{\mathbf{H}},\ (x,y) \notin \Delta\}$ も考える．

$\mathcal{D}(S)$ において $[\alpha] = \infty \in \hat{\mathbb{Q}}$ が parabolic となる表現の集合 $\mathcal{B}_\infty \cup \mathcal{B}^*_\infty$ は次のような $\mathbb{C}$ への埋め込み（マスキット埋め込み）を持つ．いま $\mu \in \mathbb{C}$ に対して $\rho_\mu : \pi_1(S) = \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ を

$$\rho_\mu(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_\mu(\beta) = i\begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と定める．このとき，$\mu \mapsto [\rho_\mu]$ で定義される写像 $\beta : \mathbb{C} \to \mathcal{R}(S)$ は正則な埋め込みになる．ここで

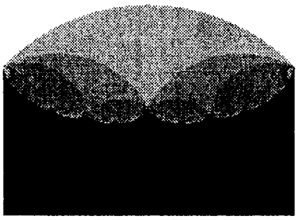
$$\mathcal{M} := \{\mu \in \mathbf{H} : [\rho_\mu] \in \mathcal{D}(S)\}$$

とおくと $\beta(\mathcal{M}) = \mathcal{B}_\infty$ であり，$\mathcal{M}$ の複素共役を $\mathcal{M}^*$ とすると $\beta(\mathcal{M}^*) = \mathcal{B}^*_\infty$ となる．以下では $\mathcal{M}$ のこともマスキット・スライスと呼び，$\mathcal{M} \leftrightarrow \mathcal{B}_\infty \leftrightarrow \overline{\mathbf{H}} \setminus \{\infty\}$ の対応でこれらを同一視する．特に $\mu, \nu \in \mathcal{M} \leftrightarrow\ x, y \in \overline{\mathbf{H}} \setminus \{\infty\}$ の対応のもとで $Q(x,y)$ を $Q(\mu,\nu)$ と書いたりする．さて，マスキット・スライス $\mathcal{M}$ は，そのコンピュータ・グラフィックス（図 2 左）からも見て取れるように，境界はフラクタルである．さらに Miyayachi により $\mathcal{M}$ の $\hat{\mathbb{Q}}$ に対応する境界点はカスプになっていることや，Goodman により $\mathcal{M}$ の境界は無限に渦巻いている（凸集合には程遠い）ことなどが知られている．

ここでマスキット・スライス $\mathcal{B}_\infty \cup \mathcal{B}^*_\infty$ のパラメータ空間 $\mathcal{M} \cup \mathcal{M}^*$ を用いると，収束列 $(x_n, y_n) \to (\infty, \infty) \in \Delta$ に対応するエキゾチック収束列 $Q(x_n, y_n)$ の極限を具体的に書き表すことが出来る．いま収束列 $(x_n, y_n) \to (\infty, \infty)$ が Theorem 3.3 の仮定を満たすとき（すなわち収束の速度の比が $p : p+1$ のとき）$Q(x_n, y_n)$ の極限はある $\mu, \nu \in \mathcal{M}$ を用いて $[\rho_\lambda]$, $\lambda = (p+1)\mu - p\overline{\nu}$ と書ける．実際 $[\rho_\lambda]$ は，end-invariant (μ, ν) を持つ多様体 $\hat{Q}(\mu,\nu) \cong S \times (0,1) \setminus [\alpha] \times \{1/2\}$ への p 回巻き付き写像から誘導されるのである．そこで，以下で用いるために，整数 p に対して $\mathcal{M} \cup \mathcal{M}^*$ の部分集合を

$$\mathcal{M}(p) := \{(p+1)\mu - p\overline{\nu} : \mu, \nu \in \mathcal{M}\}$$

で定義する．$p \geq 0$ のとき $\mathcal{M}(p) \subset \mathcal{M}$ であることに注意する．



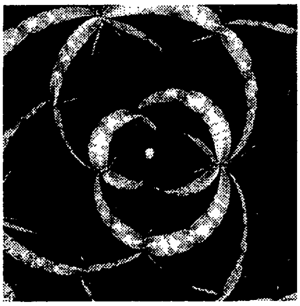


図 2: (左) マスキット・スライス $\mathcal{M}$ の一部. (右) (5 節参照) あるリーマン面 $x \in \mathcal{T}(S)$ の正則 2 次微分の空間 $B_2(x)$ の一部. 白い部分が hol による $\mathcal{D}(S)$ の引き戻しに対応し, 特に中心の小さな円はベアス・スライスに対応する. どちらの絵も山下氏による.

5 射影構造との関係

リーマン面 $x \in \mathcal{T}(S)$ 上の有界な正則 2 次微分の空間 $B_2(x) \cong \mathbb{C}$ は (シュワルツ微分を介して) x 上の射影構造の空間と同一視される. ここで x 上の射影構造とは, チャートが $\hat{\mathbb{C}}$ への正則写像であり, それらの張り合わせ写像が $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ の制限となるものである. これらを束ねた $\mathcal{T}(S)$ 上のベクトル束 $\mathcal{P}(S) := \bigsqcup_{x \in \mathcal{T}(S)} B_2(x)$ は S 上の射影構造のタイヒミュラー空間とみなせる. さらに, $\mathcal{P}(S)$ の各元にそのホロノミー表現を対応させる写像

$$hol : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{R}(S)$$

は局所同相であることが Hejhal によって知られている. 従って $\mathcal{D}(S)$ の自己接触の様子を $\mathcal{P}(S)$ に持ち上げて観察することが有効である. 実際 McMullen が $\mathcal{D}(S)$ の自己接触を示したのもこの持ち上げを用いている. (その後 Bromberg-Holt により, 一般のクライン群に適用可能な射影構造を用いない証明が得られている.) 離散ホロノミーを持つ射影構造は, 展開写像が単射のときスタンダード, そうでないときエキゾチックと呼ぶことにすると, 写像 hol による $\mathring{\mathcal{D}}(S)$ の逆像 $\mathcal{Q}(S) := hol^{-1}(\mathring{\mathcal{D}}(S))$ のエキゾチックな連結成分たちは重み付き単純閉曲線の集合 $\mathbb{N} \times \hat{\mathbb{Q}}$ と 1 対 1 対応にある (Goldman). ここでスタンダードな成分 $\mathcal{Q}_0$ を単純閉曲線 $c \in \hat{\mathbb{Q}}$ に沿って p 回 2π-graft した連結成分を $\mathcal{Q}_{pc}$ と書くとき, $c \times \{1/2\}$ での p 回巻きつき写像から得られる $\mathcal{D}(S)$ の自己接触は, 射影構造空間においては

$$\overline{\mathcal{Q}_0} \cap \overline{\mathcal{Q}_{pc}} = \mathcal{B}_c(p)$$

と書き直される. ここで $\mathcal{B}_c(p)$ はマスキット・スライス $\mathcal{B}_c$ の $\mathcal{M}(p) \subset \mathcal{M}$ に対応する部分集合である.

さて, 写像 $hol : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{R}(S)$ の 1 つのファイバー $B_2(x)$ への制限は単射である. 特に $B_2(x)$ のスタンダードな射影構造の集合 $\mathcal{Q}_0 \cap B_2(x)$ はベアス・スライス

$\mathcal{B}_x^*$ の内部に写されるので，$\mathcal{Q}_0 \cap B_2(x) \subset B_2(x)$ を $\mathcal{T}(S)$ のベアス埋め込みという．$B_2(x)$ における hol での $\mathcal{D}(S)$ の引き戻しはベアス埋め込み以外にも無限個の連結成分を持つ．その様子は図2の右側や図3の右側を見よ．このような絵をコンピュータで描かせることが出来るようになったのは Komiri-Sugawa [KS] による．

6 自己接触 (self-bumping)

まず言葉の定義をする．

Definition 6.1. $[\rho] \in \partial\mathcal{D}(S)$ において $\mathcal{D}(S)$ が自己接触する（resp. 局所連結でない）とは，$[\rho]$ のある近傍 U が存在して，$[\rho]$ の任意の近傍 $V \subset U$ に対して $V \cap \mathring{\mathcal{D}}(S)$ が連結でない（resp. $V \cap \mathcal{D}(S)$ が連結でない）ときをいう．

$\mathcal{D}(S) = \overline{\mathring{\mathcal{D}}(S)}$ なので，ある点で $\mathcal{D}(S)$ が局所連結でないならば，その点で $\mathcal{D}(S)$ は自己接触していることに注意する．(実際に局所連結でないことは次節で見る.) 穴あきトーラスの場合，$\mathcal{D}(S)$ の自己接触はエキゾチックな収束列によってのみ引き起こされるので，自己接触が起こる場所は完全に記述できる．いま，$\mathcal{D}(S)$ が自己接触する点 $[\rho] \in \partial\mathcal{D}(S)$ の集合を $\partial^{\mathrm{bump}}\mathcal{D}(S)$ と書くことにすると，

$$\partial^{\mathrm{bump}}\mathcal{D}(S) = \bigsqcup_{c \in \hat{\mathbb{Q}}} (\mathcal{B}_c(1) \sqcup \mathcal{B}_c^*(1))$$

が成り立つ．ここで $\mathcal{B}_c(1)$ とはマスキット・スライス $\mathcal{B}_c$ の $\mathcal{M}(1) \subset \mathcal{M}$ に対応する部分集合である．

7 境界が局所連結でないこと（Bromberg の結果）

ここでは「$\mathcal{D}(S)$ は境界において局所連結でない」という Bromberg [Br] の結果を概説する．上で見たように，$[\rho] \in \partial\mathcal{D}(S)$ において局所連結でないならばその点で自己接触しているので，$[\boldsymbol{\rho}_\lambda] \in \mathcal{B}_\infty$ $(\lambda \in \mathcal{M})$ の近傍での $\mathcal{D}(S)$ の様子を観察すれば十分である．このとき Bromberg が示したことは，$\mathcal{D}(S)$ の $[\boldsymbol{\rho}_\lambda]$ での近傍は，ある領域 $S_\lambda \subset \hat{\mathbb{C}}$ と $\mathbb{C}$ の直積 $S_\lambda \times \mathbb{C}$ の $(\infty, 0)$ での近傍と同相になる，ということである．ここで S_λ はマスキット・スライス $\mathcal{M}, \mathcal{M}^*$ の拡大・縮小と平行移動による重ね合わせで得られる領域で，$\lambda \in \mathcal{M}$ の値によっては $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ に無限個の連結成分が集積している状況にある（図3参照）．従って，このとき $[\boldsymbol{\rho}_\lambda]$ において $\mathcal{D}(S)$ は局所連結でなくなる．以下で，もう少し具体的に見てみよう．

$\lambda \in \mathcal{M}$, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して

$$\begin{aligned} S_\lambda(p) &:= \{w \in \mathbf{H} : \lambda - pw \in \mathcal{M} \text{ and } \lambda - (p+1)w \in \mathcal{M}^*\}, \\ S_\lambda &:= \bigsqcup_{p \in \mathbb{N} \cup \{0\}} S_\lambda(p) \end{aligned}$$

と定め

$$\mathcal{A} := \{(\lambda, w) \in \mathbb{C} \times \hat{\mathbb{C}} : \lambda \in \mathcal{M}, w \in S_\lambda \cup \{\infty\}\}$$

