日本数学会

２００８年度 年会

函数論分科会

講演アブストラクト

２００８年 ３月

於 近畿大学

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
   函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする．

2. 委員会の任務
   (a) 函数論分科会評議員候補者を選出する．
   (b) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦．
   (c) 科研費基盤研究（審査区分（１））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼．
   (d) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる．
   (e) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する．
   (f) 分科会の行事 (たとえば，シンポジウムの開催等) について決定する．
   (g) 次期委員会委員候補者の推薦．
   (h) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する．

3. 委員会の構成及び委員の選出・任期
   (a) 委員の定数は特に定めないが 10 名程度をもって構成する．必要に応じ追加，削減できる．
   (b) 委員の任期は春季学会から２年間とする．再任は妨げないが，原則として再々任は認めない．
   (c) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う．
      i. 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する．その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する．
      ii. 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する．

4. 委員会の開催及び議決
   (a) 委員会は評議員が召集する．
   (b) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する．
   (c) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する．必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる．
   (d) 案件の議決は投票によってはならない．決定できない時は懸案事項として次回に繰越す．緊急事項については評議員に処置を一任する．

5. 函数論分科会委員会における評議員の任務
   (a) 委員会の司会をする．
   (b) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する．
   (c) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する．
   (d) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する．

付 則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する．
付 則　この規則の改正は，1996 年 8 月 1 日より施行する．

第3日　3月23日 (日)

9:00~12:00

1	足立　幸信 金井　真一郎		* On a Schur stable set of algebraic equations ······ 15
2	足立　幸信		* On the property of manifold $M := \mathbf{P}^2 - A(l)$ where $A(l)$ is an algebraic curve with $l(l \geq 4)$ irreducible components ······ 15
3	足立　幸信		* A remark about Fatou-Bieberbach domains ······ 15
4	足立　幸信		* A generalization of the little Picard theorem ······ 15
5	足立　幸信		* On the holomorphic maps of $\mathbf{C}^2$ to $\mathbf{C}^2$ which preserves a general type polynomial of two variables ······ 15
6	大沢　健夫	(名大多元数理)	正則葉層の曲率について ······ 15
7	木坂　正史	(京大人間環境)	Some properties of Julia components of transcendental entire functions with multiply-connected wandering domains ······ 15
8	伊藤　雅明 柴　雅和 幡谷　泰史	(広島大工) (広島大工) (山口大理工)	Riemann 面の等角的埋め込みと一般化された Hagen-Poiseuille 流れ ··· 15
9	平田　賢太郎	(秋田大教育文化)	* 非線形不等式を満たす優調和関数の境界挙動に関する注意 ······ 15
10	前田　多恵	(岡山大自然)	* フックス群の commensurability と固定点集合との関係について ······ 15
11	前田　文之		* 変動指数の増大条件を満たす準線形楕円型方程式のディリクレ問題に対する再正規化解 ······ 15

14:15~15:15

12	中井　三留		* 容量の極値関数 ······ 15
13	戸田　暢茂		* An estimate of the sum of defects of a holomorphic curve ······ 15
14	佐藤　宏樹 L. Changjun 後藤　浩文	(静岡大理) (中国海洋大) (静岡大理)	* Jørgensen numbers of triangle groups ······ 15
15	米田　力生	(小樽商科大)	* Closed range multiplication operators and the sampling set ······ 15

15:30~16:30　特別講演

都丸　正　(群馬大医学部)　* 複素2次元特異点と閉リーマン面の退化族について

第4日　3月24日 (月)

8:50~12:05

16	西本　勝之	(デカルト出版)	* N-fractional calculus of some functions and their n-th derivatives ······ 15
17	西本　勝之	(デカルト出版)	* N-fractional calculus of some irrational functions ······ 15

18 菱川 洋介 (岐阜大工学研) ♯ Fractional calculus of parabolic Bergman spaces ······ 15

19 中根 静男 (東京工芸大工) * An axiom A polynomial skew product of degree four ······ 15

20 西尾 昌治 (阪 市 大 理) ♯ Carleson inequalities on parabolic Bergman spaces ······ 15
鈴木 紀明 (名大多元数理)
山田 雅博 (岐 阜 大 教 育)

21 谷口 彰男 (日 大 文 理) * 単葉関数からなる関数族間の包含関係について ······ 10

22 松崎 克彦 (岡 山 大 自 然) * 等角自己同型群で固定される漸近的タイヒミューラー類について ······ 15

23 早味 俊夫 (近畿大総合理工) * Coefficient inequalities for λ-spiral like and strongly starlike functions
尾和 重義 (近 畿 大 理 工) ······ 15

24 黒木 和雄 (近畿大総合理工) * Some subordination criteria for analytic functions ······ 15
尾和 重義 (近 畿 大 理 工)

25 白石 将 (近畿大総合理工) * Some sufficient problems for certain univalent functions ······ 15
尾和 重義 (近 畿 大 理 工)

26 橋爪 康徳 (近畿大総合理工) * Majorization problems for certain analytic functions ······ 15
尾和 重義 (近 畿 大 理 工)

27 西脇 純一 (近畿大総合理工) * Applications of certain analytic functions related to uniformly starlike
尾和 重義 (近 畿 大 理 工) ······ 15

13:30~14:30 特別講演

下村 俊 (慶 応 大 理 工) 角領域における値分布論とその応用

1　On a Schur stable set of algebraic equations

足立幸信
金井真一郎

$a_k(x)(k=0,\cdots,n-1)$ を x 平面上の単連結領域 D_0 の正則関数として z の代数方程式

$$P(x,z)=z^n+a_{n-1}(x)z^{n-1}+\cdots+a_1(x)z+a_0(x)=0 \qquad (1),$$

を考える。

定義1．　$x\in D_0$ に対し、(1) の解 $z_i(x)$ が $|z_i(x)|<1(i=1,\cdots,n)$ をみたすとき、Schur stable な点といい、そういう点全体を Schur stable set と呼び D_S と記号する。

Schur stability の問題は工学上の関心から、今まで研究されてきたようであるが、実際上の要請から $a_k(z)$ がすべて実数、または実数区間の場合について主に研究されてきた。数学的にはあまりにも不自然なので、上のような形で考えてみた。これは第一ステップで、x を多変数にすることを考えている。

係数の連続性から解の連続性が従うので

命題2．　D_S は開集合である。

簡単な計算より

命題3．　領域 D は D_0 内の Jordan 閉曲線 C で囲まれたもので、$C\subset D_S$ とする。すると $\forall x\in\bar{D}$ に対し $|a_{n-k}(x)|<nCk(k=1,\cdots,n)$.

系4．　$a_0(x)\equiv 1(=nC_0)$ なら $D_S=\emptyset$ である。

定理5．D を命題3と同じものとすると、$\bar{D}\subset D_S$ である。つまり D_S の連結成分は単連結である。

偏角の原理より

定理６．(Fazer-Duncan)　C を D_0 内の Jordan 閉曲線で $\exists x_0 \in D_S \cap C$ かつ $P(x,z) \neq 0 \quad \text{on} \quad \{|z|=1\} \times C$ とする。C で囲まれた D_0 内の領域を D とすると $\bar{D} \subset D_S$.

（条件A）$1 > a_{n-1}(x) > a_{n-2}(x) > \cdots > a_0(x) > 0$　をみたすなら $x \in D_S$

（条件B）$1 > |a_{n-1}(x)| + \cdots + |a_0(x)|$　をみたすなら $x \in D_S$

であることはよく知られている。

命題７．　C を D_0 内の Jordan 閉曲線とし、D は C で囲まれた領域とする。C 上の任意の点で条件（A）または（B）をみたすなら、$\bar{D} \subset D_S$ である。C 上のある点 x_0 で条件（A）または（B）をみたし、$P(x,z) \neq 0$ on $\{|z|=1\} \times C$ なら　$\bar{D} \subset D_S$ である。

ここからは $a_k(x)$　$(k = 0, \cdots, n-1)$ は x の多項式であるケースを考える。そうすると具体的な $a_k(x)$ に対し D_S の絵が Maple などで描ける。（講演時に紹介する）

更に $a_k(x)$ のすくなくとも１つは定数でないという場合を考える。($a_k(x)$ がすべて定数なら $D_S = \emptyset$ または $|x| < \infty$ である。)

定理８．　D_S は有界集合である。

定理９．　D_S の境界は区分的に実解析的な曲線である。

問題１０．　D_S の連結成分の数は m または n の関数で評価できるか？

2 On the property of the manifold $M := \mathbf{P}^2 - A(l)$ where $A(l)$ is an algebraic curve with $l (l \geq 4)$ irreducible components

足立幸信

以下、$M = \mathbf{P}^2 - A(l)$ とする。① M が一般型であること（対数的小平次元 $\kappa(M) = 2$)、 ②測度双曲的であること、③ $\Delta_M = \{p \in M; \exists q \in M - \{p\} \ \ s.t. \ \ d_M(p, q) = 0\}$ が代数曲線か空集合であること、という 3 つの概念は同一であることを示す。

定義 1．([2, p236] 参照)　$p, q \in \mathbf{P}^2$ に対して $\bar{d}_M(p, q)$ を
$\liminf_{p' \to p, q' \to q} d_M(p', q'), p', q' \in M$ とする。
$S_M(\mathbf{P}^2) = \{p \in \mathbf{P}^2; \exists q \in \mathbf{P}^2 - \{p\} \quad \text{s.t.} \quad \bar{d}_M(p, q) = 0\}$ とする.

定義から容易に分かることであるが、$S_M(\mathbf{P}^2) \cap M = \Delta_M$.　また $S_M(\mathbf{P}^2)$ はオーダー 1 の擬凹状集合（Theorem 2 [3]）、従って Δ_M は M のオーダー 1 の擬凹状集合であるから、$S_M(\mathbf{P}^2)$ が高々代数曲線であれば、代数曲線または空集合である。

命題 2．(Theorem 8.1 [1])　M は次の 2 つのケースしかない。
a)　$S_M(\mathbf{P}^2)$ は $\mathbf{P}^2$ の曲線か空集合。
b)　$S_M(\mathbf{P}^2) = \mathbf{P}^2$.

b) となる条件とその時の $A(l)$ はどういうものかは [1] において示されている。b) となる条件は、荒っぽく言えば、$\mathbf{C}$ または $\mathbf{C}^*$ タイプの原始的有理関数 f が M 上に存在し、$\mathbf{P}^1$ の 3 つの値を取らない。定理 3 、4 はそのへんのことを本質的に使う。

定理 3．M が一般型である必要充分条件は、命題 2 のケース a) であることである。

（証明の概略）b) のケースであることと $\kappa(M) \leq 1$ であることを Proposition 2.4 [5], [6, p90] などを使って示す。

定理４．M が測度双曲型である必要充分条件は、命題２のケース a) であることである。

（証明の概略）測度双曲的ならケース a) であることが本質的であるが、Theorem(7.1.4) [4], Theorem 3 [7] などを使って示す。

定理５．(Theorem 4.4 [2]) M が tautly imbedded modulo $S_M(\mathbf{P}^2)$ in $\mathbf{P}^2$ である必要充分条件は、命題２の a) であることである。

References

[1] Y.Adachi, Kodai Math. J. 18(1995), 408-424.

[2] Y.Adachi, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 33(1997), 385-392.

[3] Y.Adachi and M.Suzuki, Proc. sympos. pure math. 52, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1991, 41-51.

[4] S.Kobayashi, Grundlehren der mathmatishen Wissenschaften 318, Springer-Verlag Berlin Heiderberg, 1998.

[5] F.Sakai, Iwanami and Cambridge Univ. Press, 1997, 239-257.

[6] F.Sakai, Math. Annalen, 254(1980), 89-120.

[7] H.Yamaguchi, J. Math. Kyoto Univ. 16(1976), 497-530.

3　A remark about Fatou-Bieberbach domains

足立幸信

定義1．$\mathbf{C}^2$ の既約な代数曲線 C が双曲的とは、$g(C)=0$ かつ $C\cap L_\infty$ が異なる3点以上で交わるか、または $g(C)\geq 1$ のときをいう。

定義2．$\mathbf{C}^2$ と一致しない $\mathbf{C}^2$ の領域 D が $\mathbf{C}^2$ と双正則のとき、Fatou-Bieberbach 領域という。

注意3．双正則でなくても、$\mathbf{C}^2$ から D への非退化正則写像があるときもF－B領域ということがある。ここでは広い意味でのF－B領域と呼ぶことにする。

定理4．F－B領域 D（広い意味で）は双曲的曲線 C を除外しない。つまり $C\cap D\neq\emptyset$.

注意5．[5],[6] によると、あるF－B領域 D はある複素直線 L に対して $\bar{D}\cap L=\emptyset$ をみたす。一方 [2] によると、多項式自己同型の attracting basin で定義されるF－B領域 D は任意の代数曲線を除外する。

定理4は次の補題6と系7より言える。

補題6．C を双曲的曲線とすると $\mathbf{C}^2-C$ は一般型である。

（証明の概略）[7],[6] の結果を使う。

系7．C を双曲的曲線とすると、$F:\mathbf{C}^2\to\mathbf{C}^2-C$ を整写像とすると、F は退化する。(像が開集合を含まない)

（証明の概略）[6] より F が非退化とすると、F は多項式写像になるからである。

問題8．系7と同じ状況で F は代数的に退化するであろうか？

命題９．Dを広い意味のＦ－Ｂ領域とする。$P(x,y)$を任意の非定数多項式とすると、$\{P=\alpha\}\cup\{P=\beta\}(\alpha\neq\beta)$を$D$は除外しない。

（証明の概略）$F:\mathbf{C}^2\to D$を整写像とすると$P\circ F\neq\alpha,\beta$なら、$P\circ F$は定数となるから。

従って広い意味のＦ－Ｂ領域は交わらない２本の複素直線を除外しない。[3, p33]

一方ある広い意味でのＦ－Ｂ領域で$\{xy=0\}$の近傍を除外するものがある。[4, p128]

注意１０．[1]によると$\mathbf{C}^2$の任意の代数曲線または解析集合を含むＦ－Ｂ領域Dを構成できる。従ってDは任意有限個の複素直線を含み得るし（[6, p79]のProblem 12の肯定的解答）、$\mathbf{C}^2$の解析集合である無限個の複素直線を含み得る。

References

[1] T.Buzzard and J.E.Fornaess, Math. Ann., (306)1996, 539-546.

[2] E.Bedford and J.Smillie, Indiana Univ. Math. J., 40.(1991), 789-792.

[3] I.M.Dektyarev, Several complex variables III, Springer-Verlag,1989.

[4] P.G.Dixon and J.Estale, Bull. Amer. Math. Soc., 15(1986), 127-187.

[5] Y.Nishimura, J. Math. Kyoto Univ., 24(1984), 755-761.

[6] J.P.Rosay and W.Rudin, Trans. Amer. Math. Soc., 310(1988), 47-86.

[7] F.Sakai, Iwanami and Cambridge Univ. Press, 1997, 239-257.

[8] I.Wakabayashi, Proc. Japan Acad., 54(1978), 157-162.

4 A generalization of the little Picard theorem

足立幸信

次の定理を得た。

定理. X は連結コンパクト多様体で次元を $m(m>0)$, A は X の解析的集合とする。Y は $\mathbf{P}^n[z_0:\cdots:z_n]$ の相対コンパクトな領域 $(n>0)$ で、$S_Y(\mathbf{P}^n)$ を Y の小林擬距離 d_Y を拡張した $\bar{d}_Y$ の退化集合としたとき、$S_Y(\mathbf{P}^n)$ は $\mathbf{P}^n$ の代数的超曲面 $S=\{f(z_0,\cdots,z_n)=0\}$ に含まれるとする。(f は同次多項式)

$F:X-A\to Y$ を有理型写像とすると F は $\bar{F}\in Mer(X,\mathbf{P}^n)$ に拡張できるか、$F(X-A)\subset S$ となる。

歴史的なことを言うと、古典的な Picard の小定理は

定理A. $\forall F\in Hol(\mathbf{C}^n,\mathbf{P}^1-\{a,b.c\})$ は定数写像である。

これは小林双曲幾何のことばでは、$d_{\mathbf{C}^n}\equiv 0$, $\mathbf{P}^1-\{a,b,c\}$ is hyperbolically imbedded in $\mathbf{P}^1$ ということの帰結である。

Fujimoto[2] は次のような Picard の小定理の拡張を行っている。

定理B. $\mathbf{C}^k$ から $\mathbf{P}^n$ より一般な位置にある $n+2$ 個の超平面を除いた領域 Y への正則写像 F は、対角線的超平面 Δ_d に像が含まれるか、$\bar{F}\in Mer(\mathbf{P}^k,\mathbf{P}^n)$ に拡張できる。

$n+2$ 個の超平面を $H_0\cup\cdots\cup H_{p+1}$ とし、それから決まる対角線的超平面 Δ_d（定義は [1,p415] を参照）とすると、Y is hyperbolically imbedded modulo Δ_d in $\mathbf{P}^n$ である。

上記定理は定理 B の拡張とみなせる。定理の証明のスケッチを述べる前に準備的なものを簡単に述べておく。

Terada[3] の Theorem 1 の系として、次の補題が言える。

補題1．f を $\Delta^*(t)\times\Delta^k((s))$ の有理型関数で Δ^{k+1} では有理型関数でないとすると、$E=\{(s_0)\in\Delta^k; f(t,(s_0))$ は $\Delta(t)$ で有理型$\}$ とすると E は polar set である。

定義2．(cf. Definition 3.1, 3.3 [1])　連結多様体 Z の相対コンパクトな領域を Y とし、$f:\Delta^*\to Y$ を正則写像とする。原点における f の集積値集合を $f(0:Z)=\bigcup_{\rho>0}\overline{f(\Delta^*(\rho))}$ とし、$f(0:Z)$ が2点以上を含むとき、f は0で真性特異点を持つという。（そうでなければ除去可能特異点である）

補題3．(Theorem 3.6 [1])　　$f\in Hol(\Delta^*,Y)$ が0を真性特異点とするなら $f(0:Z)\subset S_Y(Z)$ である。

[定理の証明のスケッチ]

$m=1$ のケースは簡単なので $m=2$ とする。A の $codim=1$ の規約成分 A_1 で $A_1-Sing(A)$ の点の近傍は $\Delta^*(t)\times\Delta^{m-1}((s))$ と考えられる。F をそこに制限したものを F^0 とすると、その規約表現 $[\phi_0:\cdots:\phi_n]$ が得られ、F^0 が Δ^m まで有理型に接続できないとすると、polar set $E\subset\Delta^{m-1}$ が存在して、$(s_0)\notin E$ に対し、$F^0|_{(s)=(s^0)}:\Delta^*(t)\to Y$ は $t=0$ を真性特異点とする。従って、補題3より $t=0$ における集積値集合は $S_Y(\mathbf{P}^n)$ に含まれる。

$\Phi=f(\phi_0,\cdots,\phi_n)$ を考えると、規約表現の取り方にはよらない $\Delta^*\times\Delta^{m-1}$ での正則関数で、$(s_0)\notin E$ としたとき、$(0,(s_0))$ で連続で0を取る。Terada [3] Theorem 1 より Φ は Δ^m で正則となる。最終的には $codim>1$ の解析集合を除き正則であることから、X で正則、つまり $\Phi\equiv0$ となる。

References

[1] Y.Adachi, Kodai Math. J., 18(1995), 408-424.

[2] H.Fijimoto, Tôhoku Math. J., 24(1972), 415-422.

[3] T.Terada, J. Math. Kyoto Univ., 12(1972), 263-396.

5 On the holomorphic maps of $\mathbf{C}^2$ to $\mathbf{C}^2$ which preserves a general type polynomial of two variables

足立幸信

古典的なことであるが、3つの値の分布が等しい有理関数は唯1つしかない。従って $P(x), Q(x)$ を多項式とし、$P(x)$ と $P(Q(x))$ の2つの値の分布が等しければ $P = P(Q)$, つまり $Q = id.$ である。このことを2変数に拡張する。

定理. $A_i (i = 1, 2, 3)$ を原始的で (g, n)type の一般型多項式 $P(x, y)$ の一般な level curve とする。F を $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ の整写像とし、$F(A_i) = A_i (i = 1, 2, 3)$ をみたすものとする。すると $F \in Aut_{alg}(\mathbf{C}^2)$ かつ $P \circ F = P$ をみたす。またそのような F 全体は $Aut_{alg}(\mathbf{C}^2)$ の部分群を成し、$\sharp\{F\} \leq l = 12(g-1) + 6n$.

ここで言葉の説明をしておく。

多項式 $P(x, y)$ が原始的とは有限個の level curve を除く全ての level curve は既約で、type(g, n) は一定で非特異である。それらを一般な level curave という。従って A_i において $P(x, y)$ の取る値は異なる。type(g, n) とはその種数が g で境界が n 個の点（$\mathbf{P}^2$ で考えて L_∞ において特異点になっている場合は正規化して数える）であることである。

一般型の多項式とは一般な level curve の type が (g, n) としたとき、$2g - 2 + n > 0$ をみたすことである。従って例外型は $(0, 1), (0, 2)$ type に限られる。

上の定理において $P(x, y)$ を原始的としているということに本質的意味はない。$\sharp\{F\}$ が増えるだけのことである。しかし一般型であることは本質的である。実際、例外型であれば Kizuka[3],Yoshioka and Takano[5] による次の結果がある。

結果。 $P(x, y)$ を例外型の多項式とし、$T \in Aut(\mathbf{C}^2)$ が $P \circ T = P$

をみたすなら、$\{T\}$ は $Aut(\mathbf{C}^2)$ の超越的な無限部分群を成す。

[定理の証明のスケッチ]

[2] の Theorem 4.9 より先ず定理の条件をみたす F は多項式写像であることが言える。

Oikawa [4] の結果（後述）と (g,n)type のリーマン面の非定数 self map は自己同型であるという事実を使うと、ある自然数 m があって、$F^m|_{A_i} = id.(i = 1,2,3)$ となる。ここで F^m(m-ply iteration of F) を改めて $\bar{F}$ とおく。

$D = \mathbf{C}^2 - (A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbf{P}^2 - (L_\infty \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ は hyperbolically imbedded modulo S(algebraic curve) in $\mathbf{P}^2$ ということが [1] の Theorem 4.3 よりいえ、更に [1] の Theorem 4.4 より tautly imbedded modulo S in $\mathbf{P}^2$ がいえる。このことにより、ある自然数 k があって $\bar{F}^k = id.$ がいえる。先程講演した Picard の小定理などを使う。

$\bar{F}^k = id.$ なら $\bar{F} \in Aut(\mathbf{C}^2), \bar{F} = F^m$ より F も $Aut(\mathbf{C}^2)$ で F は多項式写像であったから、$F \in Aut_{alg}(\mathbf{C}^2)$ である。

ちょっとがんばると $P \circ F = P$ がいえる。もうちょっとがんばると $\sharp\{F\} \leq l = 12(g-1) + 6n$ がいえる。上の l は Oikawa [4] から出てくるのであるが、それをここで述べておく。

結果。R を (g,n)type で $2g-2+n > 0$ の有限リーマン面とすると、$\sharp\{Aut(R)\} \leq l$ である。

References

[1] Y.Adachi, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 33(1997), 385-392.