とおく．ここで写像

$$\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{D}\,(S)$$

を $(\lambda, w) \in \mathcal{A}$ に対して $w \in S_\lambda(p)$ であれば $\mu := \lambda - pw \in \mathcal{M}$, $\nu := \lambda - (p+1)w \in \mathcal{M}^*$ とおいて $\Phi(\lambda, w) = Q(\mu, \overline{\nu})$ と定め，$w = \infty$ ならば $\Phi(\lambda, \infty) = Q(\lambda, \infty) = [\rho_\lambda]$ と定める．このとき Bromberg は $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{D}\,(S)$ が (λ, ∞) のある近傍から $[\rho_\lambda]$ のある近傍への同相写像になることを示した．ここで $S_\lambda(p)$ が空集合でなく非連結であるという条件は $\lambda \in \mathcal{M}$ 少し動かしても変わらないので次の主張を得る．

Theorem 7.1 (Bromberg [Br])**.** ある $p \in \mathbb{N}$ に対して

$$S_\lambda(p) = \frac{1}{p}(\lambda + \mathcal{M}^*) \cap \frac{1}{p+1}(\lambda + \mathcal{M})$$

が空集合でなく非連結であれば，$[\rho_\lambda] \in \partial\mathcal{D}(S)$ において $\mathcal{D}(S)$ は局所連結ではない．

ここで $p = 0$ のとき $S_\lambda(0) = \lambda + \mathcal{M}$ であり，これがスタンダード成分に対応する．また，$S_\lambda(p) \neq \emptyset$ となる必要十分条件が $\lambda \in \mathcal{M}(p)$ であることにも注意する．

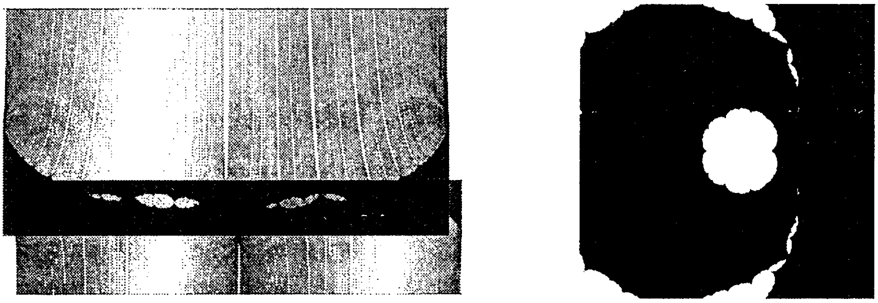


図 3: （左）$\mathcal{M}$ に $\frac{1}{2}\mathcal{M}^*$ の平行移動を重ね合わせた絵．$S_\lambda(1)$ が空集合でなく非連結の状態を表す．(右）ある $x \in \mathcal{T}(S)$ の正則 2 次微分の空間 $B_2(x)$ の一部．白い部分が hol による $\mathcal{D}(S)$ の引き戻しに対応し，特に中心の白い円板がベアス・スライスに対応する．外側からエキゾチックな成分が飛び飛びに近づいているのが分かる．この絵は Dumas による．

参考文献

[AC] J. W. Anderson and R. D. Canary. *Algebraic limits of Kleinian groups which rearrange the pages of a book.* Invent. Math. **126** (1996), no. 2, 205–214.

[Br] K. W. Bromberg. *The space of Kleinian punctured torus groups is not locally connected.* Preprint.

[Ca] R. D. Canary. *Introductory Bumponomics: the topology of deformation spaces of hyperbolic 3-manifolds.* Preprint.

[It] K. Ito. *Divergence and convergence of Kleinian puctured torus groups.* Preprint. `arXiv:math.GT/0701342`

[KT] S. P. Kerckhoff and W. P. Thurston. *Noncontinuity of the action of the modular group at Bers' boundary of Teichmuller space.* Invent. Math. **100** (1990), no. 1, 25–47.

[KS] Y. Komori and T. Sugawa. *Bers embedding of the Teichmuller space of a once-punctured torus.* Conform. Geom. Dyn. 8 (2004), 115–142.

[Mc] C. T. McMullen. *Complex earthquakes and Teichmuller theory.* J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), no. 2, 283–320.

[Mi] Y. N. Minsky. *The classification of punctured-torus groups.* Ann. of Math. (2) **149** (1999), no. 2, 559–626.

[Oh1] K. Ohshika. *Divergent sequences of Kleinian groups.* The Epstein birthday schrift, 419–450, Geom. Topol. Monogr., **1**, Geom. Topol. Publ., Coventry, 1998.

[Oh2] K. Ohshika. *Divergence, exotic convergence and self-bumping in quasi-Fuchsian spaces.* In preparation.

14 Siegel disks with bounded type rotation number

片方 江（島根大学総合理工学部）

1 Preliminaries

Let $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ be a non-constant rational function. The *Fatou set* $F(f)$ of f is defined as

$$F(f) = \left\{z \in \hat{\mathbb{C}} : \text{the family } \{f^n\}_{n=1}^{\infty} \text{ is normal in some open neighborhood of } z\right\}.$$

The *Julia set* $J(f)$ of f is the complement $J(f) = \hat{\mathbb{C}} \setminus F(f)$. The Fatou set $F(f)$ is open and the Julia set $J(f)$ is closed.

Siegel disks

Let $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ be a rational function of degree greater than one and let the origin be a fixed point of f. The power series expansion of f near the origin is that

$$f(z) = \lambda z + az^2 + \cdots .$$

We call the complex number λ the multiplier at the origin. We assume that $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$ and α is an irrational number.

The rational function f is *linearizable* near the origin if there exists a conformal map φ near the origin with $\varphi(0) = 0$ such that $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = R_\alpha(z) = e^{2\pi i\alpha}z$. The rational function f is linearizable near the origin if and only if the origin belongs to the Fatou set. The Fatou component Δ containing the origin is called the *Siegel disk* centered at the origin. The Siegel disk Δ is the largest domain on which f is conformally conjugate to the rotation R_α.

We consider the continued fraction expansion

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

of the irrational number α, where a_0 is an integer and a_n is a positive integer uniquely determined by α for all $n \geq 0$. The irrational number α is of *bounded type* if the sequence $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ is bounded. If the irrational number α is of bounded type, then f is linearizable near the origin.

2 Results

For complex numbers λ and μ with $\lambda\mu \neq 1$ and a positive integer m, we consider two rational functions

$$E_{\lambda,\mu,m}(z) = z\left(\frac{z^m + \lambda}{\mu z^m + 1}\right) \quad \text{and} \quad F_{\lambda,\mu,m}(z) = z\left(\frac{z + \lambda}{\mu z + 1}\right)^m.$$

The two rational functions $E_{\lambda,\mu,m}$ and $F_{\lambda,\mu,m}$ are semiconjugate via $S_m(z) = z^m$, namely

$$F_{\lambda,\mu,m} \circ S_m = S_m \circ E_{\lambda,\mu,m}.$$

Theorem 1. *Let m be a positive integer and let $\mu \in \mathbb{C}$. If an irrational number $\alpha \in [0,1]$ is of bounded type and $e^{2\pi i\alpha}\mu \neq 1$, then the boundary of the Siegel disk of $E_{\lambda,\mu,m}$ centered at the origin is a quasicircle containing its critical point, where $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$.*

Theorem 2. *Let m be a positive integer and let $\mu \in \mathbb{C}$. If an irrational number $\alpha \in [0,1]$ is of bounded type and $e^{2\pi i\alpha}\mu^m \neq 1$, then the boundary of the Siegel disk of $F_{\lambda,\mu,m}$ centered at the origin is a quasicircle containing its critical point, where λ satisfies that $\lambda^m = e^{2\pi i\alpha}$.*

Moreover we obtain the following two corollaries.

Corollary 1. *Let m be a positive integer. If α and β in $[0,1]$ are irrational of bounded type and $e^{2\pi i(\alpha+\beta)} \neq 1$, then the boundary of the Siegel disk of $E_{\lambda,\mu,m}$ centered at the origin and that of the Siegel disk of $E_{\lambda,\mu,m}$ centered at the point at infinity are quasicircles containing its critical point, where $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$ and $\mu = e^{2\pi i\beta}$.*

Corollary 2. *Let m be a positive integer. If α and β in $[0,1]$ are irrational of bounded type and $e^{2\pi i(\alpha+\beta)} \neq 1$, then the boundary of the Siegel disk of $F_{\lambda,\mu,m}$ centered at the origin and that of the Siegel disk of $F_{\lambda,\mu,m}$ centered at the point at infinity are quasicircles containing its critical point, where λ and μ satisfy that $\lambda^m = e^{2\pi i\alpha}$ and $\mu^m = e^{2\pi i\beta}$.*

References

[1] L. Geyer, Siegel discs, Herman rings and the Arnold family, *Trans. Amer. Math. Soc.* 353 (2001), no. 9, 3661–3683.

[2] K. Katagata, Dynamics of rational functions and rational semigroups on the Riemann sphere, *Thesis*, Shimane University, 2008.

[3] J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable*, Vieweg, 2nd edition, 2000.

[4] S. Zakeri, Old and new on quadratic Siegel disks, `http://www.math.qc.edu/~zakeri/papers/papers.html`.

15 On the topology of Julia components of transcendental entire functions with multiply-connected wandering domains

木坂 正史 (京都大学大学院 人間・環境学研究科)

Let f be a transcendental entire function and f^n denote the n-th iterate of f. Recall that *the Fatou set* $F(f)$ and *the Julia set* $J(f)$ of f are defined as follows:

$$\begin{aligned} F(f) &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \{f^n\}_{n=1}^{\infty} \text{ is a normal family in a neighborhood of } z\}, \\ J(f) &:= \mathbb{C} \setminus F(f). \end{aligned}$$

The following is a fundamental result on the connectivity of $J(f)$:

Proposition 1 If every Fatou component is bounded and simply connected, then $J(f) \subset \mathbb{C}$ is connected.

So it follows that if $J(f) \subset \mathbb{C}$ is disconnected, then either
(a) f has an unbounded Fatou component or
(b) f has a multiply-connected Fatou component.
For the case (a), the following holds. Note that an unbounded Fatou component U is always simply connected (see [**Ba1**]) and so we can consider a Riemann map $\varphi : \mathbb{D} \to U$ of U.

Theorem 2 ([K, p.192, Main Theorem]) Suppose there exists an unbounded invariant Fatou component U and let us consider the following conditions:
(A) $\infty \in \partial U$ is accessible in U.
(B) There exist a finite point $q \in \partial U$ with $q \notin P(f)$, $m_0 \in \mathbb{N}$ and a continuous curve $C(t) \subset U$ $(0 \leq t < 1)$ with $C(1) = q$ which satisfies $f^{m_0}(C) \supset C$, where $P(f) = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\mathrm{sing}(f^{-1}))}$ is the post-singular set of f.
(1) If U is either an attractive basin with (A) and (B), or a parabolic basin with (A) and (B), or a Siegel disk with (A), then the set

$$\Theta_\infty := \{e^{i\theta} \mid \varphi(e^{i\theta}) := \lim_{r \nearrow 1} \varphi(re^{i\theta}) = \infty\} \subset \partial\mathbb{D}$$

is dense in $\partial\mathbb{D}$. In particular, $J(f) \subset \mathbb{C}$ is disconnected.
(2) If U is a Baker domain with (B) and $f|U$ is not univalent, then Θ_∞ is dense in $\partial\mathbb{D}$ or at least its closure $\overline{\Theta_\infty}$ contains a certain perfect set in $\partial\mathbb{D}$. In particular, $J(f) \subset \mathbb{C}$ is disconnected.

Next result is a generalization of the above result:

Theorem 3 [BD, p.439, Theorem 1.1, 1.2, Corollary 1.3] Theorem 2 holds without the assumption (B).

On the other hand, $J(f) \subset \mathbb{C}$ can be connected nevertheless f has an unbounded Fatou component. For example,

$$f(z) = 2 - \log 2 + 2z - e^z$$

has a Baker domain but $J(f)$ is connected ([**K**, p.194, Theorem 4]).
For the case (b), it is known that if f has a multiply-connected Fatou component U, then U is a wandering domain and bounded (see, [**Ba2**, Theorem 3.1]) and therefore $J(f) \subset \mathbb{C}$

is always disconnected. Furthermore $J(f) \cup \{\infty\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ is also disconnected and actually this is the only case where $J(f) \cup \{\infty\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ can be disconnected as follows:

Proposition 4 ([K, p.191, Theorem 1]) $J(f) \cup \{\infty\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ is disconnected if and only if f has a multiply-connected wandering domain.

In what follows, we will concentrate on the case (b), that is, the case where f has a multiply-connected wandering domain U and investigate some properties of connected components of the Julia set, which we call *Julia components.* We note the following fact (see, [**Ba2**, p.565, Theorem 3.1]):

Proposition 5 If U is a multiply-connected wandering domain, then $f^n|U \to \infty$.

Definition 6 (1) We call a connected component of $J(f)$ a *Julia component.*

(2) $z \in J(f)$ is called a *buried point* if z satisfies $z \notin \partial U$ for any Fatou component U.

(3) We call the set

$$J_0(f) := \{z \in J(f) \mid z \text{ is a buried point}\}$$

the *residual Julia set* of f.

(4) A Julia component C is called a *buried component* if $C \subset J_0(f)$.

More information on residual Julia sets, see [**DF**].

The result is as follows:

Theorem Let f be a transcendental entire function which has a multiply-connected wandering domain. Then

(1) For every repelling periodic point p, let $C(p)$ be the Julia component containing p. Then $C(p)$ satisfies either one of the following:

(A) There exists a polynomial g such that $C(p)$ is homeomorphic to the Julia set $J(g)$. p is a buried point unless p is on the boundary of an immediate attractive basin or a parabolic basin.

(B) $C(p) = \{p\}$ and this is a buried singleton component of $J(f)$.

(2) If C is a wandering Julia component with bounded orbit, then C is a singleton component.

References

[**Ba1**] I. N. Baker, *The domains of normality of an entire functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 1 (1975), 277–283.

[**Ba2**] I. N. Baker, *Wandering domains in the iteration of entire functions*, Proc. London Math. Soc. (3), **49** (1984), 563–576.

[**BD**] I. N. Baker and P. Domínguez, *Boundaries of unbounded Fatou components of entire functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 24 (1999), no. 2, 437–464.

[**DF**] P. Domínguez and N. Fagella, *Residual Julia sets of rational and transcendental functions*, to appear in "Transcendental Dynamics and Complex Analysis", Cambridge University Press, (2008).

[**K**] M. Kisaka, *On the connectivity of Julia sets of transcendental entire functions*, Ergodic Theory Dynam. Systems 18 (1998), no. 1, 189–205.

16

Component-wise accumulation sets of critical sets for Axiom A polynomial skew products

中根静男　　　東京工芸大学

$\mathbb{C}^2$ の polynomial skew product $f(z,w)=(p(z),q(z,w))$ に対し、J_p を p の Julia 集合、$q_z(w)=q(z,w)$, $C_z=\{w\in\mathbb{C}; q_z'(w)=0\}$ とおき、J_p 上の危点集合を $C_{J_p}=\cup_{z\in J_p}\{z\}\times C_z$ とおく。DeMarco-Hruska [DH] は C_{J_p} の集積点集合として、通常の集積点集合である

$$A(C_{J_p})=\cap_{N\geq 0}\overline{\cup_{n\geq N}f^n(C_{J_p})}$$

に加えて、point-wise accumulation set $A_{pt}(C_{J_p})$ と component-wise accumulation set $A_{cc}(C_{J_p})$ を次のように定義した。

$$A_{pt}(C_{J_p})=\overline{\cup_{x\in J_p}A(x)},\quad A_{cc}(C_{J_p})=\overline{\cup_{C\in\mathcal{C}(C_{J_p})}A(C)}.$$

ここで $\mathcal{C}(C_{J_p})$ は C_{J_p} の連結成分全体の集合を表す。次の記号を用いる。

$$\begin{aligned}
K &= K(f)=\{(z,w)\in\mathbb{C}^2;\{f^k(z,w)\}_{k\geq 0}\text{ is bounded}\}\\
K_z &= K\cap(\{z\}\times\mathbb{C})\\
J_z &= \partial K_z \text{ in } \{z\}\times\mathbb{C}\\
\Lambda &: \text{ union of saddle basic sets contained in } J_p\times\mathbb{C}\\
\Lambda_z &:= \Lambda\cap(\{z\}\times\mathbb{C})
\end{aligned}$$

定義より $A_{pt}(C_{J_p})\subset A_{cc}(C_{J_p})\subset A(C_{J_p})$ が成り立つ。DeMarco-Hruska は $A_{pt}(C_{J_p})$ と $A(C_{J_p})$ の特徴づけを与えた。

補題 1. (DeMarco-Hruska [DH]) f が *Axiom A* ならば、

$$\Lambda=A_{pt}(C_{J_p})\subset A_{cc}(C_{J_p})\subset A(C_{J_p})=W^u(\Lambda)\cap(J_p\times\mathbb{C}).$$

問題 1. (DeMarco-Hruska [DH]) J_p が連結でも *Cantor* 集合でもない *Axiom A polynomial skew product* で次の性質を満たすものは存在するか？

(1) $A_{pt}(C_{J_p}) = A_{cc}(C_{J_p}) \neq A(C_{J_p})$

(2) $A_{pt}(C_{J_p}) \neq A_{cc}(C_{J_p}) = A(C_{J_p})$

(3) $A_{pt}(C_{J_p}) \neq A_{cc}(C_{J_p}) \neq A(C_{J_p})$

ここでは (2) を満たす例は存在しないことを示す。

定理 1. f は *Axiom A* で J_p は不連結とする。このとき

$$A_{cc}(C_{J_p}) = A(C_{J_p}) \Longleftrightarrow A_{pt}(C_{J_p}) = A_{cc}(C_{J_p}) = A(C_{J_p}).$$

J_p が Cantor 集合ならば定義から $A_{pt}(C_{J_p}) = A_{cc}(C_{J_p})$ が従うので、定理は自明。

定理 1 の証明には、DeMarco-Hruska の与えた、$A_{pt}(C_{J_p}) = A(C_{J_p})$ の特徴付けを用いる。

補題 2. (DeMarco-Hruska [DH]) f は *Axiom A* とする。

$$\begin{aligned} A_{pt}(C_{J_p}) = A_{cc}(C_{J_p}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{すべての } C \in \mathcal{C}(C_{J_p}) \text{ に対して } C \subset K \text{ 又は } C \cap K = \emptyset \\ &\qquad\quad \text{が成り立つ} \\ A_{pt}(C_{J_p}) = A(C_{J_p}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{写像 } z \mapsto \Lambda_z \text{ は } J_p \text{ 上連続 }. \end{aligned}$$

彼女たちは、$A_{cc}(C_{J_p}) = A(C_{J_p})$ の特徴付けを与えよ、という問題も提起しているが、定理 1 はそれへの解答を与えている。(J_p が連結ならば常に $A_{cc}(C_{J_p}) = A(C_{J_p})$ が成り立つ。)

参考文献

[DH] L. DeMarco & S. Hruska: Axiom A polynomial skew products of $\mathbb{C}^2$ and their postcritical sets. To appear in Erg. Th. & Dyn. Sys.

17

非退化な多項式半直積写像のジュリア集合の対称性

上野康平（京都大学大学院　人間・環境学研究科）

２次元複素数空間からそれ自身への多項式半直積写像が与えられたとき、複素力学系として、その写像の反復合成を考える。２次元複素数空間の座標を (z,w) で表すとき、多項式半直積写像 $f(z,w)$ は多項式 $p(z)$ と $q(z,w)$ を用いて次で表される：

$$f(z,w)=(p(z),q(z,w))$$

多項式半直積写像の力学系は、１変数多項式の力学系の一般化と見ることができる。まず、多項式半直積写像の第一成分 $p(z)$ は底空間上の力学系を定める。次に、多項式半直積写像は垂直線の族を保つので、各垂直線上の力学系を考えることができる。それぞれの力学系において、ジュリア集合と呼ばれるものを定義することができる。ここでは、多項式 $p(z)$ が定める底空間上のジュリア集合を底ジュリア集合、各垂直線上に定められるジュリア集合を垂直ジュリア集合と呼ぶ。そして、多項式半直積写像のジュリア集合を、底ジュリア集合の上に乗っている垂直ジュリア集合の和集合の閉包と定める。

本講演では、非退化な多項式半直積写像のジュリア集合がもつ対称性に関する結果を報告する。ここで、多項式半直積写像 $f(z,w)=(p(z),q(z,w))$ に対して、$q(z,w)$ の第二座標 w に関する主係数が定数であるとき、その写像は非退化であるという。対称性として、２次元複素数空間からそれ自身への多項式自己同型写像で、ジュリア集合を保ち、その第一成分が第一座標にしか依らないものを扱う。このような対称性は、原点を中心とする回転の直積と共役であること示す。また、このような対称性全体は群となるが、それが無限群となる必要十分条件を与える。特に、ジュリア集合が無限個の対称性をもつとき、その多項式半直積写像は多項式直積写像と半共役となることがわかった。さらに、次の問題を考える：異なる２つの多項式半直積写像が同じジュリア集合をもつとき、それらの力学系、あるいはそれらの写像は本質的に同じか？この問題は、ジュリア集合の対称性の問題と深く関わっている。我々は、非退化な多項式半直積写像に対して、ある条件をつけることにより、２つの例外を除いた肯定的な解答を与えることに成功した。ある条件というのは、底空間上の力学系を与える、写像の第一成分 $p(z)$ の次数と垂直線上の力学系を与える、写像の第二成分 $q(z,w)$ の第二座標 w に関する次数が等しい、というものである。これらの結果は、１変数多項式のジュリア集合の対称性に関する結果の高次元化となる。証明には、多項式半直積写像が定める垂直線上のグリーン関数、ボッチャー関数と呼ばれるものを用いる。

18

放物型作用素に対する上半空間でのHardy型空間におけるCarleson measure不等式

中川　勇人（名古屋大学多元数理科学研究科）

$(n+1)$ 次元ユークリッド空間 $(n \geq 2)$ における上半空間

$$\mathbb{R}^{n+1}_+ := \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$$

において，α-放物型作用素 $L^{(\alpha)}$ は,

$$L^{(\alpha)} := \partial_t + (-\Delta_x)^\alpha \qquad (0 < \alpha \leq 1)$$

で定義され，関数 u が α-放物型関数とは超関数の意味で $L^{(\alpha)}u = 0$ が成立するときである（[NSS]）．$L^{(\alpha)}$ の基本解は,

$$W^{(\alpha)}(x,t) := \begin{cases} (2\pi)^{-n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-t|\xi|^{2\alpha}} e^{ix\cdot\xi}\, d\xi & (x \in \mathbb{R}^n, t > 0) \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^n, t \leq 0) \end{cases}$$

で定義される．この基本解 $W^{(\alpha)}$ は $\alpha = 1/2, 1$ のときそれぞれ Poisson 核，Gauss-Weierstrass 核に一致する．また，上半空間 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ においては α-放物型関数全体は $\alpha = 1/2, 1$ のときそれぞれ調和関数全体，熱方程式の解全体に一致する．

上半空間において Hardy 空間に放物型作用素を導入した空間 $h^p_\alpha(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ を,

$$h^p_\alpha(\mathbb{R}^{n+1}_+) := \{u\colon \mathbb{R}^{n+1}_+ \text{上}\ \alpha\text{-放物型関数} \mid \|u\|_{h^p_\alpha(\mathbb{R}^{n+1}_+)} < \infty\}$$