[2] Y.Adachi, Far East J. Math. Sci., 10(2003), 163-186.

[3] T.Kizuka, Tôhoku Math. J., 31(1979), 553-565.

[4] K.Oikawa, Kodai Math. Sem. Rep., 8(1956), 23-30, Supplement, Ibid., 115-116.

[5] T.Yoshioka and Y.Takano, Osaka J. Math., 14(1977), 253-270.

6　正則葉層の曲率について

大沢健夫（名大多元数理）

要旨：コンパクトな複素多様体上の正則な葉層に関し、葉の次元に関する一定の条件の下で、その法束の曲率形式を各葉に制限したものは、いたる所負になることも、いたる所正になることもない。レビ葉層についても似た結果が得られる。

1. M をコンパクトかつ連結な n 次元複素多様体、$\mathcal{F}$ を余次元が r の M 上の正則葉層とする。M の接束 TM の、$\mathcal{F}$ の接束 $T\mathcal{F}$ による商ベクトル束を $\mathcal{F}$ の法束といい、$N_{\mathcal{F}}$ で表す。$N_{\mathcal{F}}$ には M と $\mathcal{F}$ の複素構造から導かれる正則ベクトル束の構造が入っている。

2. $\det N_{\mathcal{F}}\ (:= \overset{r}{\bigwedge} N_{\mathcal{F}})$ の曲率についての結果は次の通り。

定理1. $\dim M \geq 2$ かつ $r < n$ ならば、$\det N_{\mathcal{F}}$ のいかなるファイバー計量に対しても、その曲率形式を各葉に制限したものがいたる所負になることはない。

3. M上の正則直線束Eが$\mathcal{F}$に沿って正であるとは、Eのあるファイバー計量の曲率形式が$\mathcal{F}$のどの葉に制限しても正になることをいう。この意味での$N_{\mathcal{F}}$の正値性に関して次の結果が得られた。

定理2. $r=1$、かつ $\dim \mathcal{F} \geq 2$ ならば、$N_{\mathcal{F}}$は$\mathcal{F}$に沿って正ではない。

定理3. $r=1$ かつ $\dim \mathcal{F}=1$ で、$N_{\mathcal{F}}$が$\mathcal{F}$に沿って正であるような$(M, \mathcal{F})$が存在する。

4. Xをコンパクトかつ連結なC^∞級のレビ平坦多様体、$\mathcal{L}$をX上のレビ葉層とする。このとき$\mathcal{L}$の複素法束にはCR直線束の構造が入っている。この直線束$N_{\mathcal{L}}$の$\mathcal{L}$に沿う正値性（定義は上に準ずる）について次が成立する。

定理4. $\dim X \geq 5$ ならば$N_{\mathcal{L}}$は$\mathcal{L}$に沿って正ではない。

系（Siu '00） 3次元以上の複素射影空間はC^∞級のレビ平坦超曲面を含まない。

Note 定理2および定理4の証明は「上空移行原理」による。

7 Some properties of Julia components of transcendental entire functions with multiply-connected wandering domains

木坂 正史 (京都大学大学院 人間・環境学研究科)

§1 Introduction

Let f be a transcendental entire function, $F(f)$ its Fatou set and $J(f)$ its Julia set. The following are fundamental results on the connectivity of $J(f)$:

Proposition 1 If every Fatou component U is bounded and simply connected, then $J(f) \subset \mathbb{C}$ is connected.

Theorem 2 (K, 1998) Suppose there exists an unbounded periodic Fatou component U and $\infty \in \partial U$ is accessible. Under some additional conditions, $J(f) \subset \mathbb{C}$ is disconnected.

Proposition 3 If f has a multiply-connected Fatou component U then U is a wandering domain and bounded and $J(f) \subset \mathbb{C}$ is disconnected.

Proposition 4 (K, 1998) $J(f) \cup \{\infty\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ is disconnected if and only if f has a multiply-connected wandering domain.

In what follows, we will concentrate on the case that f has a multiply-connected wandering domain U and investigate some properties of Julia components. We note the following fact:

Proposition 5 If U is a multiply-connected wandering domain, then $f^n|U \to \infty$.

Definition 6 (1) We call a connected component of $J(f)$ a *Julia component.*

(2) $z \in J(f)$ is called a *buried point* if z satisfies $z \notin \partial U$ for any Fatou component U.

(3) We call the set $J_0(f) := \{z \in J(f) \mid z : \text{buried point}\}$ the *residual Julia set* of f.

(4) A Julia component C is called a *buried component* if $C \subset J_0(f)$.

For rational cases, the following are known:

Example 7 (McMullen, 1988) Let $f(z) = z^2 + \dfrac{\lambda}{z^3}$, where $\lambda > 0$ is small. Then $J(f)$ is a Cantor set of nested quasi-circles. So there are buried components. In particular, $J_0(f) \neq \emptyset$.

Theorem 8 (Morosawa, 1997) Let f be a hyperbolic rational function. Then $J_0(f) \neq \emptyset$ if and only if (1) $F(f)$ has a completely invariant component, or (2) $F(f)$ consists of only two components.

Example 9 (Morosawa, 1997) Let $f(z) = \dfrac{-2z+1}{(z-1)^2}$, then the following hold:

(1) The set $\{0,\ 1,\ \infty\}$ is a super-attracting cycle. (2) f is hyperbolic.

(3) Any Fatou component is a preimage of the super-attractive basin above.

(4) $J(f)$ is connected.

So by Theorem 8, we have $J_0(f) \neq \emptyset$, but there is no buried component.

Example 10 (Ushiki, 1991) There exists a rational function f whose Julia set is homeomorphic to a Sierpinski gasket. So $J_0(f) \neq \emptyset$, but there is no buried component.

Here are some fundamental properties for buried points and residual Julia sets (Note that f need not be rational).

Proposition 11 (1) If $F(f)$ has a completely invariant component, then $J_0(f) = \emptyset$.
(2) If there exists a buried component of $J(f)$, then $J(f)$ is disconnected.
(3) If $J_0(f) \neq \emptyset$, then $J_0(f)$ is completely invariant, dense in $J(f)$, and uncountable.

§2 Results

Theorem A Let f be a transcendental entire function. Assume that

(a) $P(f) = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\mathrm{sing}(f^{-1}))} \subset F(f)$, (b) f has a multiply-connected wandering domain.

Then every repelling periodic point p satisfies either one of the following:
(1) $C(p) \cap \partial U \neq \emptyset$, where $C(p)$ is the Julia component containing p and U is an immediate attractive basin.
(2) $\{p\}$ is a buried singleton component of $J(f)$.

Corollary B Let f be a transcendental entire function. Assume the above (a), (b) and (c) $f^n(z) \to \infty$ for any $z \in F(f)$.
Then every repelling periodic point p is a buried singleton component of $J(f)$.

Remark The condition (a) is slightly weaker than hyperbolicity (i.e. $\mathrm{dist}(P(f), J(f)) > 0$).

§3 Examples

Example 12 (Baker-Domínguez, 2000) There exists an $f(z)$ with the following form

$$f(z) = k\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{r_n}\right), \quad 0 < r_1 < r_2 < \cdots, \ k > 0$$

such that for every repelling periodic point p is a buried singleton component of $J(f)$.

Example 13 (K-Shishikura, 2002) There exists a transcendental entire function f with doubly-connected wandering domain, which satisfies
- Every critical point c satisfies $f^2(c) = 0$ and 0 is a super-attracting fixed point.

This implies that this f satisfies the assumptions of Theorem A.

Example 14 (Bergweiler, 2006) By using the similar method as in Example 13, he constructed an example of entire functions f which has both a simply connected and multiply connected wandering domain. Critical points of f satisfy the following:

(1) $c_1 = 0 < c_1 < c_2 < \cdots \to \infty$, (2) $f(0) = 0$, $f(c_i) = c_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$
(3) $c_i \in {}^{\exists}U_i$: simply connected wandering domain $f(U_i) = U_{i+1}$, $f^n|U_i \to \infty$ $(n \to \infty)$.

So this f also satisfies the assumptions (a) and (b) of Theorem A.

Example C (K) We can construct an f which satisfies the assumptions (a), (b) and (c) by using the similar method as in Example 13 and 14. Hence every repelling periodic point p is a buried singleton component of $J(f)$ from Corollary B.

8 Riemann面の等角的埋め込みと一般化されたHagen-Poiseuille流れ

伊藤　雅明　　広島大学工学研究科
柴　　雅和　　広島大学工学研究科
幡谷　泰史　　山口大学理工学研究科

この講演の目的は，前回（於・仙台）実解析的に — 特性曲線の方法で — 解いた粘性流に関する問題を複素解析的に — モジュラス円板と面積関数の双曲的構造を用いて — 考察することである．

簡単のため，Riemann面は常に，面とホモロジーの意味での標し（閉Riemann面においてはその1つの標準ホモロジー基底，開Riemann面においては分離的なサイクルを法とした標準ホモロジー基底）の対を表すものとする．種数1の開Riemann面 (R,χ) の同じ種数の閉Riemann面 (torus)(T,χ_T) への等角的埋め込み f とは，標しを保存する(中への)等角写像のことで，簡明な記法 $f:(R,\chi)\to(T,\chi_T)$ によって表す．固定された (R,χ) が等角的に埋め込まれる (T,χ_T) の全体を理解するために，(T,χ_T) のモジュラス $\tau=\tau[T,\chi_T]$ が作る集合 $M=M(R,\chi)$ を考える．ある複素数 $\tau_E\,(\operatorname{Im}\tau_E>0)$ とある正数 ρ_E があって，$M=\{|\tau-\tau_E|\le\rho_E\}$ と書ける．閉円板 M は上半平面 $\mathbb{H}$ 内の双曲的円板でもある．その双曲的中心を τ_H，双曲的半径を ρ_H で示す．$f:(R,\chi)\to(T,\chi_T)$ によって覆われなかった T の部分集合が T 全体で占める割合を面積で測ったときの上限

$$A(\tau):=\sup\{\mathrm{Area}(T\setminus f(R))/\mathrm{Area}(T)\mid f:(R,\chi)\to(T,\chi_T)\}$$

が実際には最大値であり，関数 $A:M\ni\tau\to A(\tau)$ が具体的に $A(\tau)=\dfrac{\rho_E^2-|\tau-\tau_E|^2}{2\rho_E\operatorname{Im}\tau}$ と書けて，それは双曲的同心円周上で定数値をとることが分かっている．

ベクトル場 $\boldsymbol{V}_H:M\ni\tau\to(0,0,A(\tau))$ を速度ベクトル場としてもつ円管 $M\times\mathbb{R}$ 内の定常流を探そうというのが私たちの問題であった．基本的な物理的考察の結果，問題はいわゆるNavier-Stokesの方程式から導かれた（μ に関する）偏微分方程式

$$\nabla\cdot(\mu\nabla A)=k \qquad \text{すなわち} \qquad \operatorname{grad}\mu\cdot\operatorname{grad}A+\mu\Delta A=k$$

を解くことに帰着される．ここで，A は既出の関数，k は圧力勾配や流体の密度などを含んだ定数である．それは考察対象の現象では負の一定値をとる（ことが物理的に要請される）．μ は粘性係数であるが，重要なことは，μ が — 古典的な Hagen-Poiseuille 流れとは違って — 定数ではなく x, y の関数とされていることである．

まず記号の統一をとるため τ を $z = x + iy$ と書き直し，M の双曲的中心を z_H で示す．関数

$$w = i\,\frac{z - z_H}{z - \bar{z}_H}$$

によって，上半 z 平面 $\mathbb{H} = \{\mathrm{Im}\, z > 0\}$ を単位 w 円板 $\mathbb{D} = \{|w| < 1\}$ に写す．さらに，像円板では極座標表示 $w = re^{it}$ を用いる．

この変換を Navier-Stokes 方程式に施すためには，一般の C^2 関数 φ に対する変換規則

$$\varphi_x = \mathrm{Re}\left[e^{-it}\left(\varphi_r - \frac{i}{r}\varphi_t\right) w'(z)\right], \qquad \varphi_y = -\mathrm{Im}\left[e^{-it}\left(\varphi_r - \frac{i}{r}\varphi_t\right) w'(z)\right]$$

などに注意して μ や A にこの公式を適用する．さらに関数 A が変数として t を含まないことや $|w'(z)| = \dfrac{r^2 - 2r\sin t + 1}{2\,\mathrm{Im}\, z_H}$ であることにも注意すれば，

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \mu \cdot \frac{dA}{dr}\right) = 4(\mathrm{Im}\, z_H)^2 k\,\frac{r}{(r^2 - 2r\,\sin t + 1)^2}$$

が $w(= re^{it})$ 座標での Navier-Stokes 方程式になる．両辺を積分して，積分定数として $r \to 0$ の値 (t の関数) を調整すれば，

$$\mu(r,t) = \frac{2(\mathrm{Im}\, z_H)^2 k}{rA_r \cos^2 t}\left\{\frac{r\,(r - \sin t)}{r^2 - 2r\,\sin t + 1} + \tan t \cdot \mathrm{Tan}^{-1}\frac{t\,\cos^2 t}{1 - r^2\,\sin t}\right\}$$

を得る ($\mathrm{Tan}^{-1} 0 = 0$)．最後に rA_r を具体的に計算した結果

$$r\frac{dA}{dr} = -\frac{1 - r_H^2}{r_H}\,\frac{2r^2}{(1 - r^2)^2}, \qquad w(M) = \{|w| \le r_H\}$$

を代入すれば μ は完全に定められる．

上で行った変数変換の逆変換によって前回発表した

$$\mu(x,y) = \frac{-\rho_E\, k\, y^2}{(x-a)^2}\left\{\frac{(x-a)^2 + y^2 - c^2}{2(x-a)}\mathrm{Sin}^{-1}\frac{2(x-a)(y+c)}{(x-a)^2 + (y+c)^2} - y + c\right\}$$

が得られることは当然である．ここで，a, c は $z_H = a + ic$ によって定められ，逆正弦関数の分枝は $\mathrm{Sin}^{-1} 0 = 0$ を満たすものをとるのであった．

9 非線形不等式を満たす優調和関数の境界挙動に関する注意

平田 賢太郎

秋田大学教育文化学部基礎数理

1906年にFatouは「単位円板$\mathbb{D}$上のすべての正値調和関数は殆どすべての境界点で非接極限をもつ」を示した．ここで，非接極限(nontangential limit)とは，$\xi \in \partial\mathbb{D}$に非接な接近領域$\Gamma_\beta(\xi) = \{x \in \mathbb{D} : |x - \xi| < \beta(1 - |x|)\}$に沿って$x \to \xi$としたときの関数の極限である．1927年にLittlewoodは「殆どすべての境界点で接曲線に沿って極限をもたない有界調和関数が存在する」を示し非接領域の最良性を示した．以下，(非接) 極限の存在に関する定理をFatou型定理，(接) 極限の非存在に関する定理をLittlewood型定理とよぶことにする．Fatou型定理やLittlewood型定理は様々な方程式の解に対して研究され，その数は膨大である．

一方，優調和関数の境界挙動に関して，1928年にLittlewoodが「単位円板上のすべてのGreenポテンシャルは殆どすべての境界点で放射的極限(radial limit)をもつ」を示した．しかし，簡単な例でわかるように，非接極限の存在は一般には保証されない．Greenポテンシャルの非接極限の存在も多くの数学者により研究されてきたが，密度関数に直接的な条件（増大条件や可積分条件など）を仮定した結果が殆どである．

Arsove & Huber(1967). $\int_{\mathbb{D}}(1 - |x|)^{2q-1} f(x)^q dx < \infty$を満たす$q > 1$が存在するならば，$f$のGreenポテンシャルは殆どすべての境界点で非接極限をもつ．

Rieszの分解定理により，$\mathbb{D}$上の正値優調和関数uは

$$u(x) = h(x) + \int_{\mathbb{D}} G(x, y)(-\Delta u(y))dy$$

と表現できる．ここに，hはuの$\mathbb{D}$上の最大調和劣関数，$G(x,y)$は$\mathbb{D}$のGreen関数，$-\Delta u$はRadon測度である．Fatouの定理とArsove&Huberの定理より，適当な密度fに対してPoisson方程式$-\Delta u = f$の解の非接極限の存在を知ることができる．しかし，これまでの結果は非線形方程式$-\Delta u = Vu^p$の解には適用できない．2007年度ポテンシャル論研究集会で次のFatou型定理を報告した．

定理 (Fatou型定理). $p > 1$，$\alpha \leq 3 - p$，$c > 0$は定数とする．uは$\mathbb{D}$上の正値優調和関数で$-\Delta u$はLebesgue測度に関して絶対連続で非線形不等式

$$0 \leq -\Delta u(x) \leq c(1 - |x|)^{-\alpha} u(x)^p \quad \text{for a.e. } x \in \mathbb{D}$$

を満たすとする．このとき，uは殆どすべての境界点で非接極限をもつ．

本講演では，次の Littlewood 型定理を報告する．

定理 (Littlewood 型定理)：$p>0$, $\alpha<2$, $c>0$（$p=1$ のときは十分小を仮定）は定数とする．V は $\mathbb{D}$ 上の可測関数で

$$|V(x)| \leq c(1-|x|)^{-\alpha} \quad \text{for a.e. } x \in \mathbb{D}$$

を満たすとする．γ は点 $e=(1,0)$ で終わる $\mathbb{D}$ 内の曲線で

$$\lim_{\gamma \ni x \to e} \frac{|x-e|}{1-|x|} = +\infty \tag{1}$$

を満たすとし，γ_θ は γ を原点まわり θ だけ回転させた曲線とする．このとき，

$$-\Delta u = Vu^p \quad \text{in } \mathbb{D} \quad \text{（超関数の意味）} \tag{2}$$

の正値解 $u \in C(\mathbb{D})$ で

$$\liminf_{|x|\to 1, x\in\gamma_\theta} u(x) \neq \limsup_{|x|\to 1, x\in\gamma_\theta} u(x)$$

なるものが存在する．

証明．与えられた正値調和関数と比較可能な正値解の存在に関する次の結果を示すことができる．

補題．h は $\mathbb{D}$ 上の調和関数で $0<\inf_{\mathbb{D}} h \leq \sup_{\mathbb{D}} h < \infty$ を満たすとする．このとき，定数 $\lambda>0$ と (2) の正値解 $u \in C(\mathbb{D})$ で

$$\frac{\lambda}{2}h(x) \leq u(x) \leq \frac{3\lambda}{2}h(x) \quad \text{for } x \in \mathbb{D}$$

を満たすものが存在する．

次はよく知られた結果である．

Aikawa(1990)．$a<b$ とする．このとき，$\mathbb{D}$ 上の調和関数 h で $a \leq h \leq b$ を満たし，

$$\liminf_{|x|\to 1, x\in\gamma_\theta} h(x) = a < b = \limsup_{|x|\to 1, x\in\gamma_\theta} h(x)$$

なるものが存在する．

$3a<b$ とし，h は Aikawa の結果で得られた $\mathbb{D}$ 上の調和関数とする．u を補題のものとすると，

$$\liminf_{|x|\to 1, x\in\gamma_\theta} u(x) \leq \frac{3\lambda}{2} \liminf_{|x|\to 1, x\in\gamma_\theta} h(x) = \frac{3\lambda}{2}a < \frac{\lambda}{2}b$$
$$\limsup_{|x|\to 1, x\in\gamma_\theta} u(x) \geq \frac{\lambda}{2} \limsup_{|x|\to 1, x\in\gamma_\theta} h(x) = \frac{\lambda}{2}b$$

より Littlewood 型定理を得る．□

10　フックス群のcommensurabilityと固定点集合との関係について

前田　多恵（岡山大学自然科学研究科）

Γ を $PSL(2,\mathbf{R})$ の部分群とする。Γ の元 γ に対しその固定点を $\mathrm{fix}(\gamma)$ とかき，γ が双曲型元のときはその軸を $\mathrm{ax}(\gamma)$ とかくことにする。$\mathrm{fp}(\Gamma)$，$\mathrm{fe}(\Gamma)$，$\mathrm{ax}(\Gamma)$ を

$$\mathrm{fp}(\Gamma) = \{\mathrm{fix}(\gamma) \mid \gamma \text{は} \Gamma \text{の放物型元}\}$$

$$\mathrm{fe}(\Gamma) = \{\mathrm{fix}(\gamma) \mid \gamma \text{は} \Gamma \text{の楕円型元}\}$$

$$\mathrm{ax}(\Gamma) = \{\mathrm{ax}(\gamma) \mid \gamma \text{は} \Gamma \text{の双曲型元}\}$$

と定める。

Γ_1 と Γ_2 が $PSL(2,\mathbf{R})$ の部分群で，Γ_1 と Γ_2 が commensurable である（すなわち $[\Gamma_1 : \Gamma_1 \cap \Gamma_2]$ と $[\Gamma_2 : \Gamma_1 \cap \Gamma_2]$ がともに有限である）ならば，任意の $\gamma \in \Gamma$ に対してある $n \in \mathbf{N}$ が存在し $\gamma^n \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ となるので，$\mathrm{fp}(\Gamma_1) = \mathrm{fp}(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = \mathrm{fp}(\Gamma_2)$ がなりたつ（$\mathrm{ax}(\Gamma_1) = \mathrm{ax}(\Gamma_2)$ もなりたつ）。逆に，$\mathrm{fp}(\Gamma_1) = \mathrm{fp}(\Gamma_2)$（または $\mathrm{ax}(\Gamma_1) = \mathrm{ax}(\Gamma_2)$）であるとき Γ_1 と Γ_2 は commensurable となるか，という問いに関し得られた結果について述べる。さらに，$\mathrm{fe}(\Gamma_1) = \mathrm{fe}(\Gamma_2)$ であるとき Γ_1 と Γ_2 は commensurable となるかという問いを考え，得られた結果についても述べる。

まず，双曲型元の軸が一致している場合は，Γ_1 と Γ_2 を算術的フックス群に限れば commensurable となることが既に知られている ([1])。同様にして放物型元の固定点が一致している場合も次の定理を得た。

Theorem 1 Γ_1 と Γ_2 が放物型元をもつ算術的フックス群のとき，$\mathrm{fp}(\Gamma_1) = \mathrm{fp}(\Gamma_2)$ ならば Γ_1 と Γ_2 は *commensurable* である。

さらに楕円型元の固定点が一致している場合は次の定理が得られた。

Theorem 2 Γ_1 と Γ_2 が楕円型元をもつ *cofinite* なフックス群のとき，$\mathrm{fe}(\Gamma_1) = \mathrm{fe}(\Gamma_2)$ ならば Γ_1 と Γ_2 は *commensurable* である。

算術的フックス群は cofinite なフックス群の特別なクラスであることを注意しておく。また，Theorem 1 は一般のフックス群まで拡張することはできない (反例が存在する) ということも知られている ([2])。

Theorem 1 の証明の鍵となるのは，算術的フックス群 Γ に対し $\mathrm{Comm}(\Gamma) = \Sigma_p(\Gamma)$ という関係がなりたつということである。ただし，$PSL(2,\mathbf{R})$ の部分群 Γ に対し $\mathrm{Comm}(\Gamma)$ と $\Sigma_p(\Gamma)$ を

$$\mathrm{Comm}(\Gamma) = \{\gamma \in PSL(2,\mathbf{R}) \mid \Gamma \text{と} \gamma\Gamma\gamma^{-1} \text{は commensurable}\}$$

$$\Sigma_p(\Gamma) = \{\gamma \in PSL(2,\mathbf{R}) \mid \gamma(\mathrm{fp}(\Gamma)) = \mathrm{fp}(\Gamma)\}$$

と定める。

一方 cofinite なフックス群 Γ に対し，$\mathrm{Comm}(\Gamma)$ と $\Sigma_e(\Gamma) := \{\gamma \in PSL(2,\mathbf{R}) \mid \gamma(\mathrm{fe}(\Gamma)) = \mathrm{fe}(\Gamma)\}$ の間には，$\mathrm{Comm}(\Gamma) \supset \Sigma_e(\Gamma)$ という関係がある。しかし，算術的なものに限れば常に $\mathrm{Comm}(\Gamma) \neq \Sigma_e(\Gamma)$ となるので，Theorem 2 の証明は異なる方法をとっている。

参考文献

[1] D. Long and A. Reid, On Fuchsian groups with the same set of axes, Bull. London Math. Soc. **30** (1998), 533–538.