と定義するのは自然である．ノルムは

$$\|u\|_{h^p_\alpha(\mathbb{R}^{n+1}_+)} := \begin{cases} \displaystyle\sup_{t>0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & (1 < p < \infty) \\ \displaystyle\sup_{t>0, x\in\mathbb{R}^n} |u(x,t)| & (p = \infty) \end{cases}$$

と定めることにする．今回の発表では，この空間における Carleson measure 不等式を考察する．

まずテント状領域を用いた T_τ-Carleson measure を定義する．$\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上の正 Borel 測度 μ が $L^{(\alpha)}$ に関する T_τ-Carleson measure（$\tau > 0$）であるとは，$C > 0$ が存在して

$$\mu(T^{(\alpha)}(x,t)) \leq Ct^{(\frac{n}{2\alpha}+1)\tau}$$

が成立するときであると定義する．ここで,

$$T^{(\alpha)}(x,t) := \{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \mid |y-x|^{2\alpha} + s \leq t\}, (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$$

である．この新たに定義したT_τ-Carleson measureに対してT_τ-Carleson定数$\kappa^{(\alpha)}[\mu]$を，

$$\kappa^{(\alpha)}[\mu] := \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+} \frac{\mu(T^{(\alpha)}(x,t))}{r^{(\frac{n}{2\alpha}+1)\tau}}$$

と定義する．T_τ-Carleson measureは[NSY]で定義されているCarleson boxを用いたτ-Carleson measureと密接な関係があり，$\frac{n}{2\alpha}/(\frac{n}{2\alpha}+1) < \tau$のとき，$\mu$が$T_\tau$-Carleson measureであることと$\mu$が$\tau$-Carleson measureであることは同値である．なお，$\frac{n}{2\alpha}/(\frac{n}{2\alpha}+1) \geq \tau$のときにはそれぞれは異なる定義となる．

$f \in L^p(\mathbb{R}^n)(1 \leq p \leq \infty)$に対して$u(x,t)$を，

$$u(x,t) := (W^{(\alpha)} * f)(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)W^{(\alpha)}(y,t)\,dy$$

とおく．この$u(x,t)$はα-放物型関数である．

主定理

$0 < \alpha \leq 1, 2 < p < \infty, f \in L^p(\mathbb{R}^n)$のとき，$\mu$を$\mathbb{R}^{n+1}_+$上$T_\tau$-Carleson measureとすると，$C > 0$が存在して

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1}_+, d\mu)} \leq C(\kappa^{(\alpha)}[\mu])^{\frac{1}{p}} \|u\|_{h^p_\alpha(\mathbb{R}^{n+1}_+)}.$$

$1 < p < \infty$のとき$u \in h^p_\alpha(\mathbb{R}^{n+1}_+)$と$u = W^{(\alpha)} * f$となる関数$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$が存在することとは同値である．よって，主定理は$C > 0$が存在して

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1}_+, d\mu)} \leq C(\kappa^{(\alpha)}[\mu])^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

とも表せる．

参考文献

[NSS] M. Nishio, K. Shimomura, N. Suzuki, *α-parabolic Bergman spaces*, Osaka J. Math. **42** (2005), 153-162.

[NSY] M. Nishio, N. Suzuki, M. Yamada, *Toeplitz operators and Carleson measures on parabolic Bergman spaces*, Hokkaido Math. J. Vol. **36** (2007), 563-583.

[V] I. E. Verbitsky, *A Dimension-free Carleson Measure Inequality*, Oper. Theory Advanced and Applications, Vol. **113** (2000), 393-398.

19

L_1-主関数に関する2階変分公式と Schottky covering の同時一意化について

濱野佐知子　(松江高専・数理科学科)

1. R を平面 $\mathbb{C}_z$ 上に被覆した, 有限個の滑らかな単純閉曲線 $C_0, C_1, \ldots, C_\nu$ で囲まれた planar なリーマン面とし, $R \ni 0$ と仮定する. このとき, R の点 0 を w-平面上の原点に, 境界 C_0 を原点中心の円周に写し, R を截線領域に写す2種類の等角写像, すなわち, circular slit mapping f_1 と radial slit mapping f_0 が存在する. ここで, $f_i'(0) = 1$ $(i = 1, 0)$ と正規化すると写像が一意的に決まるので, $f_i(C_0)$ の半径 r_i が定まる.

今, $R(t)$ が複素助変数 $t \in B = \{|t| < \rho\}$ と共に滑らかに変動したとする: $\mathcal{R} : t \in B \to R(t)$. ただし, $R(t) \ni 0$ と仮定する. 各 $t \in B$ に対して上述の slit mapping $f_i(t, z)$ $(i = 1, 0)$ を考え, $C_0(t)$ の像の半径を $r_i(t)$ と書く. 実関数 $p_1(t, z) = \log|f_1(t, z)|$ は $(R(t), 0, C_0(t))$ に関する L_1-主関数と呼ばれる ([2]). このとき, $r_1(t)$ に関する次の2階変分公式が成立する:

補題 1. 上述の状況のもとで,

$$\frac{\partial^2 \log r_1(t)}{\partial t \partial \bar{t}} = -\frac{1}{\pi} \int_{\partial R(t)} k_2(t, z) \left| \frac{\partial p_1(t, z)}{\partial z} \right|^2 ds_z - \frac{4}{\pi} \iint_{R(t)} \left| \frac{\partial^2 p_1(t, z)}{\partial \bar{t} \partial z} \right|^2 dx dy.$$

ただし, $k_2(t, z) = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial \bar{t}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|^2 - 2\mathrm{Re} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{t} \partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \right\} + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \bar{z}} \right) / \left| \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|^3$ on $\partial \mathcal{R}$. ここで, φ は $\partial \mathcal{R}$ の定義関数である.

$\mathcal{R}$ が2次元擬凸状領域ならば, $k_2(t, z) \geq 0$ on ∂R より, 次を得る.

定理 1. $\mathcal{R}$ が2次元擬凸状領域ならば, $\log r_1(t)$ は B 上の優調和関数である.

注意. $\log r_0(t)$ については, 一般には優調和にも劣調和にもならない.

2. $\mathcal{R} : t \in B \to R(t)$ は **1.** と同じとし, 各 $t \in B$ に対して $R(t) \ni 0, 1$ と仮定する. このとき, 各 $R(t)$, $t \in B$ に対して, $z = 1$ を $w = \infty$ へ写し, $z = 0$ を $w = 0$ へ写す circular slit mapping $w = F(t, z)$ が存在し, $F'(t, 0) = 1$ と正規化すると写像は一意的に決まる. よって, $z = 1$ での展開が,

$$w = F(t, z) = \frac{A_{-1}(t)}{z - 1} + A_0(t) + A_1(t)(z - 1) + \cdots$$

と一意的に表現される. 実関数 $P_1(t, z) = \log|F_1(t, z)|$ を $(R(t), 0, 1)$ に関する L_1-主関数と呼ぶ. このとき, $\log|A_{-1}(t)|$ に関する次の2階変分公式が成立する:

補題 2. 上述の状況のもとで,

$$\frac{\partial^2 \log|A_{-1}(t)|}{\partial t\partial\bar{t}} = -\frac{1}{\pi}\int_{\partial R(t)} k_2(t,z)\left|\frac{\partial P_1(t,z)}{\partial z}\right|^2 ds_z - \frac{4}{\pi}\int\int_{R(t)}\left|\frac{\partial^2 P_1(t,z)}{\partial\bar{t}\partial z}\right|^2 dxdy$$

定理 2. $\mathcal{R}$ が2次元擬凸状領域ならば, $\log|A_{-1}(t)|$ は B 上の優調和関数である.

3. $\mathcal{S}: t \in B \to S(t)$ をコンパクトなリーマン面 $S(t)$ の滑らかな正則族とし, 2つの正則切断 $\zeta_k: t \in B \to \zeta_k(t) \in S(t)$ $(k=0,1)$ をもつとする. 各 $S(t)$ の Schottky covering を $R(t)$ とすると変動 $\mathcal{R}: t \in B \to R(t)$ がえられる. このとき, 各 $R(t)$ は planar リーマン面であるから, $F(t,\zeta_0(t)) = 0$, $F(t,\zeta_1(t)) = \infty$, $F'_z(t,\zeta_0(t)) = 1$ と正規化された circular slit mapping $F(t,z)$ (正確には, $\mathcal{R}$ の内部から近似した擬凸状領域の増大列 $\mathcal{R}_n$ の各 fiber $R_n(t)$ 上で作った circular slit mapping $F_n(t,z)$ の極限関数 $F(t,z)$) によって, w-球面上の単葉領域 $D(t)$ に写される. $F(t,z)$ の $z=\zeta_1(t)$ における展開を

$$F(t,z) = \frac{A_{-1}(t)}{z-\zeta_1(t)} + A_0(t) + A_1(t)(z-\zeta_1(t)) + \cdots$$

とすれば, 定理2から $\log|A_{-1}(t)|$ は B 上の優調和関数である. ところで, 像領域 $D(t)$ 上の単葉な正則関数は1次変換に限る (Koebe の定理). この2つの事実を合わせて, $F(t,z)$ は $t \in B$ について正則であることを示せる. すなわち,

定理 3. 上述の Schottky covering に関する変動 $\mathcal{R}$ は, $B \times \mathbb{P}^1$ 上の単葉領域に解析的に一意化される.

注意. 論文 [1] と [3] ではリーマン面 $R(t)$ の Bergman 核関数 $K(t)$ に関する研究が行われている. [1] では $R(t)$ が planar かつ parabolic ならば, 変動 $\mathcal{R}$ は $B \times \mathbb{P}^1$ に一意化できることを示している. Schottky covering $R(t)$ は planar であるが parabolic ではないので, [1] から定理3は導かれない.

注意. 定理3は [4] の中で言及され略証が与えられているが, 証明にはいくつかの gap がある. 本講演では, 変分公式2を準備しそれらを克服したことを報告する.

参考文献

[1] F.Maitani and H.Yamaguchi, *Variation of Bergman metrics on Riemann surfaces*, Math. Ann. 330 (2004), 477–489.

[2] L.Ahlfors and L.Sario, *Riemann surfaces*, Princeton Mathematical Series, No. 26 Princeton Univ. Press, Princeton, 1960.

[3] S.Hamano, *Rigidity of Bergman length on Riemann surfaces under pseudo-convexity*, Complex Analysis and its Applications, Proceedings of the 15th ICFIDCAA, OCAMI Studies Vol. 2 (2008), 191–194.

[4] H.Yamaguchi, *Variations de surfaces de Riemann surfaces*, C.R. Acad. Sc. Paris, 286 (1978), 1121–1124.

20

L_0-主関数に関する 2 階変分公式と開リーマン面の span の動きについて

濱野佐知子 (松江高専), 米谷文男 (京都工繊大), 山口博史 (滋賀大名誉教授)

1. R を平面 $\mathbb{C}_z$ 上に被覆した, 有限個の滑らかな単純閉曲線 $C_0, C_1, \ldots, C_\nu$ で囲まれた planar なリーマン面とし, $R \ni 0$ と仮定する. このとき, R の 0 を w-平面上の原点に, 境界 C_0 を原点中心の円周に写し, R を截線領域に写す 2 種類の等角写像, すなわち, circular slit map f_1 と radial slit map f_0 が存在する. ここで, $f_i'(0) = 1$ $(i = 1, 0)$ と正規化すると写像が一意的に決まるので, $f_i(C_0)$ の半径 r_i が定まる. 実関数 $p_i(z) = \log|f_i(z)|$ は $(R, C_0, \{0\})$ に関する L_i-主関数と呼ばれる.