[2] D. Long and A. Reid, Pseudomodular surfaces, J. reine angew. Math. **552** (2002), 77–100.

[3] C. Maclachlan and A. Reid, *The arithmetic of hyperbolic 3-Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics **219**, Springer, 2002.

11 変動指数の増大条件を満たす準線形楕円型方程式のディリクレ問題に対する再正規化解

前田　文之

$\mathbf{R}^N$ $(N \geq 2)$ の有界開集合 G において準線形楕円型偏微分作用素

$$Lu := -\mathrm{div}\,\mathcal{A}(x, \nabla u) + \mathcal{B}(x, u),$$

符号つき有限測度 ν と「境界条件」 θ とを与えたとき, ディリクレ問題

$$(1) \qquad Lu = \nu \quad \text{on } G, \qquad u = \theta \quad \text{on } \partial G$$

を考える。以前, $\mathcal{A} : G \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$, $\mathcal{B} : G \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ が定数 $p > 1$ に対する増大条件を満たす場合の再正規化解 (renormalized solution ([1])) について論じた ([2]) が, 今回は変動指数 $p(x)$ に対する増大条件を与えた場合を問題とする. 以下, $p(x)$ は G 上の log-Hölder 連続な関数で $p^- := \inf_{x \in G}\, p(x) > 1$, $p^+ := \sup_{x \in G}\, p(x) < \infty$ を仮定する. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ は次の条件を満たすとする.

(A.1) $\big(\mathcal{A}(x, \xi_1) - \mathcal{A}(x, \xi_2)\big) \cdot \big(\xi_1 - \xi_2\big) > 0 \quad (\xi_1 \neq \xi_2);$

(A.2) $\mathcal{A}(x, \xi) \cdot \xi \geqq \alpha_1 |\xi|^{p(x)} \quad (\alpha_1 > 0$: 定数$);$

(A.3) $|\mathcal{A}(x, \xi)| \leqq \alpha_2 |\xi|^{p(x)-1} \quad (\alpha_2 \geq \alpha_1$: 定数$);$

(B.1) $\mathcal{B}(x, \cdot)$ は非減少;

(B.2) $|\mathcal{B}(x, t)| \leqq \beta(|t|^{p(x)-1} + 1) \quad (\beta \geqq 0$: 定数$).$

$\theta \in W^{1,p(\cdot)}(G)$ とする. u が Dirichlet 問題 (1) の再正規化解であるとは, $u^{p(x)-1} \in L^1(G)$, $T_k(u - \theta) := \max(\min(u - \theta,\, k),\, -k) \in W_0^{1,p(\cdot)}(G)$ $({}^\forall k > 0)$, $Du := \lim_{k \to \infty} \nabla T_k(u - \theta) + \nabla\theta$ に対し $|Du|^{p(x)-1} \in L^1(G)$ で, 下記の条件 (L), (Ψ), (Φ), (O) をみたす l, ψ, φ によって $f = l(u - \theta + \psi)\varphi$ と表せる任意の f に対し,

$$\int_G \mathcal{A}(x, Du) \cdot \nabla f \, dx + \int_G \mathcal{B}(x, u) f \, dx = \int_G f \, d\nu_a + l(\infty) \int_G \varphi \, d\nu_s^+ - l(-\infty) \int_G \varphi \, d\nu_s^-$$

が成り立つことである. ここで, ν_a, ν_s は $p(\cdot)$-容量に関する ν の絶対連続部分と特異部分を表す.

(L) $l : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ はリプシッツ連続関数で，ある $M > 0$ に対し，$t \geqq M$ で $l(t) = l(\infty)$, $t \leqq -M$ で $l(t) = l(-\infty)$.

(Ψ) $\psi \in W^{1,p(\cdot)}(G) \cap L^{\infty}(G)$.

(Φ) $\varphi \in W^{1,\infty}(G) \cap C(G)$.

(O) $l(0) = 0$ または $\varphi \in W_0^{1,p(\cdot)}(G)$.

現在までに得られた再正規化解の存在に関する結果は

定理 1. **$p(x)$ が次の (P1), (P2), (P3) のいずれか１つを満たせば, Dirichlet 問題 (1) は再正規化解をもつ.**

(P1) $p^- > N/(2\sqrt{N} - 1)$;

(P2) $p^- \leqq N/(2\sqrt{N} - 1)$ で

$$p^+ < \frac{2Np^-}{p^- + N + \sqrt{(p^- + N)^2 - 4(p^-)^2 N}};$$

(P3) (弱 Poincaré 不等式)

$$\int_G |\varphi(x)|^{p(x)}\, dx \leqq C \left(\int_G |\nabla \varphi(x)|^{p(x)}\, dx + 1 \right), \quad {}^{\forall}\varphi \in C_0^1(G).$$

定理 2 **(cf.[4]).** **$\nu_s = 0$ なら (1) の再正規化解は unique である.**

参考文献

[1] G. Dal Maso, F. Murat, L. Orsina and A. Prignet, Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **28** (1999), 741–808.

[2] F-Y. Maeda, Renormalized solutions of Dirichlet problems for quasilinear elliptic equations with general measure data, Hiroshima Math. J., to appear.

[3] M. Sanchón and J.M. Urbano, Entropy solutions for the $p(x)$-Laplacian equation, Trans. Amer. Math. Soc., to appear.

12　容量の極値関数

中井 三留（名工大・名誉教授）

開リーマン面 R 上のディリクレ空間 $L^{1,2}(R)$ は $f \in W^{1,2}_{loc}(R)$ かつディリクレ積分 $D(f;R) := \int_R df \wedge *df < +\infty$ となる f の全体とする ([3]). $L^{1,2}(R) \cap C(R)$ の各関数が $[-\infty, \infty]$ 値連続となる最小の R の完閉化が R のロイデン完閉化 R^* で, $\gamma R := R^* \setminus R$ が R のロイデン境界である. γR 上の境界値 f の R 上の PWB ディリクレ解 H_f^R 達に関する正則境界点の全体 $\delta R \subset \gamma R$ は完閉であって R のロイデン調和境界と呼ぶ ([2], [9]). R の $R \setminus W$ が相対完閉解析的部分領域となる様な任意の部分領域 W を一つ固定する. γR の 完閉部分集合 K 上 $f \geqq 1$, $R \setminus W$ 上 $f \leqq 0$ となる $f \in L^{1,2}(R) \cap C(R)$ の全体を $\mathcal{V}(K)$ と記し

$$\text{cap}(K) := \inf_{f \in \mathcal{V}(K)} D(f;R) \tag{1}$$

を K の**容量**, 詳しくは, 変分 2 容量と呼ぶ. $\text{cap}(\cdot)$ はショッケ容量となり, 容量零を除いて成り立つ性質を q.e. に成り立つと言う ([3]). $\text{cap}(\gamma R \setminus \delta R) = 0$ なので, 以後 $K \subset \delta R$ に限定する. W 上の調和関数 u で ∂W 上連続境界値零となり $D(u;W) < +\infty$ となるもの全体を $HD(W;\partial W)$ とかく. $R \setminus W$ 上 $u \equiv 0$ と置いて $HD(W;\partial W) \subset L^{1,2}(R) \cap C(R)$ と考える. $HD(W;\partial W)$ は $D(u,v;W) := \int_W du \wedge *dv$ を内積とするヒルベルト空間でバーグマン核

$$B(z,w;W) := N(z,w;W) - G(z,w;W) \tag{2}$$

(N:ノイマン核, G:グリーン核) を再生核に持つ ([1], [4]). K 上 $u = 1$ かつ R 上 $0 \leqq u \leqq 1$ となる $u \in HD(W;\partial W)$ の全体を $\mathcal{W}(K)$, その $HD(W;\partial W)$ 内の閉被を $\overline{\mathcal{W}(K)}$ と記すと

$$\text{cap}(K) = \inf_{u \in \mathcal{W}(K)} D(u;W) = \min_{u \in \overline{\mathcal{W}(K)}} D(u;W) \tag{3}$$

となり, $\text{cap}(K) = D(c_K;W)$ となる $c_K \in \overline{\mathcal{W}(K)}$ が唯一つ定まる. これを完閉集合 K の**容量関数**と呼ぶ. $u \in HD(W;\partial W)$ に対して δR に台を持つ γR 上の一般符号ラドン測度 $*du$ で, 全ての $v \in HD(W;\partial W)$ に対して

$$D(v,u;W) = \int_{\delta R} v * du \tag{4}$$

となるものがあるとき, u は γR 上**法線微分測度** $*du$ を持つと言う ([5] 参照). 例えば, バーグマン関数 $B(\cdot,a;W)$ ($a \in W$ は任意固定点) は δR 上正値法線微分測

度 $*dB(\cdot,a;W)$ を持ち, 実はこれが δR 上の調和測度と一致する. 本講演の目的は次の容量関数 c_K の特徴付けを報告する事にある ([7], [8] 参照):

定理: W 上の関数 h が K の容量関数 c_K となる為の必要十分条件は次の四つである : $h \in HD(W;\partial W)$; h は δR 上正値法線微分測度 $*du \geqq 0$ を持つ; $\delta R \setminus K$ 上 $*du = 0$; K 上 q.e. に $h = 1$.

この結果の直接の応用として, 調和測度 $\mathrm{hm}(K) := \int_K *dB(\cdot,a;W)$ と容量 $\mathrm{cap}(K)$ との間の次の量的比較が得られる:

$$\mathrm{hm}(K) \leqq B(a,a;W)^{1/2} \cdot \mathrm{cap}(K)^{1/2}. \tag{5}$$

又上記定理の分類問題 ([9]) への応用例として: $HD(R) = HBD(R)$ と成る為の必要十分条件は, 全ての点 $\zeta \in \delta R$ に対して $\mathrm{cap}(\{\zeta\}) > 0$; $HB(R) = HBD(R)$ なら調和測度零と容量零が一致. これら二事実から次の正岡の定理 ([6]) が直ちに従う: $HB(R) = HD(R)$ となる必要十分条件は両空間夫々が有限次元となる事である.

参 照 文 献

[1] L. Ahlfors and L. Sario: *Riemann Surfaces*, Princeton Univ. Press, 1960.

[2] C. Constantinescu und A. Cornea: *Ideale Ränder Riemannscher Flächen*, Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete, Band **32**, Springer-Verlag, 1963.

[3] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, and O. Martio: *Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations*, Clarendon Press, 1993.

[4] P. Lelong: *Fonctions plurisousharmoniques et fonctions analytiques de variables réelles*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **11**(1961), 515-562.

[5] F.-Y. Maeda: *Dirichlet Integrals on Harmonic Spaces*, Lecture Notes in Mathematics **803**, Springer-Verlag, 1980.

[6] H. Masaoka: *The classes of bounded harmonic functions and hrmonic functions with finite Dirichlet integrals on hyperbolic Riemann surfaces*, 2006 年度ポテンシャル論研究集会報告集, 千葉大学, January 11-12, 2007, 72-76.

[7] M. Nakai: *Capacitary functions on Royden harmonic boundaries*, Preprint.

[8] M. Nakai: *Extremal functions for capacities*, Preprint.

[9] L. Sario and M. Nakai: *Classification Theory of Riemann Surfaces*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band **164**, Springer-Verlag, 1970.

13 An estimate of the sum of defects of a holomorphic curve

戸田 暢茂 (愛知工業大学客員)

1. Introduction. (a) Let $f = [f_1, \cdots, f_{n+1}]$ be a non-degenerate, transcendental holomorphic curve from $\boldsymbol{C}$ into $P^n(\boldsymbol{C})$ with a reduced representation

$$(f_1, \cdots, f_{n+1}) \;:\; \boldsymbol{C} \;\to\; \boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\},$$

where n is a positive integer. For $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_{n+1}) \in \boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$, let $\delta_n(\boldsymbol{a}, f)$ be the $n-$truncated defect of $\boldsymbol{a}$ with respect to f.

Let X be a subset of $\boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$ in N-subgeneral position satisfying $2N - n + 2 \leq \#X$, where N is an integer satisfying $N \geq n$.

Truncated Defect Relation ([1]($N = n$), [4]($N > n$). See [2], [3].)

$$\textstyle\sum_{\boldsymbol{a} \in X} \delta_n(\boldsymbol{a}, f) \leq 2N - n + 1.$$

(b) For a non-empty, finite subset S of X, we denote $V(S)$ =the vector space spanned by elements of S and $d(S) = \dim V(S)$. Let

$$\mathcal{O} = \{S \subset X \mid 0 < \#S \leq N + 1\}.$$

Then, $\#\{d(S)/\#S \mid S \in \mathcal{O}\} < \infty$. We put $\lambda = \min_{S \in \mathcal{O}} d(S)/\#S$.

Proposition 1([5]). Suppose that $N > n$ and that $\lambda \geq (n+1)/(2N-n+1)$. When n is even,

$$\textstyle\sum_{\boldsymbol{a} \in X} \delta_n(\boldsymbol{a}, f) \leq 2N - n + 1 - 1/2n.$$

2. Lemma and Result.

Lemma 1([3]). $\forall S \in \mathcal{O}$, $\#S - d(S) \leq N - n$.

Definition 1([6],Definition 5.1) We say that $S \in \mathcal{O}$ is *maximal* when

$$\#S - d(S) = N - n.$$

We put

$$\mathcal{W} = \{\tau : X \to (0, 1] \mid \forall S \in \mathcal{O},\ \textstyle\sum_{\boldsymbol{a} \in S} \tau(\boldsymbol{a}) \leq d(S)\}.$$

Lemma 2([6], Theorem 4.1). $\forall \tau \in \mathcal{W}$, $\sum_{\boldsymbol{a} \in X} \tau(\boldsymbol{a}) \delta_n(\boldsymbol{a}, f) \leq n + 1$.

Lemma 3([7]). There exist a function $w : X \to (0, 1]$ and a constant h satisfying

(a) $0 < hw(\boldsymbol{a}) \leq 1$ ($\boldsymbol{a} \in X$); (b) $\sum_{\boldsymbol{a} \in X}(1 - hw(\boldsymbol{a})) = 2N - n + 1 - h(n+1)$;
(c) $N/n \leq h \leq (2N - n + 1)/(n + 1)$; (d) $w \in \mathcal{W}$.

Lemma 4([6], (6.2)). $\sum_{\boldsymbol{a}\in X}(1-hw(\boldsymbol{a}))(1-\delta_n(\boldsymbol{a},f))$

$$+h\{n+1-\textstyle\sum_{\boldsymbol{a}\in X} w(\boldsymbol{a})\delta_n(\boldsymbol{a},f)\} = 2N-n+1-\sum_{\boldsymbol{a}\in X}\delta_n(\boldsymbol{a},f).$$

From now on throughout this abstract, we suppose that

$$\lambda < (n+1)/(2N-n+1).$$

Lemma 5([7]). There exists a set $T \in \mathcal{O}$ satisfying the followings:
(i) $d(T) < (n+1)/2,\ \ \#T < (2N-n+1)/2;$
(ii) $d(T)/\#T < (n+1-d(T))/(2N-n+1-\#T);$
(iii) $\forall S \in \mathcal{O}$ such that $T \subsetneqq S$ and $d(T) < d(S)$,

$$(n+1-d(T))/(2N-n+1-\#T) \leq (d(S)-d(T))/(\#S-\#T). \qquad (1)$$

We put $\mathcal{O}_T = \{S \in \mathcal{O} \mid T \subsetneqq S,\ d(T) < d(S)\}$.
Definition 2([6], Definition 5.2).
(i) X is *of type I* if the equality does not hold for any $S \in \mathcal{O}_T$ in (1).
(ii) X is *of type II* if the equality holds for some $S \in \mathcal{O}_T$ in (1).

Theorem. If X is of type I and T is not maximal or if X is of type II, then

$$\textstyle\sum_{\boldsymbol{a}\in X}\delta_n(\boldsymbol{a},f) \leq 2N-n+1-1/2n.$$

References

[1] H. Cartan: Sur les combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données. Mathematica, 7(1933), 5-31.

[2] W. Chen: Defect relations for degenerate meromorphic maps. Trans. Amer. Math. Soc., 319-2(1990), 499-515.

[3] H. Fujimoto: Value distribution theory of the Gauss map of minimal surfaces in $\boldsymbol{R}^m$. Aspects of Math. E21, Vieweg 1993.

[4] E. I. Nochka: On the theory of meromorphic curves. Dokl. Acad. Nauk SSSR, 269-3(1983), 547-552.

[5] N. Toda: On the truncated defect relation for holomorphic curves. 2005年秋の数学会 函数論分科会講演アブストラクト.

[6] N. Toda: Nochka荷重関数の一般化と正則曲線の値分布。第50回函数論シンポジウム 講演アブストラクト (2007).

[7] N. Toda: A generalization of Nochka weight function (to appear).

14 Jørgensen numbers of triangle groups

Hirofumi Goto (Shizuoka University)
Changjun Li (Ocean University of China)
Hiroki Sato (Shizuoka University)

In 1976 Jørgensen gave the following important theorem called Jørgensen's inequality theorem.

THEOREM A (**Jørgensen [1]**). Suppose that the Möbius transformations A and B generate a non-elementary discrete group. Then

$$J(A,B) := |\mathrm{tr}^2(A) - 4| + |\mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1}) - 2| \geq 1.$$

The lower bound 1 is best possible.

DEFINITION 1. Let A and B be Möbius transformations. The *Jørgensen number* $J(A,B)$ of the ordered pair (A,B) is defined by

$$J(A,B) := |\mathrm{tr}^2(A) - 4| + |\mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1}) - 2|.$$

DEFINITION 2. Let G be a non-elementary two-generator subgroup of Möb. The *Jørgensen number* $J(G)$ of G is defined by

$$J(G) := \inf\{J(A,B) \mid A \text{ and } B \text{ generate } G\}.$$

Now we have the following problem:

PROBLEM. Let r be a real number with $r \geq 1$. When is there a discrete group whose Jørgensen number is equal to r?

Last time we presented the following:

THEOREM B (**Oichi-Sato [3]**). For every positive integer r, there is a non-elememtary Kleinian group G such that $J(G) = r$.

TEOREM C (**Oichi-Sato [3]**). For every $r > 4$, there is a classical Schottky group G such that $J(G) = r$.

This time we obtained the following theorems.

THEOREM 1 (**Goto-Li-Sato [2]**). Let G be a Hecke group of type $(2, q, \infty)$ $(3 \leq q \leq \infty)$. Then $J(G) = 4\cos^2 \pi/q$.

THEOREM 2 (**Goto-Li-Sato [2]**). Let G be a triangle group of type $(2, 4, 6)$. Then $J(G) = 2$.

Conjectures

(1) The only non-elementary Fuchsian groups whose Jørgensen numbers are

$$J(G) = 4\cos^2(\pi/q)$$

are the triangle groups of signatures $(2, q, r)$ $(3 \leq q \leq r \leq \infty)$, where $1/q + 1/r < 1/2$.

(2) Let G be a triangle group of type $(2, q, r)$ $(3 \leq q \leq r \leq \infty)$, where $1/q + 1/r < 1/2$. Then $J(G) = 4\cos^2(\pi/q)$.

References

[1] T. Jørgensen, On discrete groups of Möbius transformations, Amer. J. Math. **98** (1976), 739–749.

[2] H. Goto, C. Li and H. Sato, *Jørgensen numbers of triangle groups*, in preparation.

[3] M. Oichi and H. Sato, *Jørgensen numbers of discrete groups*, RIMS Kokyuroku, Kyoto Univ., **1518** (2006), 105–118.

15 Closed range multiplication operators and the sampling set

米田　力生　　（小樽商科大学）

$\alpha > 0$ に対して、空間 $\mathcal{B}_\alpha$ は

$$\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^\alpha |f(z)| < +\infty$$

を満たす D 上の解析関数全体とする. $dA(z)$ は D 上の normalized area measure とする.

$\alpha > -1$ に対して, 荷重付きベルグマン空間 $\mathcal{D}^\alpha$ は

$$\int_D (1-|z|^2)^\alpha |f(z)|^2 (\alpha+1) dA(z) < +\infty$$

を満たす D 上の解析関数全体とする. $\alpha = 0$ のとき, $\mathcal{D}^0 = L_a^2$ は, ベルグマン空間になる.

一般に X をバナッハ空間とし, T を linear operator from X into X とする. そのとき, T は 次を満たすならば, bounded below on X と呼ばれる：ある正の定数 $C > 0$ が存在して、$\| Tf \| \geq C \| f \|$ for all $f \in X$ を満たす.

D 上の解析関数 g に対して, 掛け算作用素 M_g は, $M_g f(z) = g(z)f(z)$ と定義される. この研究では, この掛け算作用素 M_g がいつ $\mathcal{D}^\alpha$ 上で bounded below になるのかに関する研究をし, 以下の結果が得られた：

Theorem 1. *Let $\alpha > 0$. For any inner function φ, the following are equivalent.*

(1) *M_φ is bounded below on $L_a^2((1-|z|^2)^{2\alpha}dA(z))$*

(2) *There exists a positive constant $\epsilon > 0$ such that $\{z \in D, |\varphi(z)| \geq \epsilon\}$ is a sampling set for $\mathcal{B}^\alpha$.*

(3) $\inf_{w\in D}\left\{\sup_{z\in D}(1-|\varphi_w(z)|^2)^\alpha|\varphi(z)|\right\} > 0.$

(4) *φ is a finite product of interpolating Blaschke products.*

(5) *For some $\epsilon > 0$ and $0 < r < 1$ the area of the subset of the disc $D_{z,r} = \{w : \rho(z,w) < r\}$ where $|\varphi(w)| > \epsilon$ is comparable to the area of the whole disc $D_{z,r}$, $z \in D$.*

上の定理を利用して次の結果を得た：

Theorem 2. *Let $\alpha > 0$. There exists a constant $0 < t < 1$ (independent of points $z_n, z_{n_1}, z_{n_2}, \cdots z_{n_k} \in D$) such that*

(Type I) the set

$$D \setminus \left\{ z \in D : \rho(z_n, z) < t \left(\frac{2\alpha}{2\alpha+1} \right)^{\alpha} \sqrt{\frac{1}{2\alpha+1}} \right\}$$

for arbitrary point $z_n \in D$,

(Type II) the set

$$D \setminus \left(\left\{ z \in D : \rho(z_{n_1}, z) < T \right\} \cup \left\{ z \in D : \rho(z_{n_2}, z) < T \right\} \right)$$

where $T = \frac{-\rho(z_{n_1}, z_{n_2})(1-K) + \sqrt{\rho(z_{n_1}, z_{n_2})^2 \cdot (1-K)^2 + 4K}}{2}$, $K = t(1-r_0^2)^{\alpha} r_0 \left\{ \frac{r_0 + |\varphi_{z_{n_1}}(z_{n_2})|}{1 + r_0 |\varphi_{z_{n_1}}(z_{n_2})|} \right\}$,
for arbitrary points $z_{n_1}, z_{n_2} \in D$,
are sampling sets for $\mathcal{B}^{\alpha}$.

References

[1] A.Aleman and A.G.Siskakis, An integral operator on H^p, Complex Variables, 28(1995),149-158.

[2] R.Aulaskari, P.Lappan and J.Miao, On $\alpha-$Bloch Spaces and Multipliers of Dirichlet Spaces, J.Math.Anal.Appl.209(1997),103-121.

[3] P.S.Bourdon and J.A.Cima and A.L.Matheson, Compact composi tion operators on BMOA, Trans.Amer.Math.Soc.344(1994), 2183-2196.

[4] H.Chen and P.Gauthier, Boundedness From Below of Composition Operators on Bloch spaces, in preprint.

[5] P.Ghatage and D.Zheng and Nina Zorboska, Sampling sets and closed range composition operators on the Bloch space, Proceedings of the Amer.Math.Soc.133,5 (2004), 1371-1377.

[6] P.Ghatage and D.Zheng, Hyperbolic derivatives and generalized schwartz-Pick estimates, Proceedings of the Amer.Math.Soc.132,11(2004), 3309-3318.

[7] M.Jovovic and B.MacCluer, Composition operators on Dirichlet spaces, Acta Sci.Math.(Szeged) 63(1997), 229-247.

[8] D.Leucking, Inequalities on Bergman spaces, Illinois J.Math.25(1981), 1-11.

[9] G.McDonald and C.Sundberg, Toeplitz operators on the disc, indiana Univ.Math.J.28(1979),595-611.

[10] R.Zhao, On α-Bloch functions and VMOA, Acta Math.Sci.16(1996), 349-360.

特別講演

複素2次元特異点と閉リーマン面の退化族について

都丸 正　(群馬大学医学部保健学科)

はじめに　以下において、敬称は省略し、"compact smoooth complex curve"は閉リーマン面と言う。

複素解析空間の特異点は、1960年代末の広中平祐による特異点解消定理や、E. Brieskornによる、エキゾチック球面である特異点リンク（周囲を球面で切った切り口）の発見などの決定的な成果以来、活発に研究されるようになった。中でも2次元特異点論は、複素解析幾何、代数幾何、トポロジー、群の表現論等の数学の広い分野と関係し、種々の結果が得られてきた。特に、2次元特異点のリンクが実3次元多様体であることから、低次元トポロジーなどからの研究も行われ、今日でも重要な研究対象として、A. Nemethi, 奥間智弘などを始めとする人々により活発に研究されている。

閉リーマン面の退化は、閉リーマン面のモジュライ空間のコンパクト化と関係し、多くの人により複素解析幾何学的、代数幾何学的に考察されてきた。複素解析幾何学的に、局所的な閉リーマン面の退化族の定義を正確に与えたのは小平邦彦 [Ko] である。

"複素曲面Sから複素平面の原点0を中心とする円板Δへの正則固有写像Φで、原点0以外の任意の$t \in \Delta$の逆像（ファイバー）は種数gの閉リーマン面であるものをいい、0の逆像を退化ファイバーあるいは特異ファイバーという。"

K. Kodairaは種数1の退化族に関し、その特異ファイバーを分類し、そのような特異ファイバーを持つ退化族を具体的に構成し、個々の場合にホモロジー群のモノドロミー表現を計算し、その結果を用いて、楕円曲面を研究した。その後、種数2の場合に同様な研究が、浪川幸彦, 上野健爾によって行われ、また、トポロジーの立場から松本幸夫-A.Montesinosは退化族の退化ファイバーの生じるメカニズムを調べ、これに基づき、足利正、高村茂、荒川達也、石坂瑞穂などは近年、退化族の変形論を展開している。

特異点と退化族の関係については、楕円型特異点と種数1の退化族との関係が、V.I.Arnold, V.S.Kulikov, M.Reidにより1975〜85年頃に見い出された。彼等の結果に触発され、U. Karras [Ka] は種数1に限らない一般の退化族を考え、それからある手続きを経て得られる特異点をKodaira特異点と名付け研究し、2次元特

異点の変形論に応用した。また、斎藤恭司 [Sa] はある種の２次元擬斉次超曲面特異点に付随した代数曲面を考察し、そこに表れる閉リーマン面の退化族を調べた。

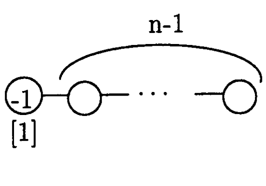
本講演は、講演者がこの１０年間ほど研究してきた、「複素２次元特異点と閉リーマン面の退化族の関係」についての結果（[Tt2]-[Tt4]）を中心に、この両者の関係の解説をする。

§1. Uni-modal & bi-modal 特異点と Kodaira 特異点

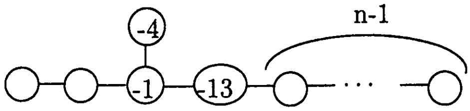
[Ar] において,V.I. Arnold は Modality μ_o なる不変量を導入し、実及び複素解析関数芽の分類を行った。$\mu_o = 0$ である特異点は M. Artin により分類された有理２重点と一致することを示し、また、$\mu_o = 1$ のものを uni-modal 特異点、$\mu_o = 2$ のものを bi-modal 特異点と名付け分類した。V. Kulikov [Ku] は uni-modal & bi-modal 特異点は K. Kodaira による種数１の閉リーマン面の退化族から導かれることを示した。また、これと独立に、M. Reid [Re] は幾何種数が１で付随する局所環が Gorenstein となる特異点（=最小楕円型特異点）を調べ、その特異点解消の例外集合は、Kodaira による種数１の閉リーマン面（楕円曲線）の退化族の特異ファイバーに関係することを観察している。Kulikov の結果の後に、U. Karras [Ka] は閉リーマン面の退化族から、ある種の手続きを経て得られる特異点を Kodaira 特異点と名付け研究し、楕円型特異点の変形理論に応用した。また、J.Stevens [St] は Karras と同様な（もう少し制限された）操作を退化族に施し得られる特異点を Kulikov 特異点と名付け研究し、１次元特異点の変形との関係を調べた。

§2. 特異点の楕円系列と Yau 系列

特異点を分類するのに、解析同型、あるいは位相同型による分類が考えられる。しかし、位相同型による分類でさえ、同型類の種類が多過ぎる。例えば、$a \leqq b \leqq c$ とするとき、$x^a + y^b + z^c$ なる特異点を考えると、(a, b, c) で一つの位相型が決まる。このような状況において、A_n 型や D_n 型の有理特異点を系列として考えることが参考になる。即ち、類似のものを”ひとかたまりの系列”と思うことにする。S.S.T.Yau は楕円型特異点に対し楕円系列というある系列を定義し、Yau 自身や泊昌孝により種々の結果が得られている。例えば、$(X_n, o) = x^2 + y^3 + z^{6n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ なる特異点の系列を考えると、その特異点解消は



となり、A_n 型や D_n 型の系列と類似となる。1990年頃、講演者は楕円型特異点に限らず、$(X_n, o) = x^a + y^b + z^{dn+c}$ $(d := g.c.d.(a,b), n = 1, 2, 3, \cdots)$ なる特異点の系列を考えた。その特異点解消は例えば $a = 3, b = 4, c = 1$ とすると、



となり、やはり、楕円系列と似たような系列が得られた。この様な系列を捉えるために、楕円系列を一般化し Yau 系列と名付け、上の $x^a + y^b + z^{dn+c}$ (Brieskorn 型) で定義される特異点 (X_n, o) の系列を調べた ([Tt1])。n が増大するとき、H. Pinkham や泊の公式等を用いて (X_n, o) の幾何種数 $p_g(X_n, o)$、算術種数 $p_a(X_n, o)$、基本種数 $p_f(X_n, o)$ の3つの種数の変化を調べた。事前の予想では $p_f(X_n, o) \geqq 2$ の仮定の下で、n の増大につれこれらはどれも限りなく増大すると思われた。しかし $p_f(X_n, o)$ については、ある N が存在し、それ以上の n については全て $p_f(X_n, o)$ の値は一定となり、それ以上は増大しないことが確かめられた。また、この $p_f(X_n, o)$ の上限値が $\dfrac{(a-1)(b-1) - \gcd(a,b) + 1}{2}$ であることも分かった。一方、uni-modal & bi-modal 特異点で $x^a + y^b + z^c$ なる形の定義式を持つものは、$g.c.d.(a,b) \leqq c$ を満たし、かつ Kodaira 特異点となる。これから、$x^a + y^b + z^c$ $(g.c.d.(a,b) \leqq c)$ なる特異点は楕円型に限らず、一般の場合にも Kodaira 特異点となるのではと想像した。

§3. $z^n = f(x,y)$ で定義される超曲面特異点の Kodaira 特異点である条件

1995年に、足利正による $z^n = f(x,y)$ で定義される超曲面特異点に対する Durfee 予想の鮮やかな証明を読み (cf. [As])、この種の特異点の特異点解消のメカニズムが非常に捉えやすいことが分かった。その3ヶ月後に、東北学院大学での研究集会「退化、被覆、特異点」で、Kodaira 特異点に関する紹介させて頂く機会を得た。この2つの出来事から、「$z^n = f(x,y)$ 型の特異点はいつ Kodaira になるか?」という疑問が湧き、結果として得られたのが次である。

定理1 ([Tt1]) (X,o) を $z^n = f(x,y)$ で定義される正規超曲面特異点とする。
(i) $n | ord(f)$ なら、(X,o) は種数 $\dfrac{(n-1)(ord(f)-2)}{2}$ の Kodaira 特異点である。
(ii) f から決まる定数 $N(f)$ が存在し、$n \geqq N(f)$ であるとき、(X,o) は種数 $\dfrac{\mu(f) - r(f) + 1}{2}$ の Kodaira 特異点である。ただし、$\mu(f)$ と $r(f)$ は曲線の特異点 $(\{f = 0\}, o)$ に対する各々 Milnor 数と既約成分の個数とする。

上記を証明する上で重要なテクニックが、巡回特異点に対する藤木 resolution ([F2]) である。今日、巡回特異点の解消の計算では、初等幾何の言葉で扱えるという点で、torus 埋め込みを使うのが一般的となっている。しかし、藤木の方法はそのプロセスが幾何的・視覚的に捉えやすく優れたものである。それは上記の証明を行う際に、正則関数から決まる特異点解消空間上のサイクルの計算等で使われる。なお、定理 1 で §2 で基本種数に関し最後に述べたことが一般化できたことになる。

§4. 特異点解消空間の退化族への埋め込みと、特異点のペンシル種数

§3 の研究の後、Kodaira でない特異点は退化とどう関係するのか？との疑問が湧いてきた。有理 2 重点を考えると、これらの特異点解消空間は種数 1 の退化族に皆含まれる。つまり、種数 1 の退化族の特異ファイバーの一部分を潰すと、全ての有理 2 重点が得られる。これは、全ての特異点に言えることなのか？即ち、”任意の正規 2 次元特異点はある閉リーマン面の退化族の特異ファイバーの一部分を潰すことで得られるか?” との疑問が湧き、より強い形で得られた結果が以下の定理 4 である。

定義 3. (X,o) を正規 2 次元特異点とし、$\mathfrak{m}_{X,o}$ を局所環 $\mathcal{O}_{X,o}$ の極大イデアルとし、$h \in \mathfrak{m}_{X,o}$ とする。

(i) h が X 上の被約 (reduced) 曲線を定義するとき、f を被約元という。

(ii) $g \in \mathfrak{m}_{X,o}$ なる g が存在し、$h = g^k$ ($k \geqq 2$) と書けるとき、h を完全ベキ元 (perfect power element) という。

定理 4. (X,o) を正規 2 次元特異点とし、$h \in \mathfrak{m}_{X,o}$ を完全ベキ元ではないとする。また、$\pi\colon (\tilde{X},E) \to (X,o)$ を $(h\circ\pi)_{\tilde{X}}$ が $\tilde{X}$ 上単純正規交叉因子となるようにする。このとき、 閉リーマン面の退化族 $\Phi\colon S \to \Delta$ で $(S, \mathrm{supp}(S_o)) \supset (\tilde{X},E)$ (つまり、$S \supset \tilde{X}$ かつ $\mathrm{supp}(S_o) \supset E$。ただし、$\mathrm{supp}(S_o)$ は S_o の台とする) を満たし、次の図式で $h\circ\pi = \Phi|_{\tilde{X}}$ を満たすものが存在する：

$$\begin{tikzcd}(X,o) \arrow[drr, "h"'] & & (\tilde{X},E)\subset S \arrow[ll, "\pi"'] \arrow[d, "\Phi"] \\ & & \Delta.\end{tikzcd} \tag{1.1}$$

”任意の正規孤立特異点はある代数多様体の退化族の特異ファイバーの一部分を潰すことで得られる”自体は、Looijenga [Lo] が M. Artin の formal completion の理論を用いて、代数幾何学的に証明をしている。定理 4 の証明は $\tilde{X}$ に巡回商特異点の特異点解消空間とその上の解析関数を適当に貼り合わせ構成するもので簡便なものである。

定義 5. (X,o) を正規 2 次元特異点とする。

(i) $p_e(X,o) = \min\{g|$ 特異点解消と種数 g の退化族で $(S, \mathrm{supp}(S_o)) \supset (\tilde{X}, E)$ を満たすものが存在する $\}$.

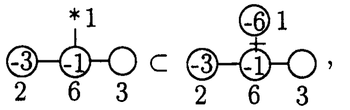
(ii) $h \in \mathfrak{m}_{X,o}$ は完全ベキ元ではないとする。(X,o) と h の対に対し、次のような定義をする：

$p_e(X,o,h) = \min\{(X,o)$ と h に対し定理 4 の性質を満たす退化族の種数 $\}$.

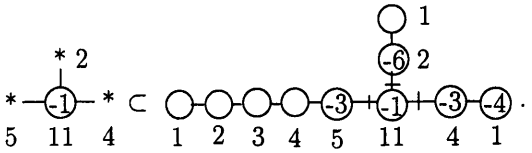
このとき、$p_e(X,o)$ を (X,o) の**ペンシル種数**と言う。また、$p_e(X,o,h)$ を対 $((X,o),h)$ のペンシル種数と言う。

定理 6. (X,o) と $h \in \mathfrak{m}_{X,o}$ を定理 4 と同様にとり、$\pi\colon (\tilde{X},E) \to (X,o)$ を $red((h\circ\pi)_{\tilde{X}})$ が $\tilde{X}$ 上単純正規交叉な特異点解消とする。$\Phi\colon S \to \Delta$ は種数 g の閉リーマン面の退化族で定理 4 の条件 (1.1) を満たしているとする。もし、$g = p_e(X,o,h)$ とすると $\mathrm{supp}(S_o)\backslash E$ の任意の連結成分は $\mathbb{P}^1$-チェインである。逆に、$\mathrm{supp}(S_o)\backslash E$ の任意の連結成分が $\mathbb{P}^1$-チェインであれば、$g = p_e(X,o,h)$ となる。従って、$h\circ\pi$ から定理 4 のように構成される退化族の種数は $p_e(X,o,h)$ に一致する。

例 7. (1) (X,o) を $(\mathbb{C}^2,o)$ とし $h_1 = x^2+y^3$, $h_2 = x^5y^4(x+y)^2$ とする。$\sigma_j\colon (\tilde{X}_j, E(j)) \longrightarrow (\mathbb{C}^2,o)$ をこの 1 次元特異点 $\{h_j = 0\}$ $(j=1,2)$ の最小埋め込み特異点解消とする。$\Phi_j\colon S(j) \to \Delta_j$ を定理 4 により構成された退化族とする。因子 $(h_1\circ\sigma_1)_{\tilde{X}_1}$ と、特異ファイバー $S(1)_o$ は次で与えられる：

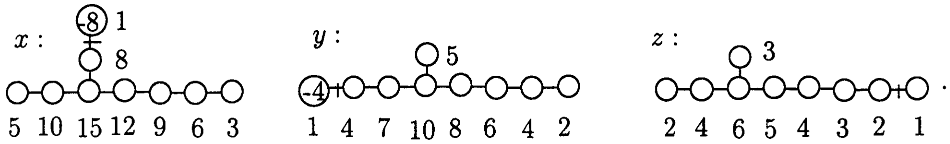


上で、$*$ は $\{h_1=0\}$ の既約因子の固有変換である。よって、添加公式 (i. e., $K_SE_i = -E_i^2+2g(E_i)-2$) から $p_a(S(1)_o) = 1$ となる。また、因子 $(h_2\circ\sigma_2)_{\tilde{X}_2}$ と特異ファイバー $S(2)_o$ は次で与えられる：



よって、$p_a(S(2)_o)=5$。また、定理6から$p_a(S(j)_o)=p_e(X,o,h_j)$が言える。よって、$p_e(\mathbb{C}^2,o,x^2+y^3)=1$、そして、$p_e(\mathbb{C}^2,o,x^5y^4(x+y)^2)=5$となる。

(2) $(X,o)=(\{x^2+y^3+z^5=0\},o)$とする($E_8$型の有理2重点)。$(X,o)$は$C:=\{y^3+z^5=0\}$を分岐因子とする2重被覆である。いま、$V\xrightarrow{\sigma}\mathbb{C}^2$を$C$の最小埋め込み特異点解消とする。$V$上$\sigma^*(C)$に沿っての2重被覆をとって、最小特異点解消$(\tilde{X},E)\xrightarrow{\pi}(X,o)$と因子$(x\circ\pi)_{\tilde{X}}$を得る。同様に、$(y\circ\pi)_{\tilde{X}}$と$(z\circ\pi)_{\tilde{X}}$を考える。定理4に従い$x,y,z$の各々から得られる退化族は次で与えられる：



従って、$p_e(X,o,x)=4,\ p_e(X,o,y)=2,\ p_e(X,o,z)=1$となる。

定理 8. (X,o)を正規2次元特異点とし、$h\in\mathfrak{m}_{X,o}$を被約元とする。また、$\pi\colon(\tilde{X},E)\longrightarrow(X,o)$を$\mathrm{red}((h\circ\pi)_{\tilde{X}})$が単純正規交叉因子となるような特異点解消とすると、$p_e(X,o,h)=p_a(E(h\circ\pi))-E(h\circ\pi)^2-r(h)$となる。

系 9 (i) (X,o)を正規2次元特異点とし、$h\in\mathfrak{m}_{X,o}$を被約元とする。$\delta(h)$を1次元特異点$(X\cap\{h=0\},o)$のコンダクター数とし$r(h)$を既約成分の個数とするとき次が言える：$p_e(X,o,h)=\delta(h)-r(h)+1$。

(ii) 正規超曲面特異点$(X,o)=\{z^n=h(x,y)\}$に対し次が言える：

$$p_e(X,o,z)=p_e(\mathbb{C}^2,o,h)=\delta(h)-r(h)+1=\frac{\mu(h)-r(h)+1}{2}.$$

ただし、$\mu(h)$は1次元特異点$(\{h=0\},o)\subset(\mathbb{C}^2,o)$のミルナー数。

定理 10. (X,o)を正規2次元特異点とし、$h\in\mathfrak{m}_{X,o}$を被約元とする。このとき、特異点解消$\pi\colon(\tilde{X},E)\longrightarrow(X,o)$で$\pi^*\mathfrak{m}_{X,o}$が可逆で$(h\circ\pi)_{\tilde{X}}$が単純正規交叉であるものをとる。いま、$E(h\circ\pi)$が極大イデアルサイクル$M_X$と一致するとすると次が言える：　$p_f(X,o)\leqq p_e(X,o)\leqq p_a(M_X)+\mathrm{mult}(X,o)-r(h)$

ただし、$r(h)$はhの既約因子の個数。また、特に(X,o)が有理特異点のとき，$0\leqq p_e(X,o)\leqq\mathrm{mult}(X,o)-1$となる。また、$(X,o)$が楕円型特異点(i. e., $p_f(X,o)=1$)のとき，$1\leqq p_e(X,o)\leqq\mathrm{mult}(X,o)$となる。

例 11. 有理２重点では E_n $(n=6,7,8)$ に対して $p_e(X,o)=1$ で、それ以外は $p_e(X,o)=0$ である。

§5. Kodaira 特異点と Kulikov 特異点について

定義 12 ([Ka], [St]). $\Phi\colon S\to\Delta$ を種数 g の閉リーマン面の退化族とする。$P_1,\cdots,P_r\in\mathrm{supp}(S_o)$ を S_o の非特異点 (i.e., それらの点は S_o の係数が 1 の成分に含まれ、$\mathrm{red}(S_o)$ の非特異点である) とする。$S'\xrightarrow{\sigma}S$ を $P_1,\cdots,P_r$ を中心とする有限回のブローアップとする。$\tilde{X}$ を $\mathrm{supp}(S_o)$ の σ による固有変換 E の開近傍とする。E を $\tilde{X}$ でつぶして得られる正規２次元特異点 (X,o) を考える。このような特異点に解析同型な特異点を種数 g の（Φ に付随した）**Kodaira 特異点**という。また、σ が各 P_i $(i=1,\cdots,r)$ で丁度一回づつのブローアップであるとき、**Kulikov 特異点**という。また、$p_e(X,o)=p_f(X,o)$ を満たす特異点を**弱 Kodaira 特異点**という。よって、Kulikov 特異点→ Kodaira 特異点→弱 Kodaira 特異点となり、これらについて次のことが言える。