今, $R(t)$ が複素助変数 $t \in B = \{|t| < \rho\}$ と共に滑らかに変動 $\mathcal{R} : t \in B \to R(t)$ (ただし, $R(t) \ni 0$ とする) として, 複素 2 次元領域 $\mathcal{R} = \cup_{t\in B}(t, R(t))$ は擬凸状領域と仮定する. このとき, 濱野氏は前講演において, 次を示した :

“ $\log r_1(t)$ は常に B 上で優調和であるが, $\log r_0(t)$ は 一般には優調和でも劣調和でもない.”

次に, 各 $t \in B$ に対して $R(t) \ni 0, 1$ と仮定する. このとき, 各 $R(t), t \in B$ に対して, $z = 1$ を $w = \infty$ へ写し, $z = 0$ を $w = 0$ へ写す circular slit map $w = F_1(t, z)$ 及び radial slit map $w = F_0(t, z)$ が存在し, $F_i'(t, 0) = 1$ $(i = 1, 0)$ と正規化すると写像は一意的であり, $z = 1$ での展開

$$w = F_i(t, z) = \frac{A_{-1}^{(i)}(t)}{z - 1} + A_0^{(i)}(t) + A_1^{(i)}(t)(z - 1) + \cdots$$

が一意的に定まる.

ここでは, 実関数 $P_i(t, z) := \log|F_i(t, z)|$ を $(R(t), \{0, 1\})$ に関する L_i-主関数, $\Lambda_i(t) := \log|A_{-1}^{(i)}(t)|$ を L_i-定数と呼ぶことにする.

濱野氏は前講演によって, 滑らかな変動について, $\Lambda_1(t)$ に関する次の 2 階変分公式 (1) を確立し, それを用いて,「$\mathcal{R}$ が擬凸状領域ならば, $\Lambda_1(t)$ は B 上の優調和関数である」ことを示した :

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \Lambda_1(t)}{\partial t \partial \bar{t}} = -\frac{1}{\pi}\int_{\partial R(t)} k_2(t, z)\left|\frac{\partial P_1(t, z)}{\partial z}\right|^2 ds_z - \frac{4}{\pi}\int\int_{R(t)}\left|\frac{\partial^2 P_1(t, z)}{\partial \bar{t}\partial z}\right|^2 dxdy.$$

ただし, $k_2(t, z)$ は前講演で定義された, 境界 $\partial\mathcal{D}$ のレビ形式から生じる $\partial\mathcal{R}$ のある種の曲率を表す ∂R 上の関数である.

我々は, 滑らかな変動について, $\Lambda_0(t)$ に関する次の２階変分公式を得た.

$$(2)\quad \frac{\partial^2\Lambda_0(t)}{\partial t\partial\bar{t}} = \frac{1}{\pi}\int_{\partial R(t)} k_2(t,z)\left|\frac{\partial P_0(t,z)}{\partial z}\right|^2 ds_z + \frac{4}{\pi}\int\int_{R(t)}\left|\frac{\partial^2 P_0(t,z)}{\partial\bar{t}\partial z}\right|^2 dxdy.$$

これより, $\Lambda_1(t)$ の場合とは対称的に, 「$\mathcal{R}$ が擬凸状領域ならば, $\Lambda_0(t)$ は B 上の劣調和関数である」ことが分かる. $L_1(t)$-, $L_0(t)$-定数に関する２つの変分公式 (1), (2) の形は同類であるが, $\Lambda_0(t)$ に関する変分公式の我々の証明は $\Lambda_1(t)$ に関する濱野氏の証明と parallel に行くわけではなかった.

2. H. Grunsky (1932) は 「$a(t) := \Lambda_0(t) - \Lambda_1(t) > 0$ であり, $2\pi a(t)$ は一対一等角写像 $w = F_1(t,z) + F_0(t,z)$ による $R(t)$ の像領域の補集合のユークリッドの面積である」ことを示し, $a(t)$ を $R(t)$ (正確には, $(R(t,\{0,1\})$ の span と呼んだ. **1.** で述べた L_1-, L_0-定数に関する事実を結合して次の結果を得る：

定理　変動 $\mathcal{R}: t\in B \to R(t)$ の定める領域 $\mathcal{R}$ が擬凸状領域ならば, $R(t)$ の span $a(t)$ は B 上の $a(t) > 0$ な劣調和関数である.

標準的近似方法によって, この定理は $\mathcal{R}$ が内部から, 滑らかな擬凸状領域の列 $\mathcal{R}_n$ で近づく場合に拡張される, すなわち, “ $R(t)$ の span $a(t)$ は B 上での $a(t) \geq 0$ なる劣調和関数である”.

我々は, 常に 各 $R(t)$ は planar を仮定しているから,「$a(t) = 0$ になるための必要十分条件は $R(t) \in O_{AD}$ である」 (及川の定理, 参照：Nakai-Sario, G.W.E. 164, Springer 1970).

故に, ２つをあわせて次の結果を得る：

系　変動 $\mathcal{R}: t\in B \to R(t)$ を $\mathcal{R}$ が上のような擬凸状領域とする. もし B 内の閉曲線 γ 上の各点 t に対して, $R(t) \in O_{AD}$ ならば, γ で囲まれた領域内の各点 t に対して, $R(t) \in O_{AD}$ である.

問題　変動 $\mathcal{R}: t\in B \to R(t)$ を系と同じものとする. このとき, $\log a(t)$ は劣調和関数であろうか？

21

Severiの意味の準アーベル関数と準アーベル多様体III, 一般ヤコビ多様体

阿部 幸隆 (富山大学)

アーベル多様体とその上のアーベル関数体を合わせて考えたときの極限をSeveriの意味の準アーベル多様体と準アーベル関数体と呼んだ．この観点から，特異代数曲線に対する一般ヤコビ多様体，一般ピカール多様体，一般アルバネーゼ多様体を考察した．

非特異代数曲線（リーマン面）に対しては，ピカール多様体とアルバネーゼ多様体は同型（代数群としても）である．したがって，因子類群にどちらから複素構造を導入しても同じである．

C を既約射影代数曲線，S をその特異点集合とし，正規化 $\pi : \widetilde{C} \longrightarrow C$ を考える．$\mathcal{S} = \pi_* \mathcal{O}^*_{\widetilde{C}} / \mathcal{O}^*_C$ とおく．$\overline{\mathcal{D}^0(C)}$ を次数 0 の因子類群とする．$\mathrm{Pic}^0(\widetilde{\mathrm{C}})$，$\mathrm{Pic}^0(\mathrm{C})$ をそれぞれ $\widetilde{C}$，C 上の位相的に自明な正則直線束の同型類のなす群とする．特異代数曲線の場合も $\overline{\mathcal{D}^0(C)} \cong \mathrm{Pic}^0(\mathrm{C})$ は成り立つ．標準的な方法で次の完全列が得られる．

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow H^0(C, \mathcal{S}) \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(C) \xrightarrow{\rho} \mathrm{Pic}^0(\widetilde{C}) \longrightarrow 0.$$

定理 1 上の完全列 $(*)$ は分裂する．したがって

$$\mathrm{Pic}^0(C) \cong \mathrm{Pic}^0(\widetilde{C}) \oplus H^0(C, \mathcal{S})$$

となる．

定義 1 $\overline{\mathcal{D}^0(C)}$ に $\mathrm{Pic}^0(\mathrm{C})$ から複素構造を導入したものを C の一般ヤコビ多様体 $J(C)$ と定義する．すなわち

$$J(C) := J(\widetilde{C}) \oplus H^0(C, \mathcal{S}).$$

$H^0(C, \mathcal{S}) \cong \mathbb{C}^s \times (\mathbb{C}^*)^t$ であり，これはSeveriの意味の準アーベル多様体である．

一般アルバネーゼ多様体も代数的なものと解析的なものを考える．これらの3つの多様体は一般には異なる．これらに関連したいくつかの結果についても報告する．

参考文献

[1] Y. Abe, Quasi-abelian functions and varieties in the sense of Severi, I, Limits of abelian varieties, *Far East J. Math. Sci.*, **23(1)**(2006), 17–28.

[2] Y. Abe, Quasi-abelian functions and varieties in the sense of Severi, II, Degeneration of compact Riemann surfaces, *Toyama Math. J.*, **29** (2006), 25–58.

[3] Y. Abe, Quasi-abelian functions and varieties in the sense of Severi, III, Generalized Jacobi varieties, *to appear in Toyama Math. J.*.

[4] Y. Abe and K. Kopfermann, *Toroidal Groups*, Lecture Notes in Mathematics, **1759**, Springer, Berlin, 2001.

[5] F. Gherardelli and A. Andreotti, Some remarks on quasi-abelian manifolds, Global Analysis and Its Applications, Vol. II, International Atomic Energy Agency, Vienna, 1974, pp. 203–206.

[6] A. Lebowitz, Degeneration of a compact Riemann surface of genus 2, *Israel J. Math.*, **12** (1972), 223–236.

[7] R. Miranda, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 5, Amer. Math. Soc., 1995.

[8] Y. Namikawa, On the canonical holomorphic map from the moduli space of stable curves to the Igusa monoidal transform, *Nagoya Math. J.*, **52** (1973), 197–259.

[9] F. Oort, A construction of generalized Jacobian varieties by group extensions, *Math. Ann.*, **147** (1962), 277–286.

[10] M. Rosenlicht, Generalized Jacobian varieties, *Ann. of Math.*, **59** (1954), 505–530.

[11] J. -P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann, Paris, 1959.

[12] C. L. Siegel, *Topics in Complex Function Theory, Vol. II* Wiley-Interscience, New York, 1971.

22 準アーベル多様体の保型形式の構成

阿部 幸隆 (富山大学)

トロイダル群 $X = \mathbb{C}^n/\Gamma$ は一般化されたリーマンの条件をみたすとき準アーベル多様体と呼ばれる．$L \longrightarrow X$ を準アーベル多様体 X 上の正の直線束とする．L に対応する保型因子を $\psi : \Gamma \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^*$ とする．$\mathbb{C}^n$ 上の整関数 f が

$$f(x+\gamma) = \psi(\gamma, x) f(x), \quad \forall\gamma \in \Gamma,\ \forall x \in \mathbb{C}^n$$

をみたすとき，ψ に対する保型形式といい，その集合を $AF(\psi)$ で表す．$AF(\psi)$ は $H^0(X, L)$ と同一視できる．与えられた ψ に対して $AF(\psi)$ に属する f を具体的に構成することで，高山茂晴氏の準アーベル多様体に関する結果（[2], [3]）が得られたことを報告する．

コンパクトの場合のこれらの関数はテータ関数である．それらはフーリエ級数で与えられるが，rank $\Gamma < 2n$ の場合にフーリエ級数で与えることはできない．そこで，ポアンカレ級数で構成する．

これらの結果はすでに発刊されているが（[1]），今まで学会等で発表していないので，今回話させていただいた．

参考文献

[1] *Y. Abe*, Construction of automorphic forms for ample factors of quasi-abelian varieties, Kyushu J. Math. **57** (2003), 51–85.

[2] *S. Takayama*, Adjoint linear series on weakly 1-complete Kähler manifolds II: Lefschetz type theorem on quasi-Abelian varieities, Math. Ann. **312** (1998), 363–385.

[3] *S. Takayama*, Very ample line bundles on quasi-abelian varieties, Math. Z. **236** (2001), 191–200.