定理 13. (X,o) を正規２次元特異点とする。

(i) (X,o) が Kodaira 特異点である必要十分条件は非完全ベキ元 $h\in\mathfrak{m}_{X,o}$ で $p_e(X,o,h)=p_f(X,o)$ と $E(h\circ\pi)=Z_E$ を満たすものが存在することである。ただし、$\pi\colon(\tilde{X},E)\longrightarrow(X,o)$ は $\mathrm{red}(h\circ\pi)_{\tilde{X}}$ が完全交叉因子となる特異点解消とする。

(ii) (X,o) が Kulikov 特異点である必要十分条件は被約元 $h\in\mathfrak{m}_{X,o}$ で $p_e(X,o,h)=p_f(X,o)$ を満たすものが存在することである。

§6. 特異点の巡回被覆と閉リーマン面の退化族

定義 14. $(Y,o)\subset(\mathbb{C}^N,o)$ を正規特異点とし、I $(\subset\mathbb{C}\{y_1,\cdots,y_N\})$ をその定義イデアルとする。元 $h\in\mathfrak{m}_{Y,o}$ に対し、$\tilde{h}\in\mathbb{C}\{y_1,\cdots,y_N\}$ を h に対応する元とする。(X,o) $(\subset(\mathbb{C}^{N+1},o))$ を I と $z^n-\tilde{h}(y_1,\cdots,y_N)$ で生成される $\mathbb{C}\{y_1,\cdots,y_N,z\}$ のイデアルとする。このとき (X,o) を (Y,o) 上 $z^n=h$ で定義される **n-重巡回被覆**という。このとき、泊-渡辺の結果 [TW] から、h が被約元であることと (X,o) が正規であることは必要十分条件であると言える。

定理 15. (Y,o) を正規２次元特異点、$h\in\mathfrak{m}_{Y,o}$ は非完全ベキ元とする。(X,o) を (Y,o) 上 $z^n=h$ で定義される n-重巡回被覆の正規化とするとき、$p_e(X,o,z)=p_e(Y,o,h)$ で $p_e(X,o)\leqq p_e(Y,o,h)$ となる。

(X,o) を正規２次元特異点とし、$\pi\colon(\tilde{X},E)\longrightarrow(X,o)$ は $\mathrm{red}((h\circ\pi)_{\tilde{X}})$ が単純正規交叉であるような特異点解消とする。$E=\bigcup_{i=1}^{r}E_i$ を例外集合の既約成分の和とし、$\mathrm{supp}(\Lambda(h\circ\pi)_{\tilde{X}})=\bigcup_{i=1}^{s}C_j$ を既約分解とする。

定義 16. 上の状況下で、任意の i について $a_i=v_{E_i}(h\circ\pi)$, $b_j=v_{C_j}(h\circ\pi)$, $N_h(\pi)=\max\{\mathrm{lcm}(a_i,b_j)|E_iC_j\neq 0\}$ とする。正の整数 $N_h(X,o)$ を次で定義する：

(i) $N_h(X,o)=\min\{N_h(\pi)\mid\pi$ は $\mathrm{red}(h\circ\pi)_{\tilde{X}}$ が単純正規交叉である特異点解消 $\}$.

(ii) $\gcd(a_1,\cdots,a_r,b_1,\cdots,b_s)=1$ のとき、h は半被約元であるという。

定理 17. (Y,o) は正規２次元特異点とし、$h\in\mathfrak{m}_{Y,o}$ は半被約元とする。(X,o) を (Y,o) 上 $z^n=h$ で定義される n-重巡回被覆の正規化とするとき、$n\geqq N_h(Y,o)$ なら (X,o) は種数 $p_e(Y,o,h)$ の弱 Kodaira 特異点となる。このとき h が被約元であれば、(X,o) は種数 $p_e(Y,o,h)$ の Kulikov 特異点となる。

上の定理 17 で h が被約元であるときの結果は、定理 1 の (ii) の一般化となっている。

§7. 閉リーマン面の $\mathbb{C}^*$-作用付き退化族と $\mathbb{C}^*$-作用付き複素２次元特異点

$\mathbb{C}^*$-作用付き特異点は、複素幾何、代数幾何、可換環論、トポロジーなど多方面から、P. Orlik, Ph. Wagreich, H. Pinkham, J. Milnor, 斎藤恭司, 藤木明, 渡辺敬一など多くの研究者によりこれまでに多彩な研究がされてきた ([F1], [OW], [P], [W])。一般に、特異点に付随する局所環などの代数的情報と特異点解消の幾何的情報の相互関係を知ることは難しい。しかし、$\mathbb{C}^*$-作用付き２次元特異点においては、例外的にその相互関係はよく調べられている。その意味で、$\mathbb{C}^*$-作用付き２次元特異点は特殊なクラスと言える。しかしよく知られる特異点の多く（有理２重点などの商特異点、単純楕円型特異点などの正則束の零切断を潰してできる特異点、uni-modal & bi-modal 特異点等）は $\mathbb{C}^*$-作用付き特異点である。その意味で、退化族と特異点の関係を調べる上で、$\mathbb{C}^*$-作用付きで関係を調べることには意味があると思える。

定義 18. $\Phi:S\longrightarrow\mathbb{C}$ を閉リーマン面の退化族とする。effective な正則な作用 $\sigma:\mathbb{C}^*\times S\to S$ をもち、$t\in\mathbb{C}^*,p\in S$ に対し、$\Phi(t\cdot P)=t^d\Phi(p)$ を満たすとき、$\mathbb{C}^*$-作用をもつ閉リーマン面の退化族、または、$\mathbb{C}^*$-pencil という。

定義 19. $(X, o) \subset (\mathbb{C}^N, o)$ を孤立特異点とする。$t \in \mathbb{C}^*$ について、$t\cdot(x_1, \cdots, x_N) = (t^{p_1}x_1, \cdots, t^{p_N}x_N)$ なる $\mathbb{C}^n$ への作用を考える。$p_1, \cdots, p_N$ は最大公約数 1 の自然数達とする。これで (X, o) が不変なとき (X, o) は good $\mathbb{C}^*$-作用をもつという。

定理 20([OW]) (X, o) を good$\mathbb{C}^*$-作用をもつ 2 次元正規特異点とする。

(1) $\mathbb{C}^*$-作用をもつ特異点解消空間が存在し、その特異点解消 $\pi : (\tilde{X}, E) \longrightarrow (X, o)$ は $\mathbb{C}^*$-同変である。

(2) (1) の特異点解消で、E の双対グラフが星形のものが存在する。星形の中心のリーマン面を中心曲線という。2 次元 $\mathbb{C}^*$-特異点は中心曲線 E_o の解析型と、E_o の法束の解析型と $\mathbb{P}^1$ からなる枝と E_o との交点で決定される。

上の結果等を使い、次の結果が示せる。

定理 21. (X, o) を $\mathbb{C}^*$-作用をもつ 2 次元特異点とし、$\pi : (\tilde{X}, E) \longrightarrow (X, o)$ を $\mathbb{C}^*$-作用をもつ良特異点解消とする。(X, o) の次数付きアフィン環 R_X をとる。また、$F \in R_X$ は非完全ベキ元とする。このとき、$\mathbb{C}^*$-pencil $\Phi : S \longrightarrow \Delta$ で、$\mathbb{C}^*$-作用つきの写像で与えられる次の図を満たすようなものが存在する：

$$\begin{tikzcd} (\tilde{X}, E) \arrow[r, hook] \arrow[d, "F\circ\pi"'] & (S, \mathrm{supp}(S_o)). \arrow[dl, "\Phi"] \\ \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

$\mathbb{C}^*$-作用をもつコンパクト Riemann 面の退化族は適当な $\mathbb{C}^*$-ブローアップを行うと特異ファイバーは星形となることが示せる。このとき、中心曲線を E_o とし、E_o の法束、及び E_o と各枝の交点を P_i $(i = 1, \cdots, k)$ とする。特異点の場合と同様な有理因子 $D^{(k)}$ を $D^{(k)} := kN^* - \sum_{i=1}^{\ell}\left\{\frac{e_i k}{d_i}\right\}P_i$, $N := N_{E_o/\tilde{X}}$ とする。これを、Pinkham-Demazure 因子という。特異点の場合はこれを用いてアフィン環が書けた。同様なことが、$\mathbb{C}^*$-の退化族でも示せる。

定理 22. (1) 閉リーマン面の $\mathbb{C}^*$-退化族は、特異ファイバーが星形になるようしておくとき、numerical な条件と Pinkham-Demazure data で解析的にきまる。

(2) $\Phi : S \longrightarrow \Delta$ を $\mathbb{C}^*$-作用をもつコンパクト Riemann 面の退化族。D を Pinkham-Demazure 因子とするとき、$\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{C} \cdot \Phi^k \simeq \bigoplus_{i=0}^{\infty} H^0(E_o, \mathcal{O}_{E_o}(D^{(k)})t^k$。

むすび 講演者の目を本講演のテーマに向けてくれ、適切な助言と刺激を常に与えて下さった足利正氏に深く感謝したい。また、渡辺敬一先生の主催される特異点セミナーは合計３０年近い歴史があるが、始めの２３年間は毎週 11:00〜19:00 で行うハードセミナーあった。そこで長年にわたり渡辺先生、石井志保子氏、泊

昌孝氏を始めとする多くの方から、有益な刺激と助言を受けてきた。あらためて深く感謝したい。

REFERENCES

[Ar] V.I. Arnold, Normal forms of functions, Invent. Math. 35 (1976), 87-109.

[As] T. Ashikaga, Surface singularities on cyclic coverings and an inequality for the signature, J. Math. Soc. Japan 51 (1999), 485-521.

[F1] A. Fujiki, $\mathbb{C}^*$-作用を持つ孤立特異点について, 京都大学理学研究科修士論文, 1972.

[F2] A. Fujiki, On resolution of cyclic quotient singularities, Publ. RIMS Kyoto Univ. 10 (1974), 293-328.

[Ka] U. Karras, On pencils of curves and deformations of minimally elliptic singularities, Math. Ann. 247 (1980), 43-65.

[Ko] K. Kodaira, On compact analytic surface II, Ann. of Math. 77 (1963), 563-626.

[Ku] V.S. Kulikov. Degenerate elliptic curves and resolution of uni- and bimodal singularities, Funct. Anal. Appl. 9 (1975), 69-70.

[Lo] E. Looijenga, Riemann-Roch and smoothing of singularities, Topology, 25 (3) (1986), 293-302.

[O] T. Okuma, Plurigenera of surface singularities, Nova Science Publishers, New York, 2000.

[OW] P. Orlik and P. Wagreich, Isolated singularities of algebraicsurfaces with $\mathbb{C}^*$-action. Ann. Math. 93, 205-228 (1971)

[P] H. Pinkham, Normal surface singularities with $\mathbb{C}^*$-action, Math. Ann. 227 (1977), 183-193.

[R] M. Reid, Elliptic Gorenstein singularities of surfaces, Preprint (1978).

[Sa] K. Saito, Algebraic surfaces for regular systems of weights, Algebraic Geometry and Commutative Algebra II - in honor of Masayoshi NAGATA (H. Hijikata et al., eds.), Kinokuniya, Tokyo, (1987), 517-614.

[St] J. Stevens, Elliptic Surface Singularities and Smoothings of curves, Math. Ann. 267 (1984), 239-249.

[Tm] M. Tomari, A p_g-formula and elliptic singularities, Publ. RIMS Kyoto Univ. 21 (2), (1985), 297-354.

[TW] M. Tomari and K-i. Watanabe, Cyclic covers of normal graded rings, Kōdai Math.J. 24 (2001), 436-457.

[Tt1] T. Tomaru, On Gorenstein surface singularities with fundamental genus $p_f \geqq 2$ which satisfy some minimality conditions, Pacific J. Math. 170 (1995), 271-295.

[Tt2] T. Tomaru, On Kodaira singularities defined by $z^n = f(x,y)$, Math. Z. 236 (2001), 133-149.

[Tt3] T. Tomaru, On some classes of weakly Kodaira singularities, Séminaires & Congrès, $N°$ 10, "Singularités Franco-Japonaises", (2005), 323-340.

[Tt4] T. Tomaru, On Pencil genus for normal surface singularities, J. Math. Soc. Japan, Vol. 59 (1), (2007), 35-80.

[W] K-i. Watanabe, Some remarks concerning Demazure's construction of normal graded rings. Nagoya Math. J. 83 (1981), 203-211.

16 N- Fractional Calculus of Some Functions and Their n- th Derivatives

Katsuyuki Nishimoto   Descartes Press

Abstract

In a previous article of the author, N- fractional calculus of some composite algebraic functions are derived. Applying this fresh results, N- fractional calculus of some functions are reported in this article.

Some of them are shown as follows ;

1) $$\left(\frac{cz+d}{az+b}\right)_\gamma = -e^{-i\pi\gamma}\Gamma(\gamma+1)a^{\gamma-1}\frac{bc-ad}{(az+b)^{\gamma+1}},$$

$$(ac \neq 0,\ az+b \neq 0,\ |\Gamma(\gamma+1)| < \infty),$$

2) $$\left(\frac{1}{z^2-a^2}\right)_\gamma = e^{-i\pi\gamma}z^{-2-\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(2k+2+\gamma)}{\Gamma(2k+2)}\left(\frac{a^2}{z^2}\right)^k,$$

$$(|\Gamma(2k+2+\gamma)| < \infty,\ |a^2/z^2| < 1),$$

3) $$\left(\frac{1}{z^2-a^2}\right)_\gamma = e^{-i\pi\gamma}\frac{\Gamma(1+\gamma)}{2a}\left\{\frac{1}{(z-a)^{\gamma+1}} - \frac{1}{(z+a)^{\gamma+1}}\right\},$$

$$(|\Gamma(1+\gamma)| < \infty,\ a \neq 0,\ z \neq \pm a),$$

4) $$\left(\left(\frac{1}{z-a}\right)\cdot\left(\frac{1}{z+a}\right)\right)_\gamma = e^{-i\pi\gamma}\frac{\Gamma(\gamma+1)}{2a}\cdot\frac{1}{(z-a)^{\gamma+1}},$$

$$(|\Gamma(1+\gamma)| < \infty,\ a \neq 0,\ z \neq \pm a),$$

5) $$\left(\left(\frac{1}{z-a}\right)\cdot\left(\frac{1}{z+a}\right)\right)_n = (-1)^n(n!)\frac{(z-a)^{-n}}{z^2-a^2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{z-a}{z+a}\right)^k,$$

$$(n \notin Z_0^+,\ z \neq \pm a).$$

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[5] K. Nishimoto ; Ring and Field Produced from The Set of N- Fractional Calculus Operator, J. Frac Calc. Vol. 24, Nov. (2003),29 - 36.

[6] K. Nishimoto ; On the fractional calculus $(a-z)^{\beta}$ and $\log(a-z)$, J. Frac. Calc. Vol.3, May (1993), 19 - 27.

[7] K. Nishimoto and S.- T. Tu ; Fractional calculus of Psi functions (Generalized Polygamma functions), J. Frac. Calc. Vol.5 May (1994), 27 - 34.

[8] S.- T. Tu and K. Nishimoto ; On the fractional calculus of functions $(cz-a)^{\beta}$ and $\log(cz-a)$, J. Frac.Calc.Vol.5, May (1994), 35 - 43.

[9] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of the Power and Logarithmic Functions and Some Identities, J. Frac. Calc. Vol.21, May (2002), 1 - 6.

[10] K. Nishimoto ; Some Theorems for N- Fractional Calculus of Logerithmic Functions I , J. Frac Calc.Vol.21, May (2002), 7 - 12.

[11] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of Products of Some Power Functions, J. Frac.Calc. Vol.27, May (2005), 83 - 88.

[12] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of Some Composite Functions, J. Frac.Calc. Vol. 29, May (2006), 35 - 44.

[13] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of Some Elementary Functions and Their Semi Differintegrations, J. Frac. Caic. Vol. 31, May (2007), 1 - 10.

[14] K. Nishimoto and T. Miyakoda ; N- Fractional Calculus and n-th Derivatives of Some Algebraic Functions, J. Frac. Calc. Vol. 31, May (2007), 53 - 62.

[15] T. Miyakoda ; N- Fractional Calculus of Certain Algebraic Functions, J. Frac.Calc.Vol. 31, May (2007), 63 - 76.

[16] David Dunmmit and Richard M. Foote ; Abstract Algebra, Prentice Hall (1991).

[17] K. B. Oldham and J. Spanier ; The Fractional Calculus, Academic Press (1974).

[18] A.C. McBride ; Fractional Calculus and Integral Transforms of Generalized Functions, Research Notes, Vol. 31, (1979), Pitman.

[19] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev ; Fractional Integrals and Derivatives, and Some Their Applications (1987), Naoka, USSR.

[20] K.S. Miller and B. Ross ; An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Diffetial Equations, John Wiley & Sons, (1993).

[21] V. Kiryakova ; Generalized fractional calculus and applications, Pitman Research Notes, No.301, (1994), Longman.

[22] A.Carpinteri and F. Mainardi (Ed.); Fractals and Fractional Calculus in Continume Mechanics (1997), Springer, Wien, New York.

[23] Igor Podlubny ; Fractional Differential Equations (1999), Academic Press.

[24] R. Hilfer (Ed.) ; Applications of Fractional Calculus in Physics, (2000), World Scientific, Singapor, New Jersey, London, Hong Kong.

[25] A.P. Prudnikov, Yu. A. Bryckov and O.I. Marichev ; Integrals and Series, Vol. I, Gordon and Breach, New York, (1986).

[26] S. Moriguchi, K. Udagawa and S. Hitotsumatsu ; Mathematical Formulae, Vol.2, Iwanami Zensho, (1957), Iwanami, Japan.

17 N- Fractional Calculus of Some Irrational Functions

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press

Abstract

In this article N- fractional calculus of the functions (which have multiple root signs)

$$f(z)=\sqrt{\sqrt{\sqrt{z-b}-c}-d}$$

are discussed. That is, the theorem below is shown for example.

Theorem 1. *We have*

(i)
$$\left(f(z)\right)_\gamma = e^{-i\pi\gamma}(z-b)^{(1/8)-\gamma}\sum_{m,k=0}^{\infty}\frac{[-\frac{1}{2}]_m[\frac{m}{2}-\frac{1}{4}]_k\,\Gamma(\frac{k}{2}-\frac{1}{8}+\frac{m}{4}+\gamma)}{m!\cdot k!\ \Gamma(\frac{k}{2}-\frac{1}{8}+\frac{m}{4})}$$

$$\times\left(\frac{c}{\sqrt{z-b}}\right)^k\left(\frac{d}{\sqrt[4]{z-b}}\right)^m,$$

$$\left(\left|\frac{\Gamma(\frac{k}{2}-\frac{1}{8}+\frac{m}{4}+\gamma)}{\Gamma(\frac{k}{2}-\frac{1}{8}+\frac{m}{4})}\right|<\infty\right)$$

and

(ii)
$$\left(f(z)\right)_n = (-1)^n(z-b)^{(1/8)-n}\sum_{m,k=0}^{\infty}\frac{[-\frac{1}{2}]_m[\frac{m}{2}-\frac{1}{4}]_k[\frac{k}{2}-\frac{1}{8}+\frac{m}{4}]_n}{m!\cdot k!}$$

$$\times\left(\frac{c}{\sqrt{z-b}}\right)^k\left(\frac{d}{\sqrt[4]{z-b}}\right)^m, \qquad (n\in Z_0^+)$$

where

$$\left|\frac{c}{\sqrt{z-b}}\right|<1\ ,\quad \left|\frac{d}{\sqrt[4]{z-b}}\right|<1\ .$$

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.
[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.
[5] K. Nishimoto ; Ring and Field Produced from The Set of N- Fractional Calculus Operator, J. Frac Calc. Vol. 24, Nov. (2003),29 - 36.
[6] K. Nishimoto ; On the fractional calculus $(a-z)^{\beta}$ and $\log(a-z)$, J. Frac. Calc. Vol.3, May (1993), 19 - 27.
[7] K. Nishimoto and S.- T. Tu ; Fractional calculus of Psi functions (Generalized Polygamma unctions), J. Frac. Calc. Vol.5 May (1994), 27 - 34.
[8] S.- T. Tu and K. Nishimoto ; On the fractional calculus of functions $(cz-a)^{\beta}$ $\log(cz-a)$, J. Frac.Calc.Vol.5, May (1994), 35 - 43.
[9] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of the Power and Logarithmic Functions and Some Identities, J. Frac. Calc. Vol.21, May (2002), 1 - 6.
[10] K. Nishimoto ; Some Theorems for N- Fractional Calculus of Logerithmic Functions I, J. Frac Calc.Vol.21, May (2002), 7 - 12.
[11] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of Products of Some Power Functions, J. Frac.Calc. Vol.27, May (2005), 83 - 88.
[12] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of Some Composite Functions, J. Frac. Calc. Vol. 29, May (2006), 35 - 44.
[13] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of Some Composite Algebraic Functions,J. Frac.Calc. Vol. 31, May (2006), 11 - 23.
[14] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of Some Elementary Functions and Their Semi Differintegrations, J. Frac. Caic. Vol. 31, May (2007), 1 - 10.
[15] K. Nishimoto and T. Miyakoda ; N- Fractional Calculus and n-th Derivatives of Some Algebraic Functions, J. Frac. Calc. Vol. 31, May (2007), 53 - 62.
[16] T. Miyakoda ; N- Fractional Calculus of Certain Algebraic Functions, J. Frac. Calc.Vol. 31, May (2007), 63 - 76.
[17] David Dunmmit and Richard M. Foote ; Abstract Algebra, Prentice Hall (1991).
[18] K. B. Oldham and J. Spanier ; The Fractional Calculus, Academic Press (1974).
[19] A.C. McBride ; Fractional Calculus and Integral Transforms of Generalized Functions, Research Notes, Vol. 31, (1979), Pitman.
[20] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev ; Fractional Integrals and Derivatives, and Some Their Applications (1987), Naoka, USSR.
[21] K.S. Miller and B. Ross ; An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Diffetial Equations, John Wiley & Sons, (1993).
[22] V. Kiryakova ; Generalized fractional calculus and applications, Pitman Research Notes, No.301, (1994), Longman.
[23] A.Carpinteri and F. Mainardi (Ed.) ; Fractals and Fractional Calculus in Continume Mechanics (1997), Springer, Wien, New York.
[24] Igor Podlubny ; Fractional Differential Equations (1999), Academic Press.
[25] R. Hilfer (Ed.) ; Applications of Fractional Calculus in Physics, (2000), World Scientific, Singapor, New Jersey, London, Hong Kong.
[26] A.P. Prudnikov, Yu. A. Bryckov and O.I. Marichev ; Integrals and Series, Vol. I, Gordon and Breach, New York, (1986).
[27] S. Moriguchi, K.Udagawa and S. Hitotsumatsu ; Mathematical Formulae, Vol.2, Iwanami Zensho, (1957), Iwanami, Japan.

18 Fractional calculus on parabolic Bergman spaces

菱川　洋介　(岐阜大学大学院　工学研究科)

Hを$n+1$次元実ユークリッド空間$\mathbb{R}^{n+1}(n\geq 1)$の上半空間とする．すなわち，

$$H=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+=\{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}; x\in\mathbb{R}^n, t>0\}.$$

$0<\alpha\leq 1$に対し，$L^{(\alpha)}=\partial_t+(-\Delta_x)^\alpha$とする．ここで，$\partial_t=\partial/\partial t$，および$\Delta_x$は$x$に関するラプラシアンである．また，$H$上の連続関数$u$が$L^{(\alpha)}$調和であるとは，超関数の意味で$L^{(\alpha)}u=0$となるときをいう．$L^{(\alpha)}$の基本解を$W^{(\alpha)}$と表す．

$1\leq p<\infty, \lambda>-1$に対し，放物型Bergman空間$\boldsymbol{b}^p_\alpha(\lambda)$を次のように定義する．

$$\boldsymbol{b}^p_\alpha(\lambda):=\{u; H\text{上}L^{(\alpha)}\text{調和}, \iint_H |u(x,t)|^p t^\lambda dxdt<\infty\}.$$

特に，$\boldsymbol{b}^p_{1/2}(\lambda)$は重み付き調和Bergman空間となることがわかる．

実数$\kappa>0$に対し，$\mathcal{FC}^{-\kappa}(\mathbb{R}_+), \mathcal{FC}^{\kappa}(\mathbb{R}_+)$をそれぞれ次のように定義する．

$$\mathcal{FC}^{-\kappa}(\mathbb{R}_+):=\{\varphi\in C(\mathbb{R}_+), \exists\varepsilon>0, \exists C>0 \text{ s.t.} |\varphi(t)|\leq Ct^{-(\kappa+\varepsilon)}\},$$
$$\mathcal{FC}^{\kappa}(\mathbb{R}_+):=\{\varphi\in C^{\lceil\kappa\rceil}(\mathbb{R}_+), \partial_t^{\lceil\kappa\rceil}\varphi\in\mathcal{FC}^{-(\lceil\kappa\rceil-\kappa)}(\mathbb{R}_+)\}.$$

ここで，$\mathcal{FC}^0(\mathbb{R}_+)=C(\mathbb{R}_+)$とし，$\lceil\kappa\rceil$は$\kappa$以上である最小の整数を表す．次に，fractional 積分$\mathcal{D}^{-\kappa}$とfractional 微分$\mathcal{D}^{\kappa}$をそれぞれ次のように定義する．

$$\mathcal{D}^{-\kappa}\varphi(t):=\frac{1}{\Gamma(\kappa)}\int_0^\infty \tau^{\kappa-1}\varphi(t+\tau)d\tau, \qquad \varphi\in\mathcal{FC}^{-\kappa}(\mathbb{R}_+),$$
$$\mathcal{D}^{\kappa}\varphi(t):=\mathcal{D}^{-(\lceil\kappa\rceil-\kappa)}(-\partial_t)^{\lceil\kappa\rceil}\varphi(t), \qquad \varphi\in\mathcal{FC}^{\kappa}(\mathbb{R}_+).$$

$u\in\boldsymbol{b}^p_\alpha(\lambda)$ならば，ある正の定数$C$が存在して，$|u(x,t)|\leq Ct^{-(\frac{n}{2\alpha}+\lambda+1)\frac{1}{p}}$となることが知られている([4])．ここで，$C$は$x$および$t$に依存しない．特に，任意の$\kappa>-(\frac{n}{2\alpha}+\lambda+1)\frac{1}{p}$に対して，$u(x,\cdot)\in\mathcal{FC}^{\kappa}(\mathbb{R}_+)$となる．すなわち，$u$のfractional 積分や微分を定義することができる．$\boldsymbol{b}^p_\alpha(\lambda)$においては，通常の調和Bergman空間における共役調和関数に相当する概念やその理論が良く解っていない．これらを解析するための突破口になるのではないかと考え，$\boldsymbol{b}^p_\alpha(\lambda)$上でfractional 積分や微分を定義し，それらについて調べたい．

$\boldsymbol{b}^p_\alpha(\lambda)$を調べる上で，$L^{(\alpha)}$の基本解$W^{(\alpha)}$を調べることは重要である．$W^{(\alpha)}$の性質より，ある正の定数$C$が存在して，$|W^{(\alpha)}(x,t)|\leq Ct^{-\frac{n}{2\alpha}}$(実際$W^{(\alpha)}$は正値であるが)となることが知られている([3])．ここで，Cはxおよびtに依存しない．特に，任意の$\kappa>-\frac{n}{2\alpha}$に対して，$W^{(\alpha)}(x,\cdot)\in\mathcal{FC}^{\kappa}(\mathbb{R}_+)$となる．$W^{(\alpha)}$のfractional 導関数について次のことが得られた．次の結果は，κが0以上の整数のときに知られていた結果を含むものである．

定理 1. $0<\alpha\leq 1, \beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\in\mathbb{N}_0^n$とする．ここで，$\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$である．$\kappa>-\frac{n+|\beta|}{2\alpha}$ならば，

(1) ある正の定数 C が存在して,

$$|\partial_x^\beta \mathcal{D}_t^\kappa W^{(\alpha)}(x,t)| \le C(t+|x|^{2\alpha})^{-\frac{n+|\beta|}{2\alpha}-\kappa}, \qquad (x,t)\in H.$$

(2) $\partial_x^\beta \mathcal{D}_t^\kappa W^{(\alpha)}(x,t)$ は H 上 $L^{(\alpha)}$ 調和となる.

(3) さらに $0<p\le\infty, \lambda>-1$ とする. このとき, $\kappa > -\frac{n+|\beta|}{2\alpha}+(\frac{n}{2\alpha}+\lambda+1)\frac{1}{p}$ ならば, ある正の定数 C が存在して,

$$\left(\iint_H |\partial_x^\beta \mathcal{D}_t^\kappa W^{(\alpha)}(x,t+s)|^p t^\lambda dxdt\right)^{\frac{1}{p}} \le Cs^{-(\frac{n+|\beta|}{2\alpha}+\kappa)+(\frac{n}{2\alpha}+\lambda+1)\frac{1}{p}}, \qquad s>0.$$

$\boldsymbol{b}_\alpha^p(\lambda)$ の解析には, 再生核を調べることも重要であり, $\lambda=0$ のとき以外それは知られていない. よって, その候補となる関数を定義する. $\lambda>-1$ に対して, 関数 $R_{\alpha,\lambda}$ を次のように定義する.

$$R_{\alpha,\lambda}(x,t;y,s) = C_\lambda \mathcal{D}_t^{\lambda+1} W^{(\alpha)}(x-y,t+s) \qquad (x,t),(y,s)\in H.$$

ここで, $C_\lambda = 2^{\lambda+1}/\Gamma(\lambda+1)$ である. 次の定理では, $R_{\alpha,\lambda}$ が $\boldsymbol{b}_\alpha^p(\lambda)$ の再生核となることを示している. これは, $\alpha=\frac{1}{2}$ のときの結果 ([1]) を含むものである.

定理 2. $0<\alpha\le 1, 1\le p<\infty, \lambda>-1$ とする. このとき, 任意の $u\in \boldsymbol{b}_\alpha^p(\lambda)$ に対して,

$$u(x,t) = \iint_H u(y,s) R_{\alpha,\lambda}(x,t;y,s) s^\lambda dyds, \qquad (x,t)\in H.$$

References

[1] H. Koo, K. Nam and H. Yi, *Weighted harmonic Bergman kernel on half-spaces*, J. Math. Soc. Japan, Vol. 58, No.2 (2006), 351-362.

[2] M. Nishio, K. Shimomura and N. Suzuki, *α-parabolic Bergman space*, Osaka J. Math. 42, no. 1, (2005), 133-162.

[3] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, *Toeplitz operators and Carleson measures on parabolic Bergman spaces*, Hokkaido math. J., vol. 36 (2007), 567-587.

[4] M. Yamada, *Harmonic conjugates of parabolic Bergman functions*, Advanced studies Pure Math., 44 (2006) 391-402.

19 An Axiom A polynomial skew product of degree four

中根静男　　　東京工芸大学

$\mathbb{C}^2$ の polynomial skew product $f(z,w) = (p(z), q(z,w))$ に対し、J_p を p の Julia 集合、$q_z(w) = q(z,w)$, $C_z = \{w \in \mathbb{C}; q_z'(w) = 0\}$ とおき、J_p 上の危点集合を $C_{J_p} = \cup_{z \in J_p}\{z\} \times C_z$ とおく。DeMarco-Hruska [DH] は C_{J_p} の集積点集合として、通常の集積点集合である $A(C_{J_p}) = \cap_{N \geq 0}\overline{\cup_{n \geq N} f^n(C_{J_p})}$ に加えて、point-wise accumulation set $A_{pt}(C_{J_p})$ と component-wise accumulation set $A_{cc}(C_{J_p})$ を次のように定義した。

$$A_{pt}(C_{J_p}) = \overline{\cup_{x \in J_p} A(x)}, \quad A_{cc}(C_{J_p}) = \overline{\cup_{C \in \mathcal{C}(C_{J_p})} A(C)}.$$

ここで $\mathcal{C}(C_{J_p})$ は C_{J_p} の連結成分全体の集合を表す。定義より $A_{pt}(C_{J_p}) \subset A_{cc}(C_{J_p}) \subset A(C_{J_p})$ を満たす。彼女たちは、これらの集積点集合がいろいろな関係を満たすさまざまな Axiom A polynomial skew products の例を構成したが、いずれの例も J_p が連結であるか、Cantor 集合のどちらかであり、J_p がそのどちらでもないような例を構成するという問題を提起している。ここでは、$A_{pt}(C_{J_{p_n}}) = A_{cc}(C_{J_{p_n}}) \neq A(C_{J_{p_n}})$ をみたすような例を構成する。

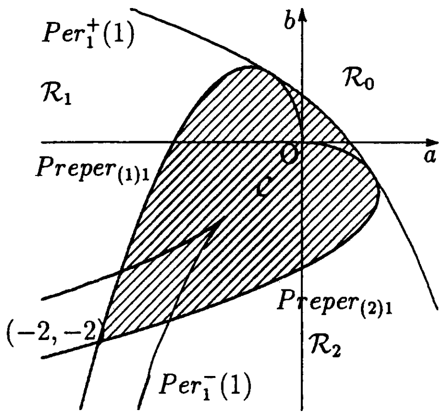


図 1: Parameter space

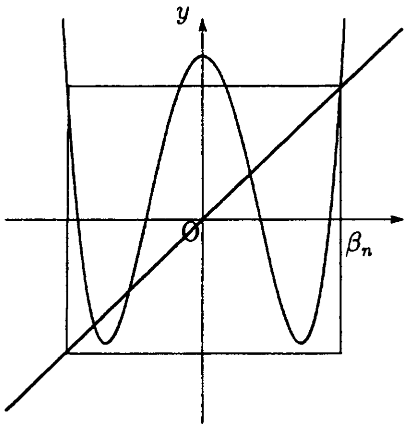


図 2: Map p_n

実 biquadratic polynomials の族 $p_{a,b}(z) = (z^2 + a)^2 + b, a, b \in \mathbb{R}$ を考える。その connectedness locus $\mathcal{C}$ は 3 本の曲線で囲まれる。

- $Per_1^+(1) : a^2b^2 + a^3 + b^3 + \frac{9ab}{8} - \frac{27}{256} = 0$,
- $Preper_{(1)1} : b = -a^2 + \sqrt{-2a}$,
- $Preper_{(2)1} : a = -b^2 + \sqrt{-2b}$.

補題 1. *$Preper_{(1)1}$ 上、Chebyshev polynomial $(-2,-2)$ に収束する点列 (a_n, b_n) で、$p^n_{a_n,b_n}(\sqrt{-a_n}) = \sqrt{-a_n}$ を満たすものがとれる。*

この p_{a_n,b_n} を $\mathcal{C}$ の外に摂動すると、危点 0 が escape して、危点 $\sqrt{-a}$ は n 周期点になるような写像 p_n を得る。p_n は hyperbolic であり、J_{p_n} は不連結だが、Cantor 集合ではない。p_n の β-不動点 $\beta_n \fallingdotseq 2$ は J_{p_n} の point component を成す。

4 次の polynomial skew product $f_n(z,w) = (p_n(z), w^4 + 4(2-z))$ を考える。$C_{J_{p_n}} = J_{p_n} \times \{0\}$ である。

$$\begin{aligned} K &= K(f_n) = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2; \{f_n^k(z,w)\}_{k\geq 0} \text{ is bounded}\}, \\ K_z &= \{w \in \mathbb{C}; (z,w) \in K\}, \\ J_z &= \partial K_z, \end{aligned}$$

とおく。α_n を $q_{\beta_n}(w) = w^4 + 4(2-\beta_n)$ の吸引的不動点とする。

定理 1. *十分大きい n に対し、f_n は Axiom A であり、次を満たす。*
(1) $K \cap C_{J_{p_n}} = \{(\beta_n, 0)\}$.
(2) J_{p_n} 上の saddle basic set Λ は $\Lambda = \{(\beta_n, \alpha_n)\}$.
(3) すべての $z \in J_{p_n} \setminus \{\beta_n\}$ に対し J_z は不連結で、J_{β_n} は quasicircle.
(4) $A_{pt}(C_{J_{p_n}}) = A_{cc}(C_{J_{p_n}}) \neq A(C_{J_{p_n}})$.

参考文献

[DH] L. DeMarco & S. Hruska: Axiom A polynomial skew products of $\mathbb{C}^2$ and their postcritical sets. Preprint 2007.

20 Carleson inequalities on parabolic Bergman spaces

西尾昌治（大阪市大・理）
鈴木紀明（名大・多元数理）
山田雅博（岐阜大・教育）

H を $(n+1)$ 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geq 1)$ の上半空間，すなわち，

$$H = \{X = (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \,;\, x \in \mathbb{R}^n,\, t > 0\}$$

とする。また，H 上の Borel 測度 $\mu \geq 0$ と $1 \leq p \leq \infty$ に対し，$L^p(\mu) = L^p(H, d\mu)$ とし，通常の $L^p(\mu)$ ノルムを $\|\cdot\|_{L^p(\mu)}$ で表す。特に，V は Lebesgue 測度を表すものとする。$0 < \alpha \leq 1$ に対し，α 次放物型作用素

$$L^{(\alpha)} = \frac{\partial}{\partial t} + (-\Delta_x)^\alpha$$

の解で $L^p(V)$ に属するもの全体を $\boldsymbol{b}^p_\alpha$ と書き，これを α 次放物型 Bergman 空間と呼ぶ。

$1 \leq p, q < \infty$ とし，$\mu \geq 0$ を H 上の Borel 測度とする。$u \in \boldsymbol{b}^p_\alpha$ に対し，埋め込み写像 $\iota_{\mu,p,q}$ を

$$\iota_{\mu,p,q} u(X) := u(X), \qquad X \in H.$$

で定義する。閉グラフ定理より，$\boldsymbol{b}^p_\alpha \to L^q(\mu) : \iota_{\mu,p,q} u = u$ が有界となるための必要十分条件は，ある定数 $C > 0$ があって，すべての $u \in \boldsymbol{b}^p_\alpha$ に対し，不等式

$$\left(\int_H |u|^q d\mu\right)^{1/q} \leq C \left(\int_H |u|^p dV\right)^{1/p} \tag{1}$$

が成立することである。(1) の不等式を Carleson 不等式と呼ぶ。本講演では，$\boldsymbol{b}^p_\alpha \to L^q(\mu) : \iota_{\mu,p,q} u = u$ が有界となるための，μ に関する条件について，得られた結果を述べる。我々は，以下の問題を研究の中心に据え，考察を行った。

問題

(i) $\boldsymbol{b}^p_\alpha \to L^q(\mu) : \iota_{\mu,p,q} u = u$ が有界となるための μ の条件を与えよ。

(ii) 作用素ノルム $\| \iota_{\mu,p,q} \|$ の上と下からの評価を与えよ。

過去に我々は，$1 \leq p \leq q < \infty$ のとき，上記の (i) および (ii) について，以下の定理 A を得ている。定理 A を述べるにあたって幾つかの定義を行う。$X = (x,t) \in H$ に対し，$Q^{(\alpha)}(X) = Q^{(\alpha)}(x,t)$ を

$$Q^{(\alpha)}(x,t) := \{(z_1, \cdots, z_n, r) \in H; t \leq r \leq 2t, |x_j - z_j| \leq 2^{-1} t^{1/2\alpha}, j = 1, \cdots, n\}$$

とし，これを α 次放物型 Carleson box と呼ぶ。ここで，$V(Q^{(\alpha)}(x,t)) = t^{\frac{n}{2\alpha}+1}$ に注意しておく。$\lambda \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\widehat{Q}_\lambda \mu(X) := \frac{\mu(Q^{(\alpha)}(X))}{t^{\frac{n}{2\alpha}+1+\lambda}}, \qquad X = (x,t) \in H$$

とし，これを μ の荷重付き averaging function と呼ぶ。定理 A を述べる。

定理 A

$1 \leq p \leq q < \infty$ とし，$\lambda := \left(\frac{n}{2\alpha}+1\right)\left(\frac{q}{p}-1\right)$ とおく。このとき，ある定数 $C > 0$ があって，H 上の Borel 測度 $\mu \geq 0$ に対し，

$$C^{-1} \| \widehat{Q}_\lambda \mu \|_{L^\infty(V)}^{1/q} \leq \| \iota_{\mu,p,q} \| \leq C \| \widehat{Q}_\lambda \mu \|_{L^\infty(V)}^{1/q}$$

が成立する。すなわち，$1 \leq p \leq q < \infty$ のとき，μ が Carleson 不等式 (1) をみたすための必要十分条件は，$\widehat{Q}_\lambda \mu$ が有界となることである。

今回我々は，$1 \leq q < p < \infty$ の場合について研究を行い，以下の主定理を得た。我々の主定理は，もっと一般的な形で与えられているが，それは講演の中で述べる。

主定理

$1 \leq q < p < \infty$ とし，σ を p/q の共役指数，すなわち $1/\sigma + 1/(p/q) = 1$ とする。このとき，ある定数 $C > 0$ があって，H 上の Borel 測度 $\mu \geq 0$ に対し，

$$C^{-1} \| \widehat{Q}_0 \mu \|_{L^\sigma(V)}^{1/q} \leq \| \iota_{\mu,p,q} \| \leq C \| \widehat{Q}_0 \mu \|_{L^\sigma(V)}^{1/q}$$

が成立する。すなわち，$1 \leq q < p < \infty$ のとき，μ が Carleson 不等式 (1) をみたすための必要十分条件は，$\widehat{Q}_0 \mu$ が $L^\sigma(V)$ に属することである。

References

[1] B. R. Choe, H. Koo and H. Yi, Positive Toeplitz operators between the harmonic Bergman spaces, Potential Analysis, **17** (2002), 307–335.

[2] D. Luecking, Multipliers of Bergman spaces into Lebesgue spaces, Proc. Edinburgh Math. Soc. **29**(1986), 125-131.

[3] M. Nishio, K. Shimomura and N. Suzuki, α-Parabolic Bergman spaces, Osaka J. Math. **42**(2005), 133–162.

[4] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, Toeplitz operators and Carleson measures on parabolic Bergman spaces, Hokkaido Math. J. **36**(2007), 563–583.