23 $\mathbb{C}^n$ の実超曲面へ距離の Levi form の表示

松本 和子（阪府大総合教育）

1. D を $\mathbb{C}^n$ の部分領域, M を D の境界, $\delta_M(z)$ を $z \in \mathbb{C}^n$ から M までの Euclid 距離とする. 良く知られているように, D が擬凸であることと $-\log \delta_M$ が D で多重劣調和であることとは同値である. また, 境界 M が C^2 級の実超曲面のとき, D が擬凸（ゆえに Stein）であることと M が Levi の条件を満たすこととは同値である. すなわち, M が $\rho = 0$ により定義されているとき, $-\log \delta_M$ が $\rho < 0$ の範囲で多重劣調和であるための必要十分条件は, M が

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial z_i}(z)\zeta_j = 0 \implies \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z)\zeta_i \bar{\zeta}_j \geq 0$$

$(z \in M, \zeta \in \mathbb{C}^n)$ という Levi の条件を満たすことである.

一方, Grauert により, D が複素多様体 X の部分領域のとき, D が Stein であるための必要十分条件は, D が「強」多重劣調和関数によって exhaust されることである. そこで, Levi 問題への応用を動機として, まずは $X = \mathbb{C}^n$ の場合に, $-\log \delta_M$ が強多重劣調和になるための M の条件を求めることを考えた. 今回, $-\log \delta_M$ の 複素接方向の Levi form と M の定義関数 ρ の間の具体的な関係（等式）を求め, その結果を用いて, $-\log \delta_M$ が強多重劣調和になるための必要十分条件を得ることができたので, それを報告する.

2. V を $0^* = (0, 0) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$ の近傍, $r : V \to \mathbb{R}$ を C^2 級の関数とし, $V \times \mathbb{R} \subset \mathbb{C}^n$ において, M は $y_n = r(z_1, \ldots, z_{n-1}, x_n)$ により定義されているとする. また, M は $\mathbb{C}^n$ の原点 $p_0 = (0^*, 0)$ を含み, M の p_0 での実接平面 $T_{p_0}(M)$ は $y_n = 0$ であるとする. このとき, M の p_0 での法線 $N_{p_0}(M)$ は $z_1 = \cdots = z_{n-1} = x_n = 0$ であり, $y \in \mathbb{R}$ に対し $p_y := (0, \sqrt{-1}y) \in N_{p_0}(M)$ かつ $|y| < {}^\exists\varepsilon$ に対し $\delta_M(p_y) = \mathrm{dist}(p_y, p_0) = |y|$ となる.

$V \times \mathbb{R} \subset \mathbb{C}^n$ において, $y_n < r(z_1, \ldots, z_{n-1}, x_n)$ で表される領域を Ω_-, $y_n > r(z_1, \ldots, z_{n-1}, x_n)$ で表される領域を Ω_+ とし,

$$\delta^*_M(z) = \begin{cases} -\delta_M(z), & z \in \Omega_- \cup M \\ \delta_M(z), & z \in \Omega_+ \end{cases}$$

とおく. また, 4 つの $n-1$ 次正方行列を

$$H_1 = \left(\frac{\partial^2(-r)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\right)(0^*), \quad H_2 = \left(\frac{\partial^2(-r)}{\partial z_i \partial x_n} \cdot \frac{\partial^2(-r)}{\partial \bar{z}_j \partial x_n}\right)(0^*)$$
$$S_1 = \left(\frac{\partial^2(-r)}{\partial z_i \partial z_j}\right)(0^*), \quad S_2 = \left(\frac{\partial^2(-r)}{\partial z_i \partial x_n} \cdot \frac{\partial^2(-r)}{\partial z_j \partial x_n}\right)(0^*)$$

により定義し, $y \in \mathbb{R}$ に対し

$$c(y) = \left[1 + y \cdot \frac{\partial^2(-r)}{\partial x_n \partial x_n}(0^*)\right]^{-1}$$

とおく. H_1, H_2 は Hermite 行列で, S_1, S_2 は対称行列である.

3. $\mathbb{C}^n$ の C^2 級の実超曲面 M までの符号付き距離 δ^*_M の, 複素接方向の Levi form に対応する $n-1$ 次 Hermite 行列

$$\Phi^*(p_y) = \left(\frac{\partial^2 \delta^*_M}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\right)(p_y)$$

と, 上の 4 つの行列との関係は次の通りである.

定理 $p_y := (0, \sqrt{-1}y) \in N_{p_0}(M)$, $|y| < {}^\exists\varepsilon$ に対し,

$$\Phi^*(p_y) = A(y)\Big[E + 2y \cdot A(y)\Big]^{-1}$$

という関係式が成り立つ. ここで,

$$A(y) = H(y) - 2y \cdot S(y)\Big[E + 2y \cdot \overline{H}(y)\Big]^{-1}\overline{S}(y)$$

かつ, $H(y)$, $S(y)$ は, それぞれ $H(y) = H_1 - y \cdot c(y) H_2$, $S(y) = S_1 - y \cdot c(y) S_2$ で定義される Hermite 行列, 対称行列である.

特に, 2 つの行列 $\Phi^*(p_y)$ と $A(y)$ の rank は等しく, このことから $-\log \delta_M$ が強多重劣調和になるための必要十分条件が得られる.

Ψを削除。

24

松島の埋め込み定理の一般化について

大沢健夫

（名大多元数理）

Journal of Mathematics of Kyoto University に掲載予定の論文'A Generalization of Matsushima's Embedding Theorem'の内容を報告する。

多変数関数論において、複素多様体上のある種のコホモロジー類が、適当な変換によって別の多様体上の正則関数とみなせるという現象がある。数理物理におけるPenroseのアイディアがこのような変換を用いて記述されることはよく知られている。

1979年、松島与三氏は複素トーラス上の直線束のコホモロジーに対してこの種の変換を調べ、以下の埋め込み定理を得た。

松島の定理　Tは複素トーラス、$L \longrightarrow T$は正則直線束であり、そのChern類が符号(s, r)の非退化な調和$(1,1)$形式を含むとする。このときあるエルミート対称空間$\mathcal{B}$上の偏極アーベル多様体の族T_b $(b \in \mathcal{B})$と、TからT_bへの可微分同相φ_b $(b \in \mathcal{B})$、およびT_b上の直線束の族$L_{b,\psi}$ $(\psi \in \mathrm{Pic}_0 T_b)$と$H^{0,r}(T, L^m)$から$H^{0,0}(T_b, L^m_{b,\Psi})$への同型が存在して、$\varphi_b$と標準的埋め込み$T_b \hookrightarrow (H^{0,0}(T_b, L^3_{b,\psi})^* \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times$との合成が$T$を$(H^{0,r}(T, L^3)^* \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times$に、$s$個の変数について正則に、$r$個の変数について反正則に埋め込む。

松島の族$\{H^{0,0}(T_b, L_{b,\psi})\}$はC.L. Siegelが発見したテータ級数の族を含む。松島の定理はC. Birkenhake–H. Langeによっても再発見されている(1999)。

複素トーラスTの正則接ベクトル束を$\mathcal{T}$, $\mathcal{T}=\mathcal{T}_+ \dotplus \mathcal{T}_-$を上記の符号に応じた直交分解とするとき、$H^{0,r}(T, L)$は$C^\infty(T, \det \overline{\mathcal{T}_-} \otimes L)$の部分空間と同一視できる。そこで一般に、複素多様体が直線束のC^∞級断面の連比によって、$\mathbb{C}P^N$に、ある方向には正則で残りの方向に反正則に埋め込めるための条件について考え、次の結果を得た。

定理. Mはコンパクトで連結な複素多様体であり、互いに横断的な二つの正則葉層$\mathcal{F}_\pm$をもつとする。M上に正則Hermite直線束(L, h)があり、そのChern形式Θは$\Theta = \Theta_+ - \Theta_-$, $\Theta_\pm \geq 0$, $\mathrm{rank}\,\Theta_\pm = \dim \mathcal{F}_\pm$, $\Theta_\pm | \mathcal{F}_\pm > 0$をみたすとする。このとき$m_0 \in \mathbb{N}$があって、$\forall m \geq m_0$, $m \in \mathbb{N}$に対し、$K_+ \otimes \overline{K_-} \otimes L^m$の$C^\infty$級断面$t_0, \cdots, t_N$があり、$(t_0 : \cdots : t_N)$は$M$を$\mathbb{C}P^N$に、$\mathcal{F}_+$上では正則に、$\mathcal{F}_-$上では反正則に埋め込む。ただし$K_\pm$は$\mathcal{F}_\pm$の標準直線束を表す。

定理の条件をみたす$(M, \mathcal{F}_\pm, L)$の例としては、複素トーラスの他、(コンパクトな)射影的代数多様体上のGrassmann多様体をファイバーとする平坦束などがある。

特別講演

トーリック・ファノ多様体上の乗数イデアル層と積分不変量

佐野　友二
(東京大学 IPMU)

1　序

Nadel は論文 [10] において, Fano 多様体上の Kähler-Einstein 計量の必要条件の一つとして知られている積分不変量 (いわゆる二木不変量) と十分条件の中で出てくる乗数イデアル層の関係について述べた. 本講演の目的は, Nadel の結果を toric Fano 多様体上で 2 つの方向に拡張した結果を紹介することにある. この講演は二木昭人氏との共同研究 [5] に基づいている.

2　Kähler-Einstein 計量の存在問題

Ω を Kähler 類とする コンパクト Kähler 多様体を (X,Ω) とする. Ω を代表する Kähler 形式 ω が Kähler-Einstein であるとは $\mathrm{Ric}(\omega)=c\omega,\ \ c\in\mathbb{R}$ が成り立つことと定義する. ただし $\mathrm{Ric}(\omega)$ は ω に対応する Kähler 計量 g の Ricci 形式とする. Ricci 形式は X の第一 Chern 類 $c_1(X)$ を代表するので, KE 計量を考えるときには必然的に $c_1(X)$ は定符号または零でなければならない. $c_1(X)$ が負の場合には (定数 $c=-1$ と正規化して) $\Omega=-c_1(X)$ を Kähler 類とする. この場合には Aubin と Yau により Ω を代表するような KE 計量が常に存在することが独立に証明された. $c_1(X)=0$ のときは, 一般に Calabi-Yau 多様体と呼ばれ, Yau により任意の Ω に対して KE 計量 (Ricci-flat 計量) が常に存在することが示された. 残りは $c_1(X)>0$ の場合は Fano 多様体と呼ばれ $\Omega=c_1(X)$ を Kähler 類とする. このときは後述するように KE 計量の存在への障害が知られており, 必ずしも KE 計量が存在するとは限らないことが分かっている. よって存在問題は Fano 多様体上で KE 計量を持つ多様体を特徴づけることに帰着される. これは現在もなお未解決問題である. 最近では, KE 計量の存在問題は定スカラー曲率を持つ Kähler 計量や Calabi の端的 Kähler 計量 (総称して標準 Kähler 計量と呼ぶ) の存在問題の特別な場合として研究されている.