21 単葉関数からなる関数族間の包含関係について

谷口彰男（日大文理）

われわれは, 開単位円内で解析的な正規化関数族

$$\mathcal{A} = \left\{ f : f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \text{ is analytic in } |z| < 1 \right\}$$

と, $\mathcal{A}$ 族のうち負の係数をもつ部分族

$$\mathcal{T} = \left\{ f \in \mathcal{A} : f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (a_n \geqq 0, \quad n = 2, 3, 4, \cdots) \right\}$$

を考える。ここで, 特に $\alpha \in [0, 1)$ に対する $\mathcal{A}$ の部分族

$$\mathcal{S}^*(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha, \ |z| < 1 \right\}, \quad \mathrm{C}(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > \alpha, \ |z| < 1 \right\}$$

は位数 α の星形関数族, 凸型関数族と呼ばれる。これらの概念を拡張するため, 二つの微分を紹介する。Ruscheweyh derivative D^n, Salagean derivative d^n $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ がそれぞれ, 次の式で定義される：

$$D^0 f(z) = f(z), \quad D^1 f(z) = Df(z) = zf'(z), \quad D^n f(z) = \frac{z(z^{n-1} f(z))^{(n)}}{n!} \quad (n = 2, 3, \cdots),$$

$$d^0 f(z) = f(z), \quad d^1 f(z) = df(z) = zf'(z), \quad d^n f(z) = d(d^{n-1} f(z)) \quad (n = 2, 3, \cdots).$$

1987 年, 関根氏は $n = 0, 1, 2, \cdots$; $m = 1, 2, 3, \cdots$; $\beta \in [0, 1)$ を用いて, $\mathcal{T}$ の部分族

$$\mathcal{S}(n, m; \beta) = \left\{ f \in \mathcal{T} : \mathrm{Re} \frac{d^{n+m} f(z)}{d^n f(z)} > \beta, |z| < 1 \right\}$$

を導入し, 最近, 谷口が $n = 0, 1, 2, \cdots$; $m = 1, 2, 3, \cdots$; $\alpha \in [0, 1)$ を用いて $\mathcal{T}$ 族の別の部分族

$$\mathcal{R}(n, m; \alpha) = \left\{ f \in \mathcal{T} : \mathrm{Re} \frac{D^{n+m} f(z)}{D^n f(z)} = \mathrm{Re} \frac{n!(z^{n+m-1} f(z))^{(n+m)}}{(n+m)!(z^{n-1} f(z))^{(n)}} > \alpha, |z| < 1 \right\}$$

を導入した。

この講演では, 2つの部分族 $\mathcal{S}(n, m; \beta)$, $\mathcal{R}(n, m; \alpha)$ 間の包含関係を紹介する。

22 等角自己同型群で固定される漸近的タイヒミュラー類について

松崎克彦（岡山大学自然科学研究科）

リーマン面 R を基点とするタイヒミュラー空間を $T(R)$ とし，その漸近的タイヒミュラー空間 $AT(R)$ への正則射影を $\alpha : T(R) \to AT(R)$ とする．R の擬等角写像類群 $\mathrm{MCG}(R)$ は $T(R)$ の双正則自己同型群として α のファイバーを保って作用し，したがって $AT(R)$ 上の作用を誘導する．R の等角自己同型群 $\mathrm{Conf}(R)$ は $\mathrm{MCG}(R)$ の部分群で，$T(R)$ の原点を固定するものである．

$\mathrm{Conf}(R)$ の離散部分群 G（単連結，２重連結領域の場合を除き自動的に離散的）に対して，$T(R)$ 上の G の固定点集合の全体 $T(R,G)$ は $T(R)$ の閉部分空間をなすが，それは軌道体 R/G のタイヒミュラー空間 $T(R/G)$ と同一視される．その類似として，ここでは $AT(R)$ 上の G の固定点集合の全体のなす部分空間 $AT(R,G)$ を考察の対象とする．これはリーマン面 R 上の G-不変対称構造の変形空間と呼ぶべきものであり，タイヒミュラー空間論を展開する新しい舞台として導入することができる．実際，$AT(R,G)$ は可縮なバナッハ多様体であり，$AT(R)$ の漸近的タイヒミュラー計量から誘導される計量をもつ．

$T(R,G)=\{0\}$ のとき，$\mathrm{Conf}(R)$ の離散部分群 G は剛性をもつということにする．剛性をもたない G が，ある条件 ϕ をみたす無限群ならば，$AT(R,G)$ は $\alpha T(R,G)$ を真に含む可分でない空間であることが証明できる．これにより，考えている対象が，いままでの等角構造の変形空間（タイヒミュラー空間）とは本質的に異なるものであることが保証される．

予想としては，ϕ は空集合でよいこと，また G が剛性をもつときは $AT(R,G)=\{0\}$ であることなどが挙げられる．この講演ではこれらの問題について説明する．

23 Coefficient inequalities for λ–spiral like and strongly starlike functions

Toshio Hayami (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}$ denote the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. A function $f(z) \in \mathcal{A}$ is said to be λ–spiral of order α in $\mathbb{U}$ if $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies

$$\mathrm{Re}\, e^{i\lambda}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - \alpha\right) > 0 \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some α $(0 \leqq \alpha < 1)$ and λ $\left(-\frac{\pi}{2} < \lambda < \frac{\pi}{2}\right)$. We denote by $\mathcal{SP}(\lambda, \alpha)$ all functions $f(z)$ which are λ–spiral of order α in $\mathbb{U}$.

Example 1

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^{2(1-\alpha)e^{-i\lambda}\cos\lambda}} \in \mathcal{SP}(\lambda, \alpha).$$

As usual, in our present investigation, we write $\mathcal{SP}(\lambda) \equiv \mathcal{SP}(\lambda, 0)$.

Furthermore, we consider the subclass $\mathcal{STS}(\mu_1, \mu_2)$ of $\mathcal{A}$ as follows:

$$\mathcal{STS}(\mu_1, \mu_2) = \left\{ f(z) \in \mathcal{A} \ : \ \frac{\pi\mu_1}{2} < \arg\frac{zf'(z)}{f(z)} < \frac{\pi\mu_2}{2} \quad (-1 \leqq \mu_1 < 0 < \mu_2 \leqq 1) \right\}.$$

In this present talk, we derive coefficient conditions for functions $f(z)$ belonging to the classes $\mathcal{SP}(\lambda, \alpha)$ and $\mathcal{STS}(\mu_1, \mu_2)$.

Theorem 1 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies the following condition*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left|\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{k}(j-\alpha+(1-\alpha)e^{-2i\lambda})(-1)^{k-j}\binom{\beta}{k-j}a_j\right\}\binom{\gamma}{n-k}\right| \right.$$
$$\left. + \left|\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{k}(j-1)(-1)^{k-j}\binom{\beta}{k-j}a_j\right\}\binom{\gamma}{n-k}\right|\right] \leqq 2(1-\alpha)\cos\lambda$$

for some α $(0 \leqq \alpha < 1)$, λ $\left(-\frac{\pi}{2} < \lambda < \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in \mathbb{R}$ and $\gamma \in \mathbb{R}$, then $f(z) \in \mathcal{SP}(\lambda, \alpha)$.

Taking $\alpha = 0$ in Theorem 1, we have the following condition for $\mathcal{SP}(\lambda)$.

Corollary 1 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ saitsfies*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left|\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{k}(j+e^{-2i\lambda})(-1)^{k-j}\binom{\beta}{k-j}a_j\right\}\binom{\gamma}{n-k}\right| + \left|\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{k}(j-1)(-1)^{k-j}\binom{\beta}{k-j}a_j\right\}\binom{\gamma}{n-k}\right|\right] \leqq 2\cos\lambda$$

for some λ $\left(-\frac{\pi}{2} < \lambda < \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in \mathbb{R}$ and $\gamma \in \mathbb{R}$, then $f(z) \in \mathcal{SP}(\lambda)$.

Theorem 2 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ saitsfies the both conditions of*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left|\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{k}(j-e^{i\pi\mu_1})(-1)^{k-j}\binom{\beta}{k-j}a_j\right\}\binom{\gamma}{n-k}\right| + \left|\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{k}(j-1)(-1)^{k-j}\binom{\beta}{k-j}a_j\right\}\binom{\gamma}{n-k}\right|\right] \leqq -2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}$$

and

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left|\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{k}(j-e^{i\pi\mu_2})(-1)^{k-j}\binom{\beta}{k-j}a_j\right\}\binom{\gamma}{n-k}\right| + \left|\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{k}(j-1)(-1)^{k-j}\binom{\beta}{k-j}a_j\right\}\binom{\gamma}{n-k}\right|\right] \leqq 2\sin\frac{\pi\mu_2}{2}$$

for some μ_1, μ_2 $(-1 \leqq \mu_1 < 0 < \mu_2 \leqq 1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ and $\gamma \in \mathbb{R}$, then $f(z) \in \mathcal{STS}(\mu_1, \mu_2)$.

Letting $-\mu_1 = \mu_2 = \mu$ for some μ $(0 < \mu \leqq 1)$ in Theorem 2, we know

Corollary 2 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies the both inequalities of*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left|\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{k}(j-e^{-i\pi\mu})(-1)^{k-j}\binom{\beta}{k-j}a_j\right\}\binom{\gamma}{n-k}\right| + \left|\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{k}(j-1)(-1)^{k-j}\binom{\beta}{k-j}a_j\right\}\binom{\gamma}{n-k}\right|\right] \leqq 2\sin\frac{\pi\mu}{2}$$

and

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left|\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{k}(j-e^{i\pi\mu})(-1)^{k-j}\binom{\beta}{k-j}a_j\right\}\binom{\gamma}{n-k}\right| + \left|\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{k}(j-1)(-1)^{k-j}\binom{\beta}{k-j}a_j\right\}\binom{\gamma}{n-k}\right|\right] \leqq 2\sin\frac{\pi\mu}{2}$$

for some μ $(0 < \mu \leqq 1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ and $\gamma \in \mathbb{R}$, then $f(z) \in \mathcal{STS}(\mu)$.

24 Some subordination criteria for analytic functions

Kazuo Kuroki (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}$ denote the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Theorem 1 *Let the function $f(z) \in \mathcal{A}$ be so chosen that*

$$\frac{f(z)}{z} \neq 0 \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

Suppose also that the real parameters α $(\alpha \neq 0)$, β $(-1 \leqq \beta \leqq 1)$, and

$$\gamma \left(1 \leqq \gamma \leqq \frac{\pi}{2\left(\left| \sin^{-1} \frac{\mathrm{Im}(1-A\overline{B})}{|1-A\overline{B}|} \right| + \cos^{-1} \frac{\sqrt{(1-|A|^2)(1-|B|^2)}}{|1-A\overline{B}|} \right)} \right),$$

as well as the complex parameters A and B constrained by

$$|A| \leqq 1, \ |B| < 1, \ A \neq B, \quad \text{and} \quad \mathrm{Re}(1 - A\overline{B}) \geqq |A - B|,$$

are so prescribed that

$$1 - |A||B| + \gamma\beta|A| - \gamma\beta|B| \geqq 0,$$

and

$$\frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha} + (1+\beta)m_0 + \frac{1-\gamma\beta}{1+|A|} + \frac{1+\gamma\beta}{1+|B|} \geqq 0,$$

where

$$m_0 = \min_w \left\{ |w|^\gamma \cos\left(\gamma \left(\left| \sin^{-1} \frac{\mathrm{Im}(1-A\overline{B})}{|1-A\overline{B}|} \right| + \cos^{-1} \frac{1-|A|^2+|w|^2(1-|B|^2)}{2|w||1-A\overline{B}|} \right) \right) \right\} :$$

$$\left(\frac{|1-A\overline{B}-|A-B||}{1-|B|^2} \leqq |w| \leqq \frac{\sqrt{(1-|A|^2)(1-|B|^2)}}{1-|B|^2} \right).$$

If

$$\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{\beta}\left(1+\alpha\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \prec h(z) \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

where

$$h(z) = \left(\frac{1+Az}{1+Bz}\right)^{\gamma\beta-1}\left\{(1-\alpha)\frac{1+Az}{1+Bz} + \frac{\alpha(1+Az)^{1+\gamma}(1+Bz)^{1-\gamma}+\alpha\gamma(A-B)z}{(1+Bz)^2}\right\},$$

then

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \left(\frac{1+Az}{1+Bz}\right)^{\gamma} \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

Theorem 2 *Let the function $f(z) \in \mathcal{A}$ be so chosen that*

$$\frac{f(z)}{z} \neq 0 \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

Suppose also that real parameters α $(\alpha \neq 0)$, β $(-1 \leqq \beta \leqq 1)$, and

$$\delta\left(0 \leqq \delta \leqq \frac{1-|A|^2}{2(1-A\overline{B})}\right),$$

as well as the complex parameters A and B constrained by

$$|A| \leqq 1, \ |B| = 1, \ A \neq B, \quad \text{and} \quad 1 - A\overline{B} > 0,$$

are so prescribed that

$$\frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha} + \frac{(1+\beta)\{1-|A|^2-2\delta(1-A\overline{B})\}}{2(1-\delta)(1-A\overline{B})} + \frac{(1-\beta)\{1-\delta-|A-\delta B|\}}{2\{1-\delta+|A-\delta B|\}} \geqq 0.$$

If

$$\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{\beta}\left(1+\alpha\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \prec h(z) \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

where

$$h(z) = \left\{\frac{1-\delta+(A-\delta B)z}{(1-\delta)(1+Bz)}\right\}^{\beta-1}\left\{(1-\alpha)\frac{1-\delta+(A-\delta B)z}{(1-\delta)(1+Bz)} + \frac{\alpha\{1-\delta+(A-\delta B)z\}^2+\alpha(1-\delta)(A-B)z}{(1-\delta)^2(1+Bz)^2}\right\},$$

then

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1-\delta+(A-\delta B)z}{(1-\delta)(1+Bz)} \left(=\frac{\frac{1+Az}{1+Bz}-\delta}{1-\delta}\right) \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

25 Some sufficient problems for certain univalent functions

Hitoshi Shiraishi (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}$ denote the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

that are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. We denote by $\mathcal{S}$ the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of univalent functions $f(z)$ in $\mathbb{U}$.

Let $\mathcal{C}(\alpha)$ denote

$$\mathcal{C}(\alpha) = \{f(z) \in \mathcal{A} : |f'(z) - 1| < 1 - \alpha,\ 0 \leqq \alpha < 1\}$$

and $\mathcal{C} = \mathcal{C}(0)$. Also, let $\mathcal{S}^*(\alpha)$ be defined by

$$\mathcal{S}^*(\alpha) = \{f(z) \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha,\ 0 \leqq \alpha < 1\}$$

and $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}^*(0)$. Further, let $\mathcal{STS}(\mu)$ denote

$$\mathcal{STS}(\mu) = \{f(z) \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{\frac{1}{\mu}} > 0,\ 0 < \mu \leqq 1\}$$

and $\mathcal{STS} = \mathcal{STS}(1)$.

In 1982, R. Singh and S. Singh (*Coll. Math.* **47**(1982), 309-314) have given some sufficient consitions for $f(z)$ to be in the class $\mathcal{C}$ and $\mathcal{S}^*(\alpha)$.

Lemma 1 *Let $w(z)$ be analytic in the open unit disk $\mathbb{U}$ with $w(0) = 0$. Then if $|w(z)|$ attains its maximum value on the circle $|z| = r$ at a point $z_0 \in \mathbb{U}$, then we have $z_0 w'(z_0) = kw(z_0)$, where k is real number and $k \geqq 1$.*

Theorem 1 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$|f'(z) - 1|^{\alpha} \left|\gamma + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|^{\beta} < \left(\frac{1+2\gamma}{2}\right)^{\beta},\quad z \in \mathbb{U}$$

for some real $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \geqq 0$ and $\gamma > -\frac{1}{2}$, then $f(z) \in \mathcal{C}$.

Theorem 2 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right|^{\alpha} \left|z\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)'\right|^{\beta} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\beta}, \quad z \in \mathbb{U}$$

or

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} + 1\right|^{\alpha} \left|z\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)'\right|^{\beta} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\beta}, \quad z \in \mathbb{U}$$

for some real $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ and $\alpha + 2\beta \geqq 0$, then $f(z) \in \mathcal{S}^*$.

Theorem 3 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right|^{\alpha} \left|z\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)'\right|^{\beta} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\beta} (1-\gamma)^{\alpha+\beta}, \quad z \in \mathbb{U}$$

for some real $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $0 \leqq \gamma < 1$ and $\alpha + 2\beta \geqq 0$, then $f(z) \in \mathcal{S}^*(\gamma)$.

Theorem 4 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|^{\alpha} \left|z\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)'\right|^{\beta} < \left(\frac{1}{2}\gamma\right)^{\beta}, \quad z \in \mathbb{U}$$

for some $\alpha \geqq 0$, $\beta > 0$ and $\gamma = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$, then $f(z) \in \mathcal{STS}(\gamma)$.

References

[1] I. S. Jack, Functions starlike and convex of order α, *J.London Math. Soc.* **3**(1971), 469-474.

[2] S. S. Miller and P. T. Mocanu, Second-order differential inequalities in the complex plane, *J. Math. Anal. Appl.* **65**(1978), 289-305.

[3] R. Singh and S. Singh, Some sufficient conditions for univalence and starlikeness, *Coll. Math.* **47**(1982), 309-314.

26 Majorization problems for certain analytic functions

Yasunori Hashidume (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}(\alpha, \beta, j)$ be the class of functions $h(z)$ of the form

$$h(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \quad (c_n \in \mathbb{C})$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ and satisfy

$$\mathrm{Re}\{h(z) + \alpha z^j h^{(j)}(z)\} > \beta \quad (z \in \mathbb{U})$$

for some $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\alpha) \geqq 0$ and $0 \leqq \beta < 1$, where $j \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$.

For analytic functions $f(z)$ and $g(z)$ in $\mathbb{U}$, $f(z)$ is said to be subordinate to $g(z)$ if there exists an analytic function $w(z)$ in $\mathbb{U}$ satisfying $w(0) = 0$, $|w(z)| \leqq |z|$ $(z \in \mathbb{U})$ and $f(z) = g(w(z))$. We denote this subordination by

$$f(z) \prec g(z) \quad (z \in \mathbb{U}).$$

Further, an analytic function $f(z)$ is said to be quasi-subordinate to $g(z)$ if there exists an analytic function $w(z)$ such that $\dfrac{f(z)}{w(z)}$ is analytic in $\mathbb{U}$, $|w(z)| \leqq 1$ $(z \in \mathbb{U})$, and

$$\frac{f(z)}{w(z)} \prec g(z) \quad (z \in \mathbb{U}).$$

We also denote this quasi-subordination by

$$f(z) \underset{q}{\prec} g(z) \quad (z \in \mathbb{U}).$$

Note that the quasi-subordination is equivalent to

$$f(z) = w(z) g(\phi(z)) \quad (z \in \mathbb{U}),$$

where $|w(z)| \leqq 1$ $(z \in \mathbb{U})$ and $|\phi(z)| \leqq |z|$ $(z \in \mathbb{U})$.

For analytic functions $f(z)$ and $g(z)$ in $\mathbb{U}$, we say that $f(z)$ is majorized by $g(z)$ if there exists an analytic function $w(z)$ in $\mathbb{U}$ satisfying $|w(z)| \leqq 1$ $(z \in \mathbb{U})$ and $f(z) = w(z)g(z)$ $(z \in \mathbb{U})$.We denote this majorization by

$$f(z) \ll g(z) \quad (z \in \mathbb{U}).$$

Lemma 1 *If $h(z) \in \mathcal{A}(\alpha,\beta,j)$ with $c_n = |c_n|e^{i(n\theta+\pi)}$ $(n = 1,2,3,\cdots)$, then*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| + \mathrm{Re}(\alpha) \sum_{n=j}^{\infty} \frac{n!}{(n-j)!}|c_n| \leqq 1 - \beta.$$

Lemma 2 *If $h(z) \in \mathcal{A}(\alpha,\beta,j)$ with $c_n = |c_n|e^{i(n\theta+\pi)}$ $(n = 1,2,3,\cdots)$, then*

$$1 - \frac{1-\beta}{1+A_j j!\mathrm{Re}(\alpha)}|z| \leqq \mathrm{Re}\,(h(z)) \leqq |h(z)| \leqq 1 + \frac{1-\beta}{1+A_j j!\mathrm{Re}(\alpha)}|z| \quad (z \in \mathbb{U}),$$

where $A_j = \begin{cases} 0 & (n < j) \\ 1 & (n \geqq j) \end{cases}$.

Theorem *Let $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ $(a_1 \neq 0)$ be analytic in $\mathbb{U}$. If $f(z) \ll g(z)$ and $\frac{zg'(z)}{g(z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \in \mathcal{A}(\alpha,\beta,j)$ with $c_n = |c_n|e^{i(n\theta+\pi)}$ $(n = 1,2,3,\cdots)$, then*

$$|f'(z)| \leqq |g'(z)| \quad (|z| \leqq r(\alpha,\beta,j)),$$

where $r(\alpha,\beta,j)$ is the root of the following equation

$$(1-\beta)r^3 - (1 + A_j j!\mathrm{Re}(\alpha))\,r^2 + (\beta - 2A_j j!\mathrm{Re}(\alpha) - 3)\,r + 1 + A_j j!\mathrm{Re}(\alpha) = 0 \quad (0 < r < 1).$$

Corollary *Let $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ $(a_1 \neq 0)$ be analytic in $\mathbb{U}$. If $f(z) \ll g(z)$ and $\frac{zg'(z)}{g(z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \in \mathcal{A}(\alpha,\beta,1)$ with $c_n = |c_n|e^{i(n\theta+\pi)}$ $(n = 1,2,3,\cdots)$, then*

$$|f'(z)| \leqq |g'(z)| \quad (|z| \leqq r(\alpha,\beta,1)),$$

where $r(\alpha,\beta,1)$ is the root of the equation

$$(1-\beta)r^3 - (1 + \mathrm{Re}(\alpha))\,r^2 + (\beta - 2\mathrm{Re}(\alpha) - 3)\,r + 1 + \mathrm{Re}(\alpha) = 0 \quad (0 < r < 1).$$

27 Applications of certain analytic functions related to uniformly starlike

Junichi Nishiwaki (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}_p$ denote the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. A function $f(z) \in \mathcal{A}_p$ is said to be in the class $\mathcal{SD}_p(\alpha, \beta)$ if it satisfies

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - p\right| + \beta \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some α ($\alpha \geqq 0$) and β ($0 \leqq \beta < p$). If $p = 1$ for $f(z) \in \mathcal{A}_p$, then $f(z) \in \mathcal{SD}_p(\alpha, \beta)$ is equivalent to

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| + \beta \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some α ($\alpha \geqq 0$) and β ($0 \leqq \beta < 1$). This class was introduced by S. Shams, S. R. Kullcarni and J. M. Jahangiri (Internat. J. Math. Math. Sci. 55(2004), 2959 - 2961). Also this class was denoted by $\mathcal{SD}(\alpha, \beta)$.

Remark 1. For $f(z) \in \mathcal{SD}_p(\alpha, \beta)$, we write $w(z) = zf'(z)/f(z) = u + iv$.

If $\alpha > 1$, then w lies in the domain which is the part of the complex plane which contains $w = p$ and is bounded by the elliptic domain such that

$$\frac{\left(u - \dfrac{\alpha^2 p - \beta}{\alpha^2 - 1}\right)^2}{\left(\dfrac{\alpha(p-\beta)}{\alpha^2 - 1}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\dfrac{\alpha(p-\beta)}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}\right)^2} < 1.$$

If $\alpha = 1$, then w lies in the domain which is the part of the complex plane which contains $w = p$ and is bounded by the parabolic domain such that

$$u > \frac{v^2}{2(p-\beta)} + \frac{p+\beta}{2}.$$

If $0 < \alpha < 1$, then w lies in the domain which is the part of the complex plane which contains $w = p$ and is bounded by the hyperbolic domain such that

$$\frac{\left(u + \frac{\alpha^2 p - \beta}{1-\alpha^2}\right)^2}{\left(\frac{\alpha(p-\beta)}{1-\alpha^2}\right)^2} - \frac{v^2}{\left(\frac{\alpha(p-\beta)}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)^2} > 1$$

Theorem 1. *If $f(z) \in \mathcal{A}_p$ satisfies*

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \{(p-\beta) + (1+\alpha)(n-p)\}|a_n| \leqq p - \beta$$

for some α ($\alpha \geqq 0$) and β ($0 \leqq \beta < p$), then $f(z) \in \mathcal{SD}_p(\alpha, \beta)$.

Theorem 2. *If $f(z) \in \mathcal{SD}_p(\alpha, \beta)$, then*

$$|a_n| \leqq \frac{2(p-\beta)}{|1-\alpha|(n-p)} \prod_{j=1}^{n-p-1} \left(\frac{2(p-\beta)}{j|1-\alpha|} + 1\right)$$

Theorem 3. *Let $f(z) \in \mathcal{SD}_p(\alpha, \beta)$ and $g(z) = z^p + b_{p+j}z^{p+j} + b_{p+2j}z^{p+2j}$ for each j ($j = 1, 2, 3, \cdots$) with*

$$|b_{p+2j}| \geqq |b_{p+j}| + \frac{p-\beta}{(p-\beta) + (1+\alpha)},$$

and there is an analytic function $w(z)$ such that

$$b_{p+2j}(w(z))^{2j} + b_{p+j}(w(z))^j = \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^{n-p},$$

then

$$\int_0^{2\pi} |f(z)|^{\mu} d\theta \leqq \int_0^{2\pi} |g(z)|^{\mu} d\theta$$

for some μ ($\mu > 0$) and $z = re^{i\theta}$ ($0 < r < 1$).