3　必要条件と十分条件

この節では現在まで知られている KE 計量の存在のための必要条件・十分条件について説明する. まずは必要条件から説明する. $(X,c_1(X))$ を第一 Chern 類を Kähler 類とする n 次元 Fano 多様体とする. $\mathrm{Aut}(X)$ を X の正則自己同型群とする. 松島は, X が KE 計量をもつとき $\mathrm{Aut}(X)$ が簡約でなければならないことを示した. この定理により $\mathbb{CP}^2$ の 1 点 及び 2 点 ブローアップで得られる曲面は KE 計量を持たないことがすぐわかる. もう一つが今回の主題の一つである積分不変量である. 二木 [3] は X に KE 計量が存在するとき, 次の積分不変量 $F:\mathfrak{h}(X)\to\mathbb{C}$ が消滅することを示した. た

だし $\mathfrak{h}(X)$ は X の正則ベクトル場がなす Lie 環とする.

$$F(v) := \int_X v h_g \omega_g^n, \ \ v \in \mathfrak{h}(X). \tag{1}$$

ただし $h_g \in C^\infty_{\mathbb{R}}(X)$ は $\mathrm{Ric}(\omega_g) - \omega_g = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}h_g$ で定義される関数とする. F は二木不変量と呼ばれ, 計量 g の取り方に依存しないことが二木により証明された. また $\mathrm{Aut}(X)$ が簡約で二木不変量が消滅しない例も二木により示されている. 松島の定理, 二木不変量の消滅はともに X の対称性に関する条件である. このことから X が非自明な正則ベクトル場を持たなければ KE 計量が存在するという予想が提示されたが, Tian により反例が示された ([15]). Tian は KE 計量を持つとき X は "安定性" (K-安定性) を満たさなければならないことを示し, $\mathfrak{h}(X) = \{0\}$ だが K-安定ではない例を構成した. この例は Fano 多様体の KE 計量の存在問題がデリケートな問題であることを示唆している. またここで現れた "多様体の安定性" という概念は標準 Kähler 計量の存在問題の中で非常に重要な概念であり, 標準 Kähler 計量の存在条件は多様体の安定性と同値であるという予想が提示されている (Yau-Tian-Donaldson 予想).

次に十分条件について説明する. 十分条件の中に現れるのが今回のもう一つの主題である, Nadel [9] の乗数イデアル層 (MIS = multiplier ideal sheaves) である. Nadel は, ある条件を満たす Kähler ポテンシャルの列に対して MIS を定義した. (のちに概多重劣調和関数に対して Demailly-Kollár [1] により再定義された.) 一般に Nadel の乗数イデアル層は次のような Kähler ポテンシャルの列に対して構成される. $S = \{u_i \in C^\infty_{\mathbb{R}}(X) \mid \omega + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}u_i > 0\}$ を $c_1(X)$ に属する Kähler ポテンシャル の列とし, 任意の $\alpha \in (\frac{n}{n+1}, 1)$ に対し

$$\sup u_i = 0, \ \ \lim_{i\to\infty} \int_X \exp(-\alpha u_i)\omega^n = \infty \tag{2}$$

かつ, ある空でない開集合 $U \subset X$ に対し

$$\int_U \exp(-u_i)\omega^n \leq O(1) \tag{3}$$

を満たすとする. Nadel は S に対して非自明な連接イデアル層 $\mathcal{I}_S \subset \mathcal{O}_X(\mathcal{I}_S \neq 0, \mathcal{O}_X)$ を構成し乗数イデアル層と呼んだ. MIS はコホモロジーの消滅定理

- 非負 Hermitian 直線束 L に対し

$$H^q(X, L \otimes \mathcal{I}_S) = 0 \ \ (q > 0). \tag{4}$$

をみたし, 代数幾何の分野で広く活用されている. V を MIS が切り取る部分スキームとする, つまり $\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_S$ とする. V_{supp} を V の台とする. V_{supp} は次のように特徴づけられる; $p \in X$ が V_{supp} に含まれないことは, p のある開近傍 $U \subset X$ とある $\alpha \in (\frac{n}{n+1}, 1)$ に対して

$$\int_U \exp(-\alpha u_i)\omega^n < \mathcal{O}(1)$$

を満たすことに同値である. このことから分かるように, $\mathcal{I}_S$ は $\{u_i\}$ の極限の特異性を反映している. Nadel は MIS を continuity method の解の存在に対する障害として考えた. それを説明するために, まずは continuity method について説明する. $c_1(X)$ を代表する Kähler 形式 $\omega_\varphi = \omega + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\varphi$ が KE 形式であるという条件を Kähler ポテンシャルで書き下すと次の 2 階の偏微分方程式 (複素 Monge-Ampère 方程式) に帰着される:

$$\det(g_{i\bar{j}} + \varphi_{i\bar{j}}) = \det(g_{i\bar{j}})\exp(h_g - \varphi). \tag{5}$$

ここで (5) を continuity method を用いて解くことを考える.

$$\det(g_{i\bar{j}} + (\varphi_t)_{i\bar{j}}) = \det(g_{i\bar{j}})\exp(h_g - t\varphi_t), \ \ t \in [0,1]. \tag{6}$$

解空間 $T := \{t \in [0,1] \mid \text{(6) is solvable at } t\}$ が 0 を含むことは Calabi-Yau の定理により保証され, [0,1] の中で開であることは陰関数定理から証明される. T が閉であるためには, Yau による a priori 評価を満たせばよい, つまりすべての $t < t_0$ において $t \in T$ かつ $\|\varphi_t\|_{C^0} < C$ ならば $t_0 \in T$ である. 逆に X が KE 計量を持たないときには (6) を $t = 1$ に向かって解いていこうとすると, ある $t_\infty \in (0,1]$ において解は a priori 評価を崩す. このとき, Nadel は (6) の解の列 $\{\varphi_{t_i} - \sup\varphi_{t_i}\}$ が MIS を誘導することを示した. 本講演では, この MIS を KE-MIS と呼ぶことにする. 特に初期計量 g が $\mathrm{Aut}(X)$ のコンパクト部分群 G に対して不変であるとき, 得られる KE-MIS は $G^{\mathbb{C}}$-不変になる. ただし, $G^{\mathbb{C}}$ は G の複素化である. 対称性が高い多様体の場合, 消滅定理から得られる MIS の幾何的情報 (連結性 etc...) を用いて MIS の非存在を示せることがある. そのような多様体は a priori 評価が $t = 1$ まで成り立ち KE 多様体となる. この手法で Nadel は KE 多様体の例を示した. ここまでをまとめると, 二木不変量は KE 計量の必要条件を与え, MIS の非存在は十分条件を与えている. これら二つの関係を調べることは KE 計量の必要十分条件を探る上で意味があると考えられる.

4 Nadel の結果

最初に二木不変量と MIS の関係について研究したのは Nadel [10] であった. この節では Nadel の結果を紹介する. $(X, c_1(X))$ を第一 Chern 類を Kähler 類とする n 次元 Fano 多様体とする. 非自明な正則ベクトル場 $v \in \mathfrak{h}(X)$ に対して $Z(v)$ を零点集合とし $Z^+(V)$ を $Z^+(v) := \{p \in Z(v) \mid \mathfrak{Re}(\mathrm{div}(v)(p)) > 0\}$ で定義する. ただし $\mathrm{div}(v)$ は v の発散, つまり $\mathrm{div}(v) := \mathcal{L}_v(vol)/vol$ とする. ただし, $\mathcal{L}_v$ は v に沿った Lie 微分とし, vol を体積形式とする. 一般に v の発散は体積形式に依存するが, $Z^+(V)$ は $Z(v)$ の部分集合なので体積形式によらず well-defined であることを注意しておく.

定理 1 (Nadel, [10]) $(X, c_1(X))$ を KE 計量を持たない Fano 多様体とする. V_{supp} を KE-MIS から定まる部分スキームの台とする. このとき二木不変量が 0 になる, すべての v に対して $V_{supp} \not\subset Z^+(v)$ が成り立つ.

この定理の応用としては $\mathbb{CP}^1$ 上の KE 計量の存在を示すことしか知られていなかった. しかし, 標準 Kähler 計量と多様体の安定性の観点から, この定理を見直すと別の応用が考えられる.

5 第一の拡張

まず定理 1 の第一の拡張の結果を述べる. X を n 次元 toric Fano 多様体とする. X には n 次元トーラス $T \cong (\mathbb{C}^*)^n$ が効果的に作用する. $T_{\mathbb{R}}$ を T の実トーラス, $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ をその Lie 環とする. J を T の複素構造とし, $N_{\mathbb{R}} := J\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ とおく. $\xi \in N_{\mathbb{R}}$ に対し v_ξ を ξ の誘導する正則ベクトル場とする. $M_{\mathbb{R}}$ を $N_{\mathbb{R}}$ の双対空間とし, $\Delta \subset M_{\mathbb{R}}$ を toric Fano 多様体 X を定める reflexive polytope とする. $\xi \in N_{\mathbb{R}}$ に対し, Δ の部分集合 $D^{\leq 0}(\xi)$ を

$$D^{\leq 0}(\xi) := \{y \in \Delta \mid \langle y, \xi \rangle \leq 0\}.$$

と定義する.

定理 2 (S., [5]) X を toric Fano 多様体とし, X は KE 計量を持たないとする. G を X の Aut(X) の極大コンパクト部分群とする. V_{supp} を G-不変計量 g を初期計量とする $G^{\mathbb{C}}$-不変 KE-MIS から定まる部分スキームの台とする. ベクトル $\xi \in N_{\mathbb{R}}$ に対し, $F(v_\xi) > 0$ とすると $\mu_g(V_{supp}) \not\subset D^{\leq 0}(\xi)$ が成り立つ.

この定理の応用を述べる前に, その動機 について説明する. 今までの MIS と KE 計量に関する研究の多くは, 前節で述べたように KE 計量の存在を示すために大きい対称性を持った多様体において消滅定理を用いて非自明な MIS が存在しないことを示すものであった. 定理 2 の動機は, それらの研究結果とは若干異なる. これを説明するために, Yau-Tian-Donaldson 予想 (YTD 予想) について少し触れる. 現在 KE 計量を含む標準 Kähler 計量の存在問題は YTD 予想として定式化されている. 具体的には, 定スカラー曲率を持つ (csc) Kähler 計量の存在は K-安定性などの多様体の安定性を同値であることが予想されている. ここで言う多様体の安定性とは, 代数幾何で moduli 空間を構成するときに用いられる幾何学的不変式論 (Geometric Invariant Theory = GIT) の意味での安定性である. 大まかに述べると, moduli 空間を構成するときに空間 (ベクトル空間) を群 (簡約群) で割ろうとすると得られる商は一般に Hausdorff 性や射影性などの性質を持たない. そこで (半) 安定点と呼ばれるものだけを集めて割ることにより, 「良い」moduli を構成する. YTD 予想は, cscK 計量を持つような Kähler 多様体と多様体の moduli の安定点が対応することを意味している. これは微分幾何的な対象 (偏微分方程式の解) と代数幾何的な対象 (GIT の意味での安定性) を結びつける対応である. このような対応は Hitchin-小林対応と呼ばれ, すでにベクトル束の場合には確立されている. この場合には求めるべき計量は Hermitian-Einstein (または Hermitian Yang-Mills) 計量と呼ばれるものである. 一方, ベクトル束の安定性については代数幾何の方面で独立に次のように定義されていた; $(E, h) \to (X^n, \omega)$ を正則 Hermitian ベクトル束とし, $\mathcal{F} \subset (E)$ をその部分層とする. $\mathcal{F}$ に対してスロープ $\mu(\mathcal{F})$ と呼ばれる量を $\mu(\mathcal{F}) = \int_X c_1(\mathcal{F}) \wedge \omega^{n-1}/\mathrm{rank}(\mathcal{F})$ で定義する. E がスロープ安定であるとは, すべての部分層 $\mathcal{F}$ に対して $\mu(\mathcal{F}) < \mu(E)$ が成り立つことを意味する. ここで「スロープ安定 $\Rightarrow$ HE (HYM) 計量の存在」の証明の流れを大まかに振り返る. 求めるべき計量 (HE) が存在しないと仮定して HE 計量に向かって変形していくことを考える. (HE 計量を臨界点として持つような汎関数の勾配流に沿って変形する). しかし HE 計量が存在しないため, 変形は途中でバブルを引き起こす. そのバブルの特異性からスロープ安定性を崩すような部分層を構成することで証明される. Hitchin-小林対応の多様体版である YTD 予想においても同様の枠組みが成り立つことが期待される. KE 計量の場合には continuity method による変形, そのバブルを計るものが MIS であることが期待される. 実際に continuity method による変形は, KE 計量を臨界点として持つ満渕の K-エネルギー汎関数を最小にする方向への変形になっている.