Theorem 4. *Let $f(z) \in \mathcal{SD}_p(\alpha, \beta)$ and $g(z) = z^p + b_{p+j}z^{p+j} + b_{p+2j}z^{p+2j}$ for each j ($j = 1, 2, 3, \cdots$) with*

$$(p+2j)|b_{p+2j}| \geqq (p+j)|b_{p+j}| + \frac{(p-\beta)(p+1)}{(p-\beta) + (1+\alpha)},$$

and there is an analytic function $w(z)$ such that

$$(p+2j)b_{p+2j}(w(z))^{2j} + (p+j)b_{p+j}(w(z))^j = \sum_{n=p+1}^{\infty} n a_n z^{n-p},$$

then

$$\int_0^{2\pi} |f'(z)|^{\mu} d\theta \leqq \int_0^{2\pi} |g'(z)|^{\mu} d\theta$$

for some μ ($\mu > 0$) and $z = re^{i\theta}$ ($0 < r < 1$).

特別講演

角領域における値分布論とその応用

下村 俊　(慶応大理工)

全複素平面上で有理型な関数についての Nevanlinna 理論は微分方程式や関数方程式の解を研究するにあたり有力な方法のひとつである．たとえば，Painlevé 超越関数 (I) は極も含めたあらゆる値を同程度の頻度でとるという事実は Nevanlinna 理論を用いれば比較的簡単に証明することができる．ところが，一般には微分方程式の解は全平面で一価であるとは限らないので，このような場合は普通の Nevanlinna 理論を直接適用することはできない．Painlevé 超越関数 (III), (V) のように多価ではあっても局所的には有理型である場合には，角領域における有理型関数についての改変された Nevanlinna 理論を適用することが考えられる．このような改変は，Nevanlinna, Levin, 辻 らにより提案されている ([4], [9])．本講演においては Levin, 辻により与えられた角領域における Nevanlinna 理論の基本的な部分を紹介し，さらにその Painlevé 超越関数への応用について述べる．角領域における Nevanlinna 理論については [10] にわかりやすい解説がある．

1. 全平面での Nevalinna 理論

はじめに全平面での Nevanlinna 理論について基本的事項をまとめておく ([1], [2], [3])．$f(z)$ を全平面で有理型な関数ととする．$|z| \le t$ における $f(z)$ の極を重複度込みで数えた個数を $n(t,f)$ と書く．さらに $\log^+ x := \max\{\log x, 0\}$ $(x>0)$ とおく．このとき $f(z)$ の**近接関数** (proximity function), **個数関数** (counting function), **特性関数** (characteristic function) をそれぞれ

$$\begin{aligned} m(r,f) &:= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\phi})|\,d\phi, \\ N(r,f) &:= \int_0^r \frac{1}{t}(n(t,f)-n(0,f))\,dt + n(0,f)\log r, \\ T(r,f) &:= m(r,f)+N(r,f) \end{aligned}$$

により定義する．このときつぎの第 1 基本定理が成り立つ．

定理 1. 任意の $a \in \mathbb{C}$ に対し

$$T(r, 1/(f-a)) = T(r,f) + O(1).$$

特性関数 $T(r,f)$ は r について単調増加である．$f(z)$ が有理関数のときに限り $T(r,f) = O(\log r)$ $(r \to \infty)$ が成立する．そして $f(z)$ が超越的ならば $\log r / T(r,f) \to 0$ $(r\to\infty)$ である．$f(z)$ の**位数** (growth order) および $a \in \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ に対する**収束指数** (exponent of convergence) をそれぞれ

$$\varrho(f) := \limsup_{r\to\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r}, \quad \sigma(a,f) := \limsup_{r\to\infty}\frac{\log N(r,a,f)}{\log r}$$

により定義する．ただし $a\in\mathbb{C}$ のとき $N(r,a,f):=N(r,1/(f-a))$, $a=\infty$ のとき $N(r,\infty,f):=N(r,f)$ と書くことにする．$f(z)$ が $0<\varrho(f)<\infty$ を満たしているとする．このとき任意の $a\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ に対して，高々 2 つの例外を除いて $\sigma(a,f)=\varrho(f)$ が成立する．そのような例外は $\sigma(a,f)<\varrho(f)$ をみたし **Borel 除外値** (Borel exceptional value) と呼ばれる．Borel 除外値 a に対し $z_\nu(a)$ $(\nu\in\mathbb{N})$ を $f(z)$ の a-点とすればある正数 $\eta_0>0$ が存在して $\sum_{\nu=1}^{\infty}|z_\nu(a)|^{-\varrho(f)+\eta_0}<\infty$ となる．

方程式

$$w''=6w^2+z \tag{I}$$

の任意の解 $w(z)$ は全平面で有理型な超越関数でありその位数は有限である．この場合は，すべての $a\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ に対して $m(r,w)=O(\log r)$, $m(r,1/(w-a))=O(\log r)$ であり，したがって $\sigma(a,w)=\varrho(w)$ がなりたつことがいえる ([7], [8])．つまり (I) の任意の解はすべての値を同じ程度に頻繁にとり，Borel 除外値は存在しない．この例のような場合を扱うのにつぎの定理が使われる．

定理 2. 有理型関数 $f(z)$ が微分方程式 $f^{p+1}=P(z,f)$ $(p\in\mathbb{N})$ をみたしているとする．ここで $P(z,f)$ は $z,f,f',\dots,f^{(q)}$ に関する多項式であり f とその導関数に関する次数の合計が p 以下であるとする．このとき $m(r,f)\ll\log T(r,f)+\log r$ が測度有限な r の区間を除いて成立する．さらに $f(z)$ の位数が有限ならば除外区間なしで $m(r,f)=O(\log r)$ が成立する．

定理 3. 有理型関数 $f(z)$ が微分方程式 $F(z,f)=0$ をみたしているとする．ここで $F(z,f)$ は $z,f,f',\dots,f^{(q)}$ に関する多項式であるとする．このとき $a\in\mathbb{C}$ に対し $F(z,a)\not\equiv 0$ であるならば $m(r,1/(f-a))\ll\log T(r,f)+\log r$ が測度有限な r の区間を除いて成立する．さらに $f(z)$ の位数が有限ならば除外区間なしで $m(r,1/(f-a))=O(\log r)$ が成立する．

上の定理の記述において，記号 $\varphi(r)\ll\psi(r)$ は $\varphi(r)=O(\psi(r))$ と同じ意味である．

2. 半平面における Nevanlinna 理論

この節では，半平面 $\mathrm{Im}\,z\geq 0$ をその内部に含むある領域において $f(z)$ は有理型である（あるいは簡単に「半平面 $\mathrm{Im}\,z\geq 0$ において $f(z)$ は有理型である」とも言う）と仮定する．集合

$$\Omega_0(t):=\left\{z=\tau e^{i\phi}\;\middle|\;0<\phi<\pi,\ 1<\tau\leq t\sin\phi\right\}$$

における $f(z)$ の極を重複度込みで数えた個数を $n_{\mathrm{H}}(t,f)$ と書くことにする．このとき半平面 $\mathrm{Im}\,z\geq 0$ における近接関数，個数関数，特性関数をつぎのように定義する ([4], [9], [10])．

$$\begin{aligned}
m_{\mathrm{H}}(r,f)&:=\frac{1}{2\pi}\int_{\arcsin(r^{-1})}^{\pi-\arcsin(r^{-1})}\log^+\left|f(re^{i\phi}\sin\phi)\right|\frac{d\phi}{r\sin^2\phi},\\
N_{\mathrm{H}}(r,f)&:=\int_1^r\frac{n_{\mathrm{H}}(t,f)}{t^2}dt,\\
T_{\mathrm{H}}(r,f)&:=m_{\mathrm{H}}(r,f)+N_{\mathrm{H}}(r,f).
\end{aligned}$$

するとすぐにわかるように，ある $L \geq 0$ が存在し半平面 $\operatorname{Im} z \geq 0$ において $f(z) = O(|z|^L)$ $(|z| \to \infty)$ が満たされれば $T_{\mathrm{H}}(r, f) = O(\log r)$ となる．したがって超越関数でも $T_{\mathrm{H}}(r, f) = O(\log r)$ が成立することもある（例えば $f(z) = P(z)e^{iz}$, $P(z) \in \mathbb{C}[z]$).

全平面で有理型な関数については $z = 0$ を中心とする円 $C_r : |z| = r$ を考え，その上での絶対値の大きさやその内部での極の個数を問題にしたが，このような円の族は $\bigcup_{r \geq 0} C_r = \mathbb{C}$ を満たしている．一方，半平面での有理型関数の場合は，$z = (r/2)i$ を中心とする円 $C_r^{\mathrm{H}} : |z - (r/2)i| = r/2$ を考えており，このような円の族は $\bigcup_{r \geq 0} C_r^{\mathrm{H}} = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\} \cup \{0\}$ のように半平面を覆っている．

3. 基本的な性質

半平面 $\operatorname{Im} z \geq 0$ において有理型な関数については円 $|z-(r/2)i| = r/2$ に対する Poisson-Jensen タイプの関係式が成立する ([4, p. 331], [9, p. 107], [10, Theorem 2.1.2]).

定理 4. $r > 1$ に対し

$$N_{\mathrm{H}}(r, 1/f) - N_{\mathrm{H}}(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\arcsin(r^{-1})}^{\pi - \arcsin(r^{-1})} \log|f(re^{i\phi} \sin\phi)| \frac{d\phi}{r \sin^2 \phi} + C_{f,r}$$

が成り立つ．ここで

$$|C_{f,r}| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\left| \log|f(e^{i\phi})| \right| + \left| \arg f(e^{i\phi}) \right| \right) d\phi.$$

上の等式の左辺において，$\Omega_0(r)$ に含まれる極を $a_j = |a_j|e^{i\theta_j}$, $j \in J(r)$ と表わせば，$n_{\mathrm{H}}(1, f) = 0$ であるから，

$$N_{\mathrm{H}}(r, f) = \int_1^r \frac{n_{\mathrm{H}}(t, f)}{t^2} dt = \int_1^r \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{r} \right) dn_{\mathrm{H}}(t, f) = \sum_{j \in J(r)} \left(\frac{\sin\theta_j}{|a_j|} - \frac{1}{r} \right)$$

と書くこともできる．この関係式よりつぎの第 1 基本定理が導かれる ([4, (12)], [9, p. 107], [10, Theorem 2.1.4]).

定理 5. 任意の $a \in \mathbb{C}$ に対し

$$T_{\mathrm{H}}(r, 1/(f - a)) = T_{\mathrm{H}}(r, f) + O(1).$$

さらに Cartan タイプの等式

$$T_{\mathrm{H}}(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N_{\mathrm{H}}(r, e^{i\theta}, f)\, d\theta + C_{f,r}^*,$$

$C_{f,r}^* = O(1)$ $(r \to \infty)$ も得られる．これより $T_{\mathrm{H}}(r, f)$ は $O(1)$ 程度の大きさの変動を度外視すれば r について単調増加であることがいえる．

対数微分の近接関数についても全平面の場合の評価に類似したものがえられる ([4, p. 332], [10, Theorem 2.1.7]).

定理 6. 正整数 m に対し

$$m_{\mathrm{H}}(r, f^{(m)}/f) \ll \log^{+} T_{\mathrm{H}}(r, f) + \log r$$

が測度有限な r の区間を除いて成立する．特に $T_{\mathrm{H}}(r, f) = O(r^{\rho_0})$ $(\rho_0 < \infty)$ ならば除外区間なしで $m_{\mathrm{H}}(r, f^{(m)}/f) = O(\log r)$ が成立する．

この評価を用いれば定理 2, 3 に相当するつぎの結果が得られる．

定理 7. 半平面 $\operatorname{Im} z \geq 0$ において有理型な関数 $f(z)$ が微分方程式 $f^{p+1} = P(z, f)$ $(p \in \mathbb{N})$ をみたしているとする．ここで $P(z, f)$ は f とその導関数についての多項式であり，その係数 $a_\mu(z)$ $(\mu \in M)$ は半平面 $\operatorname{Im} z \geq 0$ において有理型であるとする．さらに f とその導関数についての次数の合計が p 以下であるとする．このとき

$$m_{\mathrm{H}}(r, f) \ll \sum_{\mu \in M} m_{\mathrm{H}}(r, a_\mu) + \log^{+} T_{\mathrm{H}}(r, f) + \log r$$

が測度有限な r の区間を除いて成立する．さらに $T_{\mathrm{H}}(r, f) = O(r^{\rho_0})$ $(\rho_0 < \infty)$ であるならば，この右辺を $\sum_{\mu \in M} m_{\mathrm{H}}(r, a_\mu) + \log r$ で置き換えたものが除外区間なしで成立する．

定理 8. 半平面 $\operatorname{Im} z \geq 0$ において有理型な関数 $f(z)$ が微分方程式 $F(z, f) = 0$ をみたしているとする．ここで $F(z, f)$ は f とその導関数についての多項式であり，その係数 $b_\nu(z)$ $(\nu \in N)$ は半平面 $\operatorname{Im} z \geq 0$ において有理型であるとする．このとき $a \in \mathbb{C}$ に対し $F(z, a) \not\equiv 0$ であるならば

$$m_{\mathrm{H}}(r, a, f) \ll \sum_{\nu \in N} T_{\mathrm{H}}(r, b_\nu) + \log^{+} T_{\mathrm{H}}(r, f) + \log r$$

が測度有限な r の区間を除いて成立する．さらに $T_{\mathrm{H}}(r, f) = O(r^{\rho_0})$ $(\rho_0 < \infty)$ であるならば，この右辺を $\sum_{\nu \in N} T_{\mathrm{H}}(r, b_\nu) + \log r$ で置き換えたものが除外区間なしで成立する．

4. 応用

例えば Painlevé 方程式 (V) で特に $\beta = 0$ である場合

$$\text{(V)} \qquad w'' = \left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1}\right)(w')^2 - \frac{w'}{z} + \frac{\alpha(w-1)^2 w}{z^2} + \frac{\gamma w}{z} + \frac{\delta w(w+1)}{w-1}$$

を考えよう．この方程式の任意の解 $w(z)$ は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ の universal covering の上で有理型である．以下簡単のためさらに

$$(1) \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \delta > 0$$

と仮定する．与えられた $\theta_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ に対し，θ_0 の方向を中心とし開き角が $\lambda\pi$ であるような角領域において $w(z)$ の値分布を調べよう．z-平面の集合

$$\Omega(\theta_0, \lambda) := \left\{ z = e^{(\theta_0 - \lambda\pi/2)i}(i + \zeta)^{\lambda} \;\middle|\; \operatorname{Im} \zeta \geq 0,\ |\zeta| > 1 \right\},$$

を考える．ここで $(e^{-\pi i/2}(i+\zeta))^\lambda$ の分枝は $x \ge 0$ において $\arg((e^{-\pi i/2}(i+xi))^\lambda) = 0$ が成り立つようにとっておく．任意の $\varepsilon > 0$ に対し ρ_ε を十分大きくとれば

$$\{z \mid |\arg z - \theta_0| < \lambda\pi/2 - \varepsilon,\ |z| > \rho_\varepsilon\} \subset \Omega(\theta_0, \lambda) \\ \subset \{z \mid |\arg z - \theta_0| < \lambda\pi/2,\ |z| > 1\},$$

であるから $\Omega(\theta_0, \lambda)$ はこの角領域と本質的に同等である．したがって $w(z)$ のかわりに

$$w_\lambda^{\theta_0}(\zeta) := w(e^{i\theta_0}(e^{-\pi i/2}(i+\zeta))^\lambda) = w(e^{(\theta_0 - \lambda\pi/2)i}(i+\zeta)^\lambda)$$

を半平面 $\mathrm{Im}\,\zeta \ge 0$ において考え，これに上述の理論を適用する．すると $\Omega(\theta_0, \lambda)$ における近接関数，個数関数，特性関数は自然に

$$\begin{aligned} m_\lambda^{\theta_0}(r, w) &:= m_{\mathrm{H}}(r^{1/\lambda}, w_\lambda^{\theta_0}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\arcsin(r^{-1/\lambda})}^{\pi - \arcsin(r^{-1/\lambda})} \log^+ \left| w_\lambda^{\theta_0}(r^{1/\lambda} e^{i\phi} \sin\phi) \right| \frac{d\phi}{r^{1/\lambda} \sin^2 \phi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\arcsin(r^{-1/\lambda})}^{\pi - \arcsin(r^{-1/\lambda})} \log^+ \left| w(e^{(\theta_0 - \lambda\pi/2)i}(i + r^{1/\lambda} e^{i\phi} \sin\phi)^\lambda) \right| \frac{d\phi}{r^{1/\lambda} \sin^2 \phi}, \\ N_\lambda^{\theta_0}(r, w) &:= N_{\mathrm{H}}(r^{1/\lambda}, w_\lambda^{\theta_0}) = \int_1^{r^{1/\lambda}} \frac{n_{\mathrm{H}}(t, w_\lambda^{\theta_0})}{t^2} dt = \frac{1}{\lambda} \int_1^r \frac{n_\lambda^{\theta_0}(t, w)}{t^{1+1/\lambda}} dt, \\ T_\lambda^{\theta_0}(r, w) &:= m_\lambda^{\theta_0}(r, w) + N_\lambda^{\theta_0}(r, w), \end{aligned}$$

と定義される．ここで $n_\lambda^{\theta_0}(t, w)$ は集合

$$\Omega(\theta_0, \lambda, t) := \{z = e^{(\theta_0 - \lambda\pi/2)i}(i+\zeta)^\lambda \mid \zeta \in \Omega_0(t^{1/\lambda})\}.$$

における $w(z)$ の極の個数をあらわす．そして収束指数，位数に相当するものを

$$\sigma_\lambda^{\theta_0}(a, w) := \limsup_{r \to \infty} \frac{\log N_\lambda^{\theta_0}(r, a, w)}{\log r}, \quad \varrho_\lambda^{\theta_0}(w) := \limsup_{r \to \infty} \frac{\log T_\lambda^{\theta_0}(r, w)}{\log r}$$

により定義する．角領域における 1-点の個数についての結果 ([5]) などを使えば $\varrho_\lambda^{\theta_0}(w) < \infty$ であることがいえる．このときつぎの結果を得る．

定理 9. 解 $w(z)$ が $\log r / T_\lambda^{\theta_0}(r, w) \to 0$ $(r \to \infty)$ をみたすとする．このとき任意の $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ に対し $\sigma_\lambda^{\theta_0}(a, w) = \varrho_\lambda^{\theta_0}(w) < \infty$ となる．

もしもある $\varepsilon_0 > 0$ に対して $n_\lambda^{\theta_0}(t, w) \gg t^{1/\lambda + \varepsilon_0}$ であるならば $\varrho_\lambda^{\theta_0} = \varrho_\lambda^{\theta_0}(w) > 0$ である．このとき関係式 $\sigma_\lambda^{\theta_0}(a, w) = \varrho_\lambda^{\theta_0}(w)$ より，任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$\sum_{\Omega(\theta_0, \lambda)} |z_\nu(a)|^{-\varrho_\lambda^{\theta_0} + \varepsilon} = \infty, \quad \sum_{\Omega(\theta_0, \lambda)} |z_\nu(a)|^{-\varrho_\lambda^{\theta_0} - \varepsilon} < \infty$$

が成り立つ．ここで $z_\nu(a)$ $(\nu \in \mathbb{N})$ は $\Omega(\theta_0, \lambda)$ における a-点を表わし，$\sum_{\Omega(\theta_0, \lambda)} := \lim_{r \to \infty} \sum_{\Omega(\theta_0, \lambda, r)}$ は $\Omega(\theta_0, \lambda)$ の内部にわたる和を表わす．

例. 条件 (1) のもとでは $z > 0$, $z \to \infty$ とするときつぎのように表わされる (V) の解の族が存在する (cf. [6, Theorem I])．

$$\psi_0(R_0, \Theta_0, z) = R_0(1 + o(1)) z^{-1} \cos^2(\sqrt{\delta/2}\, z - C(R_0) \log z + \Theta_0 + o(1)).$$

$\lambda > 1$ とせよ．このとき，表示式から容易に $n_\lambda^0(r, 1/\psi_0) \gg r$ であることがわかるから $T_\lambda^0(r, \psi_0) \geq N_\lambda^0(r, 1/\psi_0) + O(1) \gg r^{1-1/\lambda}$ であり，ψ_0 は $\Omega(0, \lambda)$ において定理 9 の条件をみたす．したがって任意の $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ に対して $0 < 1 - 1/\lambda \leq \sigma_\lambda^0(a, \psi_0) = \varrho_\lambda^0(\psi_0) < \infty$ が成り立つ．つまり $\lambda > 1$ であるならば ψ_0 は $\Omega(0, \lambda)$ において ∞ も含めたすべての値を同程度の頻度で無限回とる．

上の例では Borel の除外値が存在しないことを言っているが，条件 (1) が満たされない場合には，Borel の除外値が存在するような解も存在する．

References

[1] W. K. Hayman, Meromorphic Functions, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[2] G. Jank and L. Volkmann, *Einführung in die Theorie der ganzen und meromorphen Funktionen mit Anwendungen auf Differentialgleichungen*, Birkhäuser, Basel, Boston, 1985.

[3] I. Laine, Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1993.

[4] B. Ja. Levin and I. V. Ostrovskii, *On the dependence of the growth of an entire function and the distribution of the zeros of its derivatives*, Amer. Math. Soc. Transl., AMS, Vol **32** (1963), 322–357.

[5] Y. Sasaki, *Value distribution of the fifth Painlevé transcendents in sectorial domains*, J. Math. Anal. Appl., **330** (2007), 817–828.

[6] S. Shimomura, *On solutions of the fifth Painlevé equation on the positive real axis II*, Funkcial. Ekvac., **30** (1987), 203–224.

[7] S. Shimomura, *The first, the second and the fourth Painlevé transcendents are of finite order*, Proc. Japan Acad., Ser. A, **77** (2001), 42–45.

[8] S. Shimomura,, *Growth of the first, the second and the fourth Painlevé transcendents*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **134** (2003), 259–269.

[9] M. Tsuji, *On Borel's directions of meromorphic functions of finite order*, Tohoku Math. J., **2** (1950), 97–112.

[10] S. Wang, *On the sectorial oscillation theory of $f'' + A(z)f = 0$*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. Dissertationes **92** (1994).