注釈 3 しかし, continuity method による方法は今のところ cscK 計量や端的計量の場合には確立されていない. cscK 計量などへの拡張を考える場合には continuity method よりも Kähler-Ricci flow などの幾何学的フローを考えたほうが自然であると思われる.

では, 「多様体のスロープ安定性に対応するものは何か」という問題がある. これは Ross-Thomas ([12]) によって最近定義された. 彼らは偏極多様体 (X, L) の部分スキームに対してベクトル束の部分層に類似する形でスロープを定義し, それを用いて多様体のスロープ安定性を定義した. そして, それは Tian の K-安定性 [15] (のちに Donaldson [2] が代数的に再定義した) への障害になっていることを示し, その結果, 多様体のスロープ安定性が cscK 計量の存在への障害になっていることを導いた.

これらをふまえると, 次の問題が自然に考えられる.

問題 Fano 多様体 $(X, c_1(X))$ を anti-canonical 直線束 K_X^{-1} で偏極された多様体と考

えたとき, X が KE 計量を持たなければ KE-MIS (または, それに対応する部分スキームの台) は X のスロープ安定性を崩すか？

定理 2 の応用として, もっとも簡単なケースについて上の問いに答える.

系 4 X を $\mathbb{CP}^2$ の 1 点ブローアップで得られる曲面とすると, $G^{\mathbb{C}}$-不変 KE-MIS の定める部分スキームの台は例外因子である. この部分多様体は anticanonical polarization に関し Ross-Thomas のスロープ安定性の意味で (X, K_X^{-1}) の安定性を崩す.

注釈 5 X を $\mathbb{CP}^2$ の 2 点 p_1, p_2 におけるブローアップで得られる曲面とすると $G^{\mathbb{C}}$-不変 KE-MIS の定める部分スキームの台は, p_1 と p_2 を結ぶ line の固有変換 E_0 か, E_0 を含む自己交点数 (-1) の 3 本の曲線の tree であることまではわかるが, 定理 2 はどちらであるかを決定するには不十分である. ちなみに, X は Panov-Ross [11] により anticanonical polarization に関しスロープ安定であることが示された. これは X が KE 計量を持たないことから考えると, Ross-Thomas のスロープ安定性の定義が KE 計量の存在を示すには, まだ十分ではないことを意味している.

注釈 6 最近の研究により, continuity method と同様に Kähler-Ricci flow も MIS を誘導することが示された (Phong-Sesum-Sturm, Rubinstein). toric Fano 多様体の場合, Kähler-Ricci flow から得られる MIS の方が, KE-MIS より具体的に計算することが出来る. 実際に $\mathbb{CP}^2$ の 2 点ブローアップの場合, 得られる MIS に対応する部分スキームの台は E_0 を含む自己交点数 (-1) の 3 本の曲線の tree であることがわかる ([5, 14]).

6 第二の拡張

第二の拡張は, Nadel が KE 計量の存在を示すために用いた MIS の手法を KE 計量を拡張した計量に適用することである. その定義から KE 計量は cscK 計量や端的 Kähler 計量への特殊なケースとして考えられる. 一方で Fano 多様体上の標準 Kähler 計量として別の拡張も知られている. その一つが Kähler-Ricci soliton である. X を n 次元 Fano 多様体とし, K を $\mathrm{Aut}(X)$ の極大コンパクト部分群, $\mathfrak{k}(X)$ を K の Lie 環, $\mathfrak{h}_r(X)$ を K の複素化の Lie 環とする. $\mathfrak{h}_r(X)$ は $\mathfrak{h}(X)$ の reductive part に等しい. g を $c_1(X)$ に属する K-不変 Kähler 計量とし, 正則ベクトル場 $v \in \mathfrak{h}_r(X)$ を取る. 組 (g, v) が Kähler-Ricci soliton (KRS) であるとは

$$\mathrm{Ric}(\omega_g) - \omega_g = \mathcal{L}_v(\omega_g) \tag{7}$$

を満たすときをいう. $v = 0$ のときには (7) を満たす計量は KE 計量そのものになる. (7) を Kähler ポテンシャル の方程式として書くと, KE 計量のときと同様に次の Monge-Apmère 方程式に帰着される.

$$\det(g_{i\bar{j}} + \varphi_{i\bar{j}}) = \det(g_{i\bar{j}}) \exp(h_g - \theta_{v,g} - v(\varphi) - \varphi).$$

ただし $\theta_{v,g} \in C^\infty_{\mathbb{R}}(X)$ を

$$\iota(v)\omega_g = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\bar{\partial}\theta_{v,g}, \quad \int_X e^{\theta_{v,g}}\omega_g^n = \int_X \omega^n$$

で定義される関数とする. このことから, KE 計量と同様に KRS にも continuity method が適用できる. 定理 1 を KRS に拡張するためには二木不変量をこの場合に拡張しな

ければならない．これは Tian-Zhu [16] により次のように定義されていた．与えられた (g, v) に対して

$$F_v(w) := \int_X w(h_g - \theta_{v,g}) e^{\theta_{v,g}} \omega_g^n$$

と定める．F_v は二木不変量と同様に計量に依存しない．特に $v = 0$ のときは通常の二木不変量に等しい．次の事実 ([16]) は KRS 特有なものである．

命題 7 (Tian-Zhu, [16]) F_v が $\mathfrak{h}_r(X)$ 上で消滅し $\mathfrak{Im}(v) \in \mathfrak{k}(X)$ を満たす $v \in \mathfrak{h}_r(X)$ がただ一つ存在する．

特に X が toric Fano 多様体の場合，命題 7 の v に対して F_v は $\mathfrak{h}(X)$ 上で消滅する (Wang-Zhu, [17])．このとき次のことを証明できる．

定理 8 (二木 - S., [5]) 命題 7 の $v \in \mathfrak{h}_r(X)$ に対して continuity method により Kähler-Ricci soliton の存在を証明できない場合，KE 計量のときと同様に MIS が定義される．$V_{v,supp} \subset X$ を上で得られた MIS の定める部分スキームの台とすると任意の正則ベクトル場 $w \in \mathfrak{h}_r(X)$ に対し $V_{v,supp} \not\subset Z^+(w)$ が成り立つ．

KE 計量のときと異なる点は二木不変量の消滅の条件を必要としないことである．これは KRS が KE 計量よりも存在しやすいことを意味している．この定理の応用として，$\mathbb{CP}^2$ の 1 点ブローアップで得られる曲面に KRS が存在することを示すことが出来る．これは小磯 [6], Wang-Zhu [17] の結果の別証明を与える．2 点ブローアップの曲面にも同様の結果が期待されるが，定理 8 ではまだ不十分である．(一般の toric Fano 多様体上には常に KRS が存在することは既に Wang-Zhu [17] で示されている.)

この手法は，さらに別の KE 計量の拡張にも有効である．満渕 [7] は二木不変量が消滅しない Fano 多様体上にも KE 計量の概念を次のように拡張した．$\omega_g \in c_1(X)$ が満渕の意味で一般化された KE 形式 (本講演では GKE 形式と書く) であるとは，$1 - e^{h_g}$ の複素勾配ベクトル場

$$\mathrm{grad}_\omega^{\mathbb{C}}(1 - e^{h_g}) := \frac{1}{\sqrt{-1}} \sum_{i,j} g^{i\bar{j}} \frac{\partial(1 - e^{h_g})}{\partial \bar{z}^j} \frac{\partial}{\partial z^i}$$

が正則であることを意味する．二木不変量が消滅する場合，GKE 計量は通常の KE 計量に等しい．この KE 計量の拡張は KRS の拡張とは別のタイプであるが，満渕は [8] において KRS と GKE 計量を含めた KE 計量の拡張として乗数 Hermitian 構造 とその Einstein 計量を定義した．Nadel の MIS の手法は KRS と同様の方法で乗数 Hermitian 構造 の Einstein 計量まで拡張できることがわかる．つまり，乗数 Hermitian 構造の Einstein 計量 を求める Monge-Ampère 方程式に対しても continuity method が適用することができ，Einstein 計量が存在しないときには KE 計量のときと同じく MIS を誘導することがわかる．さらに二木 [4] は二木不変量を乗数 Hermitian 構造の Einstein 計量への障害として拡張した．$\mathbb{CP}^2$ の 1 点 および 2 点 ブローアップで得られる曲面の場合，[13] により 拡張された二木不変量が消滅することがわかる．このことと定理 1 の乗数 Hermitian 構造への拡張より次のことが証明できる．

定理 9 (S., [13]) $\mathbb{CP}^2$ の 1 点ブローアップで得られる曲面には GKE 計量が存在する．

$\mathbb{CP}^2$ の 1 点ブローアップで得られる曲面上の GKE 計量の存在は満渕 [8] により示されていたが，定理 9 はその別証明を与えている．

References

[1] J.P. Demailly and J. Kollár, Semi-continuity of complex singularity exponents and Kähler-Einstein metrics on Fano orbifolds., Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **34, No.4** (2001) 525–556.

[2] S.K. Donaldson, Scalar curvature and stability of toric varieties., J. Differential Geom. **62, No.2** (2002) 289–349.

[3] A. Futaki, An obstruction to the existence of Einstein Kähler metrics., Invent. Math. **73, No. 3** (1983) 437–443.

[4] A. Futaki, Some invariant and equivariant cohomology classes of the space of Kähler metrics., Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **78, No.3** (2002) 27–29.

[5] A. Futaki and Y. Sano, Multiplier ideal sheaves and integral invariants on toric Fano manifolds., arXiv:0711.0614 (2007).

[6] N. Koiso, On rotationally symmetric Hamilton's equation for Kähler-Einstein metrics., Recent topics in differential and analytic geometry, Adv. Stud. Pure Math., **18** (1990) 327–337.

[7] T. Mabuchi, Kähler-Einstein metrics for manifolds with nonvanishing Futaki character., Tohoku Math. J. (2) **53, No.2** (2000) 171–182.

[8] T. Mabuchi, Multiplier Hermitian structures on Kähler manifolds., Nagoya Math. J. **170** (2003) 73–115.

[9] A.M. Nadel, Multiplier ideal sheaves and Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature., Ann. of Math. (2) **132, No.3** (1990) 549–596.

[10] A.M. Nadel, Multiplier ideal sheaves and Futaki's invariant., Geometric Theory of Singular Phenomena in Partial Differential Equations (Cortona, 1995), Sympos. Math., XXXVIII, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998. (1995) 7–16.

[11] D. Panov and J. Ross, Slope stability and exceptional divisors of high genus., arXiv:0710.4078 (2007).

[12] J. Ross and R.P. Thomas, An obstruction to the existence of constant scalar curvature Kähler metrics., J. Differential Geom. **72, No.3** (2006) 429–466.

[13] Y. Sano, On the holomorphic invariants for generalized Kähler-Einstein metrics., to appear in Kodai Math. J.

[14] Y. Sano, On multiplier ideal sheaves and the Kähler-Ricci flow on toric Fano manifolds with large symmetry., preprint.

[15] G. Tian, Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature., Invent. Math. **130, No.1** (1997) 1–37..

[16] G. Tian and X. Zhu, A new holomorphic invariant and uniqueness of Kähler-Ricci solitons., Comment. Math. Helv **77, No.2** (2002) 297–325.

[17] X.J. Wang and X. Zhu, Kähler-Ricci solitons on toric manifolds with positive first Chern class., Adv. Math. **188, No.1** (2004) 87–103